Constantin Vernicos

Inégalité isopérimétrique en dimension 3 d'après B. Kleiner

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 59-64

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__59_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **18** (2000) 59–64

INÉGALITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE EN DIMENSION 3 d'après B. Kleiner

Constantin VERNICOS

1. Introduction

Cet exposé fait suite à l'exposé de Richard Péreyrol sur l'inégalité isopérimétrique en dimension 4. Son but est d'expliquer la démonstration de la conjecture suivante en dimension 3 :

CONJECTURE 1. — *Soit M^n une variété riemannienne, complète, simplement connexe, de courbure sectionnelle négative ou nulle, alors tout domaine compact $D \subset M^n$ à bord ∂D lisse vérifie l'inégalité isopérimétrique Euclidienne i.e. :*

$$Vol_{n-1}(\partial D)^n \geqslant c_n Vol_n(D)^{n-1} \tag{1}$$

On sait que la conjecture est vraie en dimension 2 (Weil [7]) et 4 (Croke [2]), et grâce à Kleiner [3] on le sait aussi pour la dimension 3.

Il existe aussi des résultats partiels, faisant intervenir une famille de domaine, plus précisément les boules géodésiques.

THÉORÈME 1.1. — *Avec les hypothèses de 1, pour toute boule géodésique $B_n \subset M^n$ on a l'inégalité isopérimétrique euclidienne :*

$$Vol_{n-1}(\partial B_n)^n \geqslant c_n Vol_n(B_n)^{n-1} \tag{2}$$

de plus l'égalité n'a lieu que si la boule est euclidienne.

Ceci est à mettre en parallèle avec le cas plat, et le fait que l'on puisse facilement obtenir l'inégalité pour des domaines convexe. La symétrisation de Stein nous permettant de nous ramener au cas convexe.

Classification math. : 53C20, 52A40.

La symétrisation n'est pas au programme ici, mais l'idée est encore de comparer notre domaine à un domaine pour lequel l'égalité isopérimétrique est connue, ici une boule géodésique. Comme dans la symétrisation il est agréable de comparer à un domaine de même volume, dans l'espoir que son bord ait une aire plus petite. C'est en cela que consiste la preuve de Kleiner puisqu'il démontre

THÉORÈME 1.2 (Kleiner [3]). — *Soit M^3 une variété riemannienne complète, simplement connexe de courbure sectionnelle $K_{M^3} \leqslant k \leqslant 0$, et soit N_k^3 le modèle d'espace de courbure sectionnelle constante k. Si $E \subset M^3$ est un domaine compact à bord ∂E lisse et $\hat{E} \subset N_k^3$ est une boule géodésique ayant le même volume, alors*

$$Aire(\partial E) \geqslant Aire(\partial \hat{E}) \tag{3}$$

de plus l'égalité implique que E est isométrique à $\hat{E}$.

On remarquera que ce résultat est plus fin quand la borne supérieure de la courbure est strictement négative.

2. Démonstration

En considérant le profil isopérimétrique de M^3 et la restriction du profil isopérimétrique de N_k^3 à $[0,\mathrm{Vol}(M^3))$, on se ramène à la comparaison de leur graphe.

Le but est donc de montrer que le graphe de I_{M^3} est au-dessus de celui de $I_{N_k^3}$.

L'idée provient de l'observation suivante, si E_0 est un domaine à bord lisse tel que $I_M(\mathrm{Vol}(E_0)) = \mathrm{Aire}(\partial E_0)$ alors la pente de I_M est plus grande que la courbure moyenne de ∂E_0. Plusieurs difficultés proviennent du fait que le domaine peut *a priori* ne pas être lisse. Nous allons exposer la démonstration en supposant que les domaines en question sont toujours lisses, sachant que l'on dispose tout de même d'une certaine régularité due au théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soit M^3 une variété riemannienne compacte à bord lisse.*
Si $V \in [0, Vol(M^3))$ alors il existe un domaine $E_0 \subset M^3$ ayant un bord C^1, ∂E_0 tel que

$$Vol(E_0) = V, \quad Aire(\partial E_0) = I_{M^3}(V) = \inf\{Aire(\partial E) \mid E \subset M^3, Vol(E) = V\}$$

De plus, si $E_1, E_2, \ldots \subset M^3$ est une suite de domaine à bord C^1 et tel que

$$\begin{cases} Vol(E_i) \longrightarrow V > 0 \\ Aire(\partial E_i) = I_{M^3}(Vol(E_i)) \, . \end{cases}$$

Alors il existe un domaine de E_0 à bord C^1 et une sous-suite $\{E_{i_k}\}$ telle que

1. *$\partial E_{i_k} \longrightarrow \partial E_0$ en topologie C^1,*
2. *Les fonctions caractéristiques $\chi_{E_{i_k}} \longrightarrow \chi_{E_0}$ dans $C^1(M^3)$.*

Démonstration. — Il s'agit de compacité faible dans les bons espaces. Pour une démonstration on pourra consulter L. Simon [6], on y trouvera aussi une discussion sur l'éventuelle régularité des domaines dans un cadre plus général. □

2.1. Démonstration dans un cas simple

Considérons donc un domaine $E \subset M^3$ et une boule géodésique qui le contienne que nous noterons B^3. C'est un domaine compact à bord lisse. le but est d'arriver à comparer le profil isopérimétrique de B^3 (noté I_B) au profil isopérimétrique des boules de N_k^3 de volume inférieur ou égal au volume de B^3 (noté I_k).

2.1.a — Remarquons que le théorème 2.1 nous donne la continuité de I_B, ainsi que pour $V \in (0, \mathrm{Vol}(B^3))$ l'existence d'un domaine E_0 de volume V et d'aire $I_B(V)$. Ici nous commettons notre première erreur en le supposant à bord lisse.

2.1.b — En le supposant de plus homéomorphe à S^2 nous commettons une seconde erreur, mais qui nous permet d'utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.2. — *Soit M^3 une variété riemannienne tridimensionnelle dont la courbure sectionnelle vérifie $K_{M^3} \leqslant k \leqslant 0$ et soit $N^2 \subset M^3$ une surface $C^{1,1}$ homéomorphe à S^2. Alors en notant K_{N^2} sa courbure de Gauss (bien définie, dans $L^\infty(N^2)$) on a*

$$\int_{N^2} (K_{N^2} + k)\, aire_{N^2} \geqslant 4\pi$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque $K_{M^3}(\sigma) = k$ pour tous les 2-plans σ tangents à ∂N^2, ($aire_{N^2}$, élément d'aire).

qui est une application de Gauss-Bonnet, dans notre cas.

On considère à présent une boule D_0 dans N_k^3 ayant la même aire que E_0 alors en notant H_{E_0} (resp. H_{D_0}) le sup de la courbure moyenne de ∂E_0 (resp. de ∂D_0) on a

Lemme 2.3. — *Avec les hypothèses ci-dessus,*

$$H_{E_0} \geqslant H_{D_0}$$

en cas d'égalité E_0 est isométrique à la boule géodésique $D_0 \subset N_k^3$.

Démonstration. — Cela provient du lemme 2.2 et de l'inégalité Arithmetico-géométrique. En effet le lemme 2.2 nous permet d'écrire

$$4\pi \leqslant \int_{\partial E_0} (K_{E_0} + k)\mathrm{aire}_{\partial E_0} \leqslant \left(\left(\frac{H_{E_0}}{2}\right)^2 + k\right) \mathrm{Aire}(\partial E_0)$$

enfin Gauss-Bonnet nous dit de son côté que

$$4\pi = \left(\left(\frac{H_{D_0}}{2}\right)^2 + k\right) \mathrm{Aire}(\partial D_0)$$

d'où l'inégalité. Quant au cas d'égalité, il implique trois choses

1. $K_B(\sigma) = k$ pour tous les 2-plans σ tangents à ∂E_0 à cause de l'égalité dans le lemme 2.2
2. ∂E_0 a sa courbure moyenne $H_{E_0} = H_{D_0}$ presque partout (donc partout par continuité).
3. ∂E_0 a la même forme fondamentale que ∂D_0.

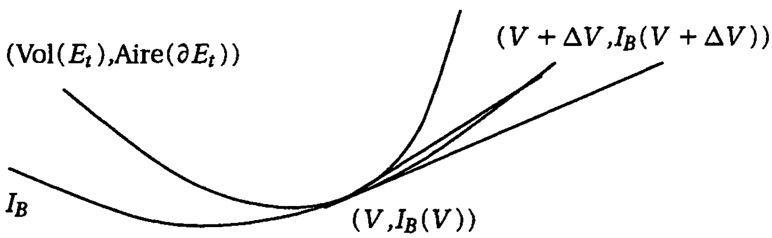
On peut donc coller D_0 dans B à la place de E_0. Là on applique une version $C^{1,1}$ du Théorème 7 de [5] pour conclure au fait que E_0 est isométrique à D_0. □

2.1.c — Ensuite on fait la remarque suivante sur E_0 :

PROPRIÉTÉS 2.4. — *Puisque Aire*$(\partial E_0) = I_B(V)$ *et Vol*$(E_0) = V$ *la formule de variation première des volumes et aires implique que* H_{E_0} *la courbure moyenne de* ∂E_0 *est constante. De plus*

$$(D_I)(V) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta V \to 0} \frac{I_B(V+\Delta V) - I_B(V)}{\Delta V} \geqslant H_{E_0}\,.$$

Démonstration. — On inclut E_0 dans une famille lisse de domaine $\{E_t\}$ tel que la dérivée du volume ne s'annule pas. La courbe $t \mapsto (\mathrm{Vol}(E_t), \mathrm{Aire}(\partial E_t)) \in \mathbb{R}^2$ est au-dessus du graphe de I_B, et par la variation première sa pente est H_{E_0} en $(\mathrm{Vol}(E_0), \mathrm{Aire}(\partial E_0))$.



□

2.1.d — Pour terminer on feuillette le demi-plan supérieur à l'aide du graphe de I_k et de ses translatés. Ensuite on remarque $I_k'(V) = H_k(I_k(v))$. De sorte que si $I_B(V) = I_k(V - V_0)$ alors par la propriété 2.4 on obtient que $D_I(V) \geqslant I_k'(V - V_0)$ de sorte que le graphe de I_B coupe ce feuilletage de manière monotone (si il coupe le feuilletage en un point, en ce point quand V augmente le graphe de I_B reste au dessus ou sur la feuille, mais il ne repasse pas en dessous). En ajoutant ceci au fait que $I_B(0) = I_k(0) = 0$ on peut conclure à l'inégalité désirée i.e. $I_B \geqslant I_k$.

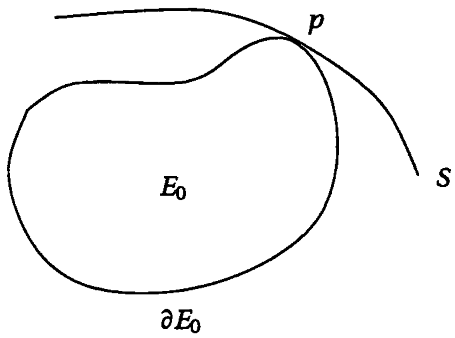
2.2. Survol de la démonstration de Kleiner

La démonstration dans le cadre général suit le même plan, simplement deux étapes faisant intervenir nos hypothèses simplificatrices sont techniquement plus difficiles, puisqu'il faut parvenir à circonvenir à la non régularité des domaines considérés. On doit notamment faire face à un problème pour la définition de la courbure moyenne.

2.2.a — Le théorème 2.1 reste encore valable

2.2.b — Pour définir une courbure moyenne on procède comme ce qui suit.

DÉFINITION 2.5. — *Soit M^n une variété riemannienne et soit $E \subset M^n$ un sous ensemble fermé. Une* hypersurface d'appui lisse *de E en $p \in E$ est une hypersurface lisse $S \subset M^n$, orientée par la normale de E, telle que $E \cap S = \{p\}$ et E est du même coté de S que la normale orientée au voisinage de p. On notera $\mathscr{S}(E,p)$ l'ensemble des hypersurfaces d'appuies lisses de E en p.*



DÉFINITION 2.6. — *On appelle courbure moyenne de E domaine non vide compact :*

$$H_E = \sup\{H_S(p) \mid p \in E, S \in \mathscr{S}(E,p)\}$$

où $H_S(p)$ est la courbure moyenne de S en p.

Maintenant on est prêt à remplacer le lemme 2.3 par le lemme suivant

LEMME 2.7. — *Soit M^3 une variété riemannienne de dimension 3, complète, simplement connexe sans bord et de courbure sectionnelle $K_{M^3} \leqslant k \leqslant 0$. Soit $E_0 \in M^3$ un compact d'interieur non vide et enfin*

$$\begin{array}{rccll} H_k : & (0,\infty) & \to & (0,\infty) & \\ & A & \mapsto & H_k(A) & \textit{courbure moyenne dans } N_k^3 \\ & & & & \textit{d'une sphère d'aire } A. \end{array}$$

Alors

$$H_{E_0} \geqslant H_k(\mathscr{H}^2(\partial E_0))$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque E_0 est isométrique à une boule géodésique $\hat{E}_0 \subset N_K^3$ tel que $Aire(\partial \hat{E}_0) = \mathscr{H}^2(\partial E_0)$.

2.2.c — Pour remplacer la propriété 2.4, en fait on va remplacer un des éléments de sa démonstration, en choisissant une bonne famille de domaine :

LEMME 2.8. — *Soit M^n une variété riemannienne. Considérons $E_0 \subset M^n$ un compact à bord C^1, $p \in \partial E_0$ et $S \in \mathcal{S}(E_0, p)$ et supposons que la courbure moyenne de S en p relativement à la normale unitaire intérieure, $H_S(p)$, vérifie $H_S(p) > H_0$. Alors il existe une famille $\{E_t\}$ de domaines à bord C^1 telle que*

1. *$E_t \subset E_0$ pour $t \geqslant 0$,*
2. *$Vol(E_t)$ et $Aire(\partial E_t)$ sont lisses relativement à t,*
3. *$\frac{d}{dt} Vol(E_t) \,|_{t=0} < 0$,*
4. *$\frac{d}{dt} Aire(\partial E_t) \,|_{t=0} < H_0 \frac{d}{dt} Vol(E_t) \,|_{t=0}$*

qui nous permet de conclure à

$$(D_I)(V) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta V \to 0} \frac{I_B(V + \Delta V) - I_B(V)}{\Delta V} \geqslant H_{E_0} \geqslant H_k(I_B(V)) > 0$$

2.2.d — On conclut de la même manière.

Bibliographie

[1] I. CHAVEL. *Riemannian geometry : a modern introduction.* Cambridge tracts in mathematics. Cambridge University Press, 1994.

[2] Christopher B. CROKE. A sharp four dimensional isoperimetric inequality. *Comment. Math. Helvetici,* 59:187–192, 1984.

[3] Bruce KLEINER. An isoperimetric comparison theorem. *Invent. Math.,* 108:37–47, 1992.

[4] R. PÉREYROL. Sur l'inégalité isopérimétrique en courbure négative ou nulle I: la dimension 4. Séminaire de Théorie spectrale et Géométrie, 1999–2000.

[5] V. SCHROEDER and W. ZILLER. Local rigidity of symmetric spaces. *Trans. Am. Math. Soc.,* 320(1), 1990.

[6] L. SIMON. *Lectures on Geometric Measure Theory,* volume 3 of *Proc. Cent. Math. Anal., Aust. Natl. Univ.* Cent. Math. Anal,, 1983.

[7] A. WEIL. Sur les surfaces à courbure négative. *C.R. Acad. Sci. Paris,* 182:1069–1071, 1926.

Constantin VERNICOS
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
Constantin.Vernicos@ujf-grenoble.fr