

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GILLES COURTOIS

## Des questions de stabilité

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 17 (1998-1999), p. 159-162

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1998-1999\\_\\_17\\_\\_159\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1998-1999__17__159_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1998-1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## DES QUESTIONS DE STABILITÉ

Gilles COURTOIS

Soit  $(X^n, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$  dont la courbure de Ricci satisfait  $\text{Ric}(g) \geq (n-1)g$ . Le théorème Bishop dit que le volume  $\text{vol}(X^n, g)$  de  $(X^n, g)$  vérifie

$$\text{vol}(X^n, g) \leq \text{vol}(S^n, g_0)$$

où  $(S^n, g_0)$  est la sphère ronde telle que  $\text{Ric}(g_0) = (n-1)g_0$  et l'égalité a lieu si et seulement si  $(X^n, g)$  est isométrique à  $(S^n, g_0)$ .

Récemment, J. Cheeger et T. Colding ont montré que le cas d'égalité ci-dessus est stable dans le sens suivant, (cf. [5], [6]).

**THÉORÈME.** — *Il existe  $\varepsilon(n) > 0$  tel que si  $(X^n, g)$  est une variété riemannienne compacte de dimension  $n$  vérifiant  $\text{Ric}(g) \geq (n-1)g$  et  $\text{vol}(X^n, g) \geq (1-\varepsilon(n)) \text{vol}(S^n, g_0)$ , alors  $X^n$  est difféomorphe à  $S^n$  et  $(X^n, g)$  est Gromov-Hausdorff proche de  $(S^n, g_0)$ .*

Les variétés compactes de courbure sectionnelle constante négative sont aussi des extremum stricts d'invariants riemanniens. Par exemple on définit l'entropie d'une variété riemannienne compacte  $(Y^n, g)$  par

$$h(g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \log \text{vol} B(y, R)$$

où  $B(y, R)$  est la boule géodésique de rayon  $R$  dans le revêtement universel de  $Y^n$  centrée en un point arbitraire et on a (cf. [2], [3]) :

**THÉORÈME 1.** — *Soit  $(X^n, g_X)$  une variété compacte de dimension  $n \geq 3$  de courbure sectionnelle constante  $K_{g_X} = -1$  et  $Y^n$  une variété homéomorphe à  $X^n$ . Alors*

$$h(g)^n \text{vol}(Y^n, g) \geq h(g_X)^n \text{vol}(X^n, g_X)$$

*et l'égalité a lieu si et seulement si  $(Y^n, g)$  est homothétique à  $(X^n, g_X)$*

**THÉORÈME 2.** — Soit  $(X^n, g_X)$  une variété compacte de dimension  $n \geq 3$  de courbure sectionnelle constante  $K_{g_X} = -1$  et  $Y^n$  une variété homéomorphe à  $X^n$ . Alors pour toute métrique  $g$  sur  $Y^n$  dont la courbure sectionnelle vérifie  $K_g \leq -1$ , on a

$$\text{vol}(Y^n, g) \leq \text{vol}(X^n, g_X)$$

et le cas d'égalité a lieu si et seulement si  $(Y^n, g)$  est isométrique à  $(X^n, g_X)$ .

Le théorème suivant est une conséquence directe du théorème de comparaison de Rauch.

**THÉORÈME 3.** — Soit  $(Y^n, g)$  une variété compacte dont la courbure sectionnelle vérifie  $K_g \leq -1$ . Alors

$$h(g) \geq n - 1$$

et l'égalité a lieu si et seulement si  $K_g = -1$ .

On peut se demander si les propriétés d'extremum dans les théorèmes 1, 2, 3 sont stables.

**QUESTION 1.** — Soit  $(X^n, g_X)$  une variété compacte de courbure constante négative et  $Y^n$  une variété homéomorphe à  $X^n$ . Existe-t-il  $\varepsilon =: \varepsilon(n) > 0$  (ou  $\varepsilon =: \varepsilon(X) > 0$ ) tel que si une métrique  $g$  sur  $Y^n$  satisfait  $h(g)^n \text{vol}(Y^n, g) \leq (1 + \varepsilon)h(g_X)^n \text{vol}(X^n, g_X)$  alors  $Y^n$  est difféomorphe à  $X^n$  et  $(Y^n, g)$  est Gromov-Hausdorff proche de  $(X^n, g_X)$ ?

**QUESTION 2.** — Soit  $(X^n, g_X)$  une variété compacte de courbure constante négative et  $Y^n$  une variété homéomorphe à  $X^n$ . Existe-t-il  $\varepsilon =: \varepsilon(n) > 0$  (ou  $\varepsilon =: \varepsilon(X) > 0$ ) tel que si une métrique  $g$  sur  $Y^n$  de courbure  $K_g \leq -1$  satisfait  $\text{vol}(Y^n, g) \geq (1 - \varepsilon) \text{vol}(X^n, g_X)$  alors  $Y^n$  est difféomorphe à  $X^n$  et  $(Y^n, g)$  est Gromov-Hausdorff proche de  $(X^n, g_X)$ ?

**QUESTION 3.** — Soit  $(X^n, g_X)$  une variété compacte de courbure constante négative et  $Y^n$  une variété homéomorphe à  $X^n$ . Existe-t-il  $\varepsilon =: \varepsilon(n) > 0$  (ou  $\varepsilon =: \varepsilon(X) > 0$ ) tel que si une métrique  $g$  sur  $Y^n$  de courbure  $K_g \leq -1$  satisfait  $h(g) \leq (1 + \varepsilon)(n - 1)$  alors  $Y^n$  est difféomorphe à  $X^n$  et  $(Y^n, g)$  est Gromov-Hausdorff proche de  $(X^n, g_X)$ ?

*Remarque.* — Si la réponse à la question 2 est affirmative, il en est de même pour la question 3. En effet, sous les hypothèses de la question 3, le théorème 2 entraîne

$$(n - 1)^n \text{vol}(X^n, g_X) \leq h(g)^n \text{vol}(Y^n, g) \leq (n - 1)^n (1 + \varepsilon) \text{vol}(Y^n, g)$$

ce qui implique

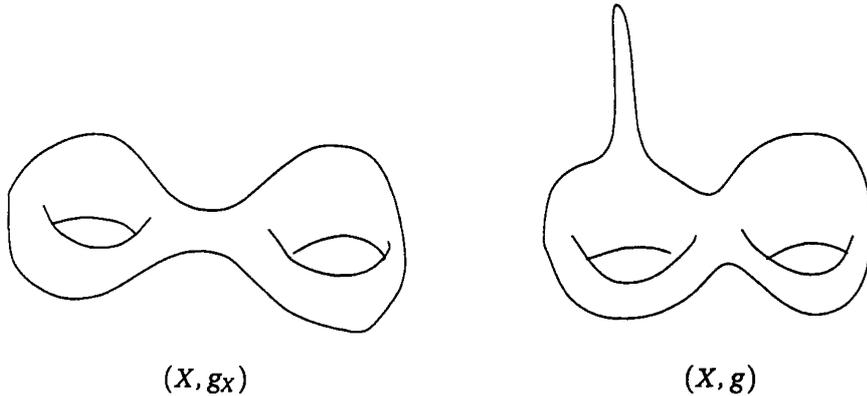
$$\text{vol}(Y^n, g) \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \text{vol}(X^n, g_X).$$

*Exemple.* — En dimension  $n \geq 5$ , F.T. Farrell et L.E. Jones ont construit une famille dénombrable de variétés riemanniennes  $(Y_i, g_i)$  telle que chaque  $Y_i$  est homéomorphe et non difféomorphe à une variété hyperbolique  $X_i$  et telle que la courbure sectionnelle  $K_{g_i}$  vérifie  $-1 - \varepsilon_i \leq K_{g_i} \leq -1$  où  $\lim \varepsilon_i = 0$ . Ces exemples montrent que la réponse à la

question 2 est négative avec  $\varepsilon = \varepsilon(n)$ . En effet, avec l'hypothèse sur  $K_{g_i}$ , l'entropie de  $g_i$  vérifie  $h(g_i) = (n-1)(1-\alpha_i)$  où  $\lim \alpha_i = 0$  et le théorème 1 entraîne

$$(n-1)^n \text{vol}(X_i, g_{X_i}) \leq h(g_i)^n \text{vol}(Y_i, g_i) = (n-1)^n (1+\alpha_i)^n \text{vol}(Y_i, g_i).$$

Dans ces questions de stabilité, une borne sur la courbure semble être une hypothèse nécessaire. En effet, I. Babenko a montré que l'entropie minimale d'une variété compacte  $Y^n$  de dimension  $n$  définie par  $\text{minvol}(Y^n) = \inf[h(g)^n \text{vol}(Y^n, g), g \text{ métrique sur } Y^n]$  est un invariant d'homotopie, ce qui montre la non-stabilité différentiable dans la question 1. En fait il n'y a pas non plus de stabilité métrique dans la question 1 car il est possible de construire sur une variété hyperbolique  $(X, g_X)$  une métrique  $g$  conforme à  $g_X$  telle que  $|h(g) - h(g_X)| < \varepsilon$  et  $|\text{vol}(X, g) - \text{vol}(X, g_X)| \leq \varepsilon$  bien que  $(X, g)$  ne soit pas Gromov-Hausdorff proche de  $(X, g_X)$ .



Si on se donne des hypothèses de pincement sur la courbure sectionnelle, on dispose alors des théorèmes de compacité.

Le volume minimal d'une variété compacte  $Y$  est défini par

$$\text{minvol } X = \inf \text{vol}(Y, g)$$

où  $g$  parcourt l'ensemble des métriques sur  $Y$  dont la courbure sectionnelle satisfait  $|K_g| \leq 1$ . On a (cf. [2]) :

**THÉORÈME.** — Soit  $(X^n, g_X)$  une variété compacte de dimension  $n \geq 3$  de courbure sectionnelle constante  $K_{g_X} = -1$  et  $Y^n$  une variété homéomorphe à  $X^n$ . Alors pour toute métrique  $g$  sur  $Y^n$  dont la courbure sectionnelle vérifie  $|K_g| \leq 1$ , on a

$$\text{vol}(Y^n, g) \geq \text{vol}(X^n, g_X)$$

et le cas d'égalité a lieu si et seulement si  $(Y^n, g)$  est isométrique à  $(X^n, g_X)$ .

Dans [1], L. Bessières a prouvé le

**THÉORÈME.** — Soit  $(X^n, g_X)$  une variété compacte de dimension  $n \geq 3$  de courbure sectionnelle constante  $K_{g_X} = -1$  et  $Y^n$  une variété homéomorphe et non difféomorphe à  $X^n$ . Alors  $\text{minvol } Y \geq (1 + \varepsilon(X^n)) \text{vol}(X^n, g_X)$  où  $\varepsilon(X^n)$  est une constante positive.

Une autre situation où la compacité s'applique est le résultat suivant dû à M. Gromov (cf. [8]) :

**THÉORÈME.** — Pour  $n \geq 4$  et  $V > 0$  il existe  $\varepsilon(n, V) > 0$  tel que pour toute variété riemannienne compacte  $(Y^n, g)$  de dimension  $n \geq 4$  dont la courbure sectionnelle satisfait  $-1 - \varepsilon(n) \leq K_g \leq -1$  et le volume  $\text{vol}(Y^n, g) \leq V$ , alors  $Y^n$  est hyperbolique.

**QUESTION 4.** — Existe-t-il  $\varepsilon(n, V)$  tel que pour toute variété riemannienne compacte  $(Y^n, g)$  de dimension  $n$  dont la courbure sectionnelle, le volume et l'entropie satisfont  $K_g \leq -1$ ,  $\text{vol}(Y^n, g) \leq V$ , et  $h(g) \leq (n-1)(1 + \varepsilon(n, V))$ , alors  $Y^n$  est hyperbolique?

Il serait intéressant de tester cette question sur les exemples de Farrell-Jones cités plus haut ou sur les exemples M. Gromov et W. Thurston. Rappelons que ces derniers sont des revêtements ramifiés au-dessus de variétés hyperboliques le long de sous-variétés compactes totalement géodésiques de codimension 2.

**QUESTION 5.** — Soit  $Y^n$  une variété compacte de dimension  $n$  fixée, et  $C > 0$ ,  $V > 0$  deux constantes positives. L'ensemble des métriques riemanniennes  $g$  sur  $Y^n$  telles que  $K_g \leq -1$ ,  $\text{vol}(Y^n, g) \leq V$  et  $h(g) \leq C$  est-il relativement compact?

**QUESTION 6.** — Soit  $(X, g)$  une variété compacte de courbure sectionnelle négative. L'ensemble des métriques à courbure sectionnelle négative  $h$  sur  $X$  dont le flot géodésique est conjugué à celui de  $g$  est-il relativement compact?

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. BESSIÈRES. — *Un théorème de rigidité différentielle*, Comment. Math. Helv. **73** (3) (1998), 443–479.
- [2] G. BESSON-G. COURTOIS-S. GALLOT. — *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Gafa **5** (1995), 731–799.
- [3] G. BESSON-G. COURTOIS-S. GALLOT. — *Lemme de Schwarz réel et applications géométriques*, à paraître Acta Math., 1999.
- [4] G. BESSON-G. COURTOIS-S. GALLOT. — *Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **16** (1996), 623–649.
- [5] J. CHEEGER-T. COLDING. — *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below*, J. Diff. Geom. **46** (1997), 406–480.
- [6] T. COLDING. — *Shape of manifolds with positive Ricci curvature*, Invent. Math. **124** (1996), 175–191.
- [7] F.T. FARELL-L.E. JONES. — *Negatively curved manifolds with smooth exotic structures*, J. Amer Math Soc **2** (4) (1989), 899–908.
- [8] M. GROMOV. — *Manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geom. **13** (1978), 223–230.
- [9] M. GROMOV-W. THURSTON. — *Pinching constants for hyperbolic manifolds*, Invent. Math. **89** (1987), 1–12.

Gilles COURTOIS  
 ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
 Centre de Mathématiques  
 URA 169 du CNRS  
 91128 PALAISEAU Cedex (France)