

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

PHILIPPE CASTILLON

## Un problème spectral inverse sur les surfaces

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 20 (2001-2002), p. 139-142

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_2001-2002\\_\\_20\\_\\_139\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_2001-2002__20__139_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 2001-2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UN PROBLÈME SPECTRAL INVERSE SUR LES SURFACES

*Philippe CASTILLON*

### Introduction

Les sous-variétés minimales sont solutions d'un problème variationnel : elles sont points critiques de la fonctionnelle volume pour toute déformation à support compact. La dérivée seconde de la fonctionnelle est donnée par une forme quadratique associée à un opérateur auto-adjoint (l'opérateur de stabilité). Une immersion minimale est dite stable lorsque son opérateur de stabilité est positif ; cela revient à dire que la sous-variété, en plus d'être un point critique de la fonctionnelle volume, est un minimum local. Pour une surface minimale  $M$  de  $\mathbb{R}^3$ , l'opérateur de stabilité est  $S = \Delta + 2\mathcal{K}$  où  $\mathcal{K}$  est la courbure (intrinsèque) de  $M$ . Lorsque la surface  $M$  est stable cet opérateur est positif. Pour une surface minimale stable dans une variété à courbure scalaire positive ou nulle, on déduit de l'équation de Gauss et de la positivité de l'opérateur de stabilité que l'opérateur  $L = \Delta + \mathcal{K}$  est positif.

Dans le cadre de l'étude des surfaces minimales stables, cela a amené les auteurs de [FC-Sc] à s'intéresser à la théorie spectrale des opérateurs de la forme  $L_\lambda = \Delta + \lambda\mathcal{K}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sur les surfaces, et plus particulièrement à relier la positivité de tels opérateurs à la géométrie de la surface.

Soit  $(M, h)$  une surface riemannienne complète, non compacte, et soit  $\mathcal{K}$  sa courbure. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , notons  $L_\lambda = \Delta + \lambda\mathcal{K}$  et  $q_\lambda$  la forme quadratique associée à cet opérateur. Il est facile de voir (cf. [FC-Sc]) que l'ensemble  $I_h = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid q_\lambda \text{ positive}\}$  est un intervalle fermé :  $I_h = [a_h, b_h]$  avec  $-\infty \leq a_h \leq 0 \leq b_h \leq +\infty$ . Le problème général est d'étudier les relations entre les invariants  $a_h$  et  $b_h$  et la géométrie de  $M$ .

Dans [FC-Sc] les auteurs posaient la question suivante : *Quelles valeurs peut prendre  $b_h$  si  $h$  est une métrique complète et conforme à la métrique euclidienne sur le disque unité  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  ?* Comme premiers éléments de réponse, ils remarquent que  $b_h = \frac{1}{4}$  si  $h$  est la métrique de Poincaré sur  $D$ , et ils montrent que  $b_h < 1$  pour toute métrique complète conforme sur  $D$  (cf. [FC-Sc] remarque 1 et théorème 2).

Dans cet exposé, on répond à leur question en montrant le résultat suivant :

THEOREM A. — Soit  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ .

- Pour tout  $\lambda \in [0, \frac{1}{4}]$  il existe une métrique complète et conforme à la métrique euclidienne sur  $D$  telle que  $b_h = \lambda$  ;
- Si  $h$  est une métrique complète et conforme à la métrique euclidienne sur  $D$  alors  $b_h \leq \frac{1}{4}$ .

### Calcul de $b_h$ pour certaines métriques

Considérons une métrique complète et conforme à la métrique euclidienne sur  $D$  :  $h = \mu(z)^2 |dz|^2$ . Il est facile d'exprimer la courbure de  $h$  en fonction du facteur conforme  $\mu$ , et en utilisant l'invariance conforme de l'intégrale de Dirichlet en dimension 2, on peut écrire la forme quadratique  $q_\lambda$  en fonction de la métrique euclidienne et de  $\mu$  :

$$q_{h,\lambda}(u) = \int_D (|du|_e^2 + \lambda(\Delta \log \mu) u^2) dv_e \quad (1)$$

où la norme de  $du$  est prise pour la métrique euclidienne, et où  $dv_e$  est la forme volume euclidienne. Considérons à présent la métrique  $h_\alpha = \mu(z)^{2\alpha} |dz|^2$ , l'équation 1 donne  $q_{h_\alpha,\lambda}(u) = q_{h,\alpha\lambda}(u)$ . De cette égalité, on déduit que  $b_{h_\alpha} = \frac{1}{\alpha} b_h$ .

Si on prend maintenant pour  $h$  la métrique de Poincaré (ie.  $\mu(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ ), la métrique  $h_\alpha$  est complète pour tout  $\alpha \geq 1$ , et on a  $b_{h_\alpha} = \frac{1}{4\alpha}$ .

Par ailleurs, pour la métrique  $h_\infty = e^{\mu(z)} |dz|^2$ , il est facile de voir que  $b_{h_\infty} = 0$ .

Les exemples ci-dessus permettent de démontrer la première partie du théorème A.

### Les surfaces satisfaisant $b_h > \frac{1}{4}$

La seconde partie du théorème A est une conséquence du résultat plus général suivant :

THÉOREME 1. — Soit  $(M, h)$  une surface riemannienne complète et non-compacte. Si  $b_h > \frac{1}{4}$  alors  $M$  est conformément équivalente à  $\mathbb{C}$  ou à  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Comme corollaire immédiat, on obtient que  $b_h \leq \frac{1}{4}$  pour toute métrique  $h$  complète et conforme à la métrique euclidienne sur  $D$ .

**Schéma de la preuve**

Soit  $x_0$  un point de  $M$  fixé. Dans la suite, on notera  $r(x) = d_M(x_0, x)$  la fonction distance à  $x_0$  sur  $M$ ,  $B_s = \{x \in M \mid r(x) < s\}$  la boule de rayon  $s$ , et  $C_s^t = \{x \in M \mid s < r(x) < t\}$ .

D'autre part, on notera  $V(s)$  le volume de la boule  $B_s$ ,  $\ell(s)$  la longueur du cercle géodésique de rayon  $s$  (i.e.  $\ell(s) = \text{vol}(\partial B_s)$ ) et  $G(s)$  la courbure totale de la boule de rayon  $s$  (i.e.  $G(s) = \int_{B_s} \mathcal{K} d\nu_h$ ).

La preuve du théorème 1 consiste à utiliser la positivité de  $q_\lambda$  pour un certain  $\lambda > \frac{1}{4}$  en estimant  $q_\lambda(f)$  pour des certaines fonctions  $f$  à support compact et de la forme  $f = \xi(r)$ . Pour cela, il faut estimer des termes de la forme  $\int_M \mathcal{K} \xi(r)^2 d\nu_h$ , ce qui est fait grâce au lemme suivant :

LEMME 2. — Soient  $R < Q$ , et soit  $\xi : [R, Q] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\xi(Q) = 0$ ,  $\xi \geq 0$ ,  $\xi' \leq 0$  et  $\xi'' \geq 0$ . S'il existe une constante  $A$  telle que  $\chi(B_s) \leq A$  pour tout  $s \in [R, Q]$ , alors

$$\int_{C_R^Q} \mathcal{K} \xi(r)^2 d\nu_h \leq -\xi(R)^2 G(R) - 2\xi(R)\xi'(R)\ell(R) + 2\pi A \xi(R)^2 - \int_{C_R^Q} (\xi^2)''(r) d\nu_h.$$

La preuve de ce lemme est basée sur la méthode utilisée par T. Colding et W. Minicozzi dans [Co-Mi]; elle utilise en particulier les propriétés de la fonction  $\ell(s)$  démontrées par K. Shiohama et M. Tanaka (cf. [Sh-Ta1] et [Sh-Ta2]) : La fonction  $\ell$  est dérivable presque partout, pour presque tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\ell'(s) \leq 2\pi\chi(B_s) - G(s)$ , et pour tout  $a < b$ ,  $\ell(b) - \ell(a) \leq \int_a^b \ell'(s) ds$ .

A l'aide de ce lemme, et en utilisant des fonctions  $\xi$  adéquates, la première étape de la preuve du théorème 1 consiste à contrôler la topologie de la surface : on montre que  $M$  est de topologie finie et que  $\chi(M) \geq 0$ . La seconde étape consiste, à l'aide de fonctions  $\xi$  différentes, à contrôler la croissance du volume : on montre que  $V(s) \leq c_M s^2$  pour une certaine constante  $c_M$ . C'est ensuite un résultat standard en théorie du potentiel qu'une surface à croissance du volume quadratique est parabolique (ie. chaque bout est conforme au disque pointé).

**Remarque sur les métriques vérifiant  $b_h = \frac{1}{4}$**

Une question naturelle est de savoir si la valeur  $b_h = \frac{1}{4}$  caractérise la métrique de Poincaré parmi les métriques conformes à la métrique euclidienne sur  $D$ . La réponse est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — Il existe une constante universelle  $\varepsilon$  telle que pour toute métrique  $h$  complète et conforme à la métrique euclidienne sur  $D$  vérifiant  $\mathcal{K} \leq -1$  et  $\int_D |\mathcal{K} + 1|^{\frac{3}{2}} d\nu_h \leq \varepsilon$  on ait  $b_h = \frac{1}{4}$ .

*Démonstration.* — La surface étant simplement connexe, la majoration de la courbure permet de majorer, via un théorème de comparaison, le noyau de la chaleur  $p_h$  de  $(D, h)$  par le noyau de la chaleur du plan hyperbolique, en particulier il existe une constante universelle  $A_0$  telle que  $p_h(t, x, x) \leq A_0 t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4}}$

On peut alors utiliser le théorème de Lieb (cf. par exemple [Ca] théorème 1.3) : il existe une constante universelle  $A$  telle que pour tout opérateur de la forme  $R = \Delta - \frac{1}{4} + \phi$ , le nombre de valeurs propres négatives de  $R$  vérifie  $\mathcal{N}_0(R) \leq A \int_D |\phi|^{\frac{3}{2}} dv_h$ .

Soit  $\varepsilon = \frac{1}{A}$ , et supposons que  $\int_D |\mathcal{K} + 1|^{\frac{3}{2}} dv_h \leq \varepsilon$ . L'opérateur  $L_{\frac{1}{4}}$  s'écrit  $L_{\frac{1}{4}} = \Delta + \frac{1}{4}\mathcal{K} = \Delta - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\mathcal{K} + 1)$  d'où

$$\mathcal{N}_0(L_{\frac{1}{4}}) \leq \frac{A}{8} \int_D |\mathcal{K} + 1|^{\frac{3}{2}} dv_h \leq \frac{1}{8}$$

On en déduit que  $\mathcal{N}_0(L_{\frac{1}{4}}) = 0$ , et que  $q_{\frac{1}{4}}$  est positive. On a donc  $b_h \geq \frac{1}{4}$ , et par le théorème A on en déduit que  $b_h = \frac{1}{4}$ .  $\square$

## Bibliographie

- [Ca] P. CASTILLON, *Problèmes de petites valeurs propres sur les surfaces de courbure moyenne constante*, Proc. Amer. Math. Soc., **130** (2001), 1153–1163.
- [Co-Mi] T. COLDING, W. MINICOZZI, *Estimates for parametric elliptic integrands*, Int. Math. Res. Not., **6** (2002), 291–297.
- [FC-Sc] D. FISCHER-COLBRIE, R. SCHOEN, *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature*, Commun. Pure Appl. Math. **33** (1980), 199–211.
- [Sh-Ta1] K. SHIOHAMA, M. TANAKA, *An isoperimetric problem for infinitely connected complete open surfaces*, in: Geometry of manifolds, Coll. Pap. 35th Symp. Differ. Geom., Matsumoto/Japan 1988, Perspect. Math. **8** (1989), 317–343.
- [Sh-Ta2] K. SHIOHAMA, M. TANAKA, *The length function of geodesic parallel circle*, in: Progress in differential geometry, K. Shiohama Ed., Adv. Stud. Pure Math. **22** (1993), 299–308.

Philippe CASTILLON  
 G.T.A. (U.M.R. 5030)  
 Dépt. des Sciences Mathématiques, CC 51  
 Univ. Montpellier 2  
 34095 MONTPELLIER Cedex (France)  
 cast@math.univ-montp2.fr