Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GILLES CARRON

Une suite exacte en L^2-cohomologie

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 14 (1995-1996), p. 59-64
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1995-1996__14__59_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1995–1996 (59–64)

UNE SUITE EXACTE EN L^2-COHOMOLOGIE

Gilles CARRON

a. Introduction

Pour motiver mon problème, je commence par rappeler la formule de Gauss- Bonnet : si (M, g) est une surface orientée compacte sans bord alors

$$\int_M \frac{KdA}{2\pi} = 2 - 2g = \chi(M) \text{ où } g \text{ est le genre de } M.$$

Cette formule exprime un invariant métrique (l'intégrale de la courbure : $\int_M \frac{KdA}{2\pi}$) en fonction d'un invariant topologique $\chi(M)$ (la caractéristique d'Euler). En dimension supérieure, il existe une formule analogue

$$\int_M \Omega = \chi(M)$$

où Ω est la n–forme d'Euler de la variété riemannnienne orientée (M^n, g) ; cette n-forme s'exprime en fonction de l'opérateur de courbure de (M^n, g) et on a ponctuellement la majoration

$$|\Omega(x)| \leq c(n)|R|^{\frac{n}{2}}(x)$$

où R est le tenseur de courbure de (M^n, g). On aimerait savoir ce qui se passe lorsque la variété n'est plus compacte, la question est la suivante :

> si (M^n, g) est une variété riemannienne complète telle que $\int_M \Omega$ converge, alors comment relier cette intégrale à la topologie et à la géométrie de (M, g) ?

Classification math. : 47N20, 58A14, 58G10.

Pour cela, on aimerait, au moins dans le cas compact, avoir une définition plus métrique de la caractéristique d'Euler afin de pouvoir la relier plus directement à l'intégrale de la n-forme d'Euler, qui, elle, est définie à partir de la métrique. C'est pourquoi on considère la

b. L^2-cohomologie

Soit M^n une variété compacte grâce au théorème de De Rham, la caractéristique d'Euler de M^n peut être définie en terme de formes différentielles : l'opérateur de différentiation extérieure

$$d : C^\infty(\Lambda^k T^* M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)$$

vérifie $d \circ d = 0$, le $k-$ième groupe de cohomologie (de De Rham) est défini par

$$H^k_{dR}(M) = \frac{\operatorname{Ker} d \ : \ C^\infty(\Lambda^k T^* M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)}{dC^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)}.$$

Et la caractéristique d'Euler est

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k_{dR}(M) \, ;$$

c'est une définition différentielle de la caractéristique d'Euler.

Soit maintenant (M^n, g) une variété Riemannienne complète. La L^2-cohomologie est définie à partir de l'action (non-bornée) de la différentiation extérieure d sur l'espace de Hilbert $L^2(\Lambda^k T^* M)$. La structure hilbertienne induite par la métrique nous permet de définir un opérateur différentiel adjoint à d : δ par la formule

$$\langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \alpha, \delta\beta \rangle, \ \forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^* M), \ \beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M).$$

Si $\mathcal{H}^k(M)$ est l'espace des k-formes harmoniques L^2

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M), \ d\alpha = \delta\alpha = 0\},$$

alors l'espace $L^2(\Lambda^k T^* M)$ admet la décomposition orthogonale de Hodge-deRham-Kodaira suivante :

$$L^2(\Lambda^k T^* M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus B^k L^2(M) \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)},$$

où l'adhérence s'entend pour la topologie de $L^2(\Lambda^k T^* M)$.

Donc pour toute k-forme $\alpha \in L^2$ il existe une suite $\varphi_l \in C_0^\infty \left(\Lambda^{k-1} T^* M\right) \oplus C_0^\infty \left(\Lambda^{k+1} T^* M\right)$ et une forme harmonique $\mathcal{H}(\alpha)$ telle que

$$\alpha - \mathcal{H}(\alpha) = L^2 - \lim_{l \to \infty} (d + \delta)\varphi_l.$$

De plus, si M^n est supposée compacte sans bord alors le théorème de De Rham nous dit que

$$\operatorname{Ker}\left(d : C^\infty(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)\right) = \mathcal{H}^k(M) \oplus dC^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M),$$

et donc que

$$\mathcal{H}^k(M) \simeq H^k_{dR}(M).$$

On peut donc exprimer la caractéristique d'Euler en fonction de la L^2-cohomologie

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M) = \int_M \Omega.$$

Remarque. — Dans le cas non-compact, complet, ces espaces de formes harmoniques L^2 ont encore une interprétation : ce sont les espaces de L^2 cohomologie (réduite) de (M^n, g).

On peut penser qu'il y a une preuve "métrique" de l'égalité des deux invariants métriques $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M)$ et $\int_M \Omega$; et ceci est vrai grâce à la preuve du théorème de l'indice par l'équation de la chaleur, due pour le cas général à Atiyah-Bott-Patodi et dans le cas du théorème de Gauss-Bonnet à Patodi.

Lorsque (M^n, g) n'est plus compacte, les espaces de L^2-cohomologie ne sont plus forcément de dimension finie, et de nombreux travaux ont été fait pour relier la L^2-cohomologie, l'intégrale de la n-forme d'Euler et la topologie de M.

J'avais obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME A. — *Si (M^n, g) est une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_n(M)\left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx\right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2(x)dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et dont le tenseur de courbure vérifie

$$\int_M |R|^{\frac{n}{2}}(x)dx < \infty,$$

alors les espaces de L^2-cohomologie de (M^n, g) sont de dimension finie.

Aprés ce résultat, il vient plusieurs questions naturelles :

i) Quelle formule de Gauss-Bonnet peut-on espérer dans ce cadre ? *i.e.* comment peut-on relier $\int_M \Omega$ (qui converge puisque $|\Omega|(x) \leq c(n)|R|^n(x)$) et la caractéristique d'Euler L^2 de (M, g) définie par

$$\chi_{L^2}(M) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M)\ ?$$

ii) Comment ces quantités dépendent de la topologie de M ?

Dans [C1], j'avais calculé les espaces de L^2-cohomologie des variétés asymptotiquement euclidiennes et ce calcul montrait qu'en dimension supérieure ou égale à 3, on avait une formule de Gauss-Bonnet

$$\chi_{L^2}(M) = \int_M \Omega.$$

Cette égalité était déjà montré dans [B-M-S] et [Br]. Nous avons le résultat suivant :

Proposition B.1. — *La caractéristique d'Euler L^2 est un invariant d'homotopie à support compact.*

En fait, les espaces de L^2-cohomologie ont une définition cohomologique et on peut montrer qu'ils sont des invariants d'homotopies Lipschitz (cf. [Lo]). Maintenant on aimerait savoir ce qui se passe lorsque la topologie est modifiée sur un compact, la proposition suivante nous dit qu'alors la caractéristique d'Euler L^2 est modifiée de la même façon que l'intégrale de la n-forme d'Euler, c'est une formule de Gauss-Bonnet relative :

Proposition B.2. — *Soient (M_1^n, g_1) et (M_2^n, g_2) deux variétés riemanniennes complètes de dimension $n \geq 5$ qui vérifient les mêmes hypothèses qu'au théorème A alors s'il existe D_1 (resp. D_2) un domaine compact de M_1 (resp. M_2) tel que $(M - D_1, g_1)$ soit isométrique à $(M_2 - D_2, g_2)$ alors*

$$\chi_{L^2}(M_1, g_1) - \chi_{L^2}(M_2, g_2) = \int_{D_1} \Omega^{g_1} - \int_{D_2} \Omega^{g_2}.$$

M. Gromov et B. Lawson avaient démontré un tel résultat pour des opérateurs de Dirac sur des variétés non-compactes, complètes dont le potentiel courbure, qui apparaît dans la formule de Bochner-Weitzenbock, est uniformément strictement positif sur un voisinage de l'infini ([G-L]); en fait comme l'a montré H. Donnely, le fait que le bas du spectre essentiel de l'opérateur de Dirac soit strictement positif suffit pour avoir une formule de l'indice L^2-relatif ([D]). Cependant les variétés que nous considérons ont, généralement, un bas du spectre essentiel nul.

Enfin, la proposition suivante nous informe sur la topologie des variétés considérées :

Proposition B.3. — *Si (M^n, g) une variété riemannienne complète connexe, qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_n(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2(x)dx, \ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si la plus petite valeur propre négative du tenseur de Ricci, ric_-, vérifie

$$\int_M |\mathrm{ric}_-(x)|^{\frac{n}{2}} dx < \infty,$$

alors on a la majoration

$$\dim H^1_c(M) = \dim H^{(n-1)}(M) \leq C(n)\mu_n(M)^{-1} \int_M |\mathrm{ric}_-(x)|^{\frac{n}{2}}\, dx.$$

et dans ce cas M^n a un nombre fini de bouts b et on a la majoration

$$b \leq 1 + C(n)\mu_n(M)^{-1} \int_M |\mathrm{ric}_-(x)|^{\frac{n}{2}}\, dx.$$

En fait tous ces résultats reposent sur la suite exacte suivante :

THÉORÈME B. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète de dimension $n \geq 5$, vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_p(M) \left(\int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et telle que son tenseur de courbure vérifie

$$\int_M |R(x)|^{\frac{n}{2}}\, dx < \infty,$$

alors si D est un ouvert borné (à bord régulier) de M, nous avons la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H^k(D, \partial D) \xrightarrow{i} \mathcal{H}^k(M) \xrightarrow{j^*} H^k_{(2)}(M - D) \xrightarrow{b} H^{k+1}(D, \partial D) \longrightarrow \cdots$$

Remarques.

i) Cette suite exacte est l'analogue le suite exacte de l'homomorphisme cobord en cohomologie classique.

ii) L'hypothèse sur la dimension est une hypothèse sur la dimension de l'inégalité de Sobolev $n \geq 5$, c'est celle qui permet de savoir que certaines fonctions harmoniques décroissent assez vite à l'infini. Les termes de cette suite exacte sont les suivants : $H^k(D, \partial D)$ est la cohomologie relative (ou à support compact) de D, et $H^k_{(2)}(M - D)$ est la L^2-cohomologie absolue de $M - D$ que l'on peut identifier à la partie de la L^2-cohomologie du double de $M - D$ qui est invariante par la symétrie par rapport à ∂D ; on peut aussi identifier cet espace à un espace de formes harmoniques

$$H^k_{(2)}(M - D) \simeq \{h \in L^2(\Lambda^k T^*(M - D)),\ dh = \delta h = 0 \text{ et } \mathrm{int}_\nu h = 0\},$$

où n est le champ de vecteur normal unitaire à ∂D. Cette identification est similaire à celle que l'on a pour les variétés compactes à bord (cf [D-S]).

De cette suite exacte, nous pouvons en déduire les formules suivantes pour la caractéristique d'Euler L^2 :

PROPOSITION B.4. — *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète qui vérifie les mêmes hypothèses qu'au théorème B alors si D est un ouvert borné de M on a*

$$\chi_{L^2}(M, g) = \chi(D, \partial D) + \chi_{L^2}(M - D, g).$$

Si de plus la dimension n est paire alors

$$\chi_{L^2}(M, g) = \int_D \Omega + \int_{\partial D} P(II) + \chi_{L^2}(M - D),$$

où $P(II)$ est un polynôme en la seconde forme fondamentale de $\partial D \subset M$. En particulier, nous avons la formule

$$\chi_{L^2}(M, g) = \int_M \Omega + \lim_{D \to M} \left(\int_{\partial D} P(II) + \chi_{L^2}(M - D) \right).$$

Ces formules se déduisent du théorème B en écrivant que la somme alternée des dimensions des termes de la suite exacte est nulle et des formules exprimant la caractéristique d'Euler d'une variété à bord. Ces résultats sont démontrés dans [C2], l'étape essentielle de la preuve consiste à montrer qu'il existe un opérateur de Green, *i.e.* un bon inverse au Laplacien agissant sur les formes différentielles.

c. Bibliographie

[B-M-S] N.V. BORISOV, W. MÜLLER, R. SCHRADER. — *Relative index theorems and supersymmetric scattering theory*, Comm. math. Phys. 114 (1988), 475–513.

[Br] J. BRÜNING. — *L^2-index theorems on a certain complete manifold*, J. Differential Geometry 32 (1990), 491–532.

[C1] G. CARRON. — *L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 306, Grenoble, 1994.

[C2] G. CARRON. — *Une suite exacte en L^2-cohomologie*, Prépublication n°174 de l'ENS Lyon., 1995.

[D] H. DONNELY. — *Essential spectrum and heat kernel*, J. Funct. Anal. 75 (1987), 362–381.

[D-S] G. DUFF, D.C. SPENCER. — *Harmonic Tensors on Riemannian Manifolds with boundary*, Ann. of Math. Stud. 56, n°1 (1952), 115–127.

[G-L] M. GROMOV, H.B. LAWSON. JR. — *Positive scalar curvature and the Dirac operator on a complete Riemannian manifold*, Publ. Math. I.H.E.S. 58 (1983), 83–196.

[Lo] J. LOTT. — *L^2-cohomology of geometrically infinite hyperbolic 3-manifold*, to appear in GAFA.

CARRON Gilles
UMPA, CNRS UMR 128
ENS Lyon
46 Allée d'Italie
69364 Lyon cedex 07
e-mail : gcarron@umpa.ens-lyon.fr