Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Patrick Verovic

Un résultat de rigidité pour les métriques de Hilbert

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 171-173
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__171_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume **18** (2000) 171–173

UN RÉSULTAT DE RIGIDITÉ POUR LES MÉTRIQUES DE HILBERT

Patrick VEROVIC

Ce texte décrit un travail effectué en commun avec Bruno Colbois et correspond à un exposé présenté en octobre 1999 au séminaire de théorie spectrale et géométrie.

Étant donné un ouvert convexe borné $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$ de bord $\partial\mathscr{C}$, on peut définir une distance $d_{\mathscr{C}}$ sur $\mathscr{C}$, appelée métrique de Hilbert (découverte par D. Hilbert en 1894), de la manière suivante. Soient p et q deux points distincts de $\mathscr{C}$ pour lesquels on notera a et b les points d'intersection de la droite affine définie par p et q avec $\partial\mathscr{C}$ de sorte que $p = ta + (1-t)b$ et $q = sa + (1-s)b$ avec $0 < s < t < 1$. Alors $d_{\mathscr{C}}(p,p) = 0$ et $d_{\mathscr{C}}(p,q) = \ln[a,p,q,b]$, où $[a,p,q,b] = \frac{1-t}{t} \times \frac{s}{1-s} > 1$ est le birapport du quadruplet de points (a,p,q,b). Le fait que $d_{\mathscr{C}}$ soit une distance provient des propriétés élémentaires du birapport et l'espace métrique $(\mathscr{C},d_{\mathscr{C}})$ ainsi obtenu est un espace métrique géodésique, complet et non compact dont la topologie est celle induite par la topologie canonique de $\mathbb{R}^n$. En outre, les segments affines ouverts joignant deux points du bord $\partial\mathscr{C}$ sont des géodésiques (mais la réciproque est fausse en général) et sont isométriques à $(\mathbb{R},|\cdot|)$. Par ailleurs, en désignant par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$, la distance $d_{\mathscr{C}}$ est associée à la métrique de Finsler $F_{\mathscr{C}}$ sur $\mathscr{C}$ définie pour $p \in \mathscr{C}$ et $v \in T_p\mathscr{C} = \mathbb{R}^n$ par la formule $F_{\mathscr{C}}(p,v) = \|v\|(\frac{1}{\|p-p^-\|} + \frac{1}{\|p-p^+\|})$, où p^- (resp. p^+) est le point d'intersection de la demi-droite $p + \mathbb{R}^- v$ (resp. $p + \mathbb{R}^+ v$) avec $\partial\mathscr{C}$. Pour plus d'information sur le sujet, on pourra consulter [BK], [BU], [E2] et [G].

Les métriques de Hilbert ont été étudiées pour de multiples raisons. Tout d'abord, elles fournissent des exemples d'espaces métriques géodésiques à la fois simples et suffisamment riches pour être intéressants (voir les résultats de H. Busemann dans [BK] et [BU] pour s'en convaincre). Par ailleurs, elles généralisent en géométrie de Finsler les espaces riemanniens hyperboliques qui correspondent au cas où le bord $\partial\mathscr{C}$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire au modèle de Klein (cf. [BK] et [BU]). Enfin, les convexes munis de telles métriques s'inscrivent dans le cadre de la géométrie projective (voir [G] et le récent papier de Y. Benoist [B]).

Classification math. : 58B20, 52A20.

La question à l'origine de notre travail était de savoir s'il existe des sous-groupes Γ du groupe $\mathrm{Isom}(\mathscr{C},d_{\mathscr{C}})$ des isométries de $(\mathscr{C},d_{\mathscr{C}})$ tels que l'espace quotient $\mathscr{C}/\Gamma$ soit de *volume fini* pour la mesure canonique associée à la métrique de Finsler $F_{\mathscr{C}}$ sur $\mathscr{C}$, cette mesure étant définie par $\mu(f) = \int_{\mathscr{C}} f(p)\sigma(p)dp$ pour toute fonction continue $f : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ à support compact, où $\sigma(p)$ est la densité finslérienne de la métrique $F_{\mathscr{C}}$. Rappelons ici que pour toute variété M munie d'une métrique de Finsler F, la densité $\sigma : M \to \mathbb{R}$ est définie comme suit : une métrique riemannienne arbitraire g étant fixée sur M, la valeur $\sigma(p)$ en un point $p \in M$ est égale au rapport du volume euclidien de la boule unité $\{v \in T_pM \mid g(p)\cdot(v,v) \leqslant 1\}$ par le volume euclidien de la boule unité $\{v \in T_pM \mid F(p,v) \leqslant 1\}$ dans l'espace euclidien $(T_pM,g(p))$. Cette définition ne dépend pas du choix de g et généralise la classique densité riemannienne canonique (en effet, si F est riemannienne, alors σ n'est rien d'autre que la fameuse fonction $\sqrt{\det(g_{ij})}$). Aussi, le lecteur curieux d'en connaître un peu plus sur cette densité finslérienne pourra, par exemple, regarder [V].

Notons que le problème analogue où la condition de finitude du volume est remplacée par celle de compacité du quotient $\mathscr{C}/\Gamma$ a, quant à lui, déjà été résolu par la *négative* via la géométrie affine par J.P. Benzécri [BE] (voir également les notes instructives de W. M. Goldman [G]). Ce résultat a d'ailleurs ensuite été redémontré dans le plan par D. Egloff ([E1], thm 3.59) d'une manière complètement différente impliquant les systèmes dynamiques et par P. Foulon en dimension quelconque comme conséquence d'un théorème général de rigidité [F1], [F2]. En revanche, si le bord de $\mathscr{C}$ n'est plus *strictement* convexe, alors il peut exister des sous-groupes cocompacts de $\mathrm{Isom}(\mathscr{C},d_{\mathscr{C}})$, comme c'est par exemple le cas lorsque $\mathscr{C}$ est un triangle de $\mathbb{R}^2$ (voir [E1], prop. 3.2, [G] et [H]).

En étudiant les sous-groupes Γ du groupe $\mathrm{Isom}(\mathscr{C},d_{\mathscr{C}})$ des isométries de $(\mathscr{C},d_{\mathscr{C}})$ qui agissent de façon proprement discontinue sur $\mathscr{C}$ (i. e. tels que l'espace topologique quotient $\mathscr{C}/\Gamma$ soit séparé), nous avons obtenu le résultat principal suivant (*rigidité*) :

THÉORÈME 0.1 ([CV], thm. 2.1). — *Soit $\mathscr{C}$ un ouvert convexe borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\mathscr{C}$ est une hypersurface de classe C^3 strictement convexe (c'est-à-dire que le hessien est partout défini positif). Alors si $\partial\mathscr{C}$ n'est* pas *un ellipsoïde, tout sous-groupe de* $\mathrm{Isom}(\mathscr{C},d_{\mathscr{C}})$ *qui agit proprement discontinûment sur $\mathscr{C}$ est* fini.

Pour ce faire, nous n'avons utilisé que des techniques de calculs très simples en combinant géométrie métrique au sens large et géométrie de Finsler. Plus précisément, l'idée clé de la preuve consiste à montrer que plus on se rapproche du bord de $\mathscr{C}$, plus la métrique $d_{\mathscr{C}}$ est proche d'une métrique riemannienne. Par suite, si un groupe Γ d'isométries pour $d_{\mathscr{C}}$ agissant proprement discontinûment sur $\mathscr{C}$ était infini, alors tout point $p \in \mathscr{C}$ serait envoyé par Γ vers $\partial\mathscr{C}$ et la norme $F_{\mathscr{C}}(p,\cdot)$ serait ainsi aussi proche que désirée d'une norme euclidienne, donc euclidienne elle-même. La conclusion découle alors d'un autre théorème que nous avons prouvé :

THÉORÈME 0.2 ([CV], thm. 2.4). — *Soit $\mathscr{C}$ un ouvert convexe borné* quelconque *de $\mathbb{R}^n$. Alors la métrique $d_{\mathscr{C}}$ est riemannienne si et seulement si $\partial\mathscr{C}$ est un ellipsoïde.*

Notre question initiale est alors une conséquence directe du Théorème principal :

COROLLAIRE 0.3 ([CV], cor. 2.5). — *Soit $\mathscr{C}$ un ouvert convexe borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\mathscr{C}$ est une hypersurface de classe C^3 strictement convexe. Alors si $\partial\mathscr{C}$ n'est* pas *un ellipsoïde, $(\mathscr{C},d_{\mathscr{C}})$ n'admet* aucun *quotient de* volume fini *par des sous-groupes de* Isom$(\mathscr{C},d_{\mathscr{C}})$ *dont l'action sur $\mathscr{C}$ est proprement discontinue.*

On retrouve ainsi comme cas particulier et d'une nouvelle façon le résultat de J.P. Benzécri [BE] concernant les quotients compacts des espaces $(\mathscr{C},d_{\mathscr{C}})$.

Bibliographie

[B] Y. BENOIST, *Automorphismes des cônes convexes*, Preprint, École Normale Supérieure, Paris, 1999.

[BE] J.-P. BENZÉCRI, *Sur les variétés localement affines et projectives*, Bull. Soc. Math. France **88** (1960), 229–332.

[BK] H. BUSEMANN, P. KELLY, *Projective geometry and projective metrics*, Academic Press, New York, 1953.

[BU] H. BUSEMANN, *The geometry of geodesics*, Academic Press, New York, 1955.

[CV] B. COLBOIS, P. VEROVIC, *A rigidity result for Hilbert geometries*, Preprint.

[E1] D. EGLOFF, *Some new developments in Finsler geometry*, Ph.D. thesis, University of Freiburg, 1995.

[E2] D. EGLOFF, *Uniform Finsler Hadamard manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré - Phys. Théor. **66** (1997), 323–357.

[F1] P. FOULON, *Géométrie des équations différentielles du second ordre*, Ann. Inst. H. Poincaré - Phys. Théor. **45** (1986), 1-28.

[F2] P. FOULON, *Locally symmetric Finsler spaces in negative curvature*, C. R. Acad. Sci. Paris **324** (1997), 1127–1132.

[G] W. M. GOLDMAN, *Projective geometry on manifolds*, Lecture Notes, University of Maryland, 1988.

[H] P. DE LA HARPE, *On Hilbert's metric for simplices*, in *Geometric group theory* (vol. I, p. 97–119). Cambridge University Press, 1993.

[V] P. VEROVIC, *Problème de l'entropie minimale pour les métriques de Finsler*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **19** (1999), 1637–1654.

Patrick VEROVIC
Université de Savoie
Département de Mathématiques
Campus Universitaire
73376 LE BOURGET DU LAC Cedex
verovic@univ-savoie.fr