Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Hamid-Reza Fanaï

Rigidité du flot géodésique de certaines nilvariétés de rang deux

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 15 (1996-1997), p. 25-36
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1996-1997__15__25_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1996–1997 (25–36)

RIGIDITÉ DU FLOT GÉODÉSIQUE DE CERTAINES NILVARIÉTÉS DE RANG DEUX

Hamid-Reza FANAÏ

1. Introduction

On dit que deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, h) ont *les flots géodésiques C^k-conjugués*, s'il existe un homéomorphisme $F : S_g(M) \to S_h(N)$ de classe C^k qui commute avec les flots géodésiques sur les fibrés unitaires tangents $S_g(M)$ et $S_h(N)$.

Une variété riemannienne compacte (M, g) est dite *C^k-géodésiquement rigide* dans une classe de variétés riemanniennes, si toute variété riemannienne (N, h) dans cette classe ayant son flot géodésique C^k-conjugué à celui de (M, g) est isométrique à (M, g).

Dans ce texte, nous nous intéressons à la classe des *nilvariétés de rang deux*. Une nilvariété de rang deux est un quotient compact d'un groupe de Lie nilpotent de rang deux par un sous-groupe discret, muni d'une métrique riemannienne dont le relevé est invariant à gauche. Dans ce cadre, les résultats principaux obtenus sont dus à C. Gordon et Y. Mao (voir [GM1], aussi [GMS] et [E1]). En particulier, nous avons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1.1 ([GM1]). — *Toute nilvariété de rang deux "de type Heisenberg" est C^0-géodésiquement rigide dans la classe de toutes les nilvariétés.*

THÉORÈME 1.2 ([GM1]). — *Toute nilvariété de rang deux "en résonance forte" est C^2- géodésiquement rigide dans la classe de toutes les nilvariétés.*

(voir la deuxième partie pour les définitions)

Classification math. : 53C22, 58F17.

On sait que si deux nilvariétés ont leurs flots géodésiques conjugués, alors elles ont même rang ([GM1], p.2). On peut donc considérer dans l'énoncé de ces deux théorèmes, seulement la classe des nilvariétés de rang deux.

Il est naturel de penser que ce dernier théorème resterait vrai si l'on ne considère que des conjugaisons de classe C^0. En effet, on ne connaît aucun exemple de nilvariétés non isométriques et C^0- géodésiquement conjuguées. Par contre, il existe bien sûr des nilvariétés en résonance forte qui ne sont pas de type Heisenberg et l'unique exemple de ce genre a été donné dans [GM1]. Notre objectif dans ce texte est de prouver que cet exemple est en fait C^0- géodésiquement rigide. La démarche est exactement celle utilisée dans la preuve du théorème 1.1 avec des légères modifications pour le cas qui nous intéresse.

2. Préliminaires et énoncé du résultat

Nous commençons cette partie par un peu de géométrie des groupes de Lie de rang deux. Pour plus de détails, voir les références [E1] et [Kp]. Soit N un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. On note $\mathcal{N}$ son algèbre de Lie. On dit que N (ou bien $\mathcal{N}$) est de rang deux, si le groupe dérivé $[N, N]$ est inclu dans le centre de N (ou bien le crochet de Lie $[\mathcal{N},\mathcal{N}]$ est inclu dans le centre de $\mathcal{N}$). Soit g une métrique riemannienne invariante à gauche sur N. La métrique g définit un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$. Soient $\mathcal{Z} = [\mathcal{N},\mathcal{N}]$ et $\mathcal{V}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{N}$ par rapport à $\langle\ ,\ \rangle$.

Supposons que (N, g) est de rang deux, la formule de Campbell-Baker-Hausdorff implique alors $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y+\frac{1}{2}[x, y])$, pour tous x, y dans $\mathcal{N}$, où $\exp : \mathcal{N} \to N$ est l'application exponentielle des groupes de Lie. On note log l'inverse de cette application. Maintenant, pour tout z dans $\mathcal{Z}$, on définit une transformation linéaire antisymétrique $\mathcal{J}(z) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ par l'équation suivante :

$$< \mathcal{J}(z)x, y >=< [x, y], z > \quad \forall x, y \in \mathcal{V}.$$

Soit $\gamma(t)$ une géodésique de N avec $\gamma(0) = e$ l'élément neutre de N. Soit $\gamma'(0) = X_0 + Z_0$, où $X_0 \in \mathcal{V}, Z_0 \in \mathcal{Z}$ et $\mathcal{N} = T_eN = \mathcal{V}\oplus\mathcal{Z}$. La proposition 3.2 de [E1] implique que : $\gamma'(t) = dL_{\gamma(t)}\left(e^{t\mathcal{J}(Z_0)}X_0 + Z_0\right)$, pour tout t, où L_m désigne la translation à gauche sur N par $m \in N$ et $e^{t\mathcal{J}(Z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n\mathcal{J}^n(Z_0)}{n!}$. Nous utilisons aussi la notation L_{m*} pour désigner dL_m. Notons φ_t le flot géodésique sur $S_g(N)$. On aura donc la description suivante de φ_t (corollaire 3.3 de [E1]) :

COROLLAIRE 2.1. — *Soient $n \in N, X_0 \in \mathcal{V}$ et $Z_0 \in \mathcal{Z}$ quelconques. Alors :*

$$\varphi_t(dL_n(X_0 + Z_0)) = dL_{\gamma(t)}\left(e^{t\mathcal{J}(Z_0)}X_0 + Z_0\right)$$

où $\gamma(t)$ est l'unique géodésique avec $\gamma'(0) = dL_n(X_0 + Z_0)$.

Remarque. — Ce corollaire nous permet de construire une fonction lisse f : $S_g(N) \to \mathcal{Z}$ non constante, invariante par le flot géodésique φ_t. En effet, pour tout $v \in S_g(N)$, il existe deux vecteurs uniques $X_0 \in \mathcal{V}, Z_0 \in \mathcal{Z}$ tels que $v = dL_n(X_0 + Z_0)$, où $v \in T_nN$. Il suffit de prendre $f(v) = Z_0$. En particulier, $S_g(N)$ n'admet aucune orbite dense ([E1]).

La proposition suivante (proposition 3.5 de [E1]) donne une formule explicite pour la géodésique $\gamma(t)$ vérifiant $\gamma(0) = e, \gamma'(0) = X_0 + Z_0$:

PROPOSITION 2.2. — *Si $\gamma(t) = \exp(X(t)+Z(t))$, où $X(t) \in \mathcal{V}$ et $Z(t) \in \mathcal{Z}$ vérifient $X'(0) = X_0, Z'(0) = Z_0$, alors on aura :*

1. $X(t) = t\bar{X}_1 + \left(e^{t\mathcal{J}} - \mathrm{Id}\right)\mathcal{J}^{-1}\bar{X}_2$, *pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $\mathcal{J} = \mathcal{J}(Z_0), \bar{X}_1 \in \ker(\mathcal{J}), \bar{X}_2 \in \ker(\mathcal{J})^{\perp}$ et $\bar{X}_1 + \bar{X}_2 = X_0$.*
2. $Z(t) = tZ_1(t) + Z_2(t)$, *où :*

$$\begin{aligned}
Z_1(t) &= Z_0 + \tfrac{1}{2}\left[\bar{X}_1, \left(e^{t\mathcal{J}} + \mathrm{Id}\right)\mathcal{J}^{-1}\bar{X}_2\right] + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{N}[\mathcal{J}^{-1}\xi_i, \xi_i] \\
Z_2(t) &= \left[\bar{X}_1, \left(\mathrm{Id} - e^{t\mathcal{J}}\right)\mathcal{J}^{-2}\bar{X}_2\right] + \tfrac{1}{2}\left[e^{t\mathcal{J}}\mathcal{J}^{-1}\bar{X}_2, \mathcal{J}^{-1}\bar{X}_2\right] \\
&\quad -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i\neq j=1}^{N} \frac{1}{\theta_j^2-\theta_i^2}\left\{\left[e^{t\mathcal{J}}\mathcal{J}\xi_i, e^{t\mathcal{J}}\mathcal{J}^{-1}\xi_j\right] - \left[e^{t\mathcal{J}}\mathcal{J}\xi_i, e^{t\mathcal{J}}\xi_j\right]\right\} \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i\neq j=1}^{N} \frac{1}{\theta_j^2-\theta_i^2}\left\{[\mathcal{J}\xi_i, \mathcal{J}^{-1}\xi_j] - [\xi_i, \xi_j]\right\}
\end{aligned}$$

et $\left\{\pm\theta_i\sqrt{-1}, i = 1, \ldots, N\right\}$ sont les valeurs propres distinctes de $\mathcal{J}$ et $\{\xi_j\} \subseteq \ker(\mathcal{J})^{\perp}$ les vecteurs distincts tels que $\sum_j \xi_j = \bar{X}_2$ et $\mathcal{J}^2\xi_j = -\theta_j{}^2\xi_j$.

Soit Γ un sous-groupe discret cocompact de N. Un tel sous-groupe existe si et seulement si, il existe une base de $\mathcal{N}$ telle que les constantes de structures relatives à cette base soient rationnelles. On a alors la nilvariété (M, g) de rang deux, où $M = \Gamma\backslash N$, munie de la métrique induite notée toujours g.

DÉFINITION 2.3. — *La nilvariété (M, g) est dite :*

- *de type Heisenberg, si $\mathcal{J}^2(z) = -|z|^2\,\mathrm{Id}$ sur $\mathcal{V}$, pour tout $z \in \mathcal{Z}$.*
- *en résonance forte, si pour tout $z \in \mathcal{Z}$ non nul, il existe une constante $t = t(z)$ telle que : $e^{t\mathcal{J}(z)} = -\mathrm{Id}$.*

Remarque. — Les nilvariétés de type Heisenberg peuvent être considérées comme les analogues des espaces *localement symétriques* parmi toutes les nilvariétés de rang deux, aussi il y a des liens intéressants entre la densité des vecteurs périodiques dans le fibré unitaire tangent et la condition de résonance (forte) (voir [E1] et [E2] pour plus de détails).

Il est facile de voir que les nilvariétés de type Heisenberg sont en résonance forte. En fait dans ce cas, pour tout $z \neq 0$ on a : $e^{t\mathcal{J}(z)} = \cos(t|z|)\,\mathrm{Id} + \{\sin(t|z|)/|z|\}\mathcal{J}(z)$. Mais l'inverse n'est pas vrai, comme l'exemple suivant le montre (exemple 3.4 de [GM1]) :

Exemple 1. — Soient $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{Z}_0$ deux espaces vectoriels réels munis des produits scalaires tels que $\{X_1, \ldots, X_8\}$ et $\{Z_1, Z_2\}$ soient des bases orthonormées de $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{Z}_0$ respectivement. On définit l'application $\mathcal{J} : \mathcal{Z}_0 \to \mathfrak{so}(\mathcal{V}_0)$ de la manière suivante : pour tout $Z = z_1Z_1 + z_2Z_2 \in \mathcal{Z}_0$, $\mathcal{J}(Z)$ a la matrice suivante dans les bases choisies auparavant :

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -\lambda_1 z_1 & -\lambda_1 z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_1 z_2 & -\lambda_1 z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda_1 z_1 & -\lambda_1 z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda_1 z_2 & \lambda_1 z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 z_1 & -\lambda_2 z_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 z_2 & -\lambda_2 z_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 z_1 & -\lambda_2 z_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 z_2 & \lambda_2 z_1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

où λ_1 et λ_2 sont deux constantes. Les valeurs propres de $\mathcal{J}(Z)$ sont :

$$\left\{\pm\sqrt{-1}\lambda_1|Z|, \pm\sqrt{-1}\lambda_2|Z|\right\}.$$

On définit le crochet de Lie [,] sur $\mathcal{V}_0$ de la façon suivante :

$$\forall x, y \in \mathcal{V}_0,\ [x,y] = <\mathcal{J}_{Z_1}(x), y> Z_1 + <\mathcal{J}_{Z_2}(x), y> Z_2$$

et on pose $\mathcal{N}_0 = \mathcal{V}_0 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{Z}_0$, muni du crochet [,] tel que $\mathcal{Z}_0$ soit le centre de $\mathcal{N}_0$. Le produit scalaire sur $\mathcal{N}_0$ définit une métrique riemannienne g_0 invariante à gauche sur N_0 le groupe de Lie nilpotent simplement connexe associé à $\mathcal{N}_0$. Il est clair que N_0 est de rang deux. On vérifie facilement que pour tout $Z = z_1Z_1 + z_2Z_2 \in \mathcal{Z}_0$ non nul :

$$e^{t\mathcal{J}(Z)} = \begin{pmatrix}
b_1 & 0 & -a_1 z_1 & -a_1 z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_1 & a_1 z_2 & -a_1 z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1 z_1 & -a_1 z_2 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_1 z_2 & a_1 z_1 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & -a_2 z_1 & -a_2 z_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & a_2 z_2 & -a_2 z_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_2 z_1 & -a_2 z_2 & b_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_2 z_2 & a_2 z_1 & 0 & b_2
\end{pmatrix}$$

où $a_1 = \dfrac{\sin(t\lambda_1|Z|)}{|Z|}$, $a_2 = \dfrac{\sin(t\lambda_2|Z|)}{|Z|}$, $b_1 = \cos(t\lambda_1|Z|)$ et $b_2 = \cos(t\lambda_2|Z|)$.

Maintenant, si $\lambda_2 = (2k+1)\lambda_1$, pour un $k \in \mathbb{Z}^*$ et $\lambda_1 \neq 0$, alors : $e^{t\mathcal{J}(Z)} = -\mathrm{Id}$ pour $t = \dfrac{\pi}{\lambda_1 |Z|}$. On peut voir aisément qu'il suffit de choisir λ_1 rationnelle pour que N_0 admette un sous-groupe discret cocompact Γ_0. On aura alors une nilvariété de rang deux $M_0 = \Gamma_0 \backslash N_0$ munie de la métrique induite g_0, en résonance forte qui n'est pas de type Heisenberg.

D'après le théorème 1.2, toute nilvariété (M_0, g_0) ainsi obtenue, est C^2-géodésiquement rigide. En suivant la preuve du théorème 1.1, nous démontrerons dans la troisième partie, le résultat suivant :

THÉORÈME 2.4. — *Toute nilvariété de rang deux obtenue par l'exemple 1 est C^0-géodésiquement rigide.*

Remarque. — Le résultat reste vrai, si l'on rajoute des blocs similaires dans la matrice de $\mathcal{J}(Z)$, présentée dans l'exemple 1 avec des constantes $\lambda_3, \lambda_4, \ldots$ bien choisies.

3. Preuve du résultat

On considère la variété (N_0, g_0) construite dans l'exemple 1. Il est clair que toutes les applications $\mathcal{J}(Z)$ pour $Z \neq 0$ sont inversibles, et donc $\ker(\mathcal{J}(Z)) = \{0\}$ et on aura $\bar{X}_1 = 0$ dans la proposition 2.2.

LEMME 3.1. — *Avec les notations de la proposition 2.2, pour la variété (N_0, g_0) on aura :*

$$Z_1(t) = \left(1 + \frac{|X_0|^2}{2|Z_0|^2}\right) Z_0, \quad \forall Z_0 \neq 0.$$

Démonstration. — Soient $X_0 = x_1X_1 + \cdots + x_8X_8$, $Z_0 = z_1Z_1 + z_2Z_2$ dans les bases de $\mathcal{Z}_0$ et $\mathcal{V}_0$. Il est facile de voir que : $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}^2(Z_0) = -|Z_0|^2 \begin{pmatrix} \lambda_1{}^2\mathrm{Id}_4 & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^2\mathrm{Id}_4 \end{pmatrix}$ et donc :
$\mathcal{J}^{-1} = \dfrac{-1}{|Z_0|^2} \begin{pmatrix} \lambda_1{}^{-2}\mathrm{Id}_4 & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^{-2}\mathrm{Id}_4 \end{pmatrix} \mathcal{J}$.

Soient $\xi_1 = x_1X_1 + \cdots + x_4X_4 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\xi_2 = x_5X_5 + \cdots + x_8X_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix}$. On a $\xi_1 + \xi_2 = \bar{X}_2 = X_0$, $\mathcal{J}^2\xi_1 = -|Z_0|^2\lambda_1{}^2\xi_1$ et $\mathcal{J}^2\xi_2 = -|Z_0|^2\lambda_2{}^2\xi_2$. En appliquant la formule du crochet, on obtient :

$$[\mathcal{J}^{-1}\xi_1,\xi_1] = -\frac{1}{\lambda_1{}^2|Z_0|^2}[\mathcal{J}\xi_1,\xi_1] = -\frac{1}{\lambda_1{}^2|Z_0|^2}[\begin{pmatrix} -x_3\lambda_1 z_1 - x_4\lambda_1 z_2 \\ x_3\lambda_1 z_2 - x_4\lambda_1 z_1 \\ x_1\lambda_1 z_1 - x_2\lambda_1 z_2 \\ x_1\lambda_1 z_2 + x_2\lambda_1 z_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

$$= -\frac{1}{\lambda_1|Z_0|^2}\{z_1[\begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}] + z_2[\begin{pmatrix} -x_4 \\ x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}]\}$$

$$= -\frac{1}{\lambda_1|Z_0|^2}\{z_1(<\mathcal{J}_{Z_1}\begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}> Z_1 + <\mathcal{J}_{Z_2}\begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}> Z_2)$$

$$+ \; z_2(<\mathcal{J}_{Z_1}\begin{pmatrix} -x_4 \\ x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}> Z_1 + <\mathcal{J}_{Z_2}\begin{pmatrix} -x_4 \\ x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}> Z_2)\}$$

$$= -\frac{1}{|Z_0|^2}\{(-x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2 - x_4{}^2)z_1 Z_1 + (-x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2 - x_4{}^2)z_2 Z_2\}$$

$$= \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2}{|Z_0|^2} Z_0.$$

De la même façon, on trouve : $[\mathcal{J}^{-1}\xi_2,\xi_2] = \dfrac{x_5{}^2 + \cdots + x_8{}^2}{|Z_0|^2} Z_0$. Ce qui implique :

$$[\mathcal{J}^{-1}\xi_1,\xi_1] + [\mathcal{J}^{-1}\xi_2,\xi_2] = \frac{|X_0|^2}{|Z_0|^2} Z_0$$

et donc prouve le lemme. □

LEMME 3.2. — *Si pour un $t_0 \in \mathbb{R}$, $e^{t_0\mathcal{J}(Z_0)} = \mathrm{Id}$, alors $Z_2(t_0) = 0$.*

Démonstration. — On constate facilement qu'il suffit de montrer que :

$$[\mathcal{J}\xi_i, \mathcal{J}^{-1}\xi_j] = [\mathcal{J}\xi_i, \xi_j] = [\xi_i, \xi_j] = 0$$

pour $i \neq j \in \{1,2\}$ où $\mathcal{J} = \mathcal{J}(Z_0)$. Ceci découle du fait que pour deux vecteurs quelconques
$X \in <\{X_1, \ldots, X_4\}>$ et $Y \in <\{X_5, \ldots, X_8\}>$, on a toujours : $[X,Y] = 0$. □

COROLLAIRE 3.3. — *Soit $\gamma(t)$ une géodésique de (N_0, g_0) avec $\gamma(0) = e$ et $\gamma'(0) = X_0 + Z_0$, où $X_0 \in \mathcal{V}_0, 0 \neq Z_0 \in \mathcal{Z}_0$.*

Si pour un $t_0 \in \mathbb{R}$, $e^{t_0 \mathcal{J}(Z_0)} = \mathrm{Id}$, *alors :*

$$\gamma(t_0) = \exp(t_0(1 + \frac{|X_0|^2}{2|Z_0|^2})Z_0).$$

□

Maintenant, on considère une conjugaison $F\colon S_g(\Gamma\backslash N) \to S_{g^*}(\Gamma^*\backslash N^*)$ de classe C^0 entre les fibrés unitaires tangents de deux nilvariétés de rang deux $(\Gamma\backslash N, g)$ et $(\Gamma^*\backslash N^*, g^*)$.

D'après [E1], on peut supposer que : $(\Gamma^*\backslash N^*, g^*) = (\Phi(\Gamma)\backslash N, g)$, où Φ est un automorphisme Γ- presque intérieur de N, i.e. $\forall \gamma \in \Gamma, \Phi(\gamma)$ est conjugué à γ. On sait qu'il existe une dérivation ϕ de $\mathcal{N} = T_eN$ définie par $\Phi_* = e^{\phi}$. Cette dérivation ϕ est alors une dérivation Γ-presque intérieure, i.e. $\forall x \in \log\Gamma, \phi(x) \in \mathrm{image}(\mathrm{ad}(x))$, et on a : $e^{\phi} = \mathrm{Id} + \phi$. On considère donc le cas :

$$F : S_g(\Gamma\backslash N) \to S_g(\Phi(\Gamma)\backslash N).$$

On note $\widetilde{F} : S_gN \to S_gN$, le relevé de F, on aura : $\widetilde{F} \circ L_{\gamma *} = L_{\Phi(\gamma)*} \circ \widetilde{F}$, et bien sûr $\widetilde{F} \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \widetilde{F}$. On a les identifications naturelles suivantes :

$$S_g(N) = N \times S(\mathcal{N})$$

$$S_g(\Gamma\backslash N) = \Gamma\backslash N \times S(\mathcal{N})$$

où $S(\mathcal{N})$ désigne la sphère unité de $\mathcal{N}$ définie par la métrique g. Pour tout $m \in N$, la translation à gauche L_m induit un difféomorphisme L_{m*} de $S_g(N)$, et avec ces identifications on peut écrire : $L_{m*}(n,u) = (mn,u)$, pour tous $n \in N, u \in S(\mathcal{N})$. On pose aussi :

$$\forall (n,u) \in S_g(N), \widetilde{F}(n,u) = (\exp(A(n,u) + B(n,u))n, I(n,u) + H(n,u))$$

où $A(n,u) \in \mathcal{Z}, B(n,u) \in \mathcal{V}, I(n,u) \in \mathcal{V}$ et $H(n,u) \in \mathcal{Z}$.

Le lemme suivant (propositions 2.9 et 3.7 de [GM1]) exprime complètement le changement de ces applications par les éléments du sous-groupe Γ et par le flot géodésique φ_t.

LEMME 3.4. — *Soit* $(n,u) \in S_g(N)$, *où* $n \in N$ *et* $u \in S(\mathcal{N})$.

- *On a pour tout* $\gamma \in \Gamma$ *:*

  1. $B(\gamma n, u) = B(n,u)$
  2. $H(\gamma n, u) = H(n,u)$
  3. $I(\gamma n, u) = I(n,u)$
  4. $A(\gamma n, u) = A(n,u) + \phi(\log\gamma) - [B(n,u), \log\gamma]$.

- *Soit* $\gamma(t,u)$ *la géodésique de* N *définie par* $\gamma(0,u) = e$ *et* $\gamma'(0,u) = u$. *On suppose que* $\gamma(t,u) = \exp(X(t,u) + Z(t,u))$ *avec* $X(t,u) \in \mathscr{V}$ *et* $Z(t,u) \in \mathscr{Z}$. *Alors :*

  1. $I(\varphi_t(n,u)) = e^{t\mathscr{J}(H(n,u))} I(n,u)$
  2. $H(\varphi_t(n,u)) = H(n,u)$
  3. $B(\varphi_t(n,u)) = B(n,u) + X(t, I(n,u) + H(n,u)) - X(t,u)$.

Revenons à la question de savoir, si les deux nilvariétés $(\Gamma\backslash N, g)$ et $(\Phi(\Gamma)\backslash N, g)$ sont isométriques, lorsqu'elles ont leurs flots géodésiques conjugués par F. Pour cela, on sait qu'il suffit de montrer que Φ est un automorphisme intérieur de N, ce qui voudrait dire que ϕ est une dérivation intérieure de $\mathscr{N}$. La proposition suivante (proposition 2.11 de [GM1]) décrit la nature de ϕ :

PROPOSITION 3.5. — *L'application* ϕ *est une dérivation presque intérieure de* $\mathscr{N}$ *"de type continue". Il existe une application continue* $\bar{B} : S_g(N) \to S_g(N)$ *telle que pour tous* $n \in N, 0 \neq v \in \mathscr{V}$ *:*

$$\phi(v) = [\bar{B}(n, \frac{v}{|v|}), v].$$

De plus, on a pour tout $n \in N, \bar{B}(n,v) = \bar{B}(e,v)$.

En fait $\bar{B}$ est définie de la manière suivante :

$$\bar{B}(n,u) = \int_T B(x\cdot n, u)\, dx$$

où T est le tore $\Gamma \cap [N,N]\backslash[N,N]$ et dx désigne la mesure de Haar normalisée. On note que T agit isométriquement sur $\Gamma\backslash N$ par translation à gauche.

L'application $\bar{B}(n,v) = \bar{B}(e,v)$ étant continue sur $\mathscr{V}\setminus\{0\}$, on dit que ϕ est de type continue. Il est important de remarquer qu'il existe des nilvariétés de rang deux, dont toute dérivation presque intérieure de type continue est intérieure. En conséquence, ces nilvariétés sont C^0-géodésiquement rigides (pour un exemple, voir [GM2], p. 684). Pour ces nilvariétés, il existe toujours un $0 \neq Z \in \mathscr{Z}$ tel que $\mathscr{J}(Z)$ n'est pas inversible si $\dim \mathscr{Z} > 1$, car dans le cas contraire, d'après la proposition 4 de [P], on peut trouver une dérivation presque intérieure qui n'est pas intérieure. Ceci est une contradiction puisque notre hypothèse entraîne que toute dérivation presque intérieure est de type continue (voir l'appendice). Notre nilvariété $(\Gamma_0\backslash N_0, g_0)$ ne se situe donc pas dans cette famille particulière.

La proposition suivante (proposition 3.9 de [GM1]) est un critère essentiel dans la preuve :

PROPOSITION 3.6. — *Supposons que* ϕ *peut être écrite sous la forme* $\phi(x) = [\xi(x), x]$ *où* ξ *vérifie :* $\xi\left(e^{\mathscr{J}(z)}x\right) = \xi(x)$ *pour tous* $x \in \mathscr{V}, z \in \mathscr{Z}$. *Alors* ϕ *est une dérivation intérieure.*

L'étape cruciale dans la preuve est le lemme 4.2 de [GM1], qui a été démontré pour les nilvariétés de type Heisenberg. On montre que ce lemme reste vrai pour notre variété (N_0, g_0).

LEMME 3.7. — *Pour tous* $(n, v+z) \in S_{g_0}(N_0), v \in \mathscr{V}_0, z \in \mathscr{Z}_0$, *on a :*

$$H(n, v+z) = z.$$

Démonstration. — On suppose que les deux vecteurs v et z sont non nuls, sinon le résultat découle de la proposition 2.7 de [GM1]. On sait que $e^{\frac{\pi}{\lambda_1|z|}\mathscr{J}(z)} = -\operatorname{Id}$ et donc $e^{t_1\mathscr{J}(z)} = \operatorname{Id}$ où $t_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda_1|z|}$. On aura donc d'après les corollaires 2.1 et 3.3 :

$$\varphi_{t_1}(n, v+z) = (n\exp(t_1(1+\frac{|v|^2}{2|z|^2})z), v+z) = dL_{\gamma_0}(n, v+z)$$

où $\gamma_0 = \exp(t_1(1+\dfrac{|v|^2}{2|z|^2})z)$.

On remarque que l'ensemble des vecteurs $(n, v+z) \in S_{g_0}(N_0)$ tels qu'il existe un nombre $k \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant $\dfrac{2k\pi}{\lambda_1|z|}(1+\dfrac{|v|^2}{2|z|^2})z \in \log(\Gamma_0 \cap [N_0, N_0])$, est dense dans $S_{g_0}(N_0)$, (voir [GM1], p. 26) et il suffit de montrer que pour tels vecteurs on a $H(n, v+z) = z$. On suppose donc $\gamma_0 \in \Gamma_0 \cap [N_0, N_0]$ (en multipliant éventuellement t_1 par un entier $k \in \mathbb{Z}^*$) et ainsi $\Phi(\gamma_0) = \gamma_0$ et :

$$\varphi_{t_1} \circ \widetilde{F}(n, v+z) = \widetilde{F} \circ \varphi_{t_1}(n, v+z) = \widetilde{F} \circ dL_{\gamma_0}(n, v+z) = dL_{\gamma_0} \circ \widetilde{F}(n, v+z).$$

Soit $\widetilde{F}(n, v+z) = (n', v'+z')$. La proposition 2.7 de [GM1], montre que les vecteurs v' et z' sont non nuls. En appliquant la proposition 2.2 et le lemme 3.1, on trouve :

$$\varphi_{t_1} \circ \widetilde{F}(n, v+z) = \left(n' \exp\left[(e^{t_1\mathscr{J}(z')} - \operatorname{Id})\mathscr{J}^{-1}(z')v' + t_1(1+\frac{|v'|^2}{2|z'|^2})z' + Z_2(t_1)\right], e^{t_1\mathscr{J}(z')}v' + z'\right)$$

où $Z_2(t)$ est la fonction associée à z' et v' dans la proposition 2.2.

D'autre part, $dL_{\gamma_0} \circ \widetilde{F}(n, v+z) = (\gamma_0 n', v'+z')$ et donc : $\varphi_{t_1} \circ \widetilde{F}(n, v+z) = (\gamma_0 n', v'+z')$. En comparant les deux égalités obtenues, on trouve : $e^{t_1\mathscr{J}(z')}v' = v'$. Soit $v' = x' + y'$, où $x' \in \mathscr{V}_1 = \langle \{X_1, \dots, X_4\} \rangle$, $y' \in \mathscr{V}_2 = \langle \{X_5, \dots, X_8\} \rangle$. Si x' est non nul, en considérant : $e^{t_1\mathscr{J}(z')}x' = x'$, un calcul direct montre que : $t_1 = \dfrac{2k\pi}{\lambda_1|z'|}$ pour un entier k et donc : $e^{t_1\mathscr{J}(z')} = \operatorname{Id}$. On en déduit, d'après le lemme 3.2, $Z_2(t_1) = 0$ et on aura :

$$t_1(1+\frac{|v|^2}{2|z|^2})z = t_1(1+\frac{|v'|^2}{2|z'|^2})z' \qquad (\star).$$

Si $x' = 0$, alors $y' \neq 0$ et l'égalité $e^{t_1\mathscr{J}(z')}y' = y'$ implique que : $t_1 = \dfrac{2k\pi}{\lambda_2|z'|}$ pour un entier k. On trouve dans ce cas, $e^{t_1\mathscr{J}(z')} = \begin{pmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & \operatorname{Id}_4 \end{pmatrix}$, pour une matrice A.

Considérons la proposition 2.2 avec $Z_0 = z', X_0 = \bar{X}_2 = v' = y'$ et $t = t_1 = \dfrac{2k\pi}{\lambda_2|z'|}$. Avec les notations de cette proposition, en remarquant que: $\left(e^{t_1\mathcal{J}(z')}\right)_{|\mathcal{V}_2} = \mathrm{Id}$, on a: $X(t_1) = \left(e^{t_1\mathcal{J}(z')} - \mathrm{Id}\right)\mathcal{J}^{-1}(z')y' = 0$, car les applications $\mathcal{J}(Z), \mathcal{J}^{-1}(Z)$ et $e^{t\mathcal{J}(Z)}$ préservent les espaces $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$, pour tout $Z \in \mathcal{Z}_0$ et tout $t \in \mathbb{R}$. L'argument du lemme 3.2 nous donne aussi dans ce cas: $Z_2(t_1) = 0$ et on trouve à nouveau l'égalité $(\star)$.

Maintenant, avec $|v|^2 + |z|^2 = |v'|^2 + |z'|^2 = 1$ on obtient $H(n, v+z) = z' = \lambda(z)z$, où $\lambda(z) = 1$ ou $1/|z|^2$. La continuité de H donne $\lambda(z) \equiv 1$ (voir [GM1], p. 26). $\square$

Maintenant, considérons la dérivation ϕ. On sait que $\phi(v) = [\bar{B}(e, \frac{v}{|v|}), v]$ pour tout $0 \neq v \in \mathcal{V}$. On a alors: $\phi(v) = -\phi(-v) = -[\bar{B}(e, -\frac{v}{|v|}), -v] = [\bar{B}(e, -\frac{v}{|v|}), v]$ et donc: $\phi(v) = [\widetilde{B}(v), v]$ où $\widetilde{B}(v) = \dfrac{1}{2}\left\{\bar{B}(e, \frac{v}{|v|}) + \bar{B}(e, -\frac{v}{|v|})\right\}$.

La preuve du résultat est complète, une fois que l'on montre que l'application $\widetilde{B}$ vérifie la condition $\widetilde{B}\left(e^{\mathcal{J}(z)}v\right) = \widetilde{B}(v)$ de la proposition 3.6. Ceci se fait exactement comme dans la démonstration du théorème 4.3 de [GM1], sans aucun changement important. En fait, d'abord pour tout $(n, v+z) \in S_{g_0}(N_0)$, d'après les lemmes 3.4, 3.7 et la proposition 2.2, on a:

$$B(\varphi_t(n, v+z)) = B(n, v+z) + \left(e^{t\mathcal{J}(z)} - \mathrm{Id}\right)\mathcal{J}^{-1}(z)(I(n, v+z) - v) \tag{1}$$

$$B(\varphi_t(n, -v+z)) = B(n, -v+z) + \left(e^{t\mathcal{J}(z)} - \mathrm{Id}\right)\mathcal{J}^{-1}(z)(I(n, -v+z) + v). \tag{2}$$

Ensuite, les lemmes 3.4 et 3.7 nous donnent: $I(\varphi_t(n, v+z)) = e^{t\mathcal{J}(z)}I(n, v+z)$. Pour $t = t_0 = \dfrac{\pi}{\lambda_1|z|}$, on a:

$$I(n\gamma(t_0, v+z), -v+z) = -I(n, v+z) \tag{3}$$

où $\gamma(t, v+z)$ est la géodésique définie par $\gamma(0) = e, \gamma'(0) = v+z$. En remplaçant n par $n\gamma(t_0, v+z)$ dans (2), en additionnant avec (1) et en considérant (3) on obtient:

$$B(\varphi_t(n, v+z)) + B(\varphi_t(n\gamma(t_0, v+z), -v+z)) = B(n, v+z) + B(n\gamma(t_0, v+z), -v+z)$$

et donc:

$$\bar{B}(\varphi_t(n, v+z)) + \bar{B}(\varphi_t(n\gamma(t_0, v+z), -v+z)) = \bar{B}(n, v+z) + \bar{B}(n\gamma(t_0, v+z), -v+z).$$

Maintenant, en remplaçant v par $\cos(s)v$, z par $\sin(s)z$ et t par $\dfrac{t}{\sin(s)}$ et prenant en compte le fait que $\bar{B}(n, v)$ est indépendant de n, quand s tend vers 0, on obtient:

$$\bar{B}(e, e^{t\mathcal{J}(z)}v) + \bar{B}(e, -e^{t\mathcal{J}(z)}v) = \bar{B}(e, v) + \bar{B}(e, -v)$$

on en déduit l'égalité recherchée $\widetilde{B}\left(e^{\mathcal{J}(z)}v\right) = \widetilde{B}(v)$ et on termine donc la preuve du théorème 2.4.

4. Appendice

Dans cette dernière partie, nous considérons les algèbres de Lie nilpotentes de rang deux *non singulières.* Une algèbre de Lie $\mathcal{N}$ nilpotente de rang deux est dite non singulière, si pour tout $X \notin [\mathcal{N},\mathcal{N}] = \mathcal{Z}$, $\mathrm{ad}(X) : \mathcal{N} \to \mathcal{Z}$ est surjective. Dans ce cas, si $\mathcal{N}$ est non abélienne, alors $\mathcal{Z}$ est tout le centre de $\mathcal{N}$. Il est facile de voir qu'une algèbre de Lie $\mathcal{N}$ nilpotente de rang deux est non singulière, si et seulement si, pour tout produit scalaire sur $\mathcal{N}$, les applications :

$$\left\{\mathcal{J}(Z), 0 \neq Z \in \mathcal{Z}\right\}$$

sont inversibles sur $\mathcal{V} = \mathcal{Z}^{\perp}$.

Maintenant, supposons $\mathcal{N}$ non singulière. Notre but est de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. — *Toute application linéaire $\phi : \mathcal{N} \to \mathcal{Z}$ vérifiant $\phi(\mathcal{Z}) = \{0\}$ est une dérivation presque intérieure de $\mathcal{N}$ de type continue.*

Remarque. — Cette proposition a été utilisée dans [GM1] et [GM2], où les auteurs n'ont pas donné la démonstration. Je remercie Hubert PESCE pour son aide pour la preuve suivante.

Démonstration. — Il est clair que ϕ est une dérivation presque intérieure de $\mathcal{N}$, car $\phi(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{Z}$ et $\phi(\mathcal{Z}) = 0$. Il reste à prouver que ϕ est de type continue.

Soit $\mathcal{V}$ un supplémentaire de $\mathcal{Z}$ dans $\mathcal{N}$, i.e. $\mathcal{N} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{Z}$. Pour tout $0 \neq X \in \mathcal{V}$, l'application $\mathrm{ad}(X) : \mathcal{V} \to \mathcal{Z}$ étant surjective, on a : $\mathrm{image}(\mathrm{ad}(X)) = \mathcal{Z}$ et donc :

$$\dim(\ker(\mathrm{ad}(X))) = \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{Z}.$$

Soit $\mathcal{V}_X = \ker(\mathrm{ad}(X)) \subseteq \mathcal{V}$, alors : $\dim \mathcal{V}_X \equiv C^{te}$. Ceci avec le fait que $\mathcal{V}_X$ est l'espace propre associé à la valeur propre 0 de $\mathrm{ad}(X)$ montrent que les espaces $\mathcal{V}_X$ varient de manière continue par rapport à X (pour la topologie naturelle). En conséquence, on pourra choisir les espaces $\mathcal{V}'_X$ vérifiant $\mathcal{V} = \mathcal{V}'_X \oplus \mathcal{V}_X$ tels que $\mathcal{V}'_X$ varient de manière continue par rapport à X.

Les applications $\mathrm{ad}(X) : \mathcal{V}'_X \to \mathcal{Z}$ sont donc inversibles et on a les applications inverses :

$$A(X) = \left(\mathrm{ad}(X)_{|\mathcal{V}'_X}\right)^{-1} : \mathcal{Z} \to \mathcal{V}'_X.$$

Il suffit de prendre maintenant $B(X) = A(X)(\phi(X))$ et remarquer que $B(X)$ est continue sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ et $\phi(X) = [X, B(X)]$. □

Références

[E1] Patrick EBERLEIN. — *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric.*
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t. 27, 1994, p. 611-660.

[E2] Patrick EBERLEIN. — *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric. II*
Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 343, 2, 1994, p. 805-828.

[GM1] Carolyn GORDON et Yiping MAO. — *Geodesic conjugacies of two-step nilmanifolds.*
Preprint.

[GM2] Carolyn GORDON et Yiping MAO. — *Comparisons of laplace spectra, length spectra and geodesic flows of some riemannian manifolds.*
Math. Research Letters, 1, 1994, p. 677-688.

[GMS] Carolyn GORDON, Yiping MAO et Dorothee SCHUETH. — *Symplectic rigidity of geodesic flows on two-step nilmanifolds.*
Preprint.

[Kp] Aroldo KAPLAN. — *On the geometry of the groups of Heisenberg type.*
Bull. London Math. Soc., Vol. 15, 1983, p. 35-42.

[P] Hubert PESCE. — *Déformations isospectrales sur certaines nilvariétés et finitude spectrale des variétés de Heisenberg.*
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t. 25, 1992, p. 515-538.

Hamid-Reza FANAÏ
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
UMR5582 (CNRS-UJF)
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)