Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Olivier Druet

Inégalités de Sobolev optimales : récents développements

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 17 (1998-1999), p. 111-127
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1998-1999__17__111_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
Volume 17 (1999) 111–127

INÉGALITÉS DE SOBOLEV OPTIMALES : RÉCENTS DÉVELOPPEMENTS

Olivier DRUET

RÉSUMÉ. — Nous présentons certains résultats récents dans l'étude des inégalités de Sobolev optimales sur les variétés riemanniennes compactes et dans la recherche de fonctions extrémales associées.

Ce texte peut être vu comme la suite de celui d'Emmanuel Hebey contenu dans le volume précédent (vol.16) des Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de l'Institut Fourier ([Heb1]). Pour alléger ce qui suit, nous nous permettrons donc de renvoyer à celui-ci de manière répetée. Par souci de clarté et de cohérence, nous reprendrons au plus près ses notations.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension $n \geq 2$. Pour $p \geq 1$ un réel, on note $H_1^p(M)$ l'espace de Sobolev d'ordre p, c'est-à-dire la complétion de $C^\infty(M)$ pour la norme

$$\|u\|_{H_1^p} = \|\nabla u\|_p + \|u\|_p$$

où $\|.\|_p$ désigne, comme dans la suite, la norme L^p. D'après le théorème d'inclusion de Sobolev, pour tout $p \in [1, n)$, $H_1^p(M) \subset L^{p^*}(M)$ où $p^* = \frac{np}{n-p}$. Il est bien connu que p^* est l'exposant de Sobolev critique : pour $q > p^*$, $H_1^p(M) \not\subset L^q(M)$. Maintenant, cette injection étant continue, il existe deux constantes réelles A et B telles que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*} \leq A\|\nabla u\|_p + B\|u\|_p \qquad (I^1_{p,\text{gen}}).$$

On dit que $(I^1_{p,\text{gen}})$ est l'inégalité de Sobolev générique d'ordre p et de puissance 1. Une autre inégalité qui découle de cette inclusion, beaucoup plus naturelle d'un point de vue EDP, est la suivante : il existe A et B telles que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*}^p \leq A\|\nabla u\|_p^p + B\|u\|_p^p \qquad (I^p_{p,\text{gen}}).$$

Par extension, nous considérerons aussi l'échelle complète des inégalités $(I^\theta_{p,\text{gen}})$ pour θ réel dans $[1, p]$: il existe A et B telles que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\|u\|_{p^*}^\theta \leq A\|\nabla u\|_p^\theta + B\|u\|_p^\theta \qquad (I^\theta_{p,\text{gen}}).$$

Classification math. : 58G03.

On introduit la notion de meilleures constantes dans de telles inégalités en définissant :

$$\alpha_p = \inf\left\{A \text{ telle qu'il existe } B \text{ telle que } (I^1_{p,\text{gen}}) \text{ ait lieu avec } A \text{ et } B\right\}$$
$$\beta_p = \inf\left\{B \text{ telle qu'il existe } A \text{ telle que } (I^1_{p,\text{gen}}) \text{ ait lieu avec } A \text{ et } B\right\}.$$

Par $(I^1_{p,\text{gen}})$ a lieu avec A et B, on entend qu'elle est vraie avec A et B pour tout u dans $H^p_1(M)$. Par construction, α_p (resp. β_p) est la meilleure première (resp. seconde) constante dans l'inégalité $(I^1_{p,\text{gen}})$. On se convaincra aisément que pour tout $\theta \in [1,p]$, α^θ_p (resp. β^θ_p) est la meilleure première (resp. seconde) constante dans l'inégalité $(I^\theta_{p,\text{gen}})$. Dans ce texte, nous ne nous intéresserons qu'à la meilleure première constante. Pour le programme parallèle concernant la seconde meilleure constante, on renvoie à [Heb1].

La première question (A1 pour reprendre la terminologie de [Heb1]) qui vient à l'esprit est : que vaut α_p ? La seconde question que nous poserons sera : l'infimum dans la définition de α_p est-il un minimum ou non ? En d'autres termes, existe-t-il une constante réelle B telle que pour tout $u \in H^p_1(M)$,

$$\|u\|_{p^*} \leq \alpha_p \|\nabla u\|_p + B\|u\|_p \qquad (I^1_{p,\text{opt}}).$$

Si c'est le cas, on dira que $(I^1_{p,\text{opt}})$ est valide. En ce qui concerne la terminologie, $(I^1_{p,\text{opt}})$ est dite optimale (relativement à la première constante) pour des raisons évidentes : la constante α_p est la plus petite que l'on puisse prendre. Par extension, on pourra considérer de même l'échelle complète des inégalités optimales $(I^\theta_{p,\text{opt}})$. Par exemple, pour $\theta = p$, $(I^p_{p,\text{opt}})$ sera valide sur (M,g) si il existe une constante réelle B telle que pour tout $u \in H^p_1(M)$,

$$\|u\|^p_{p^*} \leq \alpha^p_p \|\nabla u\|^p_p + B\|u\|^p_p. \qquad (I^p_{p,\text{opt}})$$

On remarque immédiatement que si $(I^{\theta_0}_{p,\text{opt}})$ est valide pour un certain $\theta_0 \in [1,p]$, alors $(I^\theta_{p,\text{opt}})$ sera valide pour tous les $\theta \leq \theta_0$. On utilise pour le voir l'inégalité classique : $(x+y)^{1/q} \leq x^{1/q} + y^{1/q}$ dès que $q \geq 1$, x et y des réels positifs. Ainsi, les deux inégalités les plus intéressantes sont $(I^1_{p,\text{opt}})$ (qui est la plus faible) et $(I^p_{p,\text{opt}})$ (qui est la plus forte). Nous séparons donc cette deuxième question en deux :

A2 : $(I^1_{p,\text{opt}})$ est-elle valide ?

A3 : $(I^p_{p,\text{opt}})$ est-elle valide ?

D'après ce qui vient d'être dit, une réponse positive à la question A3 entraînera une réponse positive à la question A2. Nous verrons que, de manière assez surprenante, la réciproque n'est pas vraie (voir théorèmes 1.1 et 1.3 ci-dessous). En répondant à ces deux questions (cf. section 1), on donnera en fait des réponses pour toute l'échelle $(I^\theta_{p,\text{opt}})$, $\theta \in [1,p]$.

Dans le cas où la réponse à la question A3 est positive, c'est-à-dire lorsque $(I^p_{p,\text{opt}})$ est valide, on désire baisser la seconde constante B à son minimum. On définit alors

$$B_0(g)_p = \inf\left\{B \text{ telle que } (I^p_{p,\text{opt}}) \text{ ait lieu avec } B\right\}.$$

Par construction, $B_0(g)_p$ est la meilleure seconde constante sous la contrainte $A = \alpha^p_p$. On omettra, pour alléger, le p dans cette notation lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. On vérifie facilement que pour tout $u \in H^p_1(M)$,

$$\|u\|^p_{p^*} \leq \alpha^p_p \|\nabla u\|^p_p + B_0(g)\|u\|^p_p. \qquad (I^p_{p,\text{OPT}})$$

La question A4, très vague, est alors la suivante : que peut-on dire sur $B_0(g)_p$? Peut-on la calculer explicitement, ou au moins en donner des bornes inférieures et supérieures, explicites ou implicites ?

Afin de poser la dernière question du programme, on doit introduire une dernière notion : on dira que $u_0 \in H_1^p(M)$, $u_0 \not\equiv 0$, est une fonction extrémale pour $(I_{p,\mathrm{OPT}}^p)$ si elle réalise le cas d'égalité dans $(I_{p,\mathrm{OPT}}^p)$, c'est-à-dire si

$$\|u_0\|_{p^*}^p = \alpha_p^p \|\nabla u_0\|_p^p + B_0(g)\|u_0\|_p^p.$$

Une question naturelle est alors : existe-t-il des fonctions extrémales pour $(I_{p,\mathrm{OPT}}^p)$?

Récapitulons pour clore l'introduction toutes ces questions :

A1 - Que vaut α_p ?

A2 - $(I_{p,\mathrm{opt}}^1)$ est-elle valide ?

A3 - $(I_{p,\mathrm{opt}}^p)$ est-elle valide ?

Et, si la réponse à A3 est positive,

A4 - Que peut-on dire sur $B_0(g)_p$?

A5 - Existe-t-il des fonctions extrémales pour $(I_{p,\mathrm{OPT}}^p)$?

On peut se poser exactement la même série de questions avec priorité donnée à la meilleure seconde constante β_p. Nous renvoyons à [Heb1] pour ce programme parallèle. Nous n'en parlerons pas ici.

Le reste de ce texte est consacré à la présentation des réponses connues à ces 5 questions. Un certain nombre de résultats sont déjà dans [Heb1], nous passerons rapidement dessus : nous appuierons essentiellement sur les résultats récents contenus dans [AuLi], [DjDr], [Dru3] et [DHV2]. Dans la section 1, nous nous intéresserons aux trois premières questions. La section 2 sera consacrée à l'étude d'une amélioration de ces inégalités optimales, de type Sobolev-Poincaré. Enfin, la section 3 traitera essentiellement de l'existence de fonctions extrémales (questions A4 et A5).

1 - Inégalités de Sobolev optimales

La réponse à la question A1 fut obtenue indépendamment par Aubin [Aub1] et Talenti [Tal] en 1976. En fait, il est aisé de voir que $\alpha_p = K(n,p)$ où $K(n,p)$ est la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev euclidienne, c'est-à-dire :

$$K(n,p)^{-1} = \inf_{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), u \not\equiv 0} \frac{\|\nabla u\|_p}{\|u\|_{p^*}}$$

où les normes sont ici prises relativement à la métrique euclidienne. La valeur de $K(n,p)$ ([Aub1] et [Tal]) est :

$$K(n,p) = \frac{1}{n}\left(\frac{n(p-1)}{n-p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)\Gamma\left(n+1-\frac{n}{p}\right)\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{pour } p > 1$$

$$K(n,1) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

où ω_{n-1} désigne le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et Γ est la fonction d'Euler. Dans le cas $p = 2$, cette expression se simplifie pour donner :

$$K(n,2)^2 = \frac{4}{n(n-2)}\omega_n^{-\frac{2}{n}}.$$

Passons maintenant aux questions A2 et A3. Si on excepte les résultats de [Aub1] sur les variétés à courbure sectionnelle constante, la première avancée dans ce programme est due à E.Hebey et M.Vaugon en 1996. Dans [HV], ils prouvent que, dans le cas $p = 2$, $(I^2_{2,\mathrm{opt}})$ est valide sur toute variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Ainsi, dans ce cas, la réponse à A3 (et donc à A2) est positive. Pour $p \neq 2$, le résultat de départ a été obtenu par l'auteur dans [Dru2]. Il suivait des développements antérieurs menés dans [Dru1].

Théorème 1.1. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n. Soit $p \in (1,n)$ un réel. Supposons $p > 2$, $p^2 < n$ et la courbure scalaire de g strictement positive en au moins un point de M. Alors $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est fausse sur (M,g).*

Remarque 1. — Sous les mêmes hypothèses, on peut en fait montrer que $(I^\theta_{p,\mathrm{opt}})$ est fausse sur (M,g) pour tout $\theta > 2$ (cf. [Dru2]).

Remarque 2. — Avec exactement la même preuve, on peut en fait remplacer $p^2 < n$ par $p < \frac{n+2}{3}$, soit encore $n > 3p - 2$.

On s'intéresse maintenant aux différentes hypothèses du théorème 1.1. La première que nous examinerons est l'hypothèse géométrique du théorème : est-elle nécessaire ? En d'autres termes, $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ redevient-elle valide si la courbure de la variété est supposée négative (en un sens à préciser) ? Indépendamment, d'après les travaux ci-dessus cités de [HV], on sait déjà que l'hypothèse $p > 2$ est nécessaire : pour $p = 2$, $(I^2_{2,\mathrm{opt}})$ est valide sur toute variété compacte. Enfin, nous nous demanderons s'il est possible de récupérer la validité de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ pour les petites dimensions $n \leq 3p - 2$.

Dans la suite de cette partie, nous répondrons donc à la question A3 par l'intermédiaire des trois questions suivantes :

Question 1. — Recouvre-t-on la validité de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ si on suppose que la courbure de la variété est négative (en un sens à préciser) ?

Question 2. — Recouvre-t-on la validité de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ si $p \leq 2$?

Question 3. — Recouvre-t-on la validité de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ si on suppose que la dimension de la variété vérifie $n \leq 3p - 2$?

De plus, avec le théorème 1.1, on sait que, pour $p > 2$, la réponse à A3 ne pourra pas être positive sans conditions sur la variété. Reste donc la question A2. Au vu de la remarque 1 suivant le théorème 1.1, on va étendre la question A2 en :

Question 4. — Existe-t-il $\theta_p \geq 1$, dépendant éventuellement de p, tel que sur toute variété riemannienne compacte, $(I^{\theta_p}_{p,\mathrm{opt}})$ soit valide ? En particulier, la réponse à A2 est-elle positive sur toute variété riemannienne compacte ?

Le θ_p optimal, comme le montre la remarque 1 qui suit le théorème, est a priori $\theta_p = 2$. A ce sujet, une conjecture d'Aubin de 1976 ([Aub1]) stipulait que la réponse à la question 2 était positive et que la réponse à la question 4 était également positive, avec la valeur plus faible $\theta_p = \frac{p}{p-1}$, $p > 2$. En d'autres termes, Aubin conjecturait que sur toute variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n et pour tout $p \in (1, n)$,

$(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est valide sur (M, g) si $p \leq 2$.

$(I^{\frac{p}{p-1}}_{p,\mathrm{opt}})$ est valide sur (M, g) si $p > 2$.

Nous allons maintenant donner des éléments de réponse à ces quatre questions. On s'intéresse tout d'abord à la question 1 : c'est à cette question que sont consacrés les propositions 1.1 et 1.2 et les théorèmes 1.5 et 1.7 de [Heb1]. Nous ne ferons donc que rappeler succinctement ce qui nous paraît le plus important (on renvoie à [Heb1] pour plus de précisions). Le premier résultat, qui nous servira souvent dans la suite, contenu dans [Dru2], est énoncé dans [Heb1] sous le nom de "localisation de Druet" (théorème 1.5). Nous l'appellerons ici :

Lemme de localisation. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n et soit $p \in (1, n)$. On dit que $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est localement valide sur (M, g) si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert Ω_x de x et une constante réelle B_x tels que pour tout $u \in C^\infty_c(\Omega_x)$,*

$$\|u\|^p_{p^*} \leq K(n,p)^p \|\nabla u\|^p_p + B_x \|u\|^p_p.$$

Si $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est localement valide sur (M, g), alors $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est valide sur (M, g) (globalement).

Les grandes lignes de la preuve sont dans [Heb1]; plus de détails se trouvent dans [Dru2], théorème 2. Comme conséquences directes de ce lemme de localisation, on obtient que $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est valide sur le tore plat (T^n, g) ou sur tout espace hyperbolique compact (H^n, h). En effet, $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est localement valide sur ces variétés puisque valide sur leur revêtement universel. La validité de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ pour tout $p \in (1, n)$ sur le tore plat de dimension n nous montre que l'hypothèse $S_g(x) > 0$ (S_g désigne, comme dans toute la suite, la courbure scalaire de g) pour au moins un $x \in M$ du théorème 1.1 est bien nécessaire : sur le tore, $S_g \equiv 0$ et on retrouve la validité de tous les $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$. Une première réponse à la question 1 fut apportée dans [ADH] :

THÉORÈME 1.2. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n à courbure sectionnelle négative ou nulle. Soit $p \in (1, n)$ un réel. Si la conjecture de Cartan-Hadamard est vraie en dimension n, alors $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est vraie sur (M, g).*

Pour un rappel de la conjecture de Cartan-Hadamard et une idée de la preuve d'une telle assertion, on renvoie à [Heb1] ou directement à [ADH]. Le théorème 1.2 est une réponse satisfaisante mais partielle à la question 1 : en effet, la conjecture de Cartan-Hadamard n'a été démontrée pour l'instant qu'en dimensions 2, 3 et 4 (respectivement par Weil [W], Kleiner [Kl] et Croke [Cr]).

Passons maintenant aux questions 2 et 4, c'est-à-dire à la conjecture d'Aubin. Celle-ci a été démontrée indépendamment par T.Aubin et Y.Y.Li [AuLi] et l'auteur [Dru3]. Le résultat est le suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$ et soit $p \in (1, n)$. Si $p \leq 2$, alors $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est valide sur (M, g). Si $p > 2$, alors $(I^2_{p,\mathrm{opt}})$ est valide sur (M, g).*

La conjecture d'Aubin est ainsi démontrée et même améliorée : en effet, pour $p > 2$, $\frac{p}{p-1} < 2$. L'exposant optimal de la question 4, pour $p > 2$, est bien $\theta_p = 2$, comme suggéré par la remarque suivant le théorème 1.1, et non $\theta_p = \frac{p}{p-1}$. Ce théorème donne donc les réponses aux questions 2 et 4 ci-dessus. De plus, il nous donne des réponses aux questions A2 et A3 : $(I^1_{p,\mathrm{opt}})$ est valide pour tout p sur toute variété riemannienne compacte; $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est valide pour tout $p \leq 2$ sur toute variété riemannienne compacte.

Quelques mots sur la preuve de [Dru3] : on va simplement en esquisser les grandes lignes. On se restreint par exemple au cas $p \leq 2$. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$ et soit $p \in (1, n)$ tel que $p \leq 2$. On suppose que $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est fausse sur (M, g). En d'autres termes, on suppose que pour tout $\alpha > 0$,

$$\lambda_\alpha := \inf_{u \in H_1^p(M), u \not\equiv 0} \frac{\|\nabla u\|_p^p + \alpha \|u\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p} < K(n, p)^{-p}.$$

Il est dorénavant classique qu'une telle hypothèse entraîne l'existence d'un minimum u_α

pour la fonctionnelle considérée. On obtient ainsi que, pour tout $\alpha > 0$, il existe une solution $u_\alpha \in C^1(M)$, $u_\alpha > 0$ de

$$\Delta_p u_\alpha + \alpha u_\alpha^{p-1} = \lambda_\alpha u_\alpha^{p^*-1} \qquad (E_\alpha)$$
$$\int_M u_\alpha^{p^*} dv_g = 1$$

où Δ_p est le p-laplacien relativement à g, c'est-à-dire $\Delta_p u = -div_g\left(|\nabla u|_g^{p-2}\nabla u\right)$. L'objectif est maintenant d'étudier la suite (u_α) quand $\alpha \to +\infty$ et d'aboutir à une contradiction. Clairement, (u_α) est bornée dans $H_1^p(M)$ donc converge faiblement, à extraction près, dans $H_1^p(M)$. L'équation (E_α) donne aisément que $\|u_\alpha\|_p \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$ donc $u_\alpha \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_1^p(M)$. Or $\|u_\alpha\|_{p^*} = 1$ donc la convergence ne peut être forte. Ce défaut de compacité de la suite (u_α) est dû à un phénomène de concentration. Plus précisément, on montre qu'il existe $x_0 \in M$ tel que, à extraction près,

$$\forall \delta > 0\,, \qquad \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{B(x_0,\delta)} u_\alpha^{p^*} dv_g = 1$$

et

$$\lim_{\alpha\to+\infty} u_\alpha = 0 \qquad \text{dans } C^0_{loc}(M\setminus\{x_0\})\,.$$

Maintenant, soit $x_\alpha \in M$ un point de maximum de u_α. On pose

$$\mu_\alpha^{1-\frac{n}{p}} = \|u_\alpha\|_\infty = u_\alpha(x_\alpha).$$

Il est clair d'après ce qui vient d'être dit que $\mu_\alpha \to 0$ et $x_\alpha \to x_0$ quand $\alpha \to +\infty$. L'étape suivante consiste, par un argument de renormalisation, à estimer la vitesse de convergence de la norme L^{p^*} autour du point de concentration. On prouve en fait que

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{B(x_\alpha,R\mu_\alpha)} u_\alpha^{p^*} dv_g = 1.$$

Ceci signifie juste que la norme L^{p^*} de (u_α) se concentre autour de x_α à la vitesse μ_α. Ensuite, on transforme cette estimée intégrale en estimée ponctuelle. On montre qu'il existe C, indépendant de α, telle que pour tout $x \in M$,

$$w_\alpha(x) := d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n}{p}-1} u_\alpha(x) \le C$$

où d_g désigne la distance associée à la métrique g. En fait, si on note $w_\alpha(y_\alpha) = \|w_\alpha\|_\infty$ et si on suppose que $w_\alpha(y_\alpha) \to +\infty$ quand $\alpha \to +\infty$, on peut trouver $\varepsilon_\alpha \to 0$ tel que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{B(y_\alpha,\varepsilon_\alpha)} u_\alpha^{p^*} dv_g > 0$$

et pour tout $R > 0$,

$$B(y_\alpha, \varepsilon_\alpha) \cap B(x_\alpha, R\mu_\alpha) = \emptyset \qquad \text{pour } \alpha \text{ suffisamment grand}\,.$$

D'après l'étape précédente ceci permet de conclure puisque $\|u_\alpha\|_{p^*} = 1$. Une fois cette estimée ponctuelle obtenue, on utilise l'inégalité de Sobolev euclidienne pour conclure.

Soit $\delta > 0$ un réel suffisamment petit, fixé, et soit $\eta \in C_c^\infty(B(x_0, 2\delta))$ telle que $\eta = 1$ sur $B(x_0, \delta)$. Alors, pour tout $\alpha > 0$,

$$\left(\int_{B(x_0,2\delta)} (\eta u_\alpha)^{p^*} dv_\xi\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq K(n,p)^p \int_{B(x_0,2\delta)} |\nabla(\eta u_\alpha)|_\xi^p dv_\xi$$

où ξ désigne la métrique euclidienne. En approximant celle-ci par la métrique riemannienne, on obtient

$$\left(1 - Cd_g(x_\alpha, x)^2\right) dv_g \leq dv_\xi \leq \left(1 + Cd_g(x_\alpha, x)^2\right) dv_g$$

et

$$|\nabla(\eta u_\alpha)|_\xi^p \leq \left(1 + Cd_g(x_\alpha, x)^2\right) |\nabla(\eta u_\alpha)|_g^p$$

où C est une constante indépendante de α. On peut ainsi réécrire l'inégalité ci-dessus en utilisant des inégalités standards et l'équation (E_α) :

$$\begin{aligned}\alpha \int_M u_\alpha^p dv_g \leq C &\int_{M\setminus B(x_0,\delta)} u_\alpha^{p^*} dv_g + C \int_{B(x_0,2\delta)} d_g(x_\alpha, x)^2 u_\alpha^{p^*} dv_g \\ &+ C \int_{M\setminus B(x_0,\delta)} u_\alpha |\nabla u_\alpha|_g^{p-1} dv_g + \int_{B(x_0,2\delta)} d_g(x_\alpha, x)^2 \eta^2 |\nabla u_\alpha|_g^p dv_g.\end{aligned}$$

Pour terminer, on montre que tous les termes de droite sont majorés par $C\|u_\alpha\|_p^p$. Par exemple, en utilisant l'estimée ponctuelle,

$$\int_{B(x_0,2\delta)} d_g(x_\alpha, x)^2 u_\alpha^{p^*} dv_g \leq C \int_{B(x_0,2\delta)} d_g(x_\alpha, x)^{2-p} u_\alpha^p dv_g$$

ce qui donne le résultat puisque $p \leq 2$. On fait de même pour les autres termes ce qui donne une contradiction en faisant tendre α vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus. Le cas $p > 2$, $\theta = 2$ fonctionne de manière analogue.

Reste à traiter la question 3 pour clore cette section. Une réponse partielle se trouve dans [AuLi] (theorem 1.3) où le résultat suivant est démontré :

Théorème 1.4. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, soit $p \in (2, n)$. Si $n \leq 3p - 2$, alors $(I_{p,\mathrm{opt}}^\theta)$ est valide sur (M, g) pour tout $\theta < p$.*

Aubin et Li reprennent pour montrer ce théorème la preuve de Hebey et Vaugon [HV] dans le cas $p = 2$. Leur méthode ne leur permet pas de traiter le cas de $(I_{p,\mathrm{opt}}^\theta)$ pour $\theta = p$.

Récapitulons pour finir les résultats obtenus en répondant aux questions A2 et A3 :

Pour $1 < p \leq 2$, $(I_{p,\mathrm{opt}}^p)$ (et donc $(I_{p,\mathrm{opt}}^1)$) est valide sur toute variété riemannienne compacte de dimension $n > p$.

Pour $p > 2$, $(I_{p,\mathrm{opt}}^2)$ (et donc $(I_{p,\mathrm{opt}}^1)$) est valide sur toute variété riemannienne compacte de dimension $n > p$.

Pour $p > 2$, $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$ est :

– fausse sur (M, g) de dimension n si $n > 3p - 2$ et si la courbure scalaire est strictement positive en au moins un point de M.

– valide sur (M, g) de courbure sectionnelle négative ou nulle (à conjecture de Cartan-Hadamard près).

2 - Inégalités de Sobolev optimales avec termes d'ordre inférieur

Cette partie est un petit aparté dans le déroulement du programme des questions A1-A5. Les résultats qui suivent vont mettre en relief dans un cadre sans doute plus clair les phénomènes observés dans la section 1 : l'influence de la géométrie, le rôle de la dimension et l'importance d'un lemme de localisation dans l'étude d'inégalités optimales sur des variétés riemanniennes compactes. On s'appuiera ici essentiellement sur [DHV2]. Le lecteur trouvera un autre exemple de ces phénomènes dans un cadre un peu différent (inégalités de Nash) dans [DHV1].

On étudie ici une version optimale de l'inégalité de Sobolev-Poincaré. Plus précisément, on pose la question suivante : étant donnée (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, existe-t-il une constante réelle B telle que pour tout $u \in H^2_1(M)$,

$$\|u\|^2_{2^*} \leq K(n,2)^2 \|\nabla u\|^2_2 + B\|u\|^2_1. \qquad (I_{SP,\mathrm{opt}})$$

Cette inégalité correspond à $(I^2_{2,\mathrm{opt}})$ où l'on a remplacé la norme L^2 par la norme L^1 dans le membre de droite. On vérifie facilement que $K(n,2)^2$ est la meilleure première constante dans une telle inégalité. Il est important de noter ici que $(I_{SP,\mathrm{opt}})$ est beaucoup plus forte que $(I^2_{2,\mathrm{opt}})$: on le voit immédiatement en comparant le résultat de [HV] cité dans la section 1 et le suivant tiré de [DHV2] :

THÉORÈME 2.1. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Alors, $(I_{SP,\mathrm{opt}})$ est :*

i) fausse si $n \geq 4$ et S_g est strictement positive en au moins un point de M.

ii) valide si la courbure sectionnelle de (M, g) est négative ou nulle dans les dimensions où la conjecture de Cartan-Hadamard est vraie.

iii) valide sur les tores plats, les espaces hyperboliques compacts.

iv) valide si $n = 3$, quelque soit la variété.

Dans cet énoncé, *iii)* complète *ii)* et n'a du coup que valeur d'exemple. De façon plus pertinente, *i)* et *ii)* illustrent l'influence de la géométrie et iv) le rôle de la dimension.

Pour montrer *i)*, on prend un point $x_0 \in M$, on fixe $\delta > 0$ un réel suffisamment petit et on pose pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{array}{lll} u_\varepsilon(x) & = \left(\varepsilon^2 + d_g(x_0,x)^2\right)^{1-\frac{n}{2}} - \left(\varepsilon^2+\delta^2\right)^{1-\frac{n}{2}} & \text{dans } B(x_0,\delta) \\ u_\varepsilon(x) & = 0 & \text{dans } M\backslash B(x_0,\delta). \end{array}$$

Clairement, $u_\varepsilon \in H_1^2(M)$. On suppose qu'il existe B telle que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 \leq K(n,2)^2\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 + B\|u_\varepsilon\|_1^2.$$

Un développement limité en $\varepsilon \to 0$ des différents termes de cette inégalité donne après quelques calculs

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{n(n-4)}S_g(x_0)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \leq 0 & \text{si } n \geq 5 \\ \dfrac{1}{4}S_g(x_0)\varepsilon^2|ln\ \varepsilon| + o(\varepsilon^2|ln\ \varepsilon|) \leq 0 & \text{si } n = 4 \end{array}$$

ce qui amène une contradiction pour $n \geq 4$ dès que $S_g(x_0) > 0$.

Pour montrer *ii)* et *iii)*, on établit d'abord un lemme de localisation complètement analogue à celui de la partie précédente puis l'on procède comme dans l'étude de $(I^p_{p,\mathrm{opt}})$.

La preuve de iv) est de loin la plus intéressante puisqu'elle fait apparaître encore une fois un phénomène de petites dimensions. Faute de place, nous ne la donnerons que dans un cas particulièrement simple : on suppose que (M,g) est une variété riemannienne compacte de dimension $n = 3$ conformément plate. Ainsi, pour tout $x \in M$, il existe un voisinage Ω_x de x et une fonction $\varphi_x \in C^\infty(M)$, $\varphi_x > 0$ telle que, dans une carte, $g = \varphi_x^4\xi$ (on rappelle que ξ est la métrique euclidienne). On utilise maintenant une inégalité qui fut obtenue par Brézis et Nirenberg [BrNi] : il existe $\lambda > 0$ explicite et indépendant de Ω_x tel que pour tout $u \in C_c^\infty(\Omega_x)$,

$$\left(\int_{\Omega_x}(u\varphi_x)^6\,dv_\xi\right)^{\frac{1}{3}} \leq K(3,2)^2\int_{\Omega_x}|\nabla(u\varphi_x)|_\xi^2dv_\xi - \lambda\,\mathrm{Vol}_\xi(\Omega_x)^{-\frac{2}{3}}\int_{\Omega_x}(u\varphi_x)^2\,dv_\xi.$$

Par invariance conforme du laplacien conforme, on a de plus

$$\int_{\Omega_x}|\nabla(u\varphi_x)|_\xi^2dv_\xi = \int_{\Omega_x}|\nabla u|_g^2dv_g + \frac{1}{8}\int_{\Omega_x}S_gu^2dv_g$$

ce qui donne en revenant à l'inégalité précédente :

$$\left(\int_{\Omega_x}u^6dv_g\right)^{\frac{1}{3}} \leq K(3,2)^2\int_{\Omega_x}|\nabla u|_g^2dv_g + \int_{\Omega_x}\left(\frac{1}{8}K(3,2)^2S_g - \lambda\,\mathrm{Vol}_\xi(\Omega_x)^{-\frac{2}{3}}\varphi_x^{-4}\right)u^2dv_g.$$

Il suffit maintenant de choisir le voisinage Ω_x suffisamment petit pour que

$$\frac{1}{8}K(3,2)^2 S_g - \lambda \operatorname{Vol}_\xi (\Omega_x)^{-\frac{2}{3}} \varphi_x^{-4} \leq 0 \text{ sur } \Omega_x.$$

On obtient alors : pour tout $u \in C_c^\infty(\Omega_x)$,

$$\left(\int_{\Omega_x} u^6 dv_g \right)^{\frac{1}{3}} \leq K(3,2)^2 \int_{\Omega_x} |\nabla u|_g^2 dv_g$$

ce qui revient exactement à dire que $(I_{SP,\mathrm{opt}})$ est valide localement sur (M, g). On conclut par un lemme de localisation déjà mentionné dans la preuve de *ii)* et *iii)*.

L'étude de cette inégalité nous a offert la panoplie de ce qu'on avait remarqué dans la section 1 mais dans un cadre un peu plus clair et unifié. La première étape dans l'étude d'inégalités optimales sur les variétés compactes est d'obtenir un "lemme de localisation". Mais une inégalité peut être "localisable" tout en étant affectée par la géométrie de la variété. Elle est alors fausse sur certaines classes de variétés (souvent en courbure positive quelque part) et valide sur d'autres (en courbure négative). Reste enfin un phénomène encore assez mal compris : la situation peut totalement changer lorsqu'on passe des petites dimensions ($n \leq 3p-2$ dans la section 1, $n = 3$ dans cette partie) aux grandes dimensions ($n > 3p - 2$ dans la section 1, $n \geq 4$ dans cette partie).

3 - Fonctions extrémales

On revient maintenant à notre programme et on s'intéresse aux questions A4 et A5. On se restreint provisoirement au cas $p = 2$. Dans toute la suite, on omettra le 2 dans la notation $B_0(g)_2$. Pour ce qui est des bornes supérieures sur $B_0(g)$, dans le cas général, seule une borne supérieure implicite est disponible (voir [Heb1]). Malgré tout, il existe des variétés particulières où de très bons encadrements du $B_0(g)$ sont connus (voir également [Heb1]). Par contre, en ce qui concerne les bornes inférieures, il en existe deux explicites. La première est obtenue en rentrant la fonction constante $u \equiv 1$ dans $(I^2_{2,\mathrm{OPT}})$: ceci donne $B_0(g) \geq \operatorname{Vol}_g(M)^{-\frac{2}{n}}$ où $\operatorname{Vol}_g(M)$ désigne le volume riemannien de M. La seconde, valable seulement pour $n \geq 4$, s'obtient en rentrant une série de fonctions-tests dans $(I^2_{2,\mathrm{OPT}})$ (voir proposition 7.1 de [Heb1]). Le résultat est le suivant :

$$\textit{Pour } n \geq 4, \qquad B_0(g) \geq \tfrac{n-2}{4(n-1)} K(n,2)^2 \max_M S_g.$$

On posera dans la suite $B_0(g)_{\mathrm{extr}} = \frac{n-2}{4(n-1)} K(n,2)^2 \max_M S_g$. Ce $B_0(g)_{\mathrm{extr}}$ est extrémal dans le sens suivant : si $n \geq 4$, alors on sait que $B_0(g) \geq B_0(g)_{\mathrm{extr}}$. On expliquera à la fin de cette section pourquoi il est pertinent d'appeler extrémale cette borne-ci, et non pas $\operatorname{Vol}_g(M)^{-\frac{2}{n}}$.

Abordons maintenant plus précisément la question A5. On verra en fait avec le théorème 3.2 que les questions A4 et A5 sont fortement reliées. Les premiers travaux sur les fonctions extrémales remontent à [Heb2] : ils concernent la classe conforme de la sphère standard. Soit (S^n, h) la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de sa métrique standard, on note

$$[h] = \left\{ u^{\frac{4}{n-2}} h, \quad u \in C^\infty(M), \quad u > 0 \right\}$$

la classe des métriques conformes à h. Le résultat de [Heb2], qui répond entièrement aux questions A4 et A5 dans la classe conforme de la sphère standard pour $n \geq 4$, est le suivant:

THÉORÈME 3.1. — *Soit (S^n, h) la sphère unité standard, $n \geq 3$.*

Si $n \geq 4$, alors pour tout $g \in [h]$,

$$B_0(g) = B_0(g)_{\text{extr}}$$

et il existe des fonctions extrémales pour $(I^2_{2,\text{OPT}})$ si et seulement si g est, à un facteur multiplicatif près, isométrique à h.

Si $n = 3$, alors pour tout $g \in [h]$,

$$B_0(g) \leq \frac{1}{8} K(3,2)^2 \max_{S^3} S_g$$

mais, cette fois, il existe des métriques $g \in [h]$ pour lesquelles l'inégalité est stricte. De plus, en cas d'égalité, il existe des fonctions extrémales pour $(I^2_{2,\text{OPT}})$ si et seulement si g est, à un facteur multiplicatif près, isométrique à h.

Les fonctions extrémales de la sphère standard sont toutes explicitement connues. Elles s'écrivent, normalisées par $\|u\|_{2^*} = 1$,

$$u_{x_0,\beta} = \omega_n^{-\frac{1}{2^*}} \left(\beta^2 - 1\right)^{\frac{n-2}{4}} \left(\beta - (x_0, x)\right)^{1-\frac{n}{2}}$$

où $\beta > 1$ est un réel, $x_0 \in S^n$ et (x_0, x) est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Le comportement asymptotique des sous extrémales conformes, $n \geq 4$, est décrit dans Druet-Robert [DR].

Pour la preuve du théorème, on renvoie soit directement à [Heb2] soit à [Heb1] (théorèmes 7.2 et 7.3). Au regard de la situation sur la sphère, l'existence de fonctions extrémales semble avoir un coût géométrique, au moins en dimension $n \geq 4$. De manière surprenante, la situation est tout autre : l'existence de fonctions extrémales pour $(I^2_{2,\text{OPT}})$ n'est pas ou peu contraignante. Le résultat suivant, dû à Z.Djadli et l'auteur [DjDr], semble même suggérer que c'est la non-existence de fonctions extrémales qui a un coût géométrique.

THÉORÈME 3.2. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Alors au moins l'une des deux assertions suivantes est vraie :*

i) $B_0(g) = B_0(g)_{\text{extr}}$.

ii) Il existe des fonctions extrémales pour $(I^2_{2,\text{OPT}})$.

Ce théorème nous place devant une alternative : soit $B_0(g)$ est extrémal, soit il existe des fonctions extrémales pour $(I^2_{2,\mathrm{OPT}})$. Mais les deux peuvent se produire ensemble. C'est d'ailleurs le cas sur la sphère standard (cf. théorème 3.1). Le grand intérêt de ce résultat, mis à part le corollaire 3.3 qui suit, est de montrer que les questions A4 et A5 sont profondément liées l'une à l'autre.

Une dernière remarque s'impose avant de donner un corollaire : le théorème est optimal dans le sens qu'il existe des variétés pour lesquelles $B_0(g) = B_0(g)_{\mathrm{extr}}$ et il n'existe pas de fonctions extrémales pour $(I^2_{2,\mathrm{OPT}})$. C'est le contenu du théorème 3.1. Les sphères (S^n, g), $g \in [h]$, g non isométrique à λh, sont des exemples de telles variétés.

En ce qui concerne plus précisément la question A5, le corollaire suivant de [DjDr] nous donne des conditions explicites sur (M, g) pour qu'il existe des fonctions extrémales pour $(I^2_{2,\mathrm{OPT}})$:

Corollaire 3.3. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 4$. Il existe des fonctions extrémales pour $(I^2_{2,\mathrm{OPT}})$ dans les deux cas suivants :*

i) $S_g \leq 0$

ii) $S_g \equiv$ cte

Pour prouver ce corollaire, on montre dans les deux cas que $B_0(g) > B_0(g)_{\mathrm{extr}}$ et on applique le théorème 3.2. Si $S_g \leq 0$, comme $B_0(g) \geq \mathrm{Vol}_g(M)^{-\frac{2}{n}}$, il est clair que $B_0(g) > 0 \geq B_0(g)_{\mathrm{extr}}$. Si $S_g \equiv$ cte, le résultat vient de la résolution du problème de Yamabe par Aubin [Aub2] et Schoen [Sch]. En effet, d'après leurs travaux, on sait que sur toute variété riemannienne compacte (M, g) non conformément difféomorphe à la sphère, l'invariant de Yamabe de (M, g) est strictement plus petit que $K(n,2)^{-2}$. Écrit en d'autres termes, on a

$$\inf_{u \in H^2_1(M), \|u\|_{2^*} = 1} \left(\int_M |\nabla u|^2_g dv_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u^2 dv_g \right) < K(n,2)^{-2}.$$

Si la courbure scalaire de (M, g) est constante, cette inégalité stricte nous dit tout juste que $B_0(g) > B_0(g)_{\mathrm{extr}}$. Le point *ii)* du corollaire 3.3 est donc prouvé pour toute variété non conformément difféomorphe à la sphère. Maintenant, d'après [Ob], si (M, g) est tout à la fois conformément difféomorphe à la sphère standard et à courbure scalaire constante, alors (M, g) est isométrique à (S^n, h). Or, il existe des fonctions extrémales pour $(I^2_{2,\mathrm{OPT}})$ sur (S^n, h) ce qui achève la preuve du corollaire.

On va maintenant esquisser les grandes lignes de la preuve du théorème 3.2. Elle reprend en grande partie les idées de [Dru3]. Par définition de $B_0(g)$, on sait que pour tout $0 < \alpha < B_0(g)$,

$$\lambda_\alpha := \inf_{u \in H^2_1(M), u \not\equiv 0} \frac{\|\nabla u\|_2^2 + \alpha K(n,2)^{-2} \|u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} < K(n,2)^{-2}.$$

Cette hypothèse entraîne l'existence d'un minimum u_α pour la fonctionnelle considérée. On obtient ainsi que, pour tout $0 < \alpha < B_0(g)$, il existe $u_\alpha \in C^\infty(M)$, $u_\alpha > 0$ telle que

$$\Delta_g u_\alpha + \alpha K(n,2)^{-2} u_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha^{2^*-1} \qquad (F_\alpha)$$
$$\int_M u_\alpha^{2^*} dv_g = 1$$

où Δ_g est le laplacien relativement à g, c'est-à-dire $\Delta_g u = -div_g(\nabla u)$. L'objectif est maintenant d'étudier la suite (u_α) quand $\alpha \to B_0(g)$. Clairement, (u_α) étant bornée dans $H_1^2(M)$, à extraction près, $u_\alpha \rightharpoonup u$ dans $H_1^2(M)$. De plus, en passant à la limite dans l'équation (F_α), on obtient que u est solution de

$$\Delta_g u + B_0(g) K(n,2)^{-2} u = \lambda u^{2^*-1}$$

où λ est la limite, à extraction près, de (λ_α). Si $u \not\equiv 0$, on vérifie que u est nécessairement une fonction extrémale pour $(I_{2,\mathrm{OPT}}^2)$. En effet, en multipliant l'équation ci-dessus par u et en intégrant sur M, on obtient

$$\|u\|_2^2 + B_0(g) K(n,2)^{-2} \|u\|_2^2 = \lambda \|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

Maintenant, $\lambda \le K(n,2)^{-2}$ et par propriété classique de la convergence faible, $\|u\|_{2^*} \le 1$ d'où $\|u\|_{2^*}^{2^*} \le \|u\|_{2^*}^2$. On a ainsi

$$\|u\|_2^2 + B_0(g) K(n,2)^{-2} \|u\|_2^2 \le K(n,2)^2 \|u\|_{2^*}^2$$

ce qui prouve l'assertion ci-dessus. En fait, dans ce cas, la convergence de u_α vers u est forte dans $H_1^2(M)$. Supposons maintenant que $u \equiv 0$: l'objectif est de montrer que, sous cette hypothèse, $B_0(g) = B_0(g)_{\mathrm{extr}}$. Le défaut de compacité de la suite u_α est encore une fois dû à un phénomène de concentration. La description de celui-ci est analogue à celle faite dans la preuve du théorème 1.3. On montre successivement que :

Il existe $x_0 \in M$ tel que, à extraction près,

$$\forall \delta > 0\,, \qquad \lim_{\alpha \to B_0(g)} \int_{B(x_0,\delta)} u_\alpha^{2^*} dv_g = 1$$

et

$$\lim_{\alpha \to B_0(g)} u_\alpha = 0 \qquad \text{dans } C^0_{loc}(M \setminus \{x_0\})\,.$$

En prenant $x_\alpha \in M$ un point de maximum de u_α et en posant $\mu_\alpha^{1-\frac{n}{2}} = \|u_\alpha\|_\infty = u_\alpha(x_\alpha)$, on a :

$$\lim_{R \to +\infty} \lim_{\alpha \to B_0(g)} \int_{B(x_\alpha, R\mu_\alpha)} u_\alpha^{2^*} dv_g = 1.$$

Enfin, il existe C, indépendant de α, telle que pour tout $x \in M$,

$$w_\alpha(x) := d_g(x_\alpha, x)^{\frac{n}{2}-1} u_\alpha(x) \le C.$$

Mais pour montrer le théorème 3.2, on a besoin d'estimer encore un peu plus finement u_α "loin" du point de concentration. Avec les notations ci-dessus, on montre que

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{\alpha\to B_0(g)}\left(\sup_{x\in M\setminus B(x_\alpha,R\mu_\alpha)} w_\alpha(x)\right)=0.$$

En dernier lieu, on a besoin d'une concentration de la norme L^2 de u_α en x_0 quand $\alpha\to B_0(g)$. Plus précisément, on montre que

$$\forall\delta>0\,,\qquad \lim_{\alpha\to B_0(g)}\frac{\int_{B(x_0,\delta)}u_\alpha^2\,dv_g}{\|u_\alpha\|_2^2}=1.$$

Une fois toutes ces estimées obtenues, la stratégie est plus ou moins la même que dans la preuve du théorème 1.3. On part de l'inégalité de Sobolev euclidienne autour de x_0 et on estime tous les termes d'erreur. Au premier ordre, ils font exactement ressortir $B_0(g)_{\text{extr}}$. On tombe en fait juste sur

$$\alpha\le\frac{n-2}{4(n-1)}K(n,2)^2S_g(x_0)+o(1).$$

Bien sûr, comme on sait que $B_0(g)\ge B_0(g)_{\text{extr}}$, ceci termine la preuve du théorème en passant à la limite $\alpha\to B_0(g)$. Ceci montre de plus, qu'en cas de concentration, les (u_α) explosent nécessairement en un point de maximum de la courbure scalaire.

Nous allons maintenant justifier la terminologie introduite au début de cette section. Pourquoi a-t-on choisi d'appeler $B_0(g)_{\text{extr}}$ la borne inférieure $\frac{n-2}{4(n-1)}K(n,2)^2\max_M S_g$ et pas $\mathrm{Vol}_g(M)^{-\frac{2}{n}}$? Pour l'expliquer, on peut se poser la question suivante : Dans la classe conforme d'une variété riemannienne compacte donnée, à volume fixé, existe-t-il un $B_0(g)$ qui soit minimal ? (cette question a été posée par G. Carron – communication orale – à l'auteur). Elle rejoint en fait celle posée dans [Heb1], section 10. La réponse est un corollaire très simple mais néanmoins assez surprenant du théorème 3.2 :

Corollaire 3.4. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n\ge 4$. Il existe $\tilde g$, conforme à g, telle que $B_0(\tilde g)=\mathrm{Vol}_{\tilde g}(M)^{-\frac{2}{n}}$.*

Pour montrer ce corollaire, on remarque tout d'abord que grâce à la résolution du problème de Yamabe ([Aub2] et [Sch]), on peut supposer, à changement conforme près, que $S_g\equiv$ cte. D'après le corollaire 3.3, il existe une fonction extrémale $\varphi\in H_1^2(M)$ pour $(I^2_{2,\mathrm{OPT}})$ (relativement à g). Il est clair que φ peut être prise strictement positive, que $\varphi\in C^\infty(M)$ et qu'elle vérifie sous la normalisation

$$\int_M\varphi^{2^*}\,dv_g=1$$

l'équation suivante :

$$\Delta_g\varphi+B_0(g)K(n,2)^{-2}\varphi=K(n,2)^{-2}\varphi^{2^*-1}.$$

On pose $\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$. On a premièrement

$$\mathrm{Vol}_{\tilde{g}}(M) = \int_M \varphi^{2^*} dv_g = 1.$$

Deuxièmement, pour tout $u \in H_1^2(M)$, en utilisant l'équation vérifiée par φ,

$$\begin{aligned}
\left(\int_M |u|^{2^*} dv_{\tilde{g}}\right)^{\frac{2}{2^*}} &= \left(\int_M |u\varphi|^{2^*} dv_g\right)^{\frac{2}{2^*}} \\
&\leq K(n,2)^2 \int_M |\nabla (u\varphi)|_g^2 dv_g + B_0(g) \int_M (u\varphi)^2 \, dv_g \\
&= K(n,2)^2 \int_M |\nabla u|_g^2 \varphi^2 dv_g + K(n,2)^2 \int_M u^2 \varphi \Delta_g \varphi dv_g \\
&\quad + B_0(g) \int_M (u\varphi)^2 \, dv_g \\
&= K(n,2)^2 \int_M |\nabla u|_g^2 \varphi^2 dv_g + \int_M u^2 \varphi^{2^*} dv_g \\
&= K(n,2)^2 \int_M |\nabla u|_{\tilde{g}}^2 dv_{\tilde{g}} + \int_M u^2 dv_{\tilde{g}}
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

Nous terminons cette section en disant quelques mots sur l'existence de fonctions extrémales dans le cas $p \neq 2$. Le résultat suivant est dans [DjDr] :

THÉORÈME 3.5. — *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 2$ et soit $p \in (1, \sqrt{n})$. Si $p < 2$, il existe des fonctions extrémales pour $(I_{p,\mathrm{OPT}}^p)$. Si $p > 2$, il existe des fonctions extrémales pour $(I_{p,\mathrm{OPT}}^p)$ lorsque (M,g) est à courbure sectionnelle négative ou nulle si la conjecture de Cartan-Hadamard est vraie en dimension n.*

On voit donc que pour $p < 2$, la géométrie n'intervient plus du tout dans l'existence de fonctions extrémales. Il faut noter également que $n = p^2$ ici joue le rôle que jouait $n = 4$ dans le théorème 3.2.

Remerciements. — L'auteur tient à remercier vivement Emmanuel Hebey sans qui peu de résultats cités ici auraient vu le jour.

Références

[Aub1] T. AUBIN. — *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, Journal of Differential Geometry **11** (1976), 353–372.

[Aub2] T. AUBIN. — *Équations différentielles non-linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, Journal de Math. Pures et Appliquées **55** (1976), 269–296.

[ADH] T. Aubin, O. Druet et E. Hebey. — *Best constants in Sobolev inequalities for compact manifolds of nonpositive curvature*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), 1117–1121.

[AuLi] T. Aubin et Y.Y. Li. — *On the best Sobolev inequality*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **78** (1999), 353–387.

[Cr] C.B. Croke. — *A sharp four dimensional isoperimetric inequality*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 187–192.

[DjDr] Z. Djadli et O. Druet. — *Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds*, Prépublications de l'Université de Cergy-Pontoise, 1999.

[Dru1] O. Druet. — *Generalized scalar curvature type equations on compact Riemannian manifolds*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, à paraître.

[Dru2] O. Druet. — *Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riemannian manifolds*, Journal of Functional Analysis **159** (1998), 217–242.

[Dru3] O. Druet. — *The best constants problem in Sobolev inequalities*, Mathematische Annalen **314** (1999), 327–346.

[DHV1] O. Druet, E. Hebey et M. Vaugon. — *Optimal Nash's inequalities on Riemannian manifolds: the influence of geometry*, International Math. Research Notices **14** (1999), 735–780.

[DHV2] O. Druet, E. Hebey et M. Vaugon. — *Sharp Sobolev inequalities with lower order remainder terms*, Transactions of the American Mathematical Society, à paraître.

[DR] O. Druet et F. Robert. — *Asymptotic profile for the sub-extremals of the sharp Sobolev inequality on the sphere*, preprint.

[Heb1] E. Hebey. — *Meilleures constantes et inégalités de Sobolev optimales sur les variétés Riemanniennes compactes*, Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de l'Institut Fourier, Université de Grenoble **16** (1998), 175–210.

[Heb2] E. Hebey. — *Fonctions extrémales pour une inégalité de Sobolev optimale dans la classe conforme de la sphère*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **77** (1998), 721–733.

[Heb3] E. Hebey. — *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev spaces and Inequalities*, CIMS Lecture Notes 5, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999.

[HV] E. Hebey et M. Vaugon. — *Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non-linéaire **13** (1996), 57–93.

[Kl] B. Kleiner. — *An isoperimetric comparison theorem*, Inventiones Mathematicae **108** (1992), 37–47.

[Ob] M. Obata. — *The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds*, Journal of Differential Geometry **6** (1971), 247–258.

[Rob] F. Robert. — *Étude asymptotique d'une équation non-linéaire à croissance de Sobolev critique. Le cas radial*, Prépublications de l'Université de Cergy-Pontoise, 1999.

[Sch] R. Schoen. — *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, Journal of Differential Geometry **20** (1984), 479–495.

[Tal] G. Talenti. — *Best constants in Sobolev inequality*, Ann. di Matem. Pura ed Appl. **110** (1976), 353–372.

[W] A. Weil. — *Sur les surfaces à courbure négative*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris **182** (1926), 1069–1071.

Olivier DRUET
Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques - Site de Saint-Martin
2, Avenue Adolphe Chauvin - BP 222 Pontoise
F 95302 CERGY-PONTOISE Cedex (France)
druet@u-cergy.fr