Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Robert Dalmasso

Le problème de Pompeiu

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 17 (1998-1999), p. 69-79
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1998-1999__17__69_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1998-1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 17 (1999) 69–79

LE PROBLÈME DE POMPEIU

Robert DALMASSO

RÉSUMÉ. — Après avoir présenté le problème nous décrivons quelques résultats importants. Tout d'abord nous énonçons une condition nécessaire et suffisante obtenue par Brown, Schreiber et Taylor. Ensuite nous faisons le lien avec le problème de Schiffer. Enfin, nous donnons quatre résultats dans le plan et quelques résultats en dimensions supérieures.

Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) un ouvert borné non vide. On note

$$M(n) = \{\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ \sigma x = \rho x + a\ , \rho \in SO(n),\ a \in \mathbb{R}^n\}$$

le groupe des déplacements.

DÉFINITION. — *Ω a la propriété de Pompeiu si et seulement si la seule fonction $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ vérifiant*

$$\int_{\sigma(\Omega)} f(x)\,dx = 0$$

pour tout $\sigma \in M(n)$ est $f = 0$.

Signalons tout de suite une très bonne introduction au problème dans Zalcman [25], ainsi qu'une vaste bibliographie du même auteur [26].

Nous donnons ci-dessous quelques exemples :

1) Une boule ouverte $\Omega = B(x_0, R)$, $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ n'a pas la propriété de Pompeiu. Il suffit de prendre

$$f(x) = \sin ax_1\ , \quad x = (x_1, \cdots, x_n)$$

Classification math. : 35J05, 35R30.

avec $a > 0$ tel que $J_{n/2}(aR) = 0$ (J_λ désignant la fonction de Bessel d'ordre λ).

2) Soit N un fermé de Ω de mesure nulle. Si Ω a (resp. n'a pas) la propriété de Pompeiu, alors $\Omega' = \Omega \backslash N$ a (resp. n'a pas) la propriété de Pompeiu.

3) Les carrés et les parallélogrammes ont la propriété de Pompeiu (Christov [6]–[8]) ainsi que les triangles (Ilieff [18], [19]).

1^er^ résultat important

On note χ_Ω la fonction indicatrice de Ω et

$$\widehat{\chi}_\Omega(z) = \int_\Omega e^{-ix.z}\,dx, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad x.z = x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n,$$

la transformée de Fourier-Laplace de χ_Ω.

Le premier résultat fondamental a été obtenu par Brown, Schreiber et Taylor en 1973 [5]. Ces auteurs se placent dans $\mathbb{R}^2$, mais leur travail est encore valable dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$. Nous donnons le cas particulier suivant :

THÉORÈME 1. — *Ω n'a pas la propriété de Pompeiu si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}\backslash 0$ tel que $\widehat{\chi}_\Omega \equiv 0$ sur $M_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^n ; z_1^2 + \cdots + z_n^2 = \alpha\}$.*

La démonstration repose sur le théorème fondamental de L. Schwartz sur les fonctions moyennes périodiques.

Une conséquence immédiate est que toute ellipse a la propriété de Pompeiu. En effet soient $a > b > 0$ et $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1\}$. On a

$$\widehat{\chi}_\Omega(z_1, z_2) = 2\pi ab J_1\left(\sqrt{a^2 z_1^2 + b^2 z_2^2}\right) / \sqrt{a^2 z_1^2 + b^2 z_2^2}$$

pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Comme les zéros de J_1 sont réels, $\widehat{\chi}_\Omega$ ne peut être identiquement nulle sur M_α. Donc Ω a la propriété de Pompeiu.

L'intérieur d'un polygone ainsi qu'un convexe de $\mathbb{R}^2$ (ouvert et borné) avec un «coin» (voir [5] pour un énoncé plus précis) ont la propriété de Pompeiu. La démonstration repose sur le théorème 1 et sur une étude du comportement asymptotique de $\widehat{\chi}_\Omega$.

2^e^ résultat important

Dans la suite on suppose de plus que la frontière $\partial\Omega$ est lipschitzienne et que $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ est connexe. Si $\overline{\Omega}$ est invariant par rotation, alors $\overline{\Omega}$ est une boule fermée.

Nous avons rassemblé dans un théorème plusieurs résultats très difficiles obtenus par Williams en 1976 [22] et 1981 [23].

THÉORÈME 2. — *Ω n'a pas la propriété de Pompeiu si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}\backslash 0$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tels que*

$$\Delta T + \alpha T = -\chi_\Omega.$$

1) T est en fait une fonction à support compact.

2) T est analytique dans Ω et vérifie

$$\Delta T + \alpha T = -1 \quad \textit{dans } \Omega.$$

3) T est analytique dans $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ et donc $T \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$.

4) $T \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

5) En fait $\alpha > 0$.

6) $\partial\Omega$ est analytique (réelle).

Nous donnons seulement une partie de la démonstration, renvoyant le lecteur à [22] et [23] pour les autres points. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}\backslash 0$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ tels que $\Delta T + \alpha T = -\chi_\Omega$. Il s'ensuit que $\widehat{\chi}_\Omega(z) = (z_1^2 + \cdots + z_n^2 - \alpha)\widehat{T}(z)$ et donc $\widehat{\chi}_\Omega$ s'annule sur M_α. D'après le théorème 1 Ω n'a pas la propriété de Pompeiu.

Réciproquement, si Ω n'a pas la propriété de Pompeiu, χ_Ω s'annule sur M_α pour un $\alpha \in \mathbb{C}\backslash 0$. Le polynôme $z_1^2 + \cdots + z_n^2 - \alpha$ étant irréductible, il s'ensuit que

$$\psi(z) = \widehat{\chi}_\Omega(z)/(z_1^2 + \cdots + z_n^2 - \alpha)$$

est entière. D'après le théorème de Paley-Wiener, il existe $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{T} = \psi$, d'où

$$(z_1^2 + \cdots + z_n^2 - \alpha)\widehat{T}(z) = \widehat{\chi}_\Omega(z),$$

ce qui équivaut à

$$\Delta T + \alpha T = -\chi_\Omega$$

au sens des distributions.

Comme $\chi_\Omega \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \partial\Omega)$, l'ellipticité de $\Delta + \alpha$ entraîne que T est C^∞ dans $\mathbb{R}^n \backslash \partial\Omega$. Les points 1), 2) et 3) sont classiques. 5) résulte facilement de la formule de Green. 4) est assez difficile à vérifier. Enfin 6) est très difficile. On montre d'abord qu'on peut appliquer un résultat de Caffarelli pour montrer que $\partial\Omega$ est C^1 et que $T \in C^2(\overline{\Omega})$. Ensuite on applique le résultat de Kinderlehrer et Nirenberg qui dit que $\partial\Omega$ est analytique.

En conclusion, si $\partial\Omega$ est lipschitzienne et si $\partial\Omega$ n'est pas analytique (réelle), alors Ω a la propriété de Pompeiu.

Avec les notations ci-dessus, si Ω n'a pas la propriété de Pompeiu, $u = T_{|\overline{\Omega}}$ est solution du problème surdéterminé

$$\begin{cases} \Delta u + \alpha u + 1 = 0 & \text{dans } \Omega, \ \alpha > 0, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad (\mathcal{N})$$

où ν désigne la normale extérieure. De plus la frontière est analytique.

Si on pose $v = \alpha c u + c$ avec $c \neq 0$, $(\mathcal{N})$ est équivalent à

$$\begin{cases} \Delta v + \alpha v = 0 & \text{dans } \Omega, \quad \alpha > 0, \\ v = c \neq 0, \ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Donc v est une fonction propre pour le problème de Neumann et v est constante sur la frontière $\partial\Omega$.

La conjecture de Schiffer (Yau [24, problème 80]) : si $(\mathcal{N})$ admet une solution, alors Ω est une boule.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un disque, $(\mathcal{N})$ a une infinité de solutions. En effet, soit $r > 0$ vérifiant $J_1(\sqrt{r}) = 0$. La fonction

$$v_r(x) = \frac{1}{r}\left(\frac{J_0(\sqrt{r}|x|)}{J_0(\sqrt{r})} - 1\right), \ x \in \Omega,$$

est solution du problème $(\mathcal{N})$ avec $\alpha = r$ quand $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est le disque unité.

Quelques résultats en dimension 2

Berenstein [1] a obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné, simplement connexe et tel que $\partial\Omega \in C^{2,\varepsilon}$, $\varepsilon \in]0,1]$. Si $(\mathcal{N})$ admet une infinité de solutions (u_j, α_j), alors Ω est un disque.*

Remarque. — Ce résultat a été étendu à $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) pour Ω borné et connexe avec $\partial\Omega$ lipschitzienne et connexe [3].

La preuve de ce théorème est trop longue pour être présentée ici. Nous indiquons seulement la technique utilisée.

On a $\widehat{\chi}_\Omega \equiv 0$ sur M_{α_j} pour tout j ($\alpha_j > 0$). On montre alors par des méthodes asymptotiques qu'un morceau de $\partial\Omega$ est un arc de cercle. Comme $\partial\Omega$ est analytique, Ω est un disque.

La difficulté réside dans le fait qu'il faut étudier le comportement asymptotique d'une intégrale de Fourier avec une phase complexe dont la partie imaginaire change de signe. En effet définissons $\chi_{\partial\Omega} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2)$ par

$$< \chi_{\partial\Omega}, \varphi >= \int_{\partial\Omega} \varphi(x,y)(dx + idy), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

La formule de Green entraîne

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\, dxdy = \frac{1}{2i} \int_{\partial\Omega} \varphi\, dz, \quad z = x + iy, \quad \forall\, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \chi_\Omega = -\frac{1}{2i} \chi_{\partial\Omega} \text{ dans } \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2).$$

Par transformation de Fourier on a

$$(z_1 + iz_2)\widehat{\chi}_\Omega(z_1, z_2) = \widehat{\chi}_{\partial\Omega}(z_1, z_2) \quad \forall\, (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

D'où, pour $\alpha \neq 0$,

$$\widehat{\chi}_\Omega \equiv 0 \text{ sur } M_\alpha \iff \widehat{\chi}_{\partial\Omega} \equiv 0 \quad \text{sur} \quad M_\alpha.$$

Finalement on est donc amené à étudier le comportement asymptotique de

$$\widehat{\chi}_{\partial\Omega}(z_1, z_2) = \int_{\partial\Omega} \exp(-i(z_1 x + z_2 y))(dx + idy).$$

Voici une très belle application du théorème 1 due à Brown et Kahane [4]. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un convexe borné. Posons

$$H_\Omega(\xi) = \sup_{x\in\Omega} x.\xi - \inf_{x\in\Omega} x.\xi, \quad \xi \in S^1,$$

(S^1 désignant le cercle unité) et

$$m(\Omega) = \inf_{\xi\in S^1} H_\Omega(\xi), \quad M(\Omega) = \sup_{\xi\in S^1} H_\Omega(\xi).$$

THÉORÈME 4. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et convexe. Si $m(\Omega) \leq \frac{1}{2}M(\Omega)$, alors Ω a la propriété de Pompeiu.*

La preuve est très simple. D'après le théorème 2 on peut supposer que $\partial\Omega$ est analytique (réelle). On doit montrer que pour $\alpha \in \mathbb{C}\backslash 0$ $\widehat{\chi}_\Omega \not\equiv 0$ sur M_α. On peut aussi supposer $\alpha > 0$. Posons $\alpha = r^2, r > 0$.

Si $0 < r < \dfrac{\pi}{m(\Omega)}$, comme H_Ω est continue, après translation et rotation on a, en notant $f(x)$ la longueur de la coupe suivant $x \in]0, m(\Omega)[$,

$$\Im m\, \widehat{\chi}_\Omega(r, 0) = -\int_0^{m(\Omega)} f(x) \sin rx\, dx < 0$$

car $\sin rx > 0$ pour $x \in]0, m(\Omega)[$.

Sinon $r \geq \frac{\pi}{m(\Omega)} \geq \frac{2\pi}{M(\Omega)}$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}\backslash 0$ tel que

$$\frac{2\pi k}{m(\Omega)} \geq r \geq \frac{2\pi k}{2m(\Omega)} \geq \frac{2\pi k}{M(\Omega)}$$

c'est-à-dire

$$m(\Omega) \leq \frac{2\pi k}{r} \leq M(\Omega).$$

Après translation et rotation, en notant encore $f(x)$ la longueur de la coupe suivant $x \in]0, \frac{2k\pi}{r}[$, on peut écrire

$$\Re e\widehat{\chi}_\Omega(r,0) = \int_0^{\frac{2k\pi}{r}} f(x)\cos rx\,dx = -\int_0^{\frac{2k\pi}{r}} f'(x)\frac{\sin rx}{r}\,dx < 0$$

car la convexité de Ω entraîne que f' est décroissante sur $]0, \frac{2k\pi}{r}[$.

Enfin nous terminons ce paragraphe par les travaux de Garofalo-Segala [15]-[17] et Ebenfelt [11]-[13]. Une conséquence très intéressante de leur travaux est le résultat suivant :

THÉORÈME 5. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $D(0,1)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. On suppose que $\partial\Omega$ est une courbe fermée simple et analytique réelle. On suppose que $\partial\Omega$ n'est pas un cercle. Soient*

$$\varphi : D(0,1) \to \Omega \quad \text{et} \quad \psi : \Omega \to D(0,1)$$

les applications conformes dont l'existence est assurée par le théorème de Riemann. Si φ ou ψ est une fraction rationnelle, Ω a la propriété de Pompeiu.

La technique utilisée pour la démonstration consiste à pousser plus loin l'approche asymptotique de Berenstein en utilisant de façon très astucieuse le théorème de Cauchy.

Quelques résultats en dimensions supérieures

On connaît très peu de choses sur le problème de Pompeiu dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 3$ et dans le cas de domaines ayant une frontière analytique. Les ellipsoïdes ont la propriété de Pompeiu [22] (voir aussi [5] pour $n = 2$ et Johnsson [20] pour $n \geq 2$). Les autres domaines simples ayant une frontière analytique sont les tores pleins (les exemples d'Ebenfelt [11] dans $\mathbb{R}^3$ ne contiennent pas le tore). Berenstein et Khavinson [2] ont démontré que le tore plein dans $\mathbb{R}^4$ a la propriété de Pompeiu. Malheureusement leur démonstration (élémentaire) n'est valable que dans ce cas. Nous allons donner un théorème très simple [9] qui va en particulier nous permettre d'étendre le résultat de Berenstein et Khavinson à $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 3$.

THÉORÈME 6. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un ouvert borné avec $\partial\Omega \in C^2$. Si $(\mathcal{N})$ a une solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$, alors, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\int_{\partial\Omega} \nu_j^2(x)(x-y).\nu(x)\,ds = \int_{\partial\Omega} \nu_k^2(x)(x-y).\nu(x)\,ds, \quad j,k \in \{1,\cdots,n\}, \tag{1.1}$$

et

$$\int_{\partial\Omega} \nu_j(x)\nu_k(x)(x-y).\nu(x)\,ds = 0, \quad j \neq k, \tag{1.2}$$

où $\nu = (\nu_1,\cdots,\nu_n)$ désigne la normale extérieure.

La preuve est assez simple. Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ une solution du problème $(\mathcal{N})$.

Le lemme suivant est un cas particulier d'un résultat obtenu par Pucci et Serrin ([21], (4) p. 683).

LEMME 1. — *Soit $h = (h_1,\cdots,h_n) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. On a*

$$\int_\Omega \{(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \alpha\frac{u^2}{2} - u)\mathrm{div}h - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\}\,dx = 0.$$

LEMME 2. — *On a*

$$\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2\,dx = \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_j})^2\,dx, \quad \text{pour } i,j \in \{1,\cdots,n\} \tag{1.3}$$

et

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx = 0, \quad \textit{pour} \quad i \neq j. \tag{1.4}$$

On obtient (1.3) en utilisant le lemme 1 avec $h = (h_1,\ldots,h_n)$ telle que

$$h_j(x) = x_j, \quad h_i(x) = -x_i \quad \text{et} \quad h_k(x) = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq i,j.$$

Pour (1.4) on prend

$$h_j(x) = x_i \quad \text{et} \quad h_k(x) = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq j.$$

Maintenant soit $\ell = (\ell_1,\ldots,\ell_n) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de norme 1. Définissons

$$w = \frac{\partial u}{\partial \ell} = \sum_{j=1}^n \ell_j \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

w est solution du problème aux limites suivant

$$\Delta w + \alpha w = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad w = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

LEMME 3. — *On a* : $\dfrac{\partial w}{\partial \nu} = -\ell \cdot \nu$ *sur* $\partial\Omega$.

Comme $u = \partial u/\partial \nu = 0$ sur $\partial\Omega$, on peut écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \nu_i \nu_j \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \quad \text{pour} \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Donc sur $\partial\Omega$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \nu} &= \sum_{j=1}^{n} \nu_j \frac{\partial w}{\partial x_j} = \sum_{j,k=1}^{n} \nu_j \ell_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \\ &= \Big(\sum_{j,k=1}^{n} \nu_j^2 \ell_k \nu_k \Big) \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = (\ell \cdot \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = (\ell \cdot \nu) \Delta u = -\ell \cdot \nu. \end{aligned}$$

Maintenant l'identité de Pohozaev s'écrit

$$\alpha \int_\Omega w^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial w}{\partial \nu}\Big)^2 (x - y).\nu(x) \, ds, \tag{1.5}$$

pour y fixé dans $\mathbb{R}^n$. En utilisant le lemme 2 on obtient

$$\int_\Omega w^2 \, dx = \sum_{j,k=1}^{n} \ell_j \ell_k \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx = \sum_{j=1}^{n} \ell_j^2 \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)^2 dx = \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 dx$$

pour $1 \leq i \leq n$. (1.5) et le lemme 3 nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \alpha \int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (\ell \cdot \nu(x))^2 (x - y) \cdot \nu(x) \, ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \ell_j^2 \int_{\partial\Omega} \nu_j^2(x)(x - y).\nu(x) \, ds \\ &\quad + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \ell_j \ell_k \int_{\partial\Omega} \nu_j(x) \nu_k(x)(x - y).\nu(x) \, ds, \end{aligned}$$

pour $1 \leq i \leq n$. D'où le résultat.

Nous considérons maintenant certains tores pleins dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Pour $a > R > 0$ on note $D(a, R)$ le disque de centre $(a, 0, \cdots, 0)$ et de rayon R dans le plan $x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ de $\mathbb{R}^n$. En faisant tourner ce disque autour de l'axe des x_n dans $\mathbb{R}^n$ on obtient un tore Ω d'équation

$$\Big(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} - a\Big)^2 + x_n^2 < R^2. \tag{1.6}$$

En utilisant le théorème 6 on démontre le résultat suivant (voir [9] pour les détails de la preuve).

THÉORÈME 7. — *Soit $a > R > 0$ et soit Ω le tore dans $\mathbb{R}^n$ défini par (1.6). Ω a la propriété de Pompeiu.*

Il est clair que le théorème 6 permet de construire beaucoup d'exemples d'ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) ayant la propriété de Pompeiu.

Remarque. — Une autre condition nécessaire de nature géométrique a été obtenue dans [10] : dans le plan elle est équivalente aux conditions (1.1), (1.2).

Le cas des convexes du plan

Dans cette dernière partie nous examinons les conditions nécessaires (1.1), (1.2) dans le cas des domaines convexes du plan.

Dans le plan les conditions nécessaires (1.1), (1.2) sont équivalentes à

$$\int_{\partial\Omega} (\nu_1(x) + i\nu_2(x))^2 (x-y).\nu(x)\, ds = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n . \tag{1.7}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et convexe contenant l'origine. On suppose que $\partial\Omega$ est une courbe de classe C^2 et que la courbure est strictement positive. Soit $x = x(s) = (x_1(s), x_2(s))$ une paramétrisation de $\partial\Omega$ par la longueur de l'arc. Pour chaque angle θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, notons $h(\theta)$ la distance de l'origine à la droite d'appui de Ω passant par le point de $\partial\Omega$ de normale extérieure $\nu = (\cos\theta, \sin\theta)$. On a

$$h(\theta) = x \cdot \nu ,$$

et h est périodique de période 2π. Des formules de Serret-Frenet on déduit l'équation différentielle du second ordre suivante

$$h(\theta) + h''(\theta) = \rho(\theta) ,$$

où ρ désigne le rayon de courbure. Si $0 \notin \Omega$, la fonction support h de Ω se définit de la façon suivante. Par translation il existe $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \in \tilde{\Omega} = a + \Omega$. Si $\tilde{h}$ désigne la fonction support de $\tilde{\Omega}$ on a

$$h(\theta) = -a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta + \tilde{h}(\theta).$$

Nous renvoyons le lecteur à l'article de Flanders [14] pour une discussion détaillée.

THÉORÈME 8. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et convexe. On suppose que $\partial\Omega$ est une courbe de classe C^2 et que la courbure est strictement positive. Notons h la fonction support de Ω. Si*

$$\int_0^{2\pi} h(h+h'')e^{2i\theta}\,d\theta \neq 0,$$

alors Ω a la propriété de Pompeiu.

Soit $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0\in\tilde\Omega = a+\Omega$. Notons $\tilde h$ la fonction support de $\tilde\Omega$. Comme

$$\begin{aligned}\int_{\partial\tilde\Omega}(\nu_1(x)+i\nu_2(x))^2(x-a)\cdot\nu(x)\,ds &= \int_0^{2\pi}(\tilde h - a_1\cos\theta - a_2\sin\theta)(\tilde h+\tilde h'')e^{2i\theta}\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi} h(h+h'')e^{2i\theta}\,d\theta \neq 0,\end{aligned}$$

(1.7) n'est pas vérifié par $\tilde\Omega$, ce qui implique que $\tilde\Omega$ a la propriété de Pompeiu. Donc Ω a la propriété de Pompeiu.

Bibliographie

[1] C. A. BERENSTEIN. — *An inverse spectral theorem and its relation to the Pompeiu problem*, J. Anal. Math. **37** (1980), 128–144.

[2] C. A. BERENSTEIN and D. KHAVINSON. — *Do solid tori have the Pompeiu property?*, Expo. Math. **15** (1997), 87–93.

[3] C. A. BERENSTEIN and P. YANG. — *An inverse Neumann problem*, J. Reine Angew. Math. **382** (1987), 1–21.

[4] L. BROWN and J. P. KAHANE. — *A note on the Pompeiu problem for convex domains*, Math. Ann. **259** (1982), 107–110.

[5] L. BROWN, B. M. SCHREIBER and B. A. TAYLOR. — *Spectral synthesis and the Pompeiu problem*, Ann. Inst. Fourier **23** (1973), 125–154.

[6] CHR. CHRISTOV. — *Uber eine Integraleigenschaft der Funktionen von zwei Argumenten*, Annuaire Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1, **39** (1943), 395–408.

[7] CHR. CHRISTOV. — *Sur un problème de M. Pompeiu*, Mathematica (Timisoara) **23** (1948), 103–107.

[8] CHR. CHRISTOV. — *Sur l'équation intégrale généralisée de M. Pompeiu*, Annuaire Univ. Sofia Fac. Sci., Livre 1 **45** (1949), 167–178.

[9] R. DALMASSO. — *A new result on the Pompeiu problem*, Trans. Amer. Math. Soc., (à paraître).

[10] R. DALMASSO. — *A note on the Schiffer conjecture*, Hokkaido Math. J. **28** (1999), 373–383.

[11] P. EBENFELT. — *Singularities of solutions to a certain Cauchy problem and an application to the Pompeiu problem*, Duke Math. J. **71** (1993), 119–142.

[12] P. EBENFELT. — *Some results on the Pompeiu problem*, Ann. Acad. Sci. Fennicae **18** (1993), 323–391.

[13] P. EBENFELT. — *Propagation of singularities from singular and infinite points in certain analytic Cauchy problems and an application to the Pompeiu problem*, Duke Math. J. **73** (1994), 561–582.

[14] H. FLANDERS. — *A proof of Minkowski's inequality for convex curves*, Amer. Math. Monthly **75** (1968), 581–593.

[15] N. GAROFALO and F. SEGALA. — *New results on the Pompeiu problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **325-1** (1991), 273–286.

[16] N. Garofalo and F. Segala. — *Another step toward the solution of the Pompeiu problem in the plane*, Commun. in Partial Differential Equations **18** (1993), 491–503.

[17] N. Garofalo and F. Segala. — *Univalent functions and the Pompeiu problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **346** (1994), 137–146.

[18] L. Ilieff. — *Beitrag zum Problem von D. Pompeiu*, Annuaire Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1, **44** (1948), 309–316.

[19] L. Ilieff. — *Sur un problème de M. D. Pompeiu*, Annuaire Univ. Sofia Fac. Sci., Livre 1, **45** (1949), 111–114.

[20] G. Johnsson. — *The Cauchy problem in $\mathbb{C}^n$ for linear second order partial differential equations with data on a quadric surface*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 1–48.

[21] P. Pucci and J. Serrin. — *A general variational identity*, Indiana Univ. Math. J. **35** (1986), 681–703.

[22] Williams. — *A partial solution to the Pompeiu problem*, Math. Ann. **223-2** (1976), 183–190.

[23] Williams. — *Analycity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 357–369.

[24] S. T. Yau. — *Problem Section*, in Seminar on Differential Geometry, edited S. T. Yau, Annals of Math. Studies, Princeton, N. J, 1982.

[25] L. Zalcman. — *Offbeat integral geometry*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 161–175.

[26] L. Zalcman. — *A bibliographic survey of the Pompeiu problem*, in Approximation by solutions of partial differential equations B. Fuglede et al. (eds.) Kluwer Acad. Publ. (1992), 185–194.

Robert DALMASSO
Laboratoire LMC-IMAG
Équipe EDP
BP 53
F-38041 GRENOBLE CEDEX 9 (France)