SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GILLES CARRON

Inégalités isopérimétriques et inégalités de Faber-Krahn

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 13 (1994-1995), p. 63-66

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__63_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1994-1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1994–1995 (63–66)

INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES ET INÉGALITÉS DE FABER-KRAHN

Gilles CARRON

Au XIX^{e} siècle, Lord Raleigh affirme que "parmi tous les domaines plans, d'aire fixée, celui qui a la plus petite valeur propre du Laplacien pour le problème de Dirichlet est le disque"; autrement dit si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné et si Ω^* est un disque euclidien tel que $\text{Aire}\,\Omega = \text{Aire}\,\Omega^*$ alors

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq \lambda_1^D(\Omega^*)$$

avec égalité si et seulement si Ω est isométrique à Ω^*.

$\lambda_1^D(\Omega)$ est la première valeur propre du problème

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}u - \frac{\partial^2}{\partial^2 y}u = \lambda u & \text{sur } \Omega \text{ et } u \not\equiv 0 \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

$\lambda_1^D(\Omega)$ est aussi donné par le min-max

$$\lambda_1^D(\Omega) = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |du|^2}{\int_\Omega u^2}\,;\, u \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

C'est Faber et Krahn qui ont démontré l'affirmation de Lord Raleigh (dans les années 22–23); Krahn généralisa ce résultat à $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. La preuve repose sur l'inégalité isopérimétrique :

Longueur $(\partial\Omega) \geq$ Longueur $(\partial\Omega^*)$ avec égalité si et seulement si Ω est isométrique à Ω^*.

Le résultat de Faber-Krahn a été généralisé par de nombreux auteurs (P. Bérard-D. Meyer, S. Gallot, J. Cheeger) : désormais (M^n, g) est une variété riemannienne complète (de volume infini). Une généralisation de ce résultat est la suivante : si (M^n, g) vérifie l'inégalité isopérimétrique :

$$(*) \qquad \text{vol}\,\partial\Omega \geq C\,\text{vol}\,\Omega^{1-1/p} \quad \forall \Omega \subset\subset M\,(\text{où } C > 0)$$

Classification math. : 58C40, 58C07, 47A30, 46E30, 46E35.

alors l'inégalité de Faber-Krahn suivante est vérifiée

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq C^{te}(p) C^2 \operatorname{vol}\Omega^{-2/p} \quad \forall \Omega \subset\subset M.$$

Une preuve simple, mais non optimale, est donnée par l'inégalité de Cheeger :

$$\begin{aligned}\lambda_1^D(\Omega) &\geq \frac{1}{4}\inf\Big\{\Big(\frac{\operatorname{vol}\partial U}{\operatorname{vol} U}\Big)^2 ; U \subset\subset \Omega\Big\}\\ &\geq \frac{1}{4} C^2 (\operatorname{vol}\Omega)^{-2/p}.\end{aligned}$$

Le but de cet exposé est d'étudier les réciproques possibles à ce résultat *i.e.* : si nous notons

$$Is_p(M,g) = \inf\Big\{\frac{\operatorname{vol}\partial\Omega}{(\operatorname{vol}\Omega)^{1-1/p}} ; \Omega \subset\subset M\Big\}$$

la meilleure constante de l'inégalité $(*)$; alors $Is_p > 0$ dit que l'inégalité isopérimétrique $(*)$ (non triviale) est vérifiée et de même on note

$$\Lambda_p(M,g) = \inf\{\lambda_1^D(\Omega) \operatorname{vol}\Omega^{2/p} ; \Omega \subset\subset M\}$$

la meilleure constante dans l'inégalité de Faber-Krahn.

Quels sont les liens entre Λ_p et Is_p ?

On sait que $Is_p > 0 \Rightarrow \Lambda_p > 0$ grâce à la généralisation du résultat de Faber-Krahn.

Pourquoi pose-t-on cette question ? Auparavant, on savait grâce à Is_p contrôler le noyau de la chaleur, des constantes de Sobolev, le volume des boules géodésiques... Mais désormais grâce aux travaux de A. Grigor'yan, N. Varopoulos, G. Carron ([G], [V1], [C]) on sait qu'en fait Λ_p suffit pour la plupart de ces estimations. La question est de savoir si Λ_p est strictement plus faible que Is_p.

C'est le cas, j'ai construit un exemple de variétés riemanniennes vérifiant $\Lambda_p > 0$ pour tout $p \geq n$ mais tel que

$$Is_{p'} = 0 \text{ pour tout } p' \geq n.$$

Cependant en "bornant la géométrie locale", on peut aboutir à des résultats inverses.

RÉSULTAT PRÉLIMINAIRE. — *Λ_p permet de minorer le volume des boules géodésiques i.e. : il existe une constante qui ne dépend que de p : $C(p)$ telle que*

$$\operatorname{vol} B(x,r) \geq C(p) (\Lambda_p)^{p/2} r^p \cdot \forall r \geq 0 \quad \forall x \in M.$$

Ce résultat est à relier avec la minoration

$$\operatorname{vol} B(x,r) \geq \Big(\frac{Is_p r}{p}\Big)^p \quad \forall r \geq 0, \quad \forall x \in M.$$

Avec ce résultat j'ai réussi à redonner des preuves des résultats suivants :

i) Si $\operatorname{ricci}^{M^n} \geq 0$ alors il existe deux constantes $C_1(n)$ et $C_2(n)$ telles que

$$C_1(n) Is_n^2 \leq \Lambda_n \leq C_2(n) Is_n^2.$$

ii) Si $\operatorname{ricci}^{M^n} \geq -(n-1)k^2$ alors si $p \geq 2n$ nous avons

$$\Lambda_p > 0 \Rightarrow Is_{p/2} > 0.$$

Le résultat *i)* est dû à N. Varopoulos ([V2]) et T. Coulhon-M. Ledoux ([C-L]) démontraient *ii)* avec l'hypothèse supplémentaire que le volume des boules géodésiques étaient uniformément minoré.

Si $p < n$, les constantes Is_p et Λ_p sont nulles à cause de la géométrie locale (il suffit, par exemple, de considérer la minoration du volume des boules géodésiques pour des petits rayons). Et selon l'inégalité de Bishop-Gromov, lorsque $\operatorname{ricci}^M \geq 0$ on a

$$\operatorname{vol} B(x,r) \leq (\operatorname{vol} B^n) r^n,$$

ce qui implique $\Lambda_p = 0$ si $p > n$.

Pour contourner ces difficultés on introduit des constantes localisées à l'infini, *i.e.* on ne considère que des domaines contenant une boule de rayon fixé : à $\rho > 0$ fixé, on pose

$$Is_p^\infty = \inf\left\{\frac{\operatorname{vol}\partial\Omega}{(\operatorname{vol}\Omega)^{1-1/p}}\,;\Omega \subset\subset M \text{ tel que } \exists x \in \Omega \text{ avec } B_x(\rho) \subset \Omega\right\}$$

et de même $\Lambda_p^\infty = \inf\{\lambda_1^D(\Omega)(\operatorname{vol}\Omega)^{2/p}\,;\Omega \subset\subset M \text{ tel que } \exists x \in \Omega \text{ avec } B_x(\rho) \subset \Omega\}$.

Ceux sont I. Chavel et E.A. Feldman qui ont introduit ces constantes pour étudier la diffusion de la chaleur à "l'infini".

Le résultat est alors le suivant :

i') Si $\operatorname{ricci}^M \geq 0$ alors

$$\begin{aligned}
&(\exists C > 0 \text{ tel que } \operatorname{vol} B(x,r) \geq Cr^p \quad \forall x, \quad \forall r \geq 1)\\
&\iff (\Lambda_p^\infty > 0 \text{ et } \operatorname{vol} B(x,1) \geq C' \quad \forall x)\\
&\iff (Is_p^\infty > 0 \text{ et } \operatorname{vol} B(x,1) \geq C'' \quad \forall x).
\end{aligned}$$

ii') Si $\operatorname{ricci}^M \geq -(n-1)k^2$ et s'il existe $C > 0$ tel que $\operatorname{vol} B(x,1) \geq C \forall x$ alors

$$\Lambda_p^\infty \Rightarrow Is_{p/2}^\infty > 0.$$

Et ces résultats sont optimaux au sens où j'ai construit des exemples (améliorant ceux de T. Coulhon et M. Ledoux ([C-L])) de variétés riemanniennes à courbure bornée, à rayon d'injectivité strictement positif tel que $\Lambda_p^{(\infty)} > 0$ mais $Is_{p'}^{(\infty)} = 0 \quad \forall p' > p/2$.

En suivant les travaux de M. Kanaï ([K]), la preuve des résultats *ii)* et *ii')* consiste à discrétiser (M^n, g) par un graphe Γ de telle sorte que

$$\Lambda_p^{(\infty)}(M,g) > 0 \iff \text{“}\Lambda_p(\Gamma) > 0\text{''}$$

et que

$$Is_{p/2}^{(\infty)}(M,g) > 0 \iff Is_{p/2}(\Gamma) > 0.$$

Puis à montrer que "$\Lambda_p(\Gamma) > 0$" $\Rightarrow Is_{p/2}(\Gamma) > 0$.

Bibliographie

[C] G. CARRON. — *Inégalités isopérimétriques sur les variétés riemanniennes*, Thèse, 1994.

[C-F] I. CHAVEL, E.A. FELDMAN. — *Isoperimetric constants, the geometry of ends, and large time real diffusion in riemannian manifolds*, Proc. London Math. Soc. (3), **62** (1991), 427–448.

[C-L] T. COULHON, M. LEDOUX. — *Isopérimétrie, décroissance du noyau de la chaleur et transformation de Riesz : un contre-exemple*, Ark. Mat. 32 (1994), 63–77.

[G] A.A. GRIGOR'YAN. — *Heat kernel upper bounds on a complete non-compact manifold*, Rev. Mat. Iberoamericana **10** (1994), 395–452.

[K] M. KANAÏ. — *Analytic inequalities and rough isometries between non-compact riemannian manifolds, in curvature and topology of riemannian manifolds*, Springer Lectures Notes **1201** (1986), 122–137.

[V1] VAROPOULOS. — *Hardy Littlewood theory for semigroups*, J. Funct. Anal **63**, **n°2** (1985), 240–260.

[V2] N. VAROPOULOS. — *Small time Gaussian estimates of heat diffusion kernel I The semi-group technic*, Bull. Sci. Math. (2) **113** (1989), 253–277.

Gilles CARRON
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)