

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

GILLES CARRON

## **Inégalités de Sobolev et $L^2$ -cohomologie**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 13 (1994-1995), p. 171-176

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1994-1995\\_\\_13\\_\\_171\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__171_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Grenoble), 1994-1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## INÉGALITÉS DE SOBOLEV ET $L^2$ -COHOMOLOGIE

*Gilles CARRON*

Mon exposé commencera par un résultat que je viens de trouver à propos de l'espace des solutions à l'équation de Schrödinger :

$$(\Delta + V)u = 0; u \in L^2(M)$$

lorsque  $(M, g)$  est une variété riemannienne non-compacte (cf. [C]). Puis, j'exposerai la  $L^2$ -cohomologie et les "conséquences" de ce résultat. Dans tout mon exposé,  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne complète. Un opérateur de Schrödinger sur  $M^n$  est un opérateur de la forme

$$L = \Delta^g + V$$

où

i)  $\Delta^g$  est le Laplacien associé à la métrique  $g$ , il peut être défini à partir de la forme quadratique  $u \mapsto \int_M |du|_g^2(x) dv_g(x)$  par la formule

$$\int_M (\Delta u)(x) u(x) = \int_M |du|^2, \forall u \in C_0^\infty(M).$$

Par exemple dans  $\mathbb{R}^n$ ;  $\Delta^{\text{eucl}} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ .

ii)  $V$  est une fonction lisse.

Ces opérateurs apparaissent dans de nombreux domaines :

- d'abord en mécanique quantique (d'où leur nom) ;
- en topologie différentielle où certains invariants topologiques de la variété s'expriment grâce à des espaces de nullités de tels opérateurs (théorème d'indice,  $L^2$ -cohomologie).

Lorsque la variété est compacte, l'espace  $\mathcal{H}(V) = \{u \in L^2(M); (\Delta + V)u = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $C^\infty(M)$ . Si  $M^n$  n'est plus compacte, ce n'est généralement plus le cas.

*Remarques.*

i) Il reste cependant les propriétés suivantes :

- 1)  $\mathcal{H}(V) \subset C^\infty(M) \cap L^2(M)$  par régularité elliptique.
- 2)  $\mathcal{H}(V)$  est un sous-espace fermé de  $L^2(M)$ .

ii) La condition  $u \in L^2$  peut être interprétée comme "une" condition de nullité à l'infini de  $(M^n, g)$ .

J'ai obtenu le résultat suivant :

**THÉORÈME 0.** — Si  $(M^n, g)$  vérifie l'inégalité de Sobolev

$$\mu_n \left( \int_M u^{\frac{2n}{n-2}}(x) dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2, \forall u \in C_0^\infty(M).$$

alors lorsque  $n \geq 5$  et  $\int_M V_-(x)^{\frac{n}{2}} dx < \infty$ ,  $\mathcal{H}(V)$  est de dimension finie.

*Commentaires.*

1) Lorsque  $n \leq 4$ ,  $\mathcal{H}(V)$  est de dimension finie sous l'hypothèse supplémentaire que  $\int_M V_-(x)^{\frac{n}{2}+\varepsilon} dx < \infty$  pour (au moins) un  $\varepsilon > 0$ .

2) L'inégalité de Sobolev est une propriété de l'opérateur Laplacien. Ce théorème dit donc que certaines propriétés de  $\Delta$  permettent de déterminer une classe de potentiel  $V$  pour lequel  $\mathcal{H}(V)$  est de dimension finie.

J'ai obtenu d'autres résultats sur  $\mathcal{H}(V)$  mais je n'en ai pas besoin pour mon propos.

Maintenant, je vais définir (rapidement) la  $L^2$ -cohomologie : je vais commencer par rappeler la formule de Gauß-Bonnet : si  $(M^2, g)$  est une surface compacte orientée (sans bord) alors

$$\int_M \frac{K dA}{2\pi} = 2 - 2g = \chi(M) \text{ (où } g \text{ est le genre de } M^2).$$

Cette formule exprime un invariant métrique  $\int_M \frac{K dA}{2\pi}$  en fonction d'un invariant topologique  $\chi(M)$ . En dimension supérieure, il existe une formule analogue

$$\int_M \Omega = \chi(M)$$

où  $\Omega$  est la  $n$ -forme d'Euler de  $(M, g)$  qui s'exprime à l'aide de l'opérateur de courbure de  $(M, g)$  et on a ponctuellement

$$|\Omega|(x) \leq c(n)K(x)^{\frac{n}{2}}$$

où  $K(x) = \text{Max}\{\text{courbure sectionnelle}(P)\}; P \text{ 2-plan } \subset T_x M\}$ .

Je vais rappeler ce qu'est la caractéristique d'Euler de  $M$ ,  $\chi(M)$ .

**Cohomologie de de Rham.** — Elle est définie à partir de l'opérateur différentiation extérieur  $d : C^\infty(\Lambda^k T^* M) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)$ .

*Rappel:* les éléments de  $C^\infty(\Lambda^k T^* M)$  sont des applications  $x \mapsto \sigma(x) \in \Lambda^k T_x^* M$  (l'espace de  $k$ -formes linéaires alternées sur  $T_x M$ ) telles que  $\forall X_1, \dots, X_k$  champ de vecteur lisse sur  $M$ ,  $x \mapsto \sigma(x)(X_1(x), \dots, X_k(x))$  est une fonction  $C^\infty$ .

$d$  vérifie  $d \circ d = 0$  et le  $k$ -ième groupe de cohomologie de de Rham est défini par :

$$H_{dR}^k(M) = \text{Ker}(d : C^\infty(\Lambda^k T^* M) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)) / dC^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M).$$

Le théorème de de Rham dit que ces espaces sont isomorphes aux groupes de cohomologie réelle de  $M : H_{dR}^k(M) \approx H^k(M, \mathbf{R})$  alors dans le cas compact, ils sont de dimension finie et  $\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim H_{dR}^k(M)$ .

**$L^2$ -cohomologie.** — On peut aussi définir un espace  $L^2(\Lambda^k T^* M)$ , par exemple en complétant  $C_0^\infty(\Lambda^k T^* M)$  pour la norme pré-hilbertienne

$$\|\sigma\|_{L^2}^2 = \int_{M^n} \|\sigma(x)\|_{\Lambda^k T_x^* M}^2 dx$$

et à l'opérateur différentiel  $d$ , on associe un opérateur différentiel adjoint  $\delta$  par la formule

$$\langle \alpha, d\beta \rangle_{L^2} = \langle \delta\alpha, \beta \rangle_{L^2}, \forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M), \beta \in C_0^\infty(\Lambda^k T^* M).$$

Nous avons alors la décomposition de Hodge-de Rham suivante :

$$L^2(\Lambda^k T^* M) = \text{Ker}(d \cap \delta) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)}.$$

On note alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(M) &= \text{Ker}(d \cap \delta) = \{ \alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M) ; d\alpha = \delta\alpha = 0 \} \\ &= \{ \alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M) ; (d\delta + \delta d)\alpha = 0 \}. \end{aligned}$$

le  $k$ -ième espace de  $L^2$ -cohomologie de  $(M^n, g)$  ; cette dénomination car nous avons le résultat suivant :

Si  $M^n$  est compacte alors  $\text{Ker } d = \mathcal{H}^k(M) \oplus dC^\infty(\Lambda^{k-1} T^* M)$  et donc  $\mathcal{H}^k(M) \approx H_{dR}^k(M) \approx H^k(M, \mathbf{R})$ .

Notamment, si la variété est compacte, les espaces de  $L^2$ -cohomologie sont de dimension finie.

Cependant, lorsque la variété n'est plus compacte, ce n'est pas, en général le cas.

Essentiellement, on a étudié la  $L^2$ -cohomologie dans 3 directions :

- 1) Lorsque la variété  $M$  est un revêtement infini d'une variété compacte de volume fini ([At],[C-G1], [C-G2], [Do])
- 2) Lorsque la variété a une géométrie à l'infini particulière ("Warped-product") ([M], [R1], [R2], [Br], ..)
- 3) On cherche des résultats d'annulation.

Les résultats que j'ai obtenu sont des résultats de finitude du type du théorème 0. Cela repose sur la décomposition de Bochner-Weitzenböck de l'opérateur de Hodge

$$d\delta + \delta d = \Delta^k = \bar{\Delta} + R^k$$

où

1)  $\bar{\Delta}$  est le Laplacien brut associé au fibré Riemannien  $\Lambda^k T^* M \rightarrow M$  ou encore il peut être défini à partir de la forme quadratique  $\alpha \mapsto \int_M |D\alpha|^2$  (où  $D$  est la connexion de ce fibré) par la formule :

$$\int_M |D\alpha|^2(x) dx = \int_M \langle \bar{\Delta}^k \alpha, \alpha \rangle, \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^* M).$$

2)  $R^k$  est un champ d'endomorphisme, i.e. :

$$(R^k \alpha)(x) = R^k(x) \cdot \alpha(x) \text{ où } R^k(x) \in \text{End}(\Lambda^k T_x^* M) \text{ et } \alpha(x) \in \Lambda^k T_x^* M$$

et  $R^k$  s'exprime à partir de l'opérateur de courbure par exemple :

- $R^0 = R^n = 0$
- $R^1 = \text{ricci}$  et on a  $|R^k|(x) \leq C(n, k)K(x)$ .

Le théorème 0 s'adapte aux sections de fibrés et on a le :

**THÉORÈME A.** — Si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev :  $\mu_n \left( \int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}}(x) dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \leq \int_M |du|^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(M)$  et donc la courbure vérifie

$$\int_M K^{\frac{n}{2}}(x) dx < \infty \text{ lorsque } n \geq 5 \text{ et } K \in L^{\frac{n}{2}} \cap L^{\frac{n}{2}+\epsilon} \text{ lorsque } n \leq 4$$

alors les espaces de  $L^2$  cohomologie de  $(M^n, g)$  sont de dimension finie.

En reprenant la preuve nous pouvons aussi obtenir le résultat suivant :

**THÉORÈME B.** — Si  $M^n \hookrightarrow \mathbf{R}^N$  est une sous-variété isométriquement immergée dont la seconde forme fondamentale de l'immersion  $II$  vérifie

$$\int_M ||II|^n(x) dx < \infty \text{ lorsque } n \geq 5$$

et

$$\int_M |II|^n(x) dx < \infty \text{ et } \int_M (II)^{n+\epsilon}(x) dx < \infty \text{ lorsque } n \leq 4$$

alors les espaces de  $L^2$ -cohomologie de  $M^n$  sont de dimension finie.

Nous pouvons maintenant nous poser des questions sur les variétés qui satisfont aux hypothèses du théorème A ou B.

1) Sont-elles de topologie finie? Et si oui, quel est le lien entre cette topologie et les espaces de  $L^2$ -cohomologie.

2) Les hypothèses des théorèmes permettent de définir une caractéristique d'Euler  $L^2$ ,  $\chi_{L^2}(M) = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \dim \mathcal{H}^\ell(M)$  et ces hypothèses assurent que  $\int_M \Omega$  converge

puisque dans le cadre du théorème A, on a  $|\Omega|(x) \leq C(n)K^{\frac{n}{2}}(x)$  et du théorème B, on a  $|\Omega|(x) \leq C(n)|II|^n(x)$ .

Comment comparer  $\int_M \Omega$  et  $X_{L^2}(M)$ ? J'ai répondu à ces questions lorsque  $M^n \hookrightarrow \mathbf{R}^N$  est minimale et satisfait aux hypothèses du théorème B, on a entre autre

$$\int_M \Omega = X_{L^2}(M).$$

3) En toutes généralités, si les espaces de  $L^2$ -cohomologie sont de dimension finie, si  $\int_M \Omega$  converge alors comment interpréter  $X_{L^2}(M) - \int_M \Omega$ ?

Cette quantité ne dépend que de la métrique au voisinage de l'infini. Pour 2 métriques sur  $M^n$  isométrique dans un voisinage de l'infini, ces quantités sont égales.

*Conjecture.* — Cette quantité ne change pas si la topologie change sur un compact : i.e. si  $M_0, M_1$  sont 2 variétés riemanniennes isométriques sur un voisinage de l'infini alors

$$X_{L^2}(M_0) - \int_{M_0} \Omega = X_{L^2}(M_1) - \int_{M_1} \Omega.$$

Ce résultat a été montré dans certains cas par Gromov-Lawson et Donnelly.

## 4. Bibliographie

- [At] M.F. ATIYAH. — *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Soc. Math. France, Astérisque 32,33 (1976), 43–72.
- [Br] J. BRÜNING. —  *$L^2$ -index theorems on a certain complete manifold*, J. Differential Geometry 32 (1990), 491–532.
- [C] G. CARRON. —  *$L^2$ -cohomologie et inégalités de Sobolev*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 306, Grenoble, 1995.
- [C-G 1] J. CHEEGER, M. GROMOV. — *On the characteristics numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume*, Rauch memorial volume, Differential Geometry and Complex analysis, I. Chavel and H.M. Farkas, Springer, Berlin, p.115,154, 1985.
- [C-G 2] J. CHEEGER, M. GROMOV. — *Bounds of the Von Neumann dimension of  $L^2$ -cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds*, J. Differential Geometry 21 (1985), 1–34.
- [Do] J. DODZIUK. — *De Rham-Hodge theory for  $L^2$  cohomology of infinite covering*, Topology 16 (1977), 157–165.
- [D-X] H. DONNELLY, F. XAVIER. — *On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifold*, Amer. J. Math. 106 (1984), 169–185.
- [E-R] K. D. ELWORTHY, S. ROSENBERG. — *Manifolds with wells of negative curvature*, Invent. Math. 103 (1991), 471–495.
- [E-F] J.S. ESCOBAR, A. FREIRE. — *The differential form spectrum of manifold of positive curvature*, Duke J. Math. 69 (1993), 1–42.
- [G-W] R. GREENE, H.H. WU. — *Harmonics forms on noncompact Riemannian and Kähler manifolds*, Michigan Math. J. 28 (1981), 63–81.
- [M] W. MÜLLER. — *Manifold with cusps of rank one, Spectral theory and  $L^2$  index theorem*, L.N. in Math n° 1244, Springer-Verlag, 1987.

- [R1] J. ROE. — *An index theorem on open manifolds I, II*, J. Differential Geometry 27 (1988), 87-113, 115-136.
- [R2] J. ROE. — *Coarse cohomology and index theory on complete Manifolds*, Memoirs of the A.M.S. vol 104, n<sup>o</sup> 497, 1993.

Gilles CARRON  
Université de Grenoble I  
**Institut Fourier**  
Laboratoire de Mathématiques  
associé au CNRS (URA 188)  
B.P. 74  
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)