Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Édouard Lebeau

Applications harmoniques entre graphes finis et un théorème de superrigidité

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 14 (1995-1996), p. 65-67
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__65_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1995–1996 (65–67)

APPLICATIONS HARMONIQUES ENTRE GRAPHES FINIS ET UN THÉORÈME DE SUPERRIGIDITÉ

Édouard LEBEAU

Nous définissons une notion d'énergie pour des applications entre deux graphes métriques finis et cherchons à minimiser l'énergie au sein d'une classe d'homotopie. Nous démontrons des théorèmes d'existence et d'unicité analogues à ceux de Eells-Sampson et de Hartman pour les applications harmoniques à valeurs dans les variétés à courbure négative ou nulle. Nous montrons également une propriété de stabilité des applications minimisantes par rapport aux revêtements de degré fini à la source. Une application de ces résultats est une nouvelle démonstration (élémentaire) d'un théorème de superrigidité pour les commensurateurs des réseaux uniformes d'automorphismes d'arbres.

Théorème 1. *Toute application continue $u : G \to G'$ entre deux graphes métriques finis est homotope à une application harmonique minimisante.*

Théorème 2. *On a de plus unicité de l'application harmonique minimisante, à transport parallèle près.*

Théorème de superrigidité (Lubotzky-Mozes-Zimmer, 94; Burger-Mozes, 96).

Soient T et T' des arbres uniformes. Soient $Aut(T)$ et $Aut(T')$ leurs groupes d'automorphismes. Soit Γ un réseau uniforme dans $Aut(T)$ (i.e. un sous-groupe discret tel que le graphe quotient T/Γ soit fini). Son commensurateur dans $Aut(T)$ sera noté $C(\Gamma)$. Soit $\rho : C(\Gamma) \to Aut(T')$ une action du commensurateur sur l'arbre T'. Supposons l'action minimale (i.e. il n'y a pas de sous-arbre de T' invariant par cette action) et supposons l'action de Γ non élémentaire (i.e. $\rho(\Gamma)$ ne fixe pas de point de T' ni de point à l'infini). Alors, l'action se prolonge continûment à tout le groupe d'automorphismes $Aut(T)$.

Classification math. : 05C30, 20E08, 58E20.
À paraître dans *Ann Inst. Four.*, fasc. 46, vol. 5 (1996).

Interprétation physique des théorèmes 1 et 2. Le graphe G est un élastique et le graphe G' est un circuit rigide. On enroule l'élastique G autour du circuit G' en décrivant l'application u. L'élastique va alors atteindre une position d'équilibre, qui décrit une application minimisante. Si on peut déplacer l'élastique en restant dans une position d'équilibre, on effectue alors un transport parallèle, ce qu'illustrent les exemples qui suivent.

Exemple 1. Si $G = G' = \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$ sont deux cercles de longueur ℓ, alors on connaît bien les applications harmoniques de G dans G': ce sont les applications affines à dérivée entière $[x] \mapsto [nx + \alpha]$, où n représente la classe d'homotopie. Une telle application peut être transportée parallèlement par une rotation le long du cercle image.

Exemple 2. Supposons que G soit un bouquet de deux cercles, avec un unique sommet x_0, et deux arêtes a et b, que nous prendrons comme générateurs du groupe fondamental de (G, x_0). Supposons que G' soit un graphe à deux sommets y et z, reliés par trois arêtes A, B et C, orientées de y vers z. Le groupe fondamental de (G', y) est engendré par AC^{-1} et BC^{-1}. Considérons la classe d'homotopie d'applications de G dans G' "qui ressemblent à l'identité", i.e. celle qui envoie a sur AC^{-1} et b sur BC^{-1} (cf Figure 1). Alors, les applications harmoniques minimisantes s'obtiennent en choisissant l'image $u(x_0)$ de x_0 arbitrairement sur le segment C, puis en envoyant affinement les lacets a et b en x_0 sur les lacets correspondants en $u(x_0)$. Ici, le transport parallèle est la translation le long du segment C.

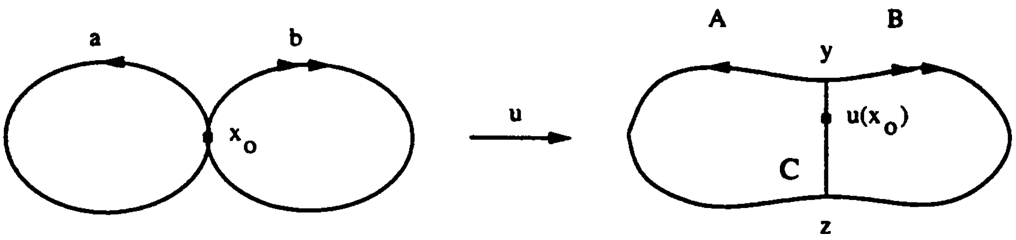

Figure 1 : Transport parallèle=translation le long d'un segment.

On montre que, dans la plupart des cas, le transport parallèle se réduit précisément à une translation le long d'un sous-intervalle de G'.

Exemple 3. Les plongements isométriques et les revêtements isométriques minimisent l'énergie dans leurs classes d'homotopie.

Idée de la démonstration du théorème de superrigidité. On commence par représenter ρ comme une classe d'homotopie d'applications entre les graphes T/Γ et $T'/\rho(\Gamma)$. On montre alors qu'il existe une application harmonique minimisante u dans cette classe d'homotopie (grâce à l'hypothèse de non-élémentarité de l'action, on parvient à se ramener au cas où $T'/\rho(\Gamma)$ est fini, auquel cas le théorème 1 s'applique). Cette application minimisante nous fournit une application $\tilde{u} : T \to T'$, qui est $\rho|_\Gamma$-équivariante. Grâce à un lemme de stabilité des applications harmoniques par rapport aux revêtements, on montre alors que $\tilde{u}$ est ρ-équivariante, c'est-à-dire que

$$\tilde{u}(c.\tilde{x}) = \rho(c).\tilde{u}(\tilde{x}),$$

pour tout $c \in C(\Gamma)$ et tout $\tilde{x} \in T$. Par minimalité de l'action, on voit que $\tilde{u}$ est une application surjective, et on prolonge ρ à tout le groupe $Aut(T)$ en envoyant un élément $a \in Aut(T)$ sur l'automorphisme de T' qui envoie $\tilde{u}(\tilde{x})$ sur $\tilde{u}(a.\tilde{x})$. Il est facile de vérifier que cette définition est cohérente et que le prolongement de ρ est continu.

Références

[Bas] H. Bass, *Covering theory for graphs of groups*, J. Pure Appl. Alg. 89 (1993) 3-47.

[BH] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of nonpositive curvature*, livre en préparation.

[BM] M. Burger, S. Mozes, CAT(-1) *spaces, divergence groups and their commensurators*, J. Am. Math. Soc., vol. 9, 1 (1996).

[BK] H. Bass, R. Kulkarni, *Uniform tree lattices*, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 843-902.

[Cor] K. Corlette, *Archimedian superrigidity and hyperbolic geometry*, Ann. of Math. 135 (1992), 165-182.

[ES] J. Eells, J. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 85 (1964), 109-160.

[Gao] Y. Gao, *Superrigidity for homomorphisms into isometry groups of non-proper* CAT(-1) *spaces*, prépublication.

[GH] É. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Birkhäuser, Boston 1990.

[GP] M. Gromov, P. Pansu, *Rigidity of lattices: an introduction*, in *Geometric topology: recent developments*, Montecatini Terme, 1990, LN 1504, 39-137.

[GS] M. Gromov, R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Publ. Math. IHES 76 (1992), 165-246.

[Har] P. Hartman, *On homotopic harmonic maps*, Can. J. Math. 19, (1967), 673-687.

[Jos] J. Jost, *Riemmannian geometry and geometric analysis*, Universitext, Springer-Verlag 1995.

[KS] N. J. Korevaar, R. Schoen, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*, Comm. in Anal. and Geom., vol. 1, 4 (1993), 561-659.

[LMZ] A. Lubotzky, S. Mozes, R. J. Zimmer, *Superrigidity of the commensurability groups of tree lattices*, Comm. Math. Helv., 69 (1994), 523-548.

[Liu] Y. Liu, *Density of the commensurability groups of uniform tree lattices*, J. of Alg., 165 (1994), 346-359.

[Los] J. E. Los, *A variational calculus for automorphisms of free groups*, prépublication Univ. Nice, janvier 1993.

[Mar] G.A. Margulis, *Superrigidity for commensurability subgroups and generalized harmonic maps*, prépublication.

[Pan] P. Pansu, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie: rigidité, arithméticité*, Sém. Bourbaki, 46ème année, 1993-94, n° 778, Astérisque 227 (1995), Soc. math. Fr., 69-105.

Édouard LEBEAU
Unité de Mathématiques C.N.R.S. UMR 128
École normale supérieure de Lyon
46, allée d'Italie, 69634 LYON CEDEX 07, FRANCE
elebeau@umpa.ens-lyon.fr