Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Frédéric Mathéus

Empilements de cercles et théorème de Liouville (d'après T. Dubejko)

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 53-58

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__53_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1996-1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (53–58)

EMPILEMENTS DE CERCLES ET THÉORÈME DE LIOUVILLE (D'APRÈS T. DUBEJKO)

Frédéric MATHÉUS

1. Introduction

Les empilements de cercles constituent depuis une douzaine d'années un sujet florissant. Ils ont suscite d'abondantes recherches, essentiellement orientées dans deux directions : la discrétisation d'applications conformes (voir [R-S], [St1], [St2], [He-R], [He-Sc], [CV-M], [M2], [D1]) et des questions de rigidité (voir [R-S], [Sc], [He], [M1], [D2]).

Parmi ces travaux, les méthodes d'homotopie se sont révélé être un outil efficace pour traiter notamment des questions d'approximation. Récemment, elles ont par exemple permis, dans le cadre du schéma de discrétisation de fonctions holomorphes développé dans [CV-M], de donner un développement asymptotique à deux termes des rayons des cercles des empilements images avec majoration de l'erreur (voir[M3]).

Initié dans [St] et [CV-M], puis réappliqué dans [M2], [M3] et [D2], le principe est le suivant : il s'agit de construire des déformations continues d'empilements de cercles finis telles que la dérivée (par rapport au paramètre de déformation) des rayons des cercles, exprimés dans des coordonnées convenables, satisfasse une version discrète d'un problème de Dirichlet. Cette propriété essentielle permet de contrôler les rayons des cercles tout au long de la déformation de l'empilement. Les variantes de ce principe proviennent du fait que l'on peut déformer des empilements plats ou coniques, et constitués de cercles euclidiens ou hyperboliques.

L'objet de ce texte est de présenter un résultat, dû à Tomasz Dubejko, qui constitue un "théorème de Liouville" pour les empilements de cercles (voir [D2]). Je trouve ce résultat intéressant pour au moins deux raisons. Tout d'abord, c'est, à ma connaissance, le seul énoncé de rigidité que l'on ait pu obtenir à l'aide de méthodes d'homotopie. L'autre raison est qu'il apporte une information sur les empilements de cercles infinis immergés à combinatoire hexagonale, sujet sur lequel on sait encore peu de choses

Classification math. : 05B40 30C80 52A45 60J15.

(voir [Cn-R] et [M1] §II).

La section suivante contient de brefs rappels sur les empilements infinis immergés, suivis de l'énoncé du théorème de Dubejko, et se termine par le cas des empilements infinis à combinatoire hexagonale, qui offre en outre un contre-exemple lorsque l'hypothèse de bornitude sur les rayons n'est plus vérifiée. La section 3 est, quant à elle, consacrée à la preuve du théorème.

2. Rappels sur les empilements de cercles immergés

Pour cette section, voir [M1] §II. Soit $\mathcal{T}$ une triangulation du plan et S l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$. Soit $r = (r_s)_{s \in S} \in (\mathbf{R}_+^*)^S$. On munit chaque triangle de $\mathcal{T}$ de la métrique euclidienne g_r qui au côté ss' affecte la longueur $r_s + r_{s'}$. On obtient ainsi une variété riemannienne plate à singularités coniques, notée $\mathcal{T}_r$ (voir [Tr]). Soit s un sommet d'un triangle T de $\mathcal{T}$. Si $\alpha(s, T)$ désigne l'angle en s dans le triangle T et si s est un sommet intérieur, alors la courbure en s est :

$$K_s(r) = 2\pi - \sum_{s \in T} \alpha(s, T).$$

La famille de cercles $\mathcal{E} = \{C_s,\ s \in S\}$, où C_s est le cercle de $\mathcal{T}_r$ de centre s, de rayon r_s, possède la propriété suivante : les cercles C_s et $C_{s'}$ sont tangents si et seulement si l'arête ss' appartient au 1-squelette $\mathcal{T}^1$ de la triangulation $\mathcal{T}$.

Si, pour tout sommet intérieur s, on a $K_s(r) = 0$, alors la variété $\mathcal{T}_r$ est immergée isométriquement dans $\mathbf{R}^2$ (mais non plongée a priori). On dit alors que $\mathcal{E}$ est un empilement de cercles immergé de combinatoire $\mathcal{T}^1$.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant (voir [D2], corollaire 3.2) :

THÉORÈME 2.1. – *Soit $\mathcal{T}$ une triangulation du plan telle que la marche aléatoire simple sur son 1-squelette $\mathcal{T}^1$ soit récurrente. Soient $\mathcal{E} = \{C_s,\ s \in S\}$ et $\mathcal{E}' = \{C'_s,\ s \in S\}$ deux empilements de cercles de combinatoire $\mathcal{T}^1$, immergés dans le plan euclidien, et r et $r' : S \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ les fonctions des rayons associées. On suppose qu'il existe A et $B > 0$ tels que*

$$\forall s \in S,\ 0 < A \leqslant \frac{r'_s}{r_s} \leqslant B. \ (*)$$

Alors la fonction $s \longmapsto \frac{r_s}{r'_s}$ est constante, de sorte que les empilements $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont semblables.

Les empilements de type exponentiel (voir [CV-M] §III) fournissent un contre-exemple lorsque l'hypothèse (*) de comparaison des rayons n'est plus vérifiée. Rappelons qu'ils constituent une famille à deux paramètres $\{\mathcal{E}(a, b), (a, b) \in (\mathbf{R}_+^*)^2\}$ d'empilements immergés non plongés (sauf si $a = b = 1$) dont voici la description : $\mathcal{T}$ est la triangulation équilatérale du plan euclidien dont l'ensemble des sommets est $S = \mathbf{Z} + e^{\frac{i\pi}{3}}\mathbf{Z}$, et la fonction des rayons $r: S \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ de l'empilement $\mathscr{E}(a,b)$ est donnée par

$$r(s) = a^x b^y \text{ où } s = x + iy .$$

Il s'agit ainsi d'une famille de déformations non triviales de l'empilement hexagonal régulier $\mathscr{E}(1,1)$. Par ailleurs, la marche aléatoire sur $\mathscr{T}^1$ est récurrente (voir [D-S] p.136-138).

Dans l'énoncé du théorème 2.1, la récurrence du graphe $\mathscr{T}^1$ est une hypothèse nécessaire. Considérons par exemple la triangulation $\mathscr{T}$ du disque de Poincaré $\mathbf{D}_{hyp}$ par des triangles hyperboliques équilatéraux d'angle $\frac{2\pi}{7}$. Chaque sommet de $\mathscr{T}$ est de valence 7, et toutes les arêtes de $\mathscr{T}$ ont la même longueur hyperbolique notée $2R$. Le 1-squelette de cette triangulation est un graphe transient, car on peut y plonger un arbre homogène de valence 3. Soit $\mathscr{E}$ l'empilement constitué de cercles hyperboliques de rayon R et centrés aux sommets de $\mathscr{T}$ (voir la fig.2 p.80 de [M1]). Notons r la fonction des rayons euclidiens de $\mathscr{E}$. Soit φ une homographie du plan dont le pôle n'est pas dans $\overline{\mathbf{D}}_{hyp}$, et considérons l'empilement $\mathscr{E}' = \varphi(\mathscr{E})$: la fonction des rayons (euclidiens) r' de $\mathscr{E}'$ vérifie l'hypothèse de bornitude (*) du théorème, et pourtant $\mathscr{E}'$ n'est pas semblable à $\mathscr{E}$.

3. Démonstration du théorème

Soient r et $r' : S \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ deux fonctions définissant des variétés riemanniennes plates $\mathscr{T}_r$ et $\mathscr{T}_{r'}$ sans singularités coniques, de sorte que les empilements $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ associés soient immergés dans le plan euclidien. On suppose que l'hypothèse (*) de bornitude de la fonction $\frac{r}{r'}$ est vérifiée.

Fixons un sommet o dans $\mathscr{T}$. Pour N entier $\geqslant 1$, notons S_N les sommets de $\mathscr{T}$ situés à distance combinatoire $\leqslant N$ de o et $\mathscr{T}_N$ la sous-triangulation de $\mathscr{T}$ constituées des triangles dont tous les sommets sont dans S_N. C'est une triangulation finie d'un disque topologique, dont l'ensemble des sommets intérieurs (resp. du bord) est noté I_N (resp. B_N). Enfin, $\mathscr{E}_N$ (resp. $\mathscr{E}'_N$) désigne l'ensemble des cercles de $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}'$) dont les centres s appartiennent à S_N.

Fixons $N \geqslant 1$. Exactement comme dans [CV-M], on réalise l'empilement $\mathscr{E}'_N$ comme le temps 1 d'une déformation $\{\mathscr{E}_N(t)\}_{t\in[0,1]}$ de l'empilement $\mathscr{E}_N$. Précisément, pour $t \in [0,1]$, $\mathscr{E}_N(t)$ est l'empilement immergé de combinatoire $\mathscr{T}_N$ - unique à isométrie près - tel que

$$\forall s \in B_N, \ \log r_s^N(t) = (1-t)\log r_s + t \log r'_s$$

(l'existence et l'unicité de $\mathscr{E}_N(t)$ proviennent du §4 de [CV]).

Posons $u_s^N(t) = \log r_s^N(t)$. À chaque instant $t \in [0,1]$, le vecteur $\dot{u}^N(t) = \{\dot{u}_s^N(t)\}_{s\in S_N}$ constitué des dérivées logarithmiques des rayons des cercles de l'empilement $\mathscr{E}_N(t)$ est solution d'un problème de Dirichlet discret sur $\mathscr{T}_N$ de la forme :

$$\begin{cases} \Delta^{N,t}\dot{u}^N = 0 & \text{sur } I_N \\ \dot{u}_s^N = \log \frac{r'_s}{r_s} & \text{pour tout } s \in B_N \end{cases}$$

La première équation est obtenue en dérivant par rapport à t la courbure $K_{u^N(t)}(s)$ – nulle ! – en chaque sommet intérieur s. L'opérateur $\Delta^{N,t}$ est une application affine de $\mathbf{R}^{I_N}$ dans lui-même, qui, à toute fonction $\varphi : I_N \longrightarrow \mathbf{R}$ prolongée par $\log \frac{r'}{r}$ sur B_N associe la fonction $\Delta^{N,t}\varphi$ définie par :

$$\forall s \in I_N,\ \Delta^{N,t}\varphi(s) = c_s\varphi(s) - \sum_{s'\sim s} c_{ss'}\varphi(s')$$

(on note $s' \sim s$ pour "s' voisin de s"). Les coefficients $c_s = c_s^{N,t}$ et $c_{ss'} = c_{ss'}^{N,t}$ dépendent de N et t. Si $\rho_1^N(t)$ et $\rho_2^N(t)$ désignent les rayons des cercles inscrits dans les deux triangles de $\mathcal{T}_N$ ayant l'arête ss' en commun, alors on a :

$$c_{ss'} = \frac{\rho_1^N(t) + \rho_2^N(t)}{r_s^N(t) + r_{s'}^N(t)} = c_{s's}\,,\ \text{et}\ c_s = \sum_{s'\sim s} c_{ss'}\,,$$

de sorte que l'application linéaire associée à $\Delta^{N,t}$ est un endomorphisme symétrique défini positif de $\mathbf{R}^{I_N}$, ce qui justifie, pour $\Delta^{N,t}$ la terminologie de laplacien discret sur $\mathcal{T}_N$.

LEMME 3.1. – *Pour tout $N \geqslant 1$, pour tout $t \in [0,1]$, pour tout $s \in S_N$, on a :*

$$\log A \leqslant \dot{u}_s^N(t) \leqslant \log B\,,\ Ar_s \leqslant r_s^N(t) \leqslant Br_s\,,\ \textit{et}\ 0 < c_{ss'}^{N,t} \leqslant 1\,.$$

Preuve du lemme 3.1. – L'entier N et l'instant t étant fixés, l'encadrement de $\dot{u}_s^N(t)$ énoncé est valable pour tout sommet $s \in B_N$, donc pour tout sommet intérieur d'après le principe du maximum (version discrète). L'encadrement de $r_s^N(t)$ en résulte par intégration. L'estimation des coefficients $c_{ss'}^{N,t}$ provient du fait que, dans un triangle euclidien, le rayon du cercle inscrit est inférieur à la moitié de la longueur de chacun des côtés.

LEMME 3.2. – *Soit $t \in [0,1]$. Il existe une suite croissante d'entiers $\{N_p,\ p \in \mathbf{N}\}$ telle que, pour tout $s \in S$,*

i) $\dot{u}_s^{N_p}(t)$ converge vers $v_s(t) \in [\log A, \log B]$,

ii) $r_s^{N_p}(t)$ converge vers $\rho_s(t) \in [Ar_s, Br_s]$,

iii) $c_{ss'}^{N_p,t}$ converge vers $c_{ss'}^{\infty,t} \in]0,1]$.

Preuve du lemme 3.2. – Fixons $t \in [0,1]$. La réunion des trois familles $\{\dot{u}_s^N(t), s \in S_N, N \geqslant 1\}$, $\{r_s^N(t), s \in S_N, N \geqslant 1\}$, et $\{c_{ss'}^{N,t}, s \in S_N, N \geqslant 1\}$ constitue une collection dénombrable de suites bornées. Le procédé diagonal d'extraction fournit une suite croissante $\{N_p,\ p \in \mathbf{N}\}$ assurant les convergences voulues. Le seul point qui reste à vérifier est la non-nullité de $c_{ss'}^{\infty,t}$. Pour cela, fixons $s, s' \in S$, $s \sim s'$ et choisissons N assez grand ($\geqslant N_0$) pour que s et $s' \in S_N$. Notons s_1 et s_2 les sommets des deux triangles de $\mathcal{T}$ ayant s et s' comme sommets en commun. D'après le lemme 3.1, il existe deux réels α et

$\beta > 0$ (dépendant de s et s') tels que les quatre rayons $r_s^N(t)$, $r_{s'}^N(t)$, $r_{s_1}^N(t)$ et $r_{s_2}^N(t)$ appartiennent à $[\alpha, \beta]$, d'où l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que, pour tout $N \geqslant N_0$, on ait $c_{ss'}^{N,t} \geqslant \gamma$. On en déduit que $c_{ss'}^{\infty,t} \geqslant \gamma > 0$.

■

Fin de la preuve du théorème 2.1. – Fixons deux sommets s et $\tilde{s} \in S$ et montrons que $\frac{r'_s}{r_s} = \frac{r'_{\tilde{s}}}{r_{\tilde{s}}}$. Le point de départ est la relation $\log \frac{r'_s}{r_s} = \int_0^1 \dot{u}_s^{N_p}(t)dt$. Avec le lemme 3.2 et le théorème de convergence dominée, il vient $\log \frac{r'_s}{r_s} = \int_0^1 v_s(t)dt$. Fixons $t \in [0, 1]$. La fonction $s \longmapsto v_s(t)$ vérifie

$$\forall s \in S, \ \left(\Delta^{\infty,t} v(t)\right)(s) = \sum_{s' \sim s} c_{ss'}^{\infty,t}(v_s(t) - v_{s'}(t)) = 0.$$

Comme la marche aléatoire simple sur le 1-squelette $\mathcal{T}^1$ de la triangulation $\mathcal{T}$ est récurrente, et compte tenu du *iii)* du lemme 3.2, il en est de même pour la marche aléatoire sur $\mathcal{T}^1$ dont les probabilités de transition sont associées aux coefficients $c_{ss'}^{\infty,t}$ (voir [D-S] p.132-133). Il résulte alors de [Sp, §13-P1, p.133-134] que toute fonction bornée sur S et harmonique pour $\Delta^{\infty,t}$ est constante, donc $v_s(t) = v_{\tilde{s}}(t)$ pour tout t, d'où l'égalité annoncée.

■

4. Bibliographie

[CV] Colin de Verdière Y. – *Un principe variationnel pour les empilements de cercles*, Invent. Math. **104** (1991), 655-669.

[Cn-R] Callahan K., Rodin B. – *Circle packings immersions form regularly exhaustible surfaces*, Complex Variables **21** (1993), 171-177.

[CV-M] Colin de Verdière Y., Mathéus F. – *Empilements de cercles et approximations conformes*, Actes de la Table Ronde de Géométrie Riemannienne en l'honneur de Marcel Berger, Arthur L. Besse (éditeur), Collection SMF Séminaires et Congrès (n°1) (1996), 253-272.

[D-S] Doyle P.-G., Snell J.-L. – *Random walks and electrical networks*, The carus Math. Monographs, Math. Assoc. America, 1984.

[D1] Dubejko T. – *Approximations of analytic functions with prescribed boundary conditions by circle packing maps*, Discrete and Computational Geometry **17** (1997), 67-77.

[D2] Dubejko T. – *Recurrent random walks, Liouville's theorem and circle packings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **121** (1997), 531-546.

[He] He Z.X. – *An estimate for hexagonal circle packings*, J. of Differ. Geom. **33** (1991), 395-412.

[He-R] He Z.X., Rodin B. – *Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mapping*, Communications in Analysis and Geometry **1** (n°1) (1993), 31-41.

[He-Sc] He Z.X., Schramm O. – *On the convergence of circle packings to the Riemann map*, Invent. Math. **125** (1996), 285-305.

[M1] Mathéus F. – *Rigidité des empilements infinis immergés proprement dans le plan et dans le disque*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble (1993-1994), 69-85.

[M2] MATHÉUS F. – *Empilements de cercles et représentations conformes : une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan*, L'Enseignement Mathématique **42** (n^o1-2) (1996), 125-152.

[M3] MATHÉUS F. – *Empilements de cercles et discrétisation quasi-conforme : comportement asymptotique des rayons*, Prépublication n^o197 de l'École Normale Supérieure de Lyon (octobre 1996).

[R-S] RODIN B., SULLIVAN D. – *The convergence of circle packings to the Riemann mapping*, J. of Diff. Geom. **26** (1987), 349-360.

[Sc] SCHRAMM O. – *Rigidity of infinite (circle) packings*, Journal of the A.M.S. **4** (n^o1) (1991), 127-149.

[Sp] SPITZER F. – *Principles of random walks*, Graduate texts in Math., Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[St1] STEPHENSON K. – *Circle packings in the approximation of conformal mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **23** (n^o2) (oct. 90), 407-415 (Research Announcements).

[St2] STEPHENSON K. – *A probabilistic proof of Thurston's conjecture on circle packings*, Preprint, University of Tennessee, Knoxville (1993).

[Tr] TROYANOV M. – *Les surfaces euclidiennes à singularités coniques*, L'Enseignement Mathématique **32** (1986), 79-94.

Frédéric MATHÉUS
Université de Bretagne-Sud
Laboratoire de Mathématiques
et d'Applications des Mathématiques
1 rue de la Loi
F-56000 VANNES (France)
e-mail : Frederic.Matheus@univ-ubs.fr