

SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

ERWANN AUBRY

Théorème de la sphère

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 18 (1999-2000), p. 125-155

http://www.numdam.org/item?id=TSG_1999-2000__18__125_0

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1999-2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME DE LA SPHÈRE

Erwann AUBRY

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte. Son volume, son diamètre, son radius (par définition : la borne inférieure de l'ensemble des rayons des boules géodésiques recouvrant M) et son spectre (du Laplacien) sont des invariants riemanniens. Les valeurs de ces seuls invariants sur l'ensemble des variétés riemanniennes compactes ne permettent pas de distinguer la topologie ou même la métrique de ces variétés. Toutefois, si on restreint ces fonctionnelles à des sous-ensembles de variétés satisfaisant certaines hypothèses de courbure, la situation peut devenir radicalement différente. La sphère canonique (S^n, can) peut, par exemple, être ainsi caractérisée :

THÉORÈME 0.1. — *Toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de ricci supérieure à $(n - 1)$ vérifie les inégalités suivantes :*

- (i) $\text{Diam}(M^n, g) \leq \text{Diam}(S^n, \text{can})$,
- (ii) $\text{Vol}(M^n, g) \leq \text{Vol}(S^n, \text{can})$,
- (iii) $\text{Rad}(M^n, g) \leq \text{Rad}(S^n, \text{can})$,
- (iv) $\lambda_1(M^n, g) \geq \lambda_1(S^n, \text{can})$.

De plus, si l'égalité est réalisée dans une de ces inégalités, alors (M^n, g) est isométrique à (S^n, can) .

La démonstration de ces inégalités peut être trouvée en appendice A (théorèmes de Myers, Bishop et Lichnerowicz). Les cas d'égalités découlent du théorème de Cheng ([6]) pour les cas (i), (ii) et (iii), et du théorème d'Obata ([15]) pour le cas (iv).

Au vu de ce résultat, il est naturel de se demander quelles propriétés (topologiques, différentiables ou métriques) de (S^n, can) sont conservées par les variétés riemanniennes compactes pour lesquelles les valeurs prises par l'un des invariants riemanniens du théorème sont suffisamment proches de la valeur extrême. Dans cet exposé, nous nous intéresserons plus particulièrement au problème suivant :

Toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n - 1)$, dont le volume (ou le diamètre, ou le radius, ou la k -ième valeur propre

Classification math. : 53C20.

du Laplacien) est ε -proche de celui de la sphère canonique, est-elle difféomorphe à la sphère S^n ?

Bien sûr, une réponse affirmative à cette question sera d'autant plus satisfaisante que la constante ε dépendra du moins d'hypothèses supplémentaires possible sur la structure différentiable de M ou sur sa métrique; l'idéal étant que ε ne dépende que de la dimension n de la variété (M^n, g) (ce qu'on notera $\varepsilon = \varepsilon(n)$).

Remarquons tout de suite qu'il n'y a pas de stabilité du type différentiable (avec $\varepsilon = \varepsilon(n)$) lorsqu'on astreint que le diamètre ou la première valeur propre de la variété (M^n, g) à être proche de leur valeur critique (des contres-exemples ont été donnés par M. Anderson [2]); en revanche, elle apparaît si on admet que ε puisse dépendre de n et d'un majorant de la courbure sectionnelle des variétés considérées (cf. S. Ilias [14]). Nous ne nous intéresserons donc dans la suite qu'à la stabilité de genre différentiable vis-à-vis du volume, du radius ou de la $n + 1$ -ème valeur propre de la variété au voisinage de leur valeur critique.

De nombreuses réponses partielles (stabilité du genre topologique ou dépendance de ε vis-à-vis du rayon d'injectivité ou d'autre quantités géométriques) à cette question existaient sur le marché (on peut se référer à l'article de K. Shiohama [17] pour un historique de la question) avant que J. Cheeger et T. Colding ne démontre le résultat général suivant (cf. [8], [9] et [4]), améliorant considérablement les résultats précédents :

THÉORÈME 0.2 (J. Cheeger-T. Colding,[4]). — *Il existe une constante $\varepsilon = \varepsilon(n)$ telle que toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à $n-1$ et vérifiant l'inégalité :*

$$\text{Vol}(M^n, g) \geq (1 - \varepsilon) \text{Vol}(S^n, \text{can})$$

soit difféomorphe à S^n .

Remarque. — La constante $\varepsilon(n)$ est universelle et ne dépend que de la dimension. Bien entendu, elle ne dépend pas de M ... mais elle ne dépend pas non plus de bornes a priori qui seraient imposées à la courbure sectionnelle. Ce point est l'amélioration fondamentale apportée par T. Colding aux travaux antérieurs de Shiohama, Perelman, Otsu-Shiohama, Yamaguchi,...(cf. [17]).

La preuve de Cheeger et Colding (sujet de cet exposé) se décompose en deux étapes :

– Dans un premier temps, Colding a montré que, pour toute suite de variétés riemanniennes compactes (M_p^n, g_p) $p \in \mathbb{N}$ de courbure de Ricci supérieure à $(n - 1)$, il équivaut de converger en distance de Hausdorff-Gromov vers (S^n, can) ou d'avoir convergence de la suite $(\text{Vol}(M_p))_{p \in \mathbb{N}}$ vers $\text{Vol}(S^n)$ ([8] et [9]).

Soit (A, d_A) et (B, d_B) deux espaces métriques. Une ε -approximation de A sur B est un couple $(F, (C, d_C))$ tel que (C, d_C) est un sur-espace métrique de B et F est une application de A dans C telle que $d_C(F(A), B) \leq \varepsilon$ et $\forall (x, y) \in A^2, |d_A(x, y) - d_C(F(x), F(y))| \leq \varepsilon$. On munit l'ensemble des variétés riemanniennes compactes d'une métrique, appelée métrique de Hausdorff-Gromov, en posant :

$$d_{HG}((M, g), (M', g')) = \inf\{\varepsilon \text{ tel qu'il existe une } \varepsilon\text{-approximation de Hausdorff de } (M, g) \text{ sur } (M', g')\}.$$

On pourra trouver des compléments d'information sur cette métrique dans [13].

– Dans un second temps, ils démontrent et utilisent un nouveau résultat de finitude du genre différentiable ([4]).

Dans la première partie de cet exposé, nous allons redémontrer et préciser le résultat de Colding. Si la notation $\tau(\epsilon|x, \dots)$ désigne une fonction τ telle que $\tau(\epsilon|x, \dots) \rightarrow 0$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ (les autres variables étant fixées) et si on pose :

- $H_\epsilon^d = \{(M^n, g) \text{ variété riemannienne compacte telle que } d_{HG}((M^n, g), (\mathbb{S}^n, \text{can})) \leq \epsilon\}$,
- $H_\epsilon^V = \{(M^n, g) \text{ variété riemannienne compacte telle que } \text{Vol}(M^n, g) \geq (1 - \epsilon) \text{Vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})\}$,
- $H_\epsilon^\lambda = \{(M^n, g) \text{ variété riemannienne compacte telle que } \lambda_{n+1}(M^n, g) \leq \lambda_1(\mathbb{S}^n, \text{can}) + \epsilon\}$,
- $H_\epsilon^R = \{(M^n, g) \text{ variété riemannienne compacte telle que } \text{Rad}(M^n, g) \geq \text{Rad}(\mathbb{S}^n, \text{can}) - \epsilon\}$,

on va démontrer, par une méthode différente de celle de Colding et s'inspirant de [12] et de [16]), le résultat suivant :

THÉORÈME 0.3. — *Il existe une fonction $\tau = \tau(\epsilon|n) > 0$ telle que toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à $(n - 1)$ incluse dans l'un des ensembles $H_{\tau(\epsilon|n)}^i$ pour $i \in \{d, R, V, \lambda\}$ est aussi incluse dans les ensembles H_ϵ^j (pour tout $j \neq i$).*

Outre qu'elle permet l'extension du résultat de Colding, la démonstration que nous développerons en première partie de cet exposé aura l'avantage de fournir explicitement une approximation de Hausdorff de (M^n, g) sur $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ lorsque $\text{Vol}(M^n, g)$ est proche de $\text{Vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})$ (cette approximation est en fait une fonction surjective de classe C^∞ construite à partir des premières fonctions propres de M). De plus cette approximation devient un difféomorphisme (et même une quasi-isométrie) si $\text{Vol}(M^n, g) \geq (1 - \epsilon(A, n)) \text{Vol}(\mathbb{S}^n, \text{can})$ où A est un majorant de la courbure sectionnelle de M , ce que nous exposerons dans la seconde partie de cet exposé (cf. [2.1]).

Pour montrer l'existence d'un difféomorphisme entre (M^n, g) et $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ sous les conditions du théorème 0.2 (c'est-à-dire sans borne sur la courbure sectionnelle de (M^n, g)) on ne sait pas si l'application construite en première partie suffit. On est donc obligé de suivre Colding et Cheeger, qui utilisent un théorème de finitude du genre différentiable qui conclut mais sans fournir d'information sur le difféomorphisme existant. Nous renvoyons les lecteurs intéressés par ce résultat de Colding et Cheeger à un exposé ultérieur de ce séminaire.

Dans la suite, M désignera toujours une variété riemannienne complète à courbure de Ricci supérieure à $(n - 1)$.

1. Stabilité des invariants géométriques de la sphère

Nous calculerons les normes L^p par rapport à la mesure unitaire riemannienne des variétés (qui seront toujours ici de volume fini, car compactes), ie :

$$\|f\|_{L^p}^p = \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M f^p(x) dv_g(x).$$

Quant au Laplacien utilisé, ce sera celui des géomètres, qui par convention en font un opérateur positif. Plus précisément, il sera défini en coordonnées locales au voisinage de x , par :

$$\Delta f(x) = - \sum_{i,j} g^{i,j} Dd f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Nous commençons cette partie par quelques remarques simples sur la sphère qui inspireront notre démarche dans le cas général :

1.1. Cas de la sphère S^n

La sphère canonique (S^n, can) est de courbure de Ricci constante égale à $(n-1)$. Les fonctions propres du Laplacien de (S^n, can) sont les restrictions à S^n des polynômes homogènes harmoniques de \mathbb{R}^{n+1} . En particulier, l'espace des fonctions propres E_{λ_1} associé à la valeur propre $\lambda_1 = n$ est l'espace des formes linéaires de \mathbb{R}^{n+1} , qu'on peut écrire sous la forme $x \mapsto \langle x, r \cdot x_0 \rangle = r \cdot \cos(d(x, x_0))$, où x_0 est un élément quelconque de S^n , r un élément quelconque de \mathbb{R}^+ et d la distance riemannienne sur (S^n, can) .

On rappelle que pour tout endomorphisme A de \mathbb{R}^{n+1} , on a :

$$\frac{1}{n+1} \text{Trace}(A) = \frac{1}{\text{Vol } S^n} \int_{S^n} \langle A(x), x \rangle dx \quad (1)$$

Soit $\{e_i\}$ une BON de \mathbb{R}^{n+1} et x_i l'extrémité du vecteur e_i (ie $\vec{ox}_i = e_i$). D'après (1), les fonctions $f_i = \cos(d(x_i, \cdot)) = \langle e_i, \cdot \rangle$ forment une base L^2 -orthogonale de E_{λ_1} telle que $\|f_i\|_{L^2}^2 = \frac{1}{n+1}$. On en déduit que si $x_0 \in S^n$ et que l'on pose

$$\alpha_{i,x_0} = \left(\frac{n+1}{\text{Vol } S^n} \right) \int_{S^n} \cos(d(x_0, x)) f_i(x) dx,$$

alors on a :

$$\begin{cases} \cos(d(x_0, \cdot)) &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i,x_0} \cdot f_i \\ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i,x_0}^2 &\equiv 1. \end{cases}$$

Par ailleurs, (1) nous donne :

$$\alpha_{i,x_0} = \left(\frac{n+1}{\text{Vol } \mathbb{S}^n} \right) \int_{\mathbb{S}^n} \langle x_0, x \rangle \cdot \langle e_i, x \rangle dx = \langle x_0, e_i \rangle = f_i(x_0).$$

On a donc en fait démontré que l'application :

$$F : \begin{cases} \mathbb{S}^n & \rightarrow \mathbb{S}^n \\ x & \rightarrow (f_1(x), \dots, f_{n+1}(x)) \end{cases}$$

est bien définie. De plus c'est une isométrie, puisque pour tous $x_0, x \in \mathbb{S}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \cos [d_{\mathbb{S}^n}(F(x_0), F(x))] &= \langle F(x_0), F(x) \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x_0) \cdot f_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i,x_0} \cdot f_i(x) = \cos [d(x_0, x)]. \end{aligned}$$

Bien entendu, il y avait une démonstration plus rapide du fait que F est une isométrie : elle consistait à reconnaître que F est le plongement canonique de \mathbb{S}^n dans \mathbb{R}^{n+1} et que ce plongement identifie la métrique canonique de \mathbb{S}^n avec la métrique de sous-variété. Cependant cette dernière preuve n'a aucune chance de se généraliser à une variété riemannienne abstraite, c'est pourquoi nous lui avons préféré la première preuve que nous allons généraliser, en prouvant que les égalités exhibées ci-dessus restent vraies à ε -près pour une variété riemannienne de volume presque maximal.

1.2. Le cas général

Dans toute la suite du rapport, nous ferons une utilisation intensive du théorème de Bishop-Gromov. Nous citons donc dès maintenant ce théorème dont le lecteur pourra trouver une démonstration dans l'appendice A :

THÉORÈME 1.1 (Bishop-Gromov). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)\delta$ (où δ est un réel donné) et r un réel tel que $0 < r \leq R$. Pour tout point p de M on a :*

$$\frac{\text{Vol}(B(p, R))}{\text{Vol}(B(p, r))} \leq \frac{V^\delta(R)}{V^\delta(r)},$$

où $V^\delta(r)$ désigne le volume d'une boule géodésique de rayon r de l'espace complet simplement con-nexe de courbure sectionnelle constante égale à δ . En particulier, par passage à la limite, on obtient $\text{Vol}(B(m, R)) \leq V^\delta(R)$.

1.2.1. Preuve de $H_\varepsilon^V \subset H_{\tau(\varepsilon|n)}^R$ et $H_\varepsilon^d \subset H_{\tau(\varepsilon|n)}^R$.

Soit $(M, g) \in H_\varepsilon^V$ et $B(p, \text{Rad}(M))$ une boule géodésique de rayon $\text{Rad}(M)$ recouvrant M (M étant compacte, elle existe). D'après le théorème 1.1, on obtient :

$$(1 - \varepsilon)V^1(\pi) \leq \text{Vol}(M) = \text{Vol}(B(p, \text{Rad}(M))) \leq V^1(\text{Rad}(M)).$$

Or $r \mapsto V^1(r)$ est une fonction continue strictement croissante sur $[0, \pi]$ ne dépendant que de n . D'où l'existence d'une fonction $\tau(\varepsilon|n)$ telle que $H_\varepsilon^V \subset H_{\tau(\varepsilon|n)}^R$.

Soit $(M, g) \in H_\varepsilon^d$ et $p \in M$. Alors il existe une application $F : (M, g) \rightarrow (C, d)$ où (S^n, can) est un sous-espace métrique de (C, d) et telle que $d(F(M), S^n) \leq \varepsilon$ et pour tout couple de points $(x, y) \in M^2$, on ait $|d_g(x, y) - d(F(x), F(y))| \leq \varepsilon$. Il existe donc des points p' et q' de S^n tels que $d(F(p), p') \leq \varepsilon$ et $d(p', q') = \pi$. Si q est un point de M tel que $d(F(q), q') \leq \varepsilon$ alors on a trouvé un point q de M tel que $d_g(p, q) \geq \pi - 3\varepsilon$. Autrement dit $H_\varepsilon^d \subset H_{3\varepsilon}^R$.

1.2.2. Preuve de $H_\varepsilon^R \subset H_{\tau(\varepsilon|n)}^\lambda$.

Dans ce qui suit, nous notons (f_i) une famille orthogonale de fonctions propres du Laplacien de (M, g) telle que

$$\begin{cases} \Delta f_i &= \lambda_i f_i \\ \|f_i\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{n+1}, \end{cases}$$

où $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est la suite des valeurs propres du Laplacien de (M, g) classées dans l'ordre croissant et chacune répétée un nombre de fois égale à leur multiplicité.

Pour tout point x_0 de M nous notons $(\alpha_{i|x_0})$ la suite des coefficients de Fourier de la fonction $\cos(d(\cdot, x_0))$ relativement à la famille des f_i . C'est-à-dire que :

$$\alpha_{i|x_0} = \frac{(n+1)}{\text{Vol}(M)} \int_M \cos(d(x_0, x)) f_i(x) dx.$$

Alors le lemme suivant affirme que, si le radius d'une variété de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$ est proche de celui de (S^n, can) , alors les fonctions $\cos(d(x_0, \cdot))$ sont proches au sens L^2 des premières fonctions propres du Laplacien (comparez avec le cas de la sphère) :

LEMME 1.2. — *Il existe des fonctions universelles $\tau_1(\varepsilon|n)$ et $\tau(\varepsilon|n)$ telles que sur toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ et vérifiant $\text{Rad}(M) \geq \text{Rad}(S^n) - \varepsilon$ on ait :*

$$(i) \quad \|\cos(d(x_0, \cdot)) - \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \alpha_{i|x_0} f_i\|_{L^2(M)} \leq \tau(\varepsilon|n),$$

où $k(\varepsilon) = \sup\{i / \lambda_i \leq n + \tau_1(\varepsilon|n)\}$,

$$(ii) \left| \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \alpha_{i|x_0}^2 - 1 \right|^2 \leq \tau(\varepsilon|n).$$

Remarque. — Pour conclure il suffira de montrer que $k(\varepsilon) \geq n + 1$ pour ε assez petit. De plus nous avons vu que $H_\varepsilon^V \subset H_{\tau(\varepsilon|n)}^R$ (où $\tau(\varepsilon|n)$ tend vers 0 avec ε), on peut donc remplacer l'hypothèse $\text{Rad}(M) \geq \text{Rad}(\mathbb{S}^n) - \varepsilon$ par $\text{Vol}(M) \geq \text{Vol}(\mathbb{S}^n)(1 - \varepsilon)$ dans l'énoncé du lemme 1.2.

Il est primordial de remarquer que les estimations du lemme 1.2 (comme beaucoup de celles qui suivront) sont universelles, puisqu'elles ne dépendent que des bornes sur la courbure de Ricci et sur le volume.

Démonstration. — Cette propriété est vraie sur la sphère, comme on l'a vu en section 1.1. La démonstration est fondée sur le lemme suivant qui affirme que, sous les hypothèses du lemme 1.2, les mesures riemanniennes de (M, g) et de $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ sont proches :

LEMME 1.3. — *Il existe une fonction $\tau(\varepsilon|n)$ telle que, sur toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à $(n - 1)$ et vérifiant $\text{Rad}(M) \geq \text{Rad}(\mathbb{S}^n) - \varepsilon$, et pour toute fonction $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , on ait :*

$$\left| \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M u \circ d_M(x_0, \cdot) dv_g - \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{S}^n} u \circ d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0, \cdot) dv_{\text{can}} \right| \leq \tau(\varepsilon|n) \int_0^\pi |u'(r)| dr,$$

pour tous les points $x_0 \in M$ et $\bar{x}_0 \in \mathbb{S}^n$.

Démonstration. — On note $L(r)$ le volume $(n - 1)$ -dimensionnel de la sphère géodésique $S(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon r et $\bar{L}(r) = \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})(\sin(r))^{n-1}$ qui est le volume correspondant dans \mathbb{S}^n . Alors, comme application classique de la formule de la coaire (cf. [3], p. 128), on obtient que la fonction $r \mapsto \text{Vol}(B(x_0, r)) = V(r)$ est lipschitzienne et sa dérivée est égale presque partout à L . Par intégration par parties (et en utilisant le théorème de Myers cité en introduction), on obtient :

$$u(\pi) \text{Vol}(M) = \int_0^\pi u(r) L(r) dr + \int_0^\pi u'(r) V(r) dr.$$

En appliquant cette formule à M et à \mathbb{S}^n , et en les retranchant, on obtient :

$$\left| \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M u \circ d_M(x_0, x) dv_g - \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{S}^n} u \circ d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0, x) dv_{\text{can}} \right| \leq \int_0^\pi |u'(r)| \left(\frac{V(r)}{\text{Vol}(M)} - \frac{\bar{V}(r)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \right) dr,$$

où $\bar{V}(r)$ est le volume de la calotte sphérique de rayon r . Or on a $\text{Rad}(M) \geq \pi - \varepsilon$, donc tout point x_0 de M admet un presque antipode (*i.e.* il existe $y_0 \in M$ tel que $d(x_0, y_0) > \pi - 2\varepsilon$). Donc, par le théorème 1.1 et le théorème de Myers, on obtient que :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}(r)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} &\leq \frac{V(r)}{\text{Vol}(M)} \leq 1 - \frac{\text{Vol}(B(y_0, \pi - r - 2\varepsilon))}{\text{Vol}(M)} \\ &\leq 1 - \frac{\bar{V}(\pi - r - 2\varepsilon)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \leq \frac{\bar{V}(r + 2\varepsilon)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \end{aligned} \quad (2)$$

Or la fonction \bar{V} est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc le lemme 1.3 est vérifié par la fonction $\tau(\varepsilon|n) = \sup_r \frac{\bar{V}(r+2\varepsilon) - \bar{V}(r)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} = \frac{\int_0^{2\varepsilon} (\cos)^{n-1} dt}{\int_0^{\pi/2} (\cos)^{n-1} dt}$. \square

Suite de la démonstration de la proposition 1.2. — De l'inégalité du lemme 1.3, on déduit directement que :

$$|\alpha_{0|x_0}| = \left| \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \cos(d(x_0, \cdot)) \right| \leq C(n)\tau(\varepsilon|n).$$

Puisqu'on a $\|\nabla d(x_0, \cdot)\|^2 = 1$ sur presque tout M (cf. Appendice A), le lemme 1.3 nous permet de comparer les quotients de Rayleigh des fonctions radiales de M (*i.e.* de la forme $u \circ d(x_0, \cdot)$) avec ceux des fonctions correspondantes sur la sphère. Ainsi, puisqu'on a :

$$\|\nabla \cos d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{S}^n)}^2 = n \|\cos d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{S}^n)}^2,$$

on obtient :

$$\left| \|\nabla \cos d_M(x_0, \cdot)\|_{L^2(M)}^2 - n \|\cos d_M(x_0, \cdot)\|_{L^2(M)}^2 \right| \leq C(n)\tau(\varepsilon|n).$$

En posant $k(\varepsilon) = \sup\{i/\lambda_i \leq n + \sqrt{\tau(\varepsilon|n)}\}$, on en déduit :

$$\frac{\sqrt{\tau(\varepsilon|n)}}{n+1} \sum_{i > k(\varepsilon)} \alpha_{i|x_0}^2 \leq \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{\lambda_i - n}{n+1} \right) \alpha_{i|x_0}^2 \right| \leq C(n)\tau(\varepsilon|n),$$

d'où :

$$\left\| \cos d_M(x_0, \cdot) - \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \alpha_{i|x_0} \cdot f_i \right\|_{L^2(M)}^2 \leq (n+1)\sqrt{\tau(\varepsilon|n)}.$$

Enfin, on obtient (ii) en appliquant le lemme 1.3 à la fonction $u = \cos^2$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_{i|x_0}^2 - 1 \right| &= (n+1) \left| \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \cos^2 d_M(x_0, \cdot) - \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^n)} \int_{\mathbb{S}^n} \cos^2 d_{\mathbb{S}^n}(\bar{x}_0, \cdot) \right| \\ &\leq C(n)\tau(\varepsilon|n) \end{aligned}$$

d'où :

$$\left| \sum_{i=1}^{k(\varepsilon)} \alpha_{i|x_0}^2 - 1 \right| \leq C'(n) \sqrt{\tau(\varepsilon|n)}.$$

□

En utilisant le lemme 1.2, nous allons maintenant démontrer l'existence d'une fonction $\tau(\varepsilon|n)$ telle que $H_\varepsilon^R \in H_{\tau(\varepsilon|n)}^\Lambda$.

En effet, du lemme 1.2, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème du théorème de Bishop-Gromov 1.1 (et quitte à modifier la fonction τ), on déduit :

$$\frac{1}{\text{Vol}(B(x_0, \eta))} \left| \int_{B(x_0, \eta)} \sum_{i=1}^k \alpha_{i|x_0} \cdot f_i - \int_{B(x_0, \eta)} \cos(d(x_0, \cdot)) \right| \leq \left(\frac{\pi}{\eta} \right)^{n/2} \tau(\varepsilon, n).$$

En prenant $\eta = \tau(\varepsilon|n)^{1/n}$ et en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction \cos , on obtient finalement, pour ε assez petit :

$$\left| 1 - \frac{1}{\text{Vol}(B(x_0, \eta))} \int_{B(x_0, \eta)} \sum_{i=1}^k \alpha_{i|x_0} \cdot f_i(x) dv_g(x) \right| \leq C(n) \tau(\varepsilon|n)^{1/n}.$$

Or :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\text{Vol}(B(x_0, \eta))} \int_{B(x_0, \eta)} \sum_{i=1}^k (\alpha_{i|x_0} - f_i(x))^2 dx \\ &\leq (1 + \tau(\varepsilon|n)) - \frac{2}{\text{Vol}(B(x_0, \eta))} \int_{B(x_0, \eta)} \sum_{i=1}^k \alpha_{i|x_0} \cdot f_i(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{\text{Vol}(B(x_0, \eta))} \int_{B(x_0, \eta)} \sum_{i=1}^k f_i^2(x) dx \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{1}{\text{Vol}(B(x_0, \eta))} \int_{B(x_0, \eta)} \sum_{i=1}^k f_i^2(x) dx \geq 1 - C'(n) \tau(\varepsilon|n)^{1/n},$$

pour ε petit.

Par le théorème de Fubini, et en remarquant que les majorations précédentes ne dépendent pas de x_0 , on obtient alors :

$$\begin{aligned} (1 - \tau(\varepsilon|n)^{1/n}) \int_M \frac{\text{Vol}(B(y, \eta))}{\text{Vol}(M)} dy &\leq \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \left(\int_{B(y, \eta)} \sum_{i=1}^k f_i^2(x) dx \right) dy \\ &= \int_M \left(\sum_{i=1}^k f_i^2(x) \right) \frac{\text{Vol}(B(x, \eta))}{\text{Vol}(M)} dx \end{aligned}$$

Or, d'après les inégalités (2) (cf. la démonstration du lemme 1.3), on en déduit que :

$$\frac{k}{n+1} = \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \sum_{i=1}^k f_i^2(x) dx \geq (1 - \tau(\varepsilon|n)^{1/n}) \frac{\bar{V}(\eta)}{\bar{V}(\eta + 2\varepsilon)}.$$

En choisissant $\eta = \tau(\varepsilon|n)^{1/n}$, on obtient que $\varepsilon/\eta \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ (cf. la démonstration du lemme 1.3 pour la valeur exacte de $\tau(\varepsilon|n)$) donc $k > n$ pour ε assez petit, ce qu'il fallait démontrer.

1.2.3. Preuve de $H_\varepsilon^\lambda \subset H_{\tau(\varepsilon|n)}^V$ et $H_\varepsilon^\lambda \subset H_{\tau(\varepsilon|n)}^d$.

Pour ces deux points nous utiliserons la même fonction F de M sur S^n , construite à partir des fonctions propres du Laplacien de M selon une méthode s'inspirant de la section 1.1. Dans le premier cas nous montrerons que cette fonction est surjective et contracte presque les volumes, et dans le second cas, nous montrerons qu'elle réalise une approximation de Hausdorff de M sur S^n .

Dans toute la suite, nous supposons que M est une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ et vérifiant $\lambda_k \leq n + \varepsilon$. De plus nous rappelons que nous notons (f_i) une famille orthogonale de fonctions propres du Laplacien de (M, g) telle que

$$\begin{cases} \Delta f_i &= \lambda_i f_i \\ \|f_i\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{n+1}. \end{cases}$$

Pour la suite, nous aurons besoin du lemme 1.2, que nous devons donc redémontrer pour les variétés de l'ensemble H_ε^λ . Sa démonstration est, dans ce cas, basée sur l'estimation L^∞ des fonctions propres de M donnée par le lemme suivant :

LEMME 1.4. — *Il existe une fonction $\tau_3(\varepsilon|n)$ telle que sur toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ et vérifiant $\lambda_k \leq n + \varepsilon$, on ait, pour toute combinaison linéaire $f = \sum_{i=1}^k \beta_i \cdot f_i$ de fonctions propres f_i :*

$$\|f^2 + |df|^2\|_\infty \leq (1 + \tau_3(\varepsilon|n))(\lambda_k + 1) \|f\|_2^2.$$

Démonstration. — On considère la variété $M' = M \times \mathbb{R}_+^*$ munie de la métrique $g' = r^2 \cdot g + (dr)^2$. En identifiant TM' à $TM \oplus (\mathbb{R}e)$, où $e = \frac{\partial}{\partial r}$, la connexion de Levi-Civita D' de M' est donnée par les relations :

$$\begin{aligned} \forall ((X,0), (Y,0)) \in TM'^2, \quad & D'_X Y = D_X Y - r \cdot g(X, Y) e, \\ & D'_e e = 0, \\ & D'_e X = D'_X e = \frac{X}{r}. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} F_i : (M', g') \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, r) \mapsto r \cdot f_i \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} F : (M', g') \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, r) \mapsto r \cdot f \end{cases}$$

Si (e_1, \dots, e_n) une BON de $T_x M$ telle que $D_{e_i} e_i = 0$ au centre x de la carte où se fait le calcul, on a alors, au point x :

$$\begin{aligned} \Delta' F_i &= -\frac{1}{r^2} \left[\sum_{k=1}^n D'_{e_k} d'_{e_k} (r \cdot f_i) \right] - D'_e d'_e (r \cdot f_i) \\ &= -\frac{1}{r^2} \left[\sum_{k=1}^n e_k \cdot e_k \cdot (r \cdot f_i) - \sum_{k=1}^n d'(F_i)(D'_{e_k} e_k) \right] \\ &= -\frac{1}{r} \left[\sum_{k=1}^n D_{e_k} d_{e_k} f_i - n f_i \right] \\ &= \frac{(\lambda_i - n)}{r^2} F_i. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\Delta' F = \sum_{i=1}^k \frac{(\lambda_i - n)}{r^2} \beta_i F_i. \quad (3)$$

Par ailleurs, on a les propriétés suivantes (cf. [12]) :

- $\text{Ric}'(M') \geq 0$,
- $\Delta' |d'F|^2 = \Delta |d'F|^2$ en restriction à $M \times \{1\}$, car

$$|d'F|^2 = \left(\sum_{i=1}^k \beta_i f_i \right)^2 + \left| \sum_{i=1}^k \beta_i d f_i \right|^2$$

ne dépend pas de r .

La formule de Böchner (cf. appendice A), appliquée à F , nous donne alors :

$$\langle d'(\Delta' F), d'F \rangle = \frac{1}{2} \Delta' |d'F|^2 + |D' d'F|^2 + \text{Ric}'(\nabla' F, \nabla' F), \quad (4)$$

(où $\nabla' F$ est le gradient F (g' -dual de $d'F$)), soit, en restriction à $M \times \{1\}$:

$$\frac{1}{2} \Delta |d'F|^2 + |D' d'F|^2 \leq |d' \Delta' F| \cdot |d'F|.$$

Or, d'après l'égalité 3, on a :

$$\begin{aligned}
 |d' \Delta' F| &= \left| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i (d' F_i - 2 f_i dr) \right| \\
 &\leq \left| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i d' F_i \right| + 2 \left| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i f_i dr \right| \\
 &\leq 3 \left| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i d' F_i \right|.
 \end{aligned}$$

D'où l'on déduit l'inégalité suivante, valable pour tout k -uplet $(\beta_i)_{1 \leq i \leq k}$:

$$\frac{1}{2} \Delta |d' F|^2 + |D' d' F|^2 \leq 3 \left| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i d' F_i \right| \cdot |d' F|.$$

La restriction du fibré T^*M' à $M \times \{1\}$ peut-être vue comme un fibré au-dessus de M . L'espace vectoriel de dimension finie $E = \text{Vect}\{d' F_i\}_{1 \leq i \leq k}$ est alors un sous-espace de l'ensemble des sections de ce fibré sur M . Pour tout $r \in [1, +\infty]$, on pose $A_r = \sup_{S \in E} \frac{\|S\|_r}{\|F\|_2}$. Soit S un élément quelconque de E ; posons $u = \sqrt{|S|^2 + \epsilon^2}$ pour $\epsilon > 0$. La fonction u est alors C^∞ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$|d \left(\sqrt{|S|^2 + \epsilon^2} \right)|^2 \leq |d' \left(\sqrt{|S|^2 + \epsilon^2} \right)|^2 \leq \frac{|D' S|^2 |S|^2}{|S|^2 + \epsilon^2} \leq |D' S|^2$$

On en déduit :

$$u \Delta u = \frac{1}{2} \Delta (f^2) + |d f|^2 \leq \frac{1}{2} \Delta (|S|^2) + |D' S|^2 \leq 3 \left| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i d' F_i \right| \cdot u$$

Or u est une fonction strictement positive, la formule de Green permet donc de montrer que pour tout réel $p > 1/2$, on a :

$$\int_M |d(u^p)|^2 = \frac{p^2}{2p-1} \int_M (\Delta u) u^{2p-1} \leq \frac{3p^2}{2p-1} \int_M \left| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i d' F_i \right| \cdot u^{2p-1}.$$

Autrement dit, pour tout réel $p > 1/2$, on a :

$$\|d(u^k)\|_2 \leq \frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{2p-1}} \sqrt{\left\| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i d' F_i \right\|_{2p} \|u\|_{2p}^{2p-1}}.$$

En appliquant à la fonction u^k l'inégalité de Sobolev donnée par le lemme suivant (cf. [14]) :

LEMME 1.5. — Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, et $u \in H_1^2(M)$, alors on a :

$$\begin{aligned} \|u\|_{\frac{2n}{n-2}}^2 &\leq \frac{4}{n(n-2)} \|du\|_2^2 + \|u\|_2^2 \quad (\text{si } n \geq 3), \\ \|u\|_4^2 &\leq \frac{1}{2} \|du\|_2^2 + \|u\|_2^2 \quad (\text{si } n = 2). \end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ vers 0, puis en utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve :

$$\|S\|_{\frac{2pn}{n-2}}^p \leq \frac{C(n)p}{\sqrt{2p-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i d' F_i \|S\|_{2p}^{2p-1} + \|S\|_{2p}^p}.$$

Or, on par définition :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i d' F_i \right\|_{2p} &\leq A_{2p} \left\| \sum_{i=1}^k (\lambda_i - n) \beta_i d' F_i \right\|_2 \\ &\leq A_{2p} \cdot \epsilon(n + \epsilon) \|S\|_2 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\|S\|_{\frac{2pn}{n-2}} \leq \left(1 + \frac{C'(n)p\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2p-1}}\right)^{1/p} A_{2p} \|S\|_2,$$

et ceux pour tout élément S de l'espace vectoriel E . On a donc :

$$A_{\frac{2pn}{n-2}} \leq \left(1 + \frac{C'(n)p\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2p-1}}\right)^{1/p} A_{2p}.$$

Si on pose successivement $p = \beta^j$ avec $\beta = \frac{n}{n-2} > 1$ dans cette inégalité, on trouve :

$$A_{2\beta^m} \leq \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 + C'(n)\beta^{j/2}\sqrt{\epsilon}\right)^{1/\beta^j}.$$

Il suffit de remarquer que, M étant compacte, on a $A_r \rightarrow A_\infty$ lorsque $r \rightarrow \infty$, d'où :

$$A_\infty \leq (1 + \tau_3(\epsilon|n)).$$

□

En appliquant le lemme 1.4, on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 1.6. — Il existe une fonction $\tau_4(\epsilon|n)$ telle que si M est une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ et telle que $\lambda_{n+1} \leq n + \epsilon$, alors on a $\left| \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 - 1 \right| \leq \tau_4(\epsilon|n)$.

Démonstration. — D'après le lemme 1.4, on a $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2(x) \leq (1 + \tau_3'(\varepsilon|n))$ pour tout point x de M (il suffit de poser $\beta_i = f_i(y)$ puis de faire $x = y$). De même on a :

$$|d(\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2)| = 2|\sum_{i=1}^{n+1} f_i df_i| \leq 2\sqrt{(1 + \tau_3'(\varepsilon|n))} \leq 3.$$

Soit $a = \inf \left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \right)$ et x_0 un point où cet infimum est atteint. Sur $B(x_0, \eta)$, on a (par le théorème des accroissements finis) : $\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \leq a + 3\eta$. D'où, pour tout $\eta \leq \frac{1-a+\tau_3(\varepsilon|n)}{3}$, on a :

$$1 = \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2 \leq \frac{\text{Vol}(B(x_0, \eta))}{\text{Vol}(M)} (a + 3\eta) + \left(1 - \frac{\text{Vol}(B(x_0, \eta))}{\text{Vol}(M)}\right) (1 + \tau_3(\varepsilon|n)).$$

D'où :

$$1 \leq \left(\frac{\eta}{\pi}\right)^n (a + 3\eta) + \left[1 - \left(\frac{\eta}{\pi}\right)^n\right] (1 + \tau_3(\varepsilon|n)),$$

d'après le théorème 1.1 (où on utilise le fait que $\text{Ric}(M) \geq 0$). Ceci implique l'inégalité :

$$\left(\frac{\eta}{\pi}\right)^n [1 + \tau_3(\varepsilon|n) - a - 3\eta] \leq \tau_3(\varepsilon|n).$$

Posons $\eta = \left(\frac{1-a+\tau_3(\varepsilon|n)}{6}\right)$, nous obtenons finalement :

$$a \geq 1 - 6\pi(\tau_3(\varepsilon|n)/3)^{1/(n+1)}.$$

□

On peut dès lors prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1.7. — *Il existe une fonction $\tau_5(\varepsilon|n)$ telle que si (M^n, g) est une variété riemannienne de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ et vérifiant $\lambda_{n+1}(M) \leq n + \varepsilon$ alors :*

$$\text{Vol}(M) \geq (1 - \tau_5(\varepsilon|n)) \text{Vol}(S^n).$$

Remarque. — Ce théorème achève de démontrer que pour une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ il est équivalent d'être de volume presque maximal, de Radius presque maximal ou de $n+1$ -ème valeur propre presque minimale.

Démonstration. — Commençons par définir les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} F : M & \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{F} : M' & \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \mapsto r \cdot F(x). \end{cases}$$

De ce qui précède, on déduit que l'application $\Phi = \frac{1}{|F|} \cdot F$ est correctement définie de M dans \mathbb{S}^n si ε est suffisamment petit. On remarquera de plus que ces fonctions sont construites de manière à imiter le plongement isométrique de $(\mathbb{S}^n, \text{can})$ dans l'espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} qui a été étudié en section 1.1.

Φ est presque contractante.

Dans la suite nous noterons p (resp. Π) la projection orthogonale de $T_x M'$ (resp. \mathbb{R}^{n+1}) sur $T_x M$ (resp. $T_{\Phi(x)} \mathbb{S}^n$) et i (resp. j) l'injection canonique de $T_x M$ (resp. $T_{\Phi(x)} \mathbb{S}^n$) dans $T_x M'$ (resp. \mathbb{R}^{n+1}).

Nous allons commencer par montrer que l'application Φ est presque contractante, il suffira alors, pour conclure, de montrer qu'elle est de plus surjective :

comme $d_x \Phi = \frac{1}{|F|} \Pi \circ (d'_{(x,1)} \tilde{F}) \circ i$, on a ${}^t(d_x \Phi) = \frac{1}{|F(x)} p \circ {}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F}) \circ j$. Si $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} , les définitions de F_i et de la transposée d'une application donnent :

$${}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F})(e_i) = \nabla' F_i = \nabla f_i(x) + f_i(x) \cdot e_i \quad (5)$$

de cette égalité, on déduit que, pour tout $v \in T_{\Phi(x)} \mathbb{S}^n$, ${}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F})(v)$ est orthogonal à e , d'où :

$${}^t(d_x \Phi)(v) = \frac{1}{|F(x)} {}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F})(v). \quad (6)$$

De plus, de l'égalité (5) et du lemme 1.4, on déduit que :

$$\|{}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F})(v)\| \leq [1 + \tau_3(\varepsilon|n)] \|v\| \quad (7)$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Cela veut dire que ${}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F})$ est presque contractante, et par conséquent ${}^t(d_x \Phi)$ et $(d_x \Phi)$ sont presque contractantes (d'après la relation (6) et la proposition 1.6).

Le degré de Φ vaut ± 1 (cas M orientable) :

Dans un premier temps nous supposons que M est orientable. De ce qui précède, on déduit l'inégalité suivante :

$$|\text{deg } \Phi| \text{Vol}(\mathbb{S}^n) = \left| \int_M \det(d_x \Phi) d\nu_g(x) \right| \leq (1 + \tau(\varepsilon|n)) \text{Vol}(M)$$

Or d'après le théorème de Bishop-Gromov 1.1, on a $\text{Vol}(M) \leq \text{Vol } S^n$; par ailleurs le degré d'une application est toujours un entier. Il suffit de montrer que le degré de Φ est non nul pour conclure que le volume de M est presque maximal (et alors le degré de Φ vaudra ± 1).

Il ne nous reste donc qu'à montrer que le degré de Φ est non nul. Et même, d'après l'égalité (6) et la proposition 1.6, il nous suffit de montrer que la valeur absolue de l'intégrale de $\det(d'_{(x,1)} \tilde{F})$, en restriction à $M \times \{1\}$, est supérieur à $1/2$.

(En effet, on peut munir \mathbb{R}^{n+1} et TM d'une orientation. On en déduit une orientation induite de $T_{\Phi(x)}S^n$ et une orientation de TM' qui prolonge celle de TM . Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ et $\{v_1, \dots, v_n\}$ des BON directes de T_xM et $T_{\Phi(x)}S^n$ (respectivement), alors $\{e, u_1, \dots, u_n\}$ et $\{\frac{F(x)}{|F(x)|}, v_1, \dots, v_n\}$ sont des BON directes de $T_{(x,1)}M'$ et \mathbb{R}^{n+1} . Les déterminants étant exprimés dans ces bases, nous avons :

$$\begin{aligned} \det \left[{}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F}) \right] &= \det \left({}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F}) \left(\frac{F}{|F|} \right), {}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F})(v_1), \dots, {}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F})(v_n) \right) \\ &= |F(x)|^{n+1} \det(e, {}^t(d_x \Phi)(v_1), \dots, {}^t(d_x \Phi)(v_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{en vertu de (6) et du fait que } g \left({}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F}) \left(\frac{F}{|F|} \right)(x), e \right) &= |F(x)|. \\ &= |F(x)|^{n+1} \det \left[{}^t(d_x \Phi) \right] \quad). \end{aligned}$$

Soit $h(x) = \text{tr} \left[(d'_{(x,1)} \tilde{F}) \circ {}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F}) \right]$. D'après l'équation (5), on a

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} |d f_i|^2 + f_i^2.$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M h(x) dx = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i}{n+1} + 1, \\ \|h\|_\infty \leq (n+1)(1 + \tau_3(\varepsilon|n)). \end{cases}$$

On pose $A_\varepsilon = \{h \leq (n+1)(1 - \sqrt{\tau_3(\varepsilon|n)})\}$, alors l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev nous donne :

$$\frac{\text{Vol}(A_\varepsilon)}{\text{Vol}(M)} < \sqrt{\tau_3(\varepsilon|n)}.$$

En tout point x de $M \setminus A_\varepsilon$, les valeurs propres $\mu_i(x)$ de l'opérateur symétrique $(d'_{(x,1)} \tilde{F}) \circ {}^t(d'_{(x,1)} \tilde{F})$ vérifient :

$$\begin{cases} \left| \left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i(x) \right) - (n+1) \right| \leq (n+1) \sqrt{\tau_3(\varepsilon|n)}, \\ \mu_i(x) \leq (1 + \tau_3(\varepsilon|n)), \end{cases}$$

d'où $\|\mu_i - 1\|_\infty \leq (2n+1) \sqrt{\tau_3(\varepsilon|n)}$ et $|1 - \det(d'_{(x,1)} \tilde{F})^2| \leq C(n) \sqrt{\tau_3(\varepsilon|n)}$.

Nous en déduisons :

$$\frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M [\det(d'_{(x,1)} \tilde{F})]^2 \geq [1 - \tau(\varepsilon|n)]. \quad (8)$$

Posons $u(x) = \det(d'_{(x,1)} \tilde{F})$ et $\tilde{u} = \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M u$. Nous devons donc montrer que $|\tilde{u}|$ n'est pas nulle pour conclure. Or l'hypothèse $\text{Ric}(M) \geq (n-1)$ implique $\lambda_1 \geq n$ (cf. le théorème de Lichnerowicz en appendice A). D'après l'inégalité de Poincaré, il nous suffit de montrer que la norme L^2 de (du) est universellement petite (ce qui prouvera que $|\tilde{u}| \geq 1 - \tau(\varepsilon|n)$).

Or si on prolonge $\{u_i\}$ en un repère orthonormé de TM au voisinage de x , tel que $D \cdot u_i = 0$ au point x , nous avons, pour tout $X \in T_x M$,

$$\begin{aligned} d_x u(X) &= X \cdot [\det(\tilde{F}(x,1), d'_{(x,1)} \tilde{F}(u_1), \dots, d'_{(x,1)} \tilde{F}(u_n))] \\ &= \overbrace{\det(d'_{(x,1)} \tilde{F}(X), d'_{(x,1)} \tilde{F}(u_1), \dots, d'_{(x,1)} \tilde{F}(u_n))}^{= 0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \det(\tilde{F}(x,1), d'_{(x,1)} \tilde{F}(u_1), \dots, D' d' \tilde{F}_{(x,1)}(X, u_i), \dots, d'_{(x,1)} \tilde{F}(u_n)) \\ &\leq C(n) |D'_X d' \tilde{F}| \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (7). Or, en intégrant la formule de Böchner appliquée à F_i dans la démonstration du lemme 1.4 (page 135), on obtient :

$$\| |D' d \tilde{F}| \|_{L^2(M \times \{1\})}^2 \leq \tau(\varepsilon|n). \quad (9)$$

d'où $\|du\|_{L^2}^2 \leq C(n) \cdot n \cdot \tau(\varepsilon|n)$, et finalement $|\text{deg} \Phi| \simeq |\tilde{u}|^2 > 1/2$.

Le cas non-orientable

Si (M^n, g) est non-orientable, on peut toujours construire l'application Φ et remarquer qu'elle se relève sur le revêtement riemannien orientable (\tilde{M}^n, \tilde{g}) à deux feuillets de M en une application de degré nécessairement paire. Or (\tilde{M}^n, \tilde{g}) est aussi de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, et les fonctions propres f_i de (M^n, g) se relèvent en des fonctions propres de (\tilde{M}^n, \tilde{g}) associées aux mêmes valeurs propres λ_i , donc d'une par (\tilde{M}^n, \tilde{g}) vérifie les hypothèses du théorème 1.7, mais si on considère la fonction $\tilde{\Phi}$ construite comme précédemment à partir des fonctions propres de (\tilde{M}^n, \tilde{g}) qui sont les relevées des premières fonctions propres de (M^n, g) on obtient rien d'autre que le relevé de la fonction Φ . La contradiction vient de ce que (\tilde{M}^n, \tilde{g}) étant orientable, $\tilde{\Phi}$ doit être de degré ± 1 . \square

Il ne nous reste plus qu'à montrer que l'une des hypothèses de pincement du volume, du radius ou de λ_{n+1} implique $d_{GH}(M, S^n) \leq \tau(\varepsilon|n)$. Il suffit même de démontrer, d'après ce qui précède, la proposition plus faible suivante (mais dont la démonstration est plus aisée, car on peut utiliser toutes les estimations précédentes) :

PROPOSITION 1.8. — *Il existe une fonction $\tau_5(\varepsilon|n)$ telle que pour toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$ et vérifiant $\text{Vol}(M) \geq (1 - \varepsilon) \text{Vol}(S^n)$, $\text{Rad}(M) \geq \pi - \varepsilon$ et $\lambda_{n+1} \leq n + \varepsilon$ on ait*

$$d_{GH}((M, g), (S^n, \text{can})) \leq \tau_5(\varepsilon|n).$$

Démonstration. — À un facteur multiplicatif près, il suffit de montrer qu'il existe une approximation de Hausdorff-Gromov assez bonne. Le bon candidat pour réaliser cette approximation est la fonction Φ . On sait déjà que l'application Φ est surjective pour ε assez petit, il ne reste donc qu'à montrer que pour tout $(x, y) \in M^2$, on a :

$$|d_{S^n}(\Phi(x), \Phi(y)) - d(x, y)| \leq \tau(\varepsilon|n).$$

Mais par uniforme continuité de \cos^{-1} sur l'intervalle $[0, \pi]$, il suffit de montrer que

$$|\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle - \cos(d(x, y))| \leq \tau(\varepsilon|n).$$

Pour montrer cela, on a besoin dans un premier temps d'établir l'équivalent L^∞ de l'estimation (ii) du lemme 1.2 :

LEMME 1.9. — *Il existe une fonction $\tau_6(\varepsilon|n)$ telle que, sous les hypothèses de la proposition 1.8, on ait :*

$$\left\| \cos(d(x_0, \cdot)) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i|x_0} f_i \right\|_{L^\infty} \leq \tau_6(\varepsilon|n).$$

Démonstration. — Pour démontrer ce lemme, on applique la même méthode que dans la démonstration de la proposition 1.6. On pose $f = \cos(d(x_0, \cdot)) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i|x_0} f_i$. On a alors

$$\|df\|_{L^\infty} \leq 2 + \tau(\varepsilon|n) \leq C(n)$$

(d'après le lemme 1.4 et le lemme 1.2) et, toujours d'après le lemme 1.2,

$$\|f\|_2^2 \leq \tau(\varepsilon|n).$$

Donc, pour tout $r > 0$ et tout point x_1 de M tel que $|f(x_1)| = \|f\|_{L^\infty}$, on a, en utilisant le fait que $|f|^2 \geq \|f\|_{L^\infty}(\|f\|_{L^\infty} - Cr)$ sur $B(x_1, r)$ par le théorème des accroissements finis :

$$\tau(\varepsilon|n) \geq \|f\|_{L^\infty} (\|f\|_{L^\infty} - 2Cr) \frac{\text{Vol}(B(x_1, r))}{\text{Vol}(M)}$$

En posant $r = \tau^{\frac{1}{2n}}$ et en utilisant le théorème de Bishop-Gromov 1.1, on obtient $\sqrt{\tau} \geq \|f\|_{L^\infty} (\|f\|_{L^\infty} - 2C\tau^{\frac{1}{2n}}) \frac{1}{\pi^n}$ et donc (quitte à changer τ) le résultat annoncé. \square

Fin de la proposition 1.8

Pour conclure, on voit que comme dans le cas de la sphère (cf. section 1.1), il suffit de montrer que $|\alpha_{i|x} - f_i(x)| \leq \tau(\varepsilon|n)$. En effet, on aura alors

$$\begin{aligned} \cos(d(x_0, x)) &\simeq \sum_i \alpha_{i|x_0} f_i(x) \simeq \sum_i f_i(x_0) \cdot f_i(x) \\ &\simeq \langle \Phi(x), \Phi(x_0) \rangle = \cos[d_{S^n}(\Phi(x_0), \Phi(x))], \end{aligned}$$

en utilisant également le lemme 1.9 et la proposition 1.6.

Or, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_{i|x} - f_i(x))^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i|x}^2 + \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i|x} \cdot f_i(x) \\ &\leq 2 + \tau(\varepsilon|n) - 2 \cos(d(x, x)) = \tau(\varepsilon|n). \end{aligned}$$

d'après le lemme 1.2, le lemme 1.9 et la proposition 1.6, ce qui conclut. \square

Dans cette première partie, on a donc montré l'équivalence entre : la presque maximalité du volume, celle du radius, le pincement des $(n+1)$ premières valeurs propres du Laplacien et la proximité avec la sphère S^n au sens de Hausdorff-Gromov pour une variété de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$.

2. Construction du difféomorphisme en courbure sectionnelle majorée

Pour construire le difféomorphisme entre M^n et S^n nous allons nous donner un majorant de la courbure sectionnelle qui nous permettra, en nous inspirant des travaux de S. Ilias (cf. [14]) de transformer l'estimation L^2 du Hessien des fonctions propres associées aux petites valeurs propres donnée dans la démonstration du théorème 1.9 (inégalité 9, p. 141) en une estimation L^∞ . On en déduira alors facilement que l'application Φ construite dans la section précédente est un difféomorphisme, et même une presque-isométrie, dans le sens précisé par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Pour tout $A > 1$, il existe une constante $\varepsilon(A, n)$ et une fonction $\tau(\varepsilon|n, A)$ telles que, sur toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)$, de courbure sectionnelle inférieure à A et vérifiant $\text{Vol}(M) \geq (1-\varepsilon) \text{Vol}(S^n)$ (avec $\varepsilon \leq \varepsilon(n, A)$), l'application $\Phi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} f_i^2(x)}} (f_1(x), \dots, f_n(x))$, donnée*

par les $(n+1)$ premières fonctions propres f_i du Laplacien, soit un difféomorphisme de M sur S^n .

De plus Φ est une presque-isométrie, i.e. pour tout $u \in TM \setminus \{0\}$, on a :

$$(1 - \tau(\varepsilon|A, n)) \leq \frac{\langle d\Phi(u), d\Phi(u) \rangle}{g(u, u)} \leq 1 + \tau(\varepsilon|A, n).$$

Remarque. — Ce théorème est énoncé avec l'hypothèse de presque maximalité du volume, mais on pourrait tout aussi bien l'énoncer sous l'hypothèse de presque maximalité du radius, du pincement des $(n+1)$ premières valeurs propres ou pour un voisinage

suffisamment petit de la sphère en distance de Hausdorff-Gromov d'après la section précédente (théorème 0.3).

Démonstration. — Elle est fondée sur le lemme suivant, dont on renvoie la démonstration à la fin de cette partie :

LEMME 2.2. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tau(\varepsilon|A, n) > 0$ telle que sur toute variété riemannienne compacte (M^n, g) de courbure de Ricci supérieure à $(n - 1)$ et de courbure sectionnelle inférieure à A , on ait $\|D' d'(r f_i)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$ pour toute fonction propre f_i correspondant à une valeur propre λ_i inférieure à $n + \tau(\varepsilon|n)$.*

On a :

$$\left| \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M g'_{(x,1)}(d' F_i, d' F_j) dv_g - \delta_{ij} \right| = \frac{|\lambda_i - n|}{n+1} \delta_{ij} \leq \tau(\varepsilon|A, n),$$

et, en utilisant les lemmes 1.4 et 2.2, on obtient :

$$\|d(g'(d' F_i, d' F_j))\|_{L^\infty} \leq \|g'(D' d' F_i, d' F_j)\|_{L^\infty} + \|g'(d' F_i, D' d' F_j)\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$$

donc, par le théorème des accroissements finis et le théorème de Myers, on en déduit que :

$$\|g'(d' F_i, d' F_j) dv_g - \delta_{ij}\|_{L^\infty} \leq \tau(\varepsilon|A, n) + \varepsilon \text{Diam}(M) \leq \tau(\varepsilon|A, n) + \varepsilon \pi,$$

soit $\|(d' \tilde{F}) \circ^t (d' \tilde{F}) - id_{\mathbb{R}^{n+1}}\|_{L^\infty} \leq \tau(\varepsilon|A, n)$, i.e. $d' \tilde{F}$ est presque isométrique. D'après la formule (6) (p. 139) et la proposition 1.6, on en déduit que $(d_x \Phi)$ est presque isométrique. \square

Nous passons maintenant à la démonstration du lemme 2.2 :

Démonstration. — La démonstration de ce lemme utilise le même schéma de preuve que pour la majoration de la norme L^2 du hessien des fonctions propres (cf. la démonstration du théorème 1.7). On applique d'abord une formule de Böchner-Weitzenböck à F_i puis une technique d'itérations à la DeGiorgi-Möser, déjà utilisée dans la démonstration du lemme 1.4. Elle est toutefois plus délicate.

On admettra la formule de Weitzenböck suivante :

LEMME 2.3. — *Soit h un 2-tenseur symétrique défini sur TM , et pour tout $p \in M$, soit $\{e_i\}$ une BON de $T_p M$. on a alors :*

$$\frac{1}{2} \Delta |T|^2 = \langle \Delta_L T, T \rangle - |DT|^2 - \langle R(T), T \rangle.$$

où

$$\begin{aligned} R(h)(e_i, e_j) = & \sum_k \text{Ric}_M(e_i, e_k) h(e_k, e_j) + h(e_i, e_k) \text{Ric}(e_k, e_j) \\ & - 2 \sum_{k,l} R(e_i, e_k, e_j, e_l) h(e_k, e_l), \end{aligned}$$

et $\Delta_L h = D^* Dh + R(h)$ est appelé le Laplacien de Lichnerowicz (D^* est l'adjoint de D pour le produit scalaire L^2).

Posons $T = Dd f_i + \frac{\lambda_i}{n} f_i g = D' dF_i - \frac{\lambda_i - n}{n} f_i g$, d'après le lemme 1.4, il suffit donc de montrer que $\|T\|_\infty$ est petit dès que $(\lambda_i - n)$ est assez petit. De plus, on a :

$$\|T\|_2 \leq \|D' dF_i\|_{L^2(M)} + \frac{\lambda_i - n}{n + 1},$$

et on a déjà montré en (9) l'inégalité $\|D' dF_i\|_{L^2(M)} \leq \tau(\epsilon|n)$. On en déduit qu'il suffit de majorer universellement le rapport $\frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_2}$ pour pouvoir conclure. Comme pour la démonstration de lemme 1.4, nous allons faire cela en utilisant de façon itérative l'inégalité de Sobolev donnée par le lemme 1.5.

Mais pour cela nous avons besoin de plusieurs lemmes :

LEMME 2.4. — Soit (M^n, g) une variété riemannienne de courbure de Ricci supérieure à $n-1$ et de courbure sectionnelle inférieure à A . Si f_i est une fonction propre de M associée à la valeur propre λ_i et qu'on pose $T = Dd f_i + \frac{\lambda_i}{n} f_i g$, alors on a :

$$\frac{1}{2} \Delta |T|^2 + |DT|^2 \leq (\lambda_i - 2nA) |T|^2 + \langle \square \text{Ric}_M, d f_i \otimes T \rangle$$

où on a posé :

$$\square \text{Ric}_M(e_k; e_i, e_j) = D_{e_k} \text{Ric}_M(e_i, e_j) - D_{e_j} \text{Ric}_M(e_k, e_i) - D_{e_i} \text{Ric}_M(e_j, e_k).$$

Démonstration. — D'après le lemme 2.3, on a :

$$\frac{1}{2} \Delta |T|^2 + |DT|^2 = \langle \Delta_L T, T \rangle - \langle R(T), T \rangle.$$

Or T est un tenseur symétrique, il existe donc une base $\{e_i\}$ de $T_p M$ qui le diagonalise en $p \in M$, et alors on a :

$$\begin{aligned} \langle R(h), h \rangle &= \sum_{i,j} \left(\text{Ric}_M(e_i, e_j) T^2(e_j, e_j) \delta_{i,j} + \delta_{i,j} T^2(e_i, e_i) \text{Ric}_M(e_i, e_j) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_k R(e_i, e_k, e_j, e_k) T(e_k, e_k) \delta_{i,j} T(e_i, e_j) \right) \\ &= \sum_i \sum_k \sigma(e_i, e_j) T^2(e_i, e_i) + T(e_k, e_k) \sigma(e_i, e_i) - 2 \sigma(e_i, e_k) T(e_k, e_k) T(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i,k} \sigma(e_i, e_k) [T(e_i, e_i) - T(e_k, e_k)]^2 \\ &\geq 2A(n|T|^2 - (\text{tr } T)^2) \\ &\geq 2An|T|^2. \end{aligned}$$

De plus, si $\{e_i\}$ est une BON au voisinage de p telle que $D \cdot e_i = 0$ en p , alors :

$$\begin{aligned}
& (\Delta_L(Dd f) - Dd\Delta f)(e_i, e_j) \\
&= (\Delta_L(Dd f) - D(\Delta d f))(e_i, e_j) \\
&= \sum_k DDDd f(e_i, e_k, e_k, e_j) - \sum_k DDDd f(e_k, e_k, e_i, e_j) \\
&\quad - \sum_a D_{e_i}[\text{Ric}(e_j, e_a) d f(e_a)] + \sum_k \text{Ric}(e_i, e_k) Dd f(e_k, e_j) \\
&\quad + \sum_k \text{Ric}(e_j, e_k) Dd f(e_i, e_k) - 2 \sum_{k,l} R(e_i, e_k, e_j, e_l) Dd f(e_k, e_l).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \sum_k DDDd f(e_i, e_k, e_k, e_j) - \sum_k DDDd f(e_k, e_k, e_i, e_j) \\
&= \sum_k (D_{e_i} D_{e_k} - D_{e_k} D_{e_i})(D_{e_k} d f(e_j)) \\
&\quad + \sum_k D_{e_k} [(D_{e_i} D_{e_k} - D_{e_k} D_{e_i}) d f(e_j)] \\
&= \left[\sum_{a,k} R(e_i, e_k, e_j, e_a) Dd f(e_k, e_a) - \text{Ric}(e_i, e_a) Dd f(e_a, e_j) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{a,k} (D_{e_k} R)(e_i, e_k, e_j, e_a) d f(e_a) + \sum_a R(e_i, e_k, e_j, e_a) Dd f(e_k, e_a) \right].
\end{aligned}$$

Après simplification, on a donc :

$$\begin{aligned}
(\Delta_L(Dd f) - Dd\Delta f)(e_i, e_j) &= - \sum_a (D_{e_i} \text{Ric})(e_j, e_a) d f(e_a) \\
&\quad + \sum_{k,a} (D_{e_k} R)(e_i, e_k, e_j, e_a) d f(e_a)
\end{aligned}$$

La seconde identité de Bianchi donne alors :

$$(\Delta_L(Dd f) - Dd\Delta f)(e_i, e_j) = \square \text{Ric}_M(\nabla f; e_i, e_j).$$

On conclut enfin en remarquant que :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_L T, T \rangle &= \langle \Delta_L Dd f_i, T \rangle = \langle Dd\Delta f_i, T \rangle + \langle \square \text{Ric}_M, d f_i \otimes T \rangle \\
&= \lambda_i |T|^2 + \langle \square \text{Ric}_M, d f_i \otimes T \rangle
\end{aligned}$$

car $\Delta_L(g) \equiv 0$, donc $\Delta_L(f \cdot g) = (\Delta f) \cdot g$, i.e. $\langle \Delta_L(f \cdot g), T \rangle = 0$ puisque T est de trace nulle. \square

LEMME 2.5. — *Sous les mêmes hypothèses que pour le lemme 2.4 et pour tout $k \geq 2$, on a :*

$$\frac{4k-3}{k^2} \|d(|T|^k)\|_2^2 \leq C(n, A) [k^2 + \|T\|_\infty^2] \|T\|_{2k-2}^{2k-2}$$

Démonstration. — D'après le lemme 2.4, on a :

$$\int_M \frac{1}{2} \Delta |T|^2 |T|^{2k-2} + |DT|^2 |T|^{2k-2} \leq (\lambda_i - 2nA) \int_M |T|^{2k} + \int_M \langle \square \text{Ric}_M, d f_i \otimes T \rangle |T|^{2k-2}.$$

Il nous faut estimer $\frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \langle \square \text{Ric}_M, d f_i \otimes T \rangle |T|^{2k-2}$:

Commençons par remplacer Ric_M par $\overline{\text{Ric}}_M = \text{Ric}_M - (n-1) \frac{k_1+k_2}{2} g$ où $k_1(n-1)$ (resp. $k_2(n-1)$) est la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de Ric_M sur M (elle existe car M est compacte, et est majorée (resp. minorée) universellement en fonction de A).

On a $\square \overline{\text{Ric}}_M = \square \text{Ric}_M$, et en utilisant la symétrie de T , on obtient :

$$\int_M \langle \square \overline{\text{Ric}}_M, d f_i \otimes T \rangle |T|^{2k-2} = \int_M \langle D \overline{\text{Ric}}_M, d f_i \otimes T \rangle |T|^{2k-2} - 2 \int_M \langle D \overline{\text{Ric}}_M, T \otimes d f_i \rangle |T|^{2k-2}.$$

En appliquant le théorème de la divergence au champ $X = \langle \overline{\text{Ric}}_M, T \rangle |T|^{2k-2} \nabla f_i$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_M \langle D \overline{\text{Ric}}_M, d f_i \otimes T \rangle |T|^{2k-2} &= \int_M \Delta f_i \langle \overline{\text{Ric}}_M, T \rangle |T|^{2k-2} \\ &\quad - \int_M \langle d f_i \otimes \overline{\text{Ric}}_M, DT \rangle |T|^{2k-2} \\ &\quad - (2k-2) \int_M \langle d f_i \otimes \overline{\text{Ric}}_M, d|T| \otimes T \rangle |T|^{2k-3}. \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} &-2 \int_M \langle D \overline{\text{Ric}}_M, T \otimes d f_i \rangle |T|^{2k-2} \\ &= 2 \int_M \sum_{k,l,m} \overline{\text{Ric}}_M(e_k, e_l) \cdot T(e_m, e_k) D d f_i(e_m, e_l) |T|^{2k-2} \\ &\quad + 2 \int_M \sum_{k,l,m} \overline{\text{Ric}}_M(e_k, e_l) \cdot D_{e_m} T(e_m, e_k) d f_i(e_l) |T|^{2k-2} \\ &\quad + 2(2k-2) \int_M \langle d|T| \otimes \overline{\text{Ric}}_M, T \otimes d f_i \rangle |T|^{2k-3}. \end{aligned}$$

Enfin remarquons que :

$$\begin{aligned} & \sum_{k,l,m} \overline{\text{Ric}}_M(e_k, e_l) \cdot T(e_m, e_k) Dd f_i(e_m, e_l) |T|^{2k-2} \\ &= \sum_{k,l,m} \overline{\text{Ric}}_M(e_k, e_l) \cdot T(e_m, e_k) T(e_m, e_l) |T|^{2k-2} \\ & \quad - \frac{\lambda_i}{n} f_i \langle \overline{\text{Ric}}_M, T \rangle |T|^{2k-2} \end{aligned}$$

D'après les calculs ci-dessus et l'inégalité de Kato ($|d|T|| \leq |DT|$), on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_M \langle \square \text{Ric}_M, d f_i \otimes T \rangle |T|^{2k-2} \right| &\leq \| \text{Ric} \|_{L^\infty} (A(n) \lambda_i \int_M f_i |T|^{2k-1} \\ & \quad + B(n) \int_M |T|^{2k} + D(n) \int_M k |DT| |T|^{2k-2} |d f_i|) \\ &\leq C(n) (k_1 - k_2) \left(\| f_i \|_{L^\infty} \int_M |T|^{2k-1} \right. \\ & \quad \left. + \int_M |T|^{2k} + k \| d f_i \|_{L^\infty} \int_M |DT| |T|^{2k-2} \right). \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.4 et ce qui précède, on a, si $\lambda_i \leq \lambda$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \frac{1}{2} \Delta(|T|^2) |T|^{2k-2} + |DT|^2 |T|^{2k-2} \\ \leq C'(n, A, \lambda) \left(\| T \|_{2k}^{2k} + \| f_i \|_\infty \| T \|_{2k-1}^{2k-1} \right. \\ \left. + k^2 \| d f_i \|_\infty^2 \| T \|_{2k-2}^{2k-2} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M |DT|^2 |T|^{2k-2} \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème des accroissements finis, et puisque $\int_M f_i = 0$, on a $\| f_i \|_\infty \leq \pi \cdot \| d f_i \|_\infty$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \Delta(|T|^2) |T|^{2k-2} + |DT|^2 |T|^{2k-2} \\ \leq C(n, A, \lambda) \left(\| T \|_{2k}^{2k} + k^2 \| d f_i \|_\infty^2 \| T \|_{2k-2}^{2k-2} \right). \end{aligned}$$

Soit, d'après le lemme 1.4 l'hypothèse sur λ_i et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \Delta(|T|^2) |T|^{2k-2} + |DT|^2 |T|^{2k-2} \leq C(n, A) \left[k^2 + \| T \|_\infty^2 \right] \| T \|_{2k-2}^{2k-2}.$$

Or on a :

$$\frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M |d(|T|^k)|^2 \leq \frac{2k^2}{4k-3} \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \frac{1}{2} \Delta(|T|^2) |T|^{2k-2} + \frac{1}{2} |DT|^2 |T|^{2k-2},$$

ce qui permet de conclure. \square

En utilisant l'inégalité de Sobolev donnée par le lemme 1.5, on obtient :

$$\|T\|_{\frac{2k}{n-2}}^{2k} \leq \left(\|T\|_{\infty}^2 + B(n,A) \frac{k^2}{4k-3} (k^2 + \|T\|_{\infty}^2) \right) \|T\|_{2k-2}^{2k-2}.$$

On a vu précédemment qu'il existe une fonction $\tau(\epsilon|n)$ telle que $\|T\|_2 \leq \tau(\epsilon|n)$, supposons alors que T satisfasse l'inégalité $\|T\|_{\infty} \geq \tau(\epsilon|n)^{\alpha}$, où α est une constante qui sera précisée dans la suite. On peut supposer ϵ assez petit pour que $\tau(\epsilon,n) \leq 1$, on a alors :

$$\|T\|_{\frac{2k}{n-2}}^{2k} \leq \left(\frac{1 + B'(n,A)k^3}{\tau(\epsilon|n)^{2\alpha}} \right) \|T\|_{\infty}^2 \|T\|_{2k-2}^{2k-2}.$$

On pose alors $\beta = \frac{n}{n-2}$ et $k = \beta^i + 1$, pour tout entier i . En utilisant l'inégalité de hölder, on obtient :

$$\frac{\|T\|_{2\beta^{i+1}}^{2\beta^{i+1}}}{\|T\|_{\infty}^{2\beta^{i+1}}} \leq \left(1 + B''(n,A)\beta^{3i} \right)^{\frac{1}{2(\beta^i+1)}} \tau(\epsilon|n)^{-\frac{\alpha}{(\beta^i+1)}} \left(\frac{\|T\|_{2\beta^i}}{\|T\|_{\infty}} \right)^{\frac{\beta^i}{(\beta^i+1)}}.$$

En posant $a(n) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^i}{(\beta^i+1)} < 1$ et $K(n,A) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + B''(n,A)\beta^{3i} \right)^{\frac{1}{2a(n)\beta^i}}$, on obtient (en itérant l'inégalité précédente) :

$$\|T\|_{\infty} \leq K(n,A) \tau(\epsilon|n)^{-\alpha \frac{1-a(n)}{a(n)}} \|T\|_2.$$

En posant $\alpha = \frac{a(n)}{2(1-a(n))}$, on obtient :

$$\|T\|_{\infty} \leq K(n,A) \sqrt{\tau(\epsilon|n)}.$$

En final, on en déduit que :

$$\|T\|_{\infty} \leq \sup(K(n,A) \sqrt{\tau(\epsilon|n)}, \tau(\epsilon|n)^{\frac{a(n)}{2(1-a(n))}}).$$

\square

3. Appendice A :

Quelques propriétés des variétés à courbure de Ricci positive :

3.1. La courbure de Ricci et le Laplacien

La courbure de Ricci, comme toutes les autres notions de courbure, est un outil permettant l'étude locale des variétés riemanniennes. Nous ne travaillerons, dans la suite, que dans le cadre riemannien. C'est-à-dire que la connection de nos variétés est celle de Levi-Civita. Si (M, g) est une variété riemannienne le tenseur de courbure est :

$$R(X, Y, Z, W) = g(D_X D_Y W - D_Y D_X W - D_{[X, Y]} W, Z). \quad (1.1)$$

On a alors, en particulier, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a) \quad R(X, Y, Z, W) &= -R(Y, X, Z, W) = R(Y, X, W, Z) \\ b) \quad R(X, Y, Z, W) &= R(Z, W, X, Y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

La courbure de Ricci, notée Ric, est une trace de R . Si $e_1, \dots, e_n \in T_p M$ est une base orthonormale, alors :

$$\text{Ric}(v, w) = \text{tr}_{13} R(v, w) = \sum_{i=1}^n R(e_i, v, e_i, w) = \sum_{i=1}^n R(v, e_i, w, e_i) \quad (1.2)$$

D'après les formules (1.2), Ric est une forme bilinéaire symétrique. On dira que la courbure de Ricci de M est minorée par k si $(\text{Ric} - kg)$ est une forme bilinéaire positive. Pour toute fonction f de classe C^∞ définie sur M , on définit Δf par :

$$\Delta f = -\text{tr} Dd f = -\sum_i Dd f(e_i, e_i) \quad (1.4)$$

On peut alors démontrer en utilisant le théorème de Stokes la formule suivante, appelée formule de Green :

$$\int_U (f \Delta h - h \Delta f) d\nu_g = \int_{\partial U} (f \frac{\partial h}{\partial \nu} - h \frac{\partial f}{\partial \nu}) \omega_{n-1}$$

où U est un ouvert tel que \bar{U} est une variété à bord, $d\nu_g$ est la mesure canonique de (M, g) , ν la normale intérieure et ω_{n-1} est la mesure induite sur la sous-variété ∂U .

3.2. Régularité de la fonction distance

Soit x un point donné de M , une variété compacte. On définit alors :

$$U_x = \{v \in T_x M / \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que la géodésique } t \rightarrow \exp_x(tv) \text{ minimise sur } [0, 1 + \varepsilon]\}.$$

Les résultats suivants sont classiques, et seront utilisés sans démonstration :

U_x est un ouvert, $M = \exp_x(U_x) \cup \exp_x(\partial U_x)$, $\exp_x|_{U_x}$ est un C^∞ difféomorphisme sur son image et $\exp_x(\partial U_x)$ est de mesure nulle. On notera $\exp_x(\partial U_x) = \text{Cut}(x)$.

3.3. Théorème de Bishop-Gromov

Les théorèmes de comparaison sont des outils permettant, sous de bonnes hypothèses sur la courbure (en général on minore la courbure de Ricci ou on encadre la courbure sectionnelle), de comparer la géométrie d'une variété avec celle d'autres variétés de référence, de courbure sectionnelle constante. Le premier résultat est l'inégalité de Bishop-Gromov :

THÉORÈME 3.1 (Bishop-Gromov). — Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète de courbure de Ricci supérieure à $(n-1)k$, où k est un réel donné. Alors, pour tous les ε, R tels que $0 < \varepsilon < R$, on a, $\forall x \in M$:

$$\left(\frac{V_x(R)}{V_x(\varepsilon)} \right) \leq \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)}, \quad (3.1)$$

où $V^k(r)$ désigne le volume de la boule de rayon r dans l'espace complet simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à k (c'est-à-dire \mathbb{R}^n si $k = 0$, $S^n(1/\sqrt{k})$ si $k > 0$ et $(H^n, g_0/\sqrt{-k})$ si $k < 0$, où (H^n, g_0) est l'espace hyperbolique canonique).

Démonstration. — Pour démontrer cette formule, on doit étudier les variations de la mesure riemannienne de (M^n, g) en fonction de la distance à un point donné. Cette étude peut-être faite en passant par celle du Laplacien de la distance sur la variété. Il est naturel de l'exprimer dans la carte normale centrée en un point m fixe. Soit $\Phi :]0, \infty[\times S^{n-1} \rightarrow M$ l'inverse de la carte normale en m , ie $\Phi(r, v) = \exp_m(rv)$. On a alors $\Phi^* dv_g = \theta(r, v) dr dv$. Supposons que $r \cdot v \in U_x$, alors pour tout voisinage U assez petit de v dans S^{n-1} , pour tout ε assez petit, tout point (t, u) de $[r, r + \varepsilon] \times U$ est tel que $t \cdot u$ appartienne à U_x (puisque U_x est ouvert). Donc la fonction θ est régulière et non nulle sur un voisinage de $[r, r + \varepsilon] \times U$ et la fonction $\rho = d(m, \cdot)$ est régulière sur $\Phi([r, r + \varepsilon] \times U)$. On en déduit que, quand ε et le diamètre de U tendent vers 0,

$$\begin{aligned} \Delta \rho[\Phi(r, v)] \cdot \left(\int_{[r, r + \varepsilon] \times U} \theta(t, u) dt du \right) & \\ \simeq \int_{\Phi([r, r + \varepsilon] \times U)} \Delta \rho dv_g & \\ = \int_{\partial(\Phi([r, r + \varepsilon] \times U))} \frac{\partial \rho}{\partial v} \omega_{n-1} & \\ = \text{Vol}_{n-1}[\Phi(\{r\} \times U)] - \text{Vol}_{n-1}[\Phi(\{r + \varepsilon\} \times U)] & \\ = \int_U \theta(r, u) du - \int_U \theta(r + \varepsilon, u) du & \\ = \int_{[r, r + \varepsilon] \times U} -\frac{\partial \theta}{\partial r}(t, u) dt du & \\ \simeq -\frac{1}{\theta(r, v)} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r}(r, u) \left(\int_{[r, r + \varepsilon] \times U} \theta(t, u) dt du \right) & \end{aligned}$$

D'où il vient que $\Delta \rho = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r}$ sur $M \setminus \text{Cut}(x)$.

En fait, on peut montrer que $\Delta\rho$ se décompose en une partie régulière, que nous venons de calculer, définie sur U_x , et une partie singulière qui est une mesure positive à support dans $\text{Cut}(x)$.

Pour mener plus loin notre étude de la fonction θ , on a maintenant besoin de la formule de Böchner :

PROPOSITION 3.2 (Formule de Böchner). — *Pour toute fonction f de classe C^∞ sur (M, g) , on a :*

$$g(d(\Delta f), df) = |Ddf|^2 + \frac{1}{2}\Delta(|df|^2) + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f). \quad (3.4)$$

Démonstration. — Les formules de Böchner sont les formules obtenues en traçant des formules de commutation de tenseurs. Ici on calcule la différence :

$$DDdf(X, Y, Z) - DDdf(Y, X, Z)$$

or, on a :

$$\begin{aligned} DDdf(X, Y, Z) &= X \cdot Ddf(Y, Z) - Ddf(D_X Y, Z) - Ddf(Y, D_X Z) \\ &= X \cdot (Y \cdot df(Z)) - X \cdot df(D_Y Z) - (D_X Y) \cdot df(Z) \\ &\quad + df(D_{D_X Y} Z) - Y \cdot df(D_X Z) + df(D_Y D_X Z), \end{aligned}$$

d'où :

$$DDdf(X, Y, Z) - DDdf(Y, X, Z) = df(R(Y, X)Z) = R(X, Y, Z, \nabla f). \quad (3.5)$$

D'autre part :

$$DDdf(X, Y, Z) = DDdf(X, Z, Y) \quad (3.6)$$

(car $Ddf(Y, Z) - Ddf(Z, Y) = ([Y, Z] + D_Z Y - D_Y Z) \cdot f = 0$ car la torsion est nulle). On obtient, en traçant la relation (3.5) et en utilisant (3.6) :

$$\begin{aligned} \text{tr}_{12} DDdf(Y) &= D_Y(\text{tr}_{12} Ddf) + \text{tr}_{13} R(\nabla f, Y) \\ &= -d\Delta f(Y) + \text{Ric}(\nabla f, Y). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Enfin, on a : $d(|df|^2)(X) = 2g(D_X df, df)$, d'où

$$\begin{aligned} Dd(|df|^2)(X, Y) &= 2g(D_X df, D_Y df) + 2g(D_Y D_X df, df) - 2g(D_{D_X Y} df, df) \\ &= 2g(D_X df, D_Y df) + 2g(DDdf(X, Y), df) \end{aligned}$$

soit, en traçant

$$-\frac{1}{2}\Delta|df|^2 = |Ddf|^2 + \text{tr}_{12} DDdf(\nabla f) \quad (3.8)$$

En combinant (3.7) et (3.8) on obtient la formule annoncée. \square

Nous adopterons, par souci de concision, la notation $f'(r, \nu)$ pour $\frac{\partial f}{\partial r}(r, \nu)$.

En posant $f(x) = r = d(p, x)$, en notant que $|dr| = 1$ et que r est régulière sur $\Phi(U_x)$, on a :

$$g(d(\Delta r), dr) = \frac{\partial}{\partial r} \Delta r = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{\theta''}{\theta} + (\Delta r)^2,$$

on obtient :

$$-\frac{\theta''}{\theta} = |Ddr|^2 - (\Delta r)^2 + \text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right). \quad (3.9)$$

On pose $b = \theta^{\frac{1}{n-1}}$, alors :

$$(n-1) \frac{b''}{b} + \text{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = -(|Ddr|^2 - \frac{1}{n-1} (\Delta r)^2) \leq 0. \quad (3.10)$$

La dernière inégalité étant une conséquence de l'inégalité de Schwarz (le $n-1$ provenant du fait que $Ddr\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = d\left(dr\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = d(1)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = 0$, car $D_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} = 0$ puisque $r \mapsto \Phi(r, \nu)$ est une géodésique).

En utilisant l'hypothèse sur la courbure (on remarquera qu'elle n'a pas été utilisée dans ce qui précède), on obtient :

$$b'' + kb \leq 0.$$

on pose alors :

$$f = \frac{b}{\bar{b}},$$

où \bar{b} est solution de l'équation

$$\bar{b}'' + k\bar{b} = 0$$

avec pour conditions initiales $\bar{b}(0) = b(u, 0) = 0$ et $\bar{b}'(0) = b'(u, 0) = 1$ car $\theta(r, \nu) \simeq r^{n-1}$ puisque l'application tangente à \exp_m au point 0_m est $id_{T_m M}$, donc une isométrie de $T_m M$. On pose aussi

$$f' = \frac{h}{\bar{b}^2}.$$

On a alors

$$h' = \bar{b}(b'' + kb) \leq 0,$$

donc h décroît et, comme $h(0) = 0$, $f' = h$ est négatif.

On en déduit que f aussi décroît. On appelle b^+ le prolongement de b à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{n-1}$ obtenu en prolongeant par 0 en dehors de U_x – on remarquera que \bar{b} est définie sur \mathbb{R} tout entier (mais peut être négative en courbure positive, ce qui ne correspond plus à la géométrie!), alors que b n'est définie que sur le segment de direction u contenu dans U_x . Alors $\frac{b^+}{\bar{b}}$ reste décroissante car si le segment $t \mapsto t \cdot u$ atteint le bord de U_x après que \bar{b} ne s'annule, alors la décroissance implique que b s'est annulé auparavant, ce qui est contradictoire.

Donc $b^+(t, \nu)^{n-1}$ est minorée (resp. majorée) par $\frac{b^+(\varepsilon, \nu)^{n-1}}{b(\varepsilon)} \cdot \bar{b}(t)$ sur $[0, \varepsilon]$ (resp. sur $[\varepsilon, R]$). En intégrant ces inégalités, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^R b^+(r, \nu)^{n-1} dr}{\int_0^\varepsilon \bar{b}^+(r, \nu) dr} &\leq 1 + \frac{\int_\varepsilon^R b^+(r, \nu)^{n-1} dr}{\int_0^\varepsilon b^+(r, \nu)^{n-1} dr} \\ &\leq 1 + \frac{\int_\varepsilon^R \bar{b}(r) dr}{\int_0^\varepsilon \bar{b}(r) dr} \leq \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

D'où nous tirons :

$$\begin{aligned} V_x(R) &= \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^R b^+(r, \nu)^{n-1} dr \right) d\nu \\ &\leq \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)} \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\varepsilon b^+(r, \nu)^{n-1} dr \right) d\nu \\ &\leq \frac{V^k(R)}{V^k(\varepsilon)} V_x(\varepsilon). \end{aligned}$$

□

On peut déduire de la démonstration du théorème de Bishop-Gromov (plus particulièrement de la version locale du théorème de Bishop-Gromov : le fait que $\frac{b}{b}$ soit décroissante) le théorème de Myers cité en introduction :

THÉORÈME 3.3 (Myers). — *Soit M une variété riemannienne compacte vérifiant $\text{Ric}(M) \geq (n-1)\delta^2$, où δ est une constante strictement positive. Alors la variété M est compacte et de diamètre inférieure à $\frac{\pi}{\delta}$.*

Démonstration. — D'après le théorème de Hopf-Rinow il suffit de démontrer l'inégalité sur le diamètre. Or, en reprenant les notations de la preuve précédente en coordonnées polaires exponentielles autour de n'importe quel point x , on obtient que, le long de toute géodésique minimisante $c_\nu : r \mapsto \exp_x(r \cdot \nu)$, on a $\theta^+(r, \nu) \leq \frac{\sin(\delta \cdot r)}{\delta}$; donc $\theta^+(\cdot, \nu)$ s'annule sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{\delta}]$ (au point où c_ν rencontre le cut-locus de x). On en déduit que toute géodésique minimisante est de longueur au plus $\frac{\pi}{\delta}$. □

En dernier lieu, nous donnons une autre application de la formule de Böchner :

THÉORÈME 3.4 (Lichnerowicz). — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$ et f une fonction propre de M ($\Delta f = \lambda \cdot f$), alors on a $\lambda = 0$ ou $\lambda \geq n$.*

Démonstration. — Puisque le spectre d'une variété riemannienne compacte est positif, on peut supposer que $\lambda > 0$.

En remarquant que $|Dd f|^2 = \frac{\lambda^2}{n} f^2 + |Dd f + \frac{\lambda}{n} f g|^2$ et en intégrant la formule de Böchner sur M , on obtient $\lambda \geq n$. □

Bibliographie

- [1] U. ABRESCH, D. GROMOLL, *On complete manifolds with nonnegative Ricci curvature*, Journ. A.M.S., 3 (1990), 355–374.
- [2] M. ANDERSON, *Metrics of positive Ricci curvature with large diameter*, Manuscripta Math., 68 (1990) 405–415.
- [3] I. CHAVEL, *Riemannian geometry: a modern introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge university press, 1993.
- [4] J. CHEEGER, T. COLDING, *On the structure of space with Ricci curvature bounded below*, J. Diff. Geom., 46 (1997), 404.
- [5] J. CHEEGER, T. COLDING, *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*, Ann. of Math., 144 (1996), 189–237.
- [6] S. Y. CHENG, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric application*, Math. Z., 143 (1975), 289–297.
- [7] S. CHENG, S. YAU, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math 28 (1975), 333-354.
- [8] T. COLDING, *Shape of manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math., 124 (1996), 175.
- [9] T. COLDING, *Large manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math., 124 (1996), 193.
- [10] T. COLDING, *Ricci curvature and volume convergence*, Annals of Maths, 145 (1997), 477.
- [11] S. GALLOT, *Volumes, courbure de Ricci et convergence des variétés*, Sémin. Bourbaki, 835 (1997–1998)
- [12] S. GALLOT, *Variété dont le spectre ressemble à celui de la sphère*, Astérisque, 80 (1980), 33.
- [13] M. GROMOV, (rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu); *Structures métriques sur les variétés riemanniennes*, Textes Math., n° 1, 1981.
- [14] S. ILIAS, *Un nouveau résultat de pincement de la première valeur propre du Laplacien et preuve de la conjecture du diamètre pincé*, Annales Institut Fourier, 43 (1993), 843.
- [15] OBATA, *Certain condition for a riemannian manifold to be isometric to a sphere*, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962), 333–340.
- [16] P. PETERSEN, *On eigenvalue pinching in positive Ricci curvature*, Preprint.
- [17] K. SHIOHAMA, *Recent developments in sphere theorems*, Proc. of Symp. in Pure Math., 54 (1993), Part 3.

Erwann AUBRY
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (UJF-CNRS)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
Erwann.Aubry@ujf-grenoble.fr