Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Hubert Pesce

Une introduction à la représentation métaplectique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 13 (1994-1995), p. 143-155
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1994-1995__13__143_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1994–1995 (143–155)

UNE INTRODUCTION À LA REPRÉSENTATION MÉTAPLECTIQUE

Hubert PESCE

Introduction

Le but de cet article est d'offrir une introduction accessible au groupe métaplectique et à sa représentation naturelle : la représentation métaplectique. La source utilisée est le chapitre du livre de Wallach sur la géométrie symplectique qui est consacré à la représentation métaplectique [W]. Pour comprendre l'utilisation en physique de cette représentation, on peut regarder, par exemple, le livre de Guillemin et Sternberg [G-S]. D'un point de vue mathématique, la représentation métaplectique est au groupe symplectique ce que la représentation spinorielle est au groupe orthogonal. Le plan de cet article est d'ailleurs similaire à celui de tout article consacré à la représentation spinorielle. Dans la première partie, on étudie les propriétés de base du groupe symplectique. En particulier, on calcule son groupe fondamental. Dans la deuxième partie, on définit le groupe métaplectique de manière abstraite comme étant un revêtement à deux feuillets au-dessus du groupe symplectique, puis on en obtient une représentation concrète comme groupe d'opérateurs d'un espace de Hilbert. C'est cette représentation concrète qui s'appelle la représentation métaplectique et que l'on étudie dans la dernière partie. La décomposition en composantes irréductibles obtenue dans cette partie est certainement très classique.

Classification math. : 22E46, 22E70, 81R05.

1. Structure du groupe symplectique

On considère sur $\mathbb{R}^{2n}$ la forme symplectique ω définie par la formule $\omega(u,v) = \langle u, Jv\rangle$ où $\langle .,.\rangle$ désigne le produit scalaire usuel et J l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ dont la matrice par rapport à la base canonique est :

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Le groupe symplectique, que l'on notera $Sp(n,\mathbb{R})$, est le groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$ qui préservent la forme ω. On vérifie facilement qu'un élément g de $GL(2n,\mathbb{R})$ est dans $Sp(n,\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^tgJg = J$ et que $Sp(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie de $GL(2n,\mathbb{R})$ dont l'algèbre de Lie, que l'on notera $sp(n,\mathbb{R})$, est l'ensemble des endomorphismes X de $\mathbb{R}^{2n}$ qui vérifient ${}^tXJ + JX = 0$.

Nous allons tout d'abord faire quelques rappels sur la décomposition polaire. Nous noterons $O(p)$ le groupe orthogonal, $S_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $S_p^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Rappelons que l'application exponentielle est un difféomorphisme de $S_p(\mathbb{R})$ vers $S_p^+(\mathbb{R})$ et que l'application $A \longmapsto A^2$ est de difféomorphisme de $S_p^+(\mathbb{R})$ (on notera $A \longmapsto A^{1/2}$ le difféomorphisme inverse). On peut maintenant énoncer :

1. Proposition. — *Soit G un sous-groupe algébrique de $GL(p,\mathbb{R})$ stable par transposition, alors, si l'on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, l'application :*

$$O(p)\cap G \times S_p(\mathbb{R})\cap \mathfrak{g} \longrightarrow G$$
$$(U,X) \longmapsto U\exp(X)$$

est un difféomorphisme.

Preuve. — On commence par traiter le cas où $G = GL(p,\mathbb{R})$. Si g est dans $GL(p,\mathbb{R})$, alors ${}^tgg$ est dans $S_p^+(\mathbb{R})$ et on pose $A = ({}^tgg)^{1/2}$. On pose maintenant $U = Ag^{-1}$ et on remarque que ${}^tUU = {}^t(g^{-1})A^2g^{-1} = 1$. Donc $g = UA$ avec U dans $O(p)$ et A dans $S_p^+(\mathbb{R})$. Montrons maintenant que cette écriture est unique. Supposons que $U_1A_1 = U_2A_2$, alors ${}^t(U_1A_1) = {}^t(U_2A_2)$ et en multipliant ces deux égalités, on obtient $A_1^2 = A_2^2$, donc $A_1 = A_2$ et $U_1 = U_2$. Comme l'exponentielle est un difféomorphisme de $S_p(\mathbb{R})$ vers $S_p^+(\mathbb{R})$, tout élément g de $G = GL(p,\mathbb{R})$ se décompose de manière unique sous la forme $g = U\exp(X)$ avec U dans $O(p)$ et X dans $S_p(\mathbb{R})$.

L'application considérée est donc une bijection et on vérifie facilement que c'est un difféomorphisme.

On traite maintenant le cas général. Soit g dans G, comme G est stable par transposition, ${}^t gg$ est encore dans G ainsi que toutes ses puissances. Écrivons ${}^t gg = \exp(X)$ où X est dans $S_p(\mathbb{R})$. D'après ce que l'on a vu, pour tout entier n positif $\exp(nX)$ est dans G. Comme G est un groupe algébrique, on voit facilement, en se plaçant dans une base où X est diagonale, que $\exp(tX)$ est dans G et ce pour tout réel t. En d'autres termes, X est dans l'algèbre de Lie de G et $A = ({}^t gg)^{1/2} = \exp(X/2)$ est dans G ainsi que $U = Ag^{-1}$. La proposition est donc démontrée. ♣

Le groupe symplectique étant un groupe algébrique et stable par transposition, on peut lui appliquer la proposition précédente et on voit naturellement apparaître le groupe $O(2n) \cap Sp(n, \mathbb{R})$ qu'il nous faut identifier. Pour cela, on munit $\mathbb{R}^{2n}$ d'une structure complexe à l'aide de l'endomorphisme J et on construit une forme hermitienne en posant $(u, v) = \langle u, v\rangle + i\omega(u, v)$ pour u et v dans $\mathbb{R}^{2n}$. On peut maintenant considérer le groupe $U(n)$ des automorphismes $\mathbb{C}$−linéaires de $\mathbb{R}^{2n}$ qui préservent cette forme hermitienne et on vérifie immédiatement que $O(2n) \cap Sp(n, \mathbb{R}) = U(n)$. On peut maintenant énoncer :

2. Corollaire. — *Il y a une équivalence d'homotopie entre $Sp(n, \mathbb{R})$ et le groupe unitaire $U(n)$. En particulier, $Sp(n, \mathbb{R})$ est connexe par arcs et son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Preuve. — La première partie est une conséquence directe de la proposition précédente et du fait que $S_{2n}(\mathbb{R}) \cap sp(n, \mathbb{R})$ est contractile. Il suffit donc de montrer que $U(n)$ est connexe par arcs et que son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Pour cela on, on raisonne par récurrence. Comme $U(1) \simeq S^1$, le résultat est vrai pour $n = 1$. Supposons le résultat démontré pour $U(n-1)$ et considérons la fibration $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$. Donc, $U(n)$ est connexe par arcs puisque c'est l'espace total d'une fibration à base et à fibre connexe par arcs . Pour calculer le groupe fondamental, on utilise la suite exacte de Serre :

$$\to \pi_2(S^{2n-1}) \to \pi_1(U(n-1)) \to \pi_1(U(n)) \to \pi_1(S^{2n-1}) \to 1$$

Comme $\pi_2(S^{2n-1})$ et $\pi_1(S^{2n-1})$ sont triviaux (puisque $n \geq 2$), on obtient que $\pi_1(U(n-1))$ et $\pi_1(U(n))$ sont isomorphes, ce qui achève la démonstration. ♣

Pour terminer cette partie nous allons rappeler quelques résultats sur les générateurs du groupe symplectique. Pour cela on rappelle qu'un élément g de $GL(2n, \mathbb{R})$ est dans $Sp(n, \mathbb{R})$ si et seulement si ${}^t gJg = J$. Ceci se traduit, si l'on écrit g sous la forme :

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

par l' équation ${}^tAD - {}^tCD = 1_n$ et par le fait que ${}^tAC$ et ${}^tBD$ sont symétriques. On en déduit facilement que les ensembles suivants sont des sous-groupes de $Sp(n, \mathbb{R})$:

$$N = \{\begin{pmatrix} 1_n & X \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} ; X = {}^tX\}$$

$$M = \{\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} ; A \in GL(n, \mathbb{R})\}$$

$$\overline{N} = \{\begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ X & 1_n \end{pmatrix} ; X = {}^tX\} = JNJ^{-1}$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

3.LEMME. — *M, N et J engendrent $Sp(n, \mathbb{R})$*

Preuve. — On commence par montrer que $\overline{N}MN$ est l'ouvert de $Sp(n, \mathbb{R})$ constitué des éléments g pour lesquels, avec les notations précédemment utilisées, on a $det(A) \neq 0$. Pour montrer cela, on se base sur le calcul suivant :

$$\begin{pmatrix} 1_n & 0_n \\ X & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_n & Y \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AY \\ XA & XAY + {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$$

On en déduit que le sous-groupe H engendré par M, N et J est ouvert, puisqu'il contient un voisinage de l'identité, et donc fermé. Le groupe $Sp(n, \mathbb{R})$ étant connexe, on a $H = Sp(n, \mathbb{R})$, ce qui termine la preuve de lemme. ♣

On va maintenant voir que l'on peut, au niveau des algèbres de Lie raffiner ce résultat. Pour cela on va noter $\mathfrak{n}$ et $\overline{\mathfrak{n}}$ les algèbres de Lie respectives de N et $\overline{N}$ et on a :

4.LEMME. — *$\mathfrak{n}$ et $\overline{\mathfrak{n}}$ engendrent $sp(n, \mathbb{R})$*

Preuve. — Comme $sp(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & {}^t(-A) \end{pmatrix}$$

où B et C sont des matrices symétriques, on voit immédiatement que l'on a, si l'on note $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M, $sp(n, \mathbb{R}) = \overline{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$. Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que $\mathfrak{m}$ est contenu dans la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{n}$ et $\overline{\mathfrak{n}}$. Pour cela, on remarque que :

$$[\begin{pmatrix} 0_n & X \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ Y & 0_n \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} XY & 0_n \\ 0_n & -{}^t(XY) \end{pmatrix}$$

Il reste donc à montrer que l'espace vectoriel V engendré par les XY, quand X et Y parcourent l'ensemble des matrices symétriques, est égal à l'ensemble de toutes les matrices. Comme toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique et que V contient l'ensemble des matrices symétriques, il suffit de montrer que toute matrice anti-symétrique appartient à V. Si $n = 2$, ceci résulte du calcul :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $n > 2$, le même calcul montre que les matrices anti-symétriques élémentaires, qui forment une base des matrices anti-symétriques, sont contenues dans V, ce qui termine la preuve du lemme. ♣

2. Le groupe métaplectique

Nous allons donner une première définition du groupe métaplectique :

1. PROPOSITION ET DÉFINITION. — *Il existe un groupe de Lie connexe qui est un revêtement à deux feuillets au dessus de $Sp(n, \mathbb{R})$. Ce groupe est bien défini, à isomorphisme prés, par cette propriété et s'appelle le groupe métaplectique.*

Preuve. — Notons G le revêtement universel de $Sp(n, \mathbb{R})$. Il existe sur G une structure de groupe de Lie telle que l'application de revêtement ν de G vers $Sp(n, \mathbb{R})$ soit un homomorphisme de groupe et telle $\Gamma = \mathrm{Ker}(\nu)$ s'identifie au groupe fondamental de $Sp(n, \mathbb{R})$. Comme Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, il existe un unique sous-groupe Γ_0 d'indice deux dans Γ et le groupe $\Gamma_0 \backslash Sp(n, \mathbb{R})$ a la propriété désirée. L'unicité, à isomorphisme prés, d'un groupe ayant cette propriété se montre de la même manière. ♣

Par la suite nous noterons $Mp(n, \mathbb{R})$ le groupe métaplectique. Cette première définition du groupe métaplectique est un peu abstraite et on aimerait avoir une réalisation concrète de ce groupe. Le but de la fin de cette partie d'obtenir une telle réalisation. Pour cela, nous allons nous intéresser à un autre groupe, le groupe de Heisenberg, et à ses représentations.

Le groupe de Heisenberg H_n est obtenu en munissant $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}$ de la loi de groupe $(u, s)(v, t) = (u + v, s + t + \omega(u, v)/2)$ où u, v sont dans $\mathbb{R}^{2n}$, s, t dans $\mathbb{R}$ et ω désigne la forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$ qui a été introduite dans la première partie. On obtient ainsi un groupe nilpotent dont le centre est $Z = \{(0, s); s \in \mathbb{R}\}$. On s'intéresse aux représentations irréductibles de H_n. Rappelons qu'une représentation unitaire d'un groupe de Lie G est un homomorphisme continu ρ de G dans le groupe des opérateurs unitaires d'un espace de Hilbert complexe V et qu'une représentation est dite irréductible si l'espace V de la représentation n'admet pas de sous-espace fermé invariant non trivial. Maintenant, si ρ est une représentation unitaire irréductible de H_n dans un espace V, d'après le lemme de Schur, pour tout réel t, $\rho(0,t)$ est une homothétie dont le rapport est de module 1 et comme ρ est un homomorphisme de groupe, il existe un réel c tel que $\rho(0,t) = e^{ict}\,\mathrm{id}_V$. Si $c = 0$, alors ρ passe au quotient en une représentation de $Z\backslash H_n = \mathbb{R}^{2n}$. Dans ce cas V est de dimension un et il existe une forme linéaire l sur $\mathbb{R}^{2n}$ telle que $\rho(u,t) = e^{il(u)}$ et ce pour tout u dans $\mathbb{R}^{2n}$. Le cas où $c \neq 0$ est plus délicat et fait l'objet du théorème de Stone-Von Neumann [C-G] :

2. Proposition. — *Soit ρ une représentation unitaire irréductible de H_n dans un espace de Hilbert V telle que pour tout réel t on ait $\rho(0,t) = e^{ict}\,\mathrm{id}_V$ avec $c \neq 0$, alors ρ est unitairement équivalente à la représentation τ_c de H_n dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ définie par $(\tau_c(u,t)f)(z) = e^{ic(t+\langle x,z-y/2\rangle)}f(z-y)$ où $u = (x,y)$ est dans $\mathbb{R}^{2n}$ et f dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$.*

Pour fixer les idées, nous allons considérer la représentation $\tau = \tau_1$. On vérifie facilement que $\mathrm{Ker}(\tau) = \{(0, 2k\pi); k \in \mathbb{Z}\}$ et que τ, vue comme une représentation de $\mathrm{Ker}(\tau)\backslash H_n$, est un homéomorphisme sur son image.

Nous allons maintenant essayer d'obtenir une réalisation concrète du groupe métaplectique. Pour cela, on introduit d'abord l'ensemble G des isométries g de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ qui sont telles que pour tout u dans $\mathbb{R}^{2n}$, il existe v dans $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $g\tau(u,0)g^{-1} = \tau(v,0)$. Puisque τ, vue comme une représentation de $\mathrm{Ker}(\tau)\backslash H_n$, est un homéomorphisme sur son image, l'élément v est uniquement défini par g et u et on le notera $\nu(g)(u)$. Il est clair que l'application $\nu(g)$ est continue, et ce pour tout g. En fait, on a le résultat suivant :

3. Proposition. — *G est un groupe et ν est un homomorphisme de groupes continu de G vers $Sp(n,\mathbb{R})$ dont le noyau est $\mathrm{Ker}(\nu) = \{\lambda\,\mathrm{id}; |\lambda| = 1\}$.*

Preuve. — Elle se fait en plusieurs étapes.

• G est stable par produit : soient g et h dans G et u dans $\mathbb{R}^{2n}$, on a

$$(gh)\tau(u,0)(gh)^{-1} = g(h\tau(u,0)h^{-1})g^{-1} = g\tau(\nu(h)(u),0)g^{-1} = \tau(\nu(g)(\nu(h)(u)),0).$$

On en déduit que gh est dans G et que $\nu(gh) = \nu(g)\nu(h)$.

• ν est à valeurs dans $Sp(n,\mathbb{R})$: soient u et v dans $\mathbb{R}^{2n}$ et g dans G, en multipliant membre à membre les égalités $g\tau(u,0)g^{-1} = \tau(\nu(g)(u),0)$ et $g\tau(v,0)g^{-1} = \tau(\nu(g)(v),0)$ et en utilisant la description du noyau de τ donnée plus haut on obtient que $\nu(g)(u+v) = \nu(g)(u) + \nu(g)(v)$ et que $\omega(\nu(g)(u),\nu(g)(v)) - \omega(u,v) \in 4\pi\mathbb{Z}$. La fonction considérée étant continue en u et v, un argument de connexité nous assure que $\omega(\nu(g)(u), \nu(g)(v)) = \omega(u, v)$. D'autre part, comme toute fonction continue et additive, $\nu(g)$ est linéaire. On a donc bien montré que $\nu(g)$ est dans $Sp(n, \mathbb{R})$.

• G est stable par inverse : soient g dans G et u dans $\mathbb{R}^{2n}$. Comme $\nu(g)$ est surjective, il existe v tel que $u = \nu(g)(v)$ et $g^{-1}\tau(u, 0)g = g^{-1}\tau(\nu(g)(v), 0)g = \tau(v, 0)$. On en déduit que g^{-1} est dans G et que $\nu(g^{-1}) = (\nu(g))^{-1}$.

• Description de $\mathrm{Ker}(\nu)$: on remarque que, puisque pour tout réel t, on a $\nu(0, t) = e^{it}\,\mathrm{id}_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)}$, si g est dans $\mathrm{Ker}(\nu)$, alors pour tout u dans $\mathbb{R}^{2n}$ et t dans $\mathbb{R}$, on a $g\tau(u, t)g^{-1} = \tau(u, t)$. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme de Schur.

La proposition est donc démontrée. ♣

La prochaine étape consiste à montrer que ν est surjective. On rappelle tout d'abord que la transformée de Fourier est définie par la formule

$$\mathcal{F}(\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-i\langle x, y\rangle} dy$$

si φ est une fonction C^∞ à décroissance rapide et s'étend en une isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Ceci dit, on vérifie facilement par le calcul les assertions suivantes :

• La transformée de Fourier est dans G. De plus $\nu(\mathcal{F}) = -J = J^{-1}$.

• Si A est dans l'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques, alors l'isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ définie par $(\mu(A)(\varphi))(y) = e^{i\langle Ay, y\rangle/2}\varphi(y)$ est dans G et

$$\nu(\mu(A)) = \begin{pmatrix} 1_n & A \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}$$

• Si A est dans $GL(n, \mathbb{R})$, alors l'isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ définie par $(\alpha(A)(\varphi))(y) = |det(A)|^{1/2}\varphi({}^tAy)$ est dans G et

$$\nu(\alpha(A)) = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$$

On peut maintenant énoncer :

4. Corollaire. — *L'homomorphisme ν est surjectif et G admet une structure de groupe de Lie tel que ν deviennent un homomorphisme de groupes de Lie.*

Preuve. — D'après ce que l'on vient de voir, l'image de ν est un sous-groupe de $Sp(n, \mathbb{R})$ qui contient J et les groupes que l'on a notés N et M. En utilisant le lemme 3 de la première partie, on obtient que $\nu(G) = Sp(n, \mathbb{R})$. Le fait que G soit un groupe de Lie est une conséquence du fait que G est une extension de $Sp(n, \mathbb{R})$ par $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui sont deux groupes de Lie. ♣

Nous allons maintenant étudier un sous-groupe de G et nous montrerons plus tard que ce sous-groupe est le groupe métaplectique.

5. Proposition. — *Soit G_0 l'adhérence du groupe dérivé de G, alors G_0 est l'adhérence du groupe engendré par les $\mu(A)$ et les $\mathcal{F}\mu(A)\mathcal{F}^{-1}$ quand A parcourt $S_n(\mathbb{R})$ et le noyau de la restriction de ν à G_0 est fini.*

Preuve. — On remarque qui si A est dans $S_n(\mathbb{R})$ et X dans $GL_n(\mathbb{R})$, alors $[\alpha(X), \mu(A)] = \mu(XA^tX - A)$. En particulier, si $X = 2^{1/2}1_n$, alors $[\alpha(X), \mu(A)] = \mu(A)$. Donc G_0 contient l'adhérence du groupe engendré par les $\mu(A)$ quand A parcourt $S_n(\mathbb{R})$ et, puisque G_0 est distingué dans G, il contient aussi les éléments du type $\mathcal{F}\mu(A)\mathcal{F}^{-1}$. Notons G_1 l'adhérence du groupe engendré par les $\mu(A)$ et les $\mathcal{F}\mu(A)\mathcal{F}^{-1}$ quand A parcourt $S_n(\mathbb{R})$. D'aprés ce que l'on a vu, $\nu(G_1)$ est un sous-groupe de Lie de $Sp(n, \mathbb{R})$ qui contient N et JNJ^{-1}. On en déduit que l'algèbre de Lie de $\nu(G_1)$ contient $\mathfrak{n}$ et $\bar{\mathfrak{n}}$, donc, d'après le lemme 4 de la première partie, l'algèbre de Lie de $\nu(G_1)$ est $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$. Finalement, comme $Sp(n, \mathbb{R})$ est connexe, on a forcément $\nu(G_1) = Sp(n, \mathbb{R})$.

Montrons maintenant que $G_0 = G_1$. Pour cela nous allons tout d'abord raisonner au niveau des algèbres de Lie. Notons ν_* la différentielle de ν, comme $\mathrm{Ker}(\nu_*)$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$, la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ descend en une représentation de $\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\nu_*)$ qui est isomorphe à $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, donc semi-simple. Comme toute représentation d'une algèbre de Lie semi-simple est semi-simple, on en déduit qu'il existe un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Ker}(\nu_*)$. Remarquons que, comme ν_* induit un isomorphisme entre $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, cet idéal est semi-simple. En particulier, $\mathfrak{h}$ est égal à son algèbre dérivée $\mathfrak{h}'$. Or $\mathrm{Ker}(\nu_*)$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. On a donc montré que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathrm{Ker}(\nu_*)$. On remarque maintenant que $\dim(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})) \leq \dim(\mathfrak{g}_1) \leq \dim(\mathfrak{g}') = \dim(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}))$, ce qui implique que $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}'$, puisque $\mathfrak{g}'$ est l'algèbre de Lie de G_0. Comme G_0 et G_1 sont connexes, on a bien $G_0 = G_1$. Pour terminer, on remarque que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Ker}(\nu_*) \cap G_0$ est triviale, donc $\mathrm{Ker}(\nu_*) \cap G_0$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{Ker}(\nu_*)$ qui est compact, donc $\mathrm{Ker}(\nu_*) \cap G_0$ est fini. ♣

On est maintenant prêts pour avoir la description concrète du groupe métaplectique que l'on cherche.

6. Proposition. — *Le groupe métaplectique est le groupe G_0 introduit dans la proposition précédente, c'est-à-dire l'adhérence du groupe engendré par les $\mu(A)$ et les $\mathcal{F}\mu(A)\mathcal{F}^{-1}$ quand A parcourt l'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.*

Preuve. — D'après ce que l'on a vu, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(\nu) \cap G_0$ est un groupe à deux éléments. On note encore ν la restriction de ν à G_0. On pose $K = U(n)$ et $\tilde{K} = \nu^{-1}(K)$. Alors $\tilde{K}$ est connexe par arcs, puisque G_0 est connexe par arcs et $G_0/\tilde{K}$ est simplement connexe, et contient $\mathrm{Ker}(\nu)$. On choisit comme tore maximal de $U(n) = O(2n) \bigcap Sp(n, \mathbb{R})$ le groupe T des applications t_θ définies par $t_\theta(e_i) =$

$\cos(\theta_i)e_i - sin(\theta_i)e_{n+i}$ et $t_\theta(e_{n+i}) = sin(\theta_i)e_i + \cos(\theta_i)e_{n+i}$ où $\{e_i\}_{1\leq i\leq 2n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ et $\theta = (\theta_1, .., \theta_n)$ est dans $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$. Alors $\tilde{T} = \nu^{-1}(T)$ est un tore maximal de G_0. On note maintenant H_i l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ défini par $H_i(e_i) = -e_{n+i}$ et $H_i(e_{n+i}) = e_i$ et qui est nul sur les autres vecteurs de la base $\{e_i\}_{1\leq i\leq 2n}$. Alors $\{H_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathfrak{t}$, l'algèbre de Lie de T et si l'on pose $\tilde{H}_i = \nu_*^{-1}(H_i)$, alors $\{\tilde{H}_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\tilde{\mathfrak{t}}$, l'algèbre de Lie de $\tilde{T}$. On peut maintenant montrer :

7. LEMME. — *Si* $\exp(\sum_{1\leq j\leq n} \theta_j\tilde{H}_j)$ *est dans* $\tilde{T}\bigcap \mathrm{Ker}(\nu)$, *alors*

$$\exp(\sum_{1\leq j\leq n} \theta_j\tilde{H}_j) = e^{i(\sum_{1\leq j\leq n}\theta_j)/2}\,\mathrm{id}_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Preuve. — Si $\exp(\sum_{1\leq j\leq n} \theta_j\tilde{H}_j)$ est dans $\tilde{T}\bigcap\mathrm{Ker}(\nu)$, alors, d'après le lemme de Schur, $\exp(\sum_{1\leq j\leq n} \theta_j\tilde{H}_j) = \lambda(\theta)\,\mathrm{id}_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)}$. Le problème est de calculer $\lambda(\theta)$.

On considère un élément $\theta = (\theta_1, .., \theta_n)$ de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ tel que $\cos(\theta_i) \neq 0$, et ce pour tout i. Dans ce cas, on peut considérer les matrices diagonales A_θ et B_θ qui sont telles que le j-ième coefficient diagonal soit respectivement $tg(\theta_j)$ et $\cos(\theta_j)$. On vérifie tout de suite que, avec les notations introduites dans la preuve de la Proposition 3, on a : $t(\theta) = \nu((\mathcal{F}\mu(A_\theta)\mathcal{F}^{-1})\alpha(B_\theta)\mu(A_\theta))$. Or, si $\epsilon > 0$ est assez petit, $N_\epsilon = \{(\mathcal{F}\mu(A_\theta)\mathcal{F}^{-1})\alpha(B_\theta)\mu(A_\theta)$ tels que $|\theta_i| \leq \epsilon$ pour $i = 1, .., n\}$ est un voisinage de l'élément neutre dans $\tilde{T}$. Maintenant, on définit une fonction g, qui appartient à $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, par la formule $g(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ et un calcul facile de transformée de Fourier donne :

$$(\mathcal{F}\mu(A_\theta)\mathcal{F}^{-1})\alpha(B_\theta)\mu(A_\theta)(g) = (\prod_{j=1}^{n} |\cos(\theta_j)|^{1/2}/(\cos(\theta_j)e^{-i\theta_j})^{1/2})g,$$

la racine carrée qui intervient dans cette formule étant celle définie sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ qui prolonge la racine carrée usuelle définie sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, si $|\theta_i| \leq \epsilon$,

$$(\cos(\theta_j)e^{-i\theta_j})^{1/2} = (\cos(\theta_j))^{1/2}e^{-i\theta_j/2}.$$

On en déduit que

$$(\mathcal{F}\mu(A_\theta)\mathcal{F}^{-1})\alpha(B_\theta)\mu(A_\theta)(g) = e^{i(\sum_{1\leq j\leq n}\theta_j)/2}\,g.$$

Nous venons de voir que l'égalité ci-dessus est vérifiée pour θ dans N_ϵ. On remarque maintenant que, puisque N_ϵ est un voisinage de l'élément neutre de $\tilde{T}$, N_ϵ engendre $\tilde{T}$, et que chaque côté de l'égalité est une fonction additive. On en déduit que l'égalité est vraie pour tout θ dans $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$. Comme, $(\mathcal{F}\mu(A_\theta)\mathcal{F}^{-1})\alpha(B_\theta)\mu(A_\theta) = \exp(\sum_{1\leq j\leq n} \theta_j \tilde{H}_j)$, on a bien montré que $\lambda(\theta)$ est de la forme désirée. ♣

On peut maintenant terminer la preuve de la proposition.

Soit $t = \exp(\sum_{1\leq j\leq n} \theta_j \tilde{H}_j)$ dans $\tilde{T}$. Comme

$$\nu(\exp(\sum_{1\leq j\leq n} \theta_j \tilde{H}_j)) = \exp(\sum_{1\leq j\leq n} \theta_j H_j),$$

t est $\tilde{T} \bigcap \mathrm{Ker}(\nu)$ si et seulement si $\theta = (\theta_1, .., \theta_n)$ est $(2\pi\mathbb{Z})^n$. Donc, d'après le lemme précédent, $t = \mathrm{id}_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)}$ si $\sum_{1\leq i\leq n} \theta_i \in 4\pi\mathbb{Z}$ et $t = -\mathrm{id}_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)}$ sinon. On a donc bien montré que $\mathrm{Ker}(\nu)$ est un groupe à deux éléments, ce qui montre que G_0 est le groupe métaplectique. ♣

3. La représentation métaplectique

Nous nous sommes intéressés dans la partie précédente à obtenir une réalisation concrète du groupe métaplectique $Mp(n, \mathbb{R})$ comme sous-groupe du groupe des opérateurs unitaires de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. En d'autres termes, nous avons construit une représentation unitaire de $Mp(n, \mathbb{R})$. On peut donc poser :

1. Définition. — *La représentation unitaire de $Mp(n, \mathbb{R})$ dont l'espace est $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ qui a été construite dans la partie précédente s'appelle la représentation métaplectique.*

Par la suite nous noterons W la représentation métaplectique. Dans cette partie, on se propose de montrer le résultat suivant :

2. Proposition. — *La représentation métaplectique a deux composantes irréductibles. Ces composantes sont les espaces $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)^+$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)^-$ des fonctions paires et impaires de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve. — Tout d'abord, il est clair que ces deux espaces sont laissés stables par W car ils sont laissés stables par les opérateurs $\mu(A)$ et $\mathcal{F}\mu(A)\mathcal{F}^{-1}$ quand A parcourt l'ensemble $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et l'image de $Mp(n, \mathbb{R})$ par W est l'adhérence du groupe engendré par ces opérateurs.

Il ne reste plus qu'à montrer que les espaces $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)^+$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)^-$ sont irréductibles. Pour simplifier les notations, nous allons supposer $n = 1$, la preuve pour

$n > 1$ étant exactement la même. Nous allons par la suite identifier l'algèbre de Lie de $Mp(1,\mathbb{R})$ et celle de $Sp(1,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})$. Par contre, nous allons noter exp l'application exponentielle de $sp(1,\mathbb{R})$ vers $Sp(1,\mathbb{R})$ et Exp l'application exponentielle de $sp(1,\mathbb{R})$ vers $Mp(1,\mathbb{R})$. Un tore maximal de $Sp(1,\mathbb{R})$ est $T = SO(2)$ et on notera $\tilde{T}$ l'image réciproque de T dans $Mp(1,\mathbb{R})$ par l'application de revêtement. Alors l'algèbre de Lie de T est engendrée par la matrice que l'on a notée J. Avec ces notations, $T = \exp(\mathbb{R}J)$ et $\tilde{T} = \mathrm{Exp}(\mathbb{R}J)$. De plus, $\mathrm{Ker}(\exp) = 2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{Exp}) = 4\pi\mathbb{Z}$.

L'idée est de calculer la différentielle de W dans la direction de J. Pour cela, on écrit $J = A + B$ avec, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et on fixe une fonction φ dans l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors, comme $(W(\mathrm{Exp}(tA))\varphi)(x) = e^{itx^2/2}\varphi(x)$, on obtient tout de suite que $(dW(A)\varphi)(x) = (i/2)x^2\varphi(x)$. On remarque maintenant que, comme $B = J^{-1}AJ$, on a $dW(B) = \mathcal{F}^{-1}dW(A)\mathcal{F}$ et un calcul classique de transformée de Fourier donne : $(dW(B)\varphi)(x) = -(i/2)\varphi''(x)$. On voit donc que si l'on définit un opérateur différentiel par la formule $(H\varphi)(x) = -\varphi''(x) + x^2\varphi(x)$, alors $dW(J) = (i/2)H$.

On va maintenant décomposer la restriction de W à $\tilde{T}$ en composantes irréductibles. Pour cela, on utilise le fait que les représentations irréductibles de $\tilde{T}$ sont de dimension 1 et sont données par $\alpha_k(\mathrm{Exp}(tJ)) = e^{ikt/2}$ quand k parcourt $\mathbb{Z}$. Si on appelle V_k la somme des sous-espaces de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ sur lesquels la restriction de W à $\tilde{T}$ est isomorphe à α_k, alors $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ est la somme hilbertienne des V_k quand k parcourt $\mathbb{Z}$ et le projecteur orthogonal P_k sur V_k est donné par la formule : $P_k\varphi = \int_{\tilde{T}}(W(z)\varphi)\alpha_{-k}(z)dz$ si φ est dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Il se trouve que les espaces V_k sont connus explicitement. On utilise pour cela l'opérateur H qui a été introduit précédemment et qui est souvent appelé opérateur d'Hermite. Cet opérateur est diagonalisable dans une base orthonormée qui est constituée des fonctions d'Hermite. La p-ième fonction d'Hermite h_p est définie par la formule $h_p(x) = c_p e^{x^2/2}\frac{d^p}{dx^p}e^{-x^2}$ où $c_p = (2^p p! \pi^{1/2})^{1/2}$ et il est bien connu que la famille $\{h_p\}_{p\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ ([C-G], p. 243). De plus, h_p est une fonction propre de H correspondant à la valeur propre $2p+1$. Comme $W(\mathrm{Exp}(tJ)) = \exp(t(i/2)H)$, la restriction de W à $\tilde{T}$ laisse stable les espaces propres de H et, ceux-ci étant de dimension 1, on a forcément $W(\mathrm{Exp}(tJ))h_p = \alpha_k(\mathrm{Exp}(tJ))h_p$ où $k = k(p)$ est un élément de $\mathbb{Z}$, et ce pour tout $p \geq 0$. Pour calculer $k(p)$, il suffit de dériver cette expression par rapport à t et on obtient immédiatement que $k(p) = 2p+1$. On en déduit que $V_k = \{0\}$ sauf si $k = 2p+1$, pour $p \in \mathbb{N}$, et dans ce cas on a $V_{2p+1} = \mathbb{C}h_p$.

On est maintenant en position de terminer la preuve. On considère un opérateur borné L de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ qui entrelace la représentation métaplectique, c'est-à-dire que pour tout g dans $Mp(n,\mathbb{R})$, on a $LW(g) = W(g)L$. En particulier, L entrelace la restriction de la représentation métaplectique à $\tilde{T}$. Comme les composantes isotypiques de cette représentation sont de dimension un, L est forcément diagonalisable dans la base

$\{h_p\}_{p\geq 0}$. Il existe donc pour tout p un nombre complexe λ_p tel que $Lh_p = \lambda_p h_p$. Nous allons montrer que λ_p ne dépend que de la parité de p. On regarde pour cela la décomposition de $W(\mathrm{Exp}(tA))h_p$ dans la base $\{h_q\}_{q\geq 0}$:

$$W(\mathrm{Exp}(tA))h_p = \sum_{q=0}^{\infty} c(t,p,q)h_q.$$

En appliquant L de chaque côté de l'égalité, on obtient :

$$LW(\mathrm{Exp}(tA))h_p = \sum_{q=0}^{\infty} c(t,p,q)\lambda_q h_q.$$

D'autre part, en décomposant $W(\mathrm{Exp}(tA))Lh_p$ dans la base $\{h_q\}_{q\geq 0}$, on obtient :

$$W(\mathrm{Exp}(tA))h_p = \sum_{q=0}^{\infty} c(t,p,q)\lambda_p h_q.$$

On en déduit que pour tout $q \geq 0$, on a $c(t,p,q)\lambda_q = c(t,p,q)\lambda_p$. On utilise maintenant le fait que $(W(\mathrm{Exp}(tA))h_p)(x) = e^{itx^2/2}h_p(x)$ et on obtient que :

$$c(t,p,q) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx^2/2}h_p(x)h_q(x)dx.$$

Comme h_p est une fonction paire (*resp.* impaire) si p est pair (*resp.* impair), $c(t,p,q) = 0$ si $p-q$ est impair. Supposons maintenant que $p = q+2n$ et que $c(t,p,q) = 0$ pour tout réel t. En calculant la dérivée m-ième en 0 par rapport à t de $c(t,p,q)$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2m}h_p(x)h_q(x)dx = 0.$$

On utilise maintenant le fait que h_r est de la forme $h_r(x) = Q_r(x)e^{-x^2/2}$ où Q_r est un polynôme de degré exactement r. On en déduit que la famille $\{Q_r\}_{r\geq 0}$ est une base de l'espace des polynômes et que donc, $x^{2n}h_q(x) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i h_i(x)$ avec $\alpha_p \neq 0$ puisque $p = q+2n$. Or, comme la famille $\{h_p\}_{p\geq 0}$ est orthonormée, on a :

$$\alpha_p = \int_{\mathbb{R}} x^{2m}h_q(x)h_p(x)dx = 0$$

d'après l'hypothèse que l'on a faite. Ceci est une contradiction et on en déduit qu'il existe t tel que $c(t,p,q) \neq 0$. Comme on a vu que $c(t,p,q)\lambda_q = c(t,p,q)\lambda_p$, ceci implique que $\lambda_q = \lambda_p$. On a donc bien montré que λ_q ne dépend que de la parité de q. Il existe donc deux nombres complexes λ_0 et λ_1 tels que $Lh_{2p} = \lambda_0 h_{2p}$ et $Lh_{2p+1} = \lambda_1 h_{2p+1}$ pour tout $p \geq 0$. Comme les familles $\{h_{2p}\}_{p\geq 0}$ et $\{h_{2p+1}\}_{p\geq 0}$ sont des bases hilbertiennes des espaces $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)^+$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)^-$ des fonctions paires et impaires, on a bien montré que tout opérateur borné qui entrelace la représentation métaplectique est une homothétie en restriction à $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)^+$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)^-$, ce qui montre bien que ces deux espaces sont irréductibles. Le résultat est donc démontré. ♣

Bibliographie

[C-G] CORWIN L. & GREENLEAF F.P. — *Representations of nilpotent Lie groups and applications*, Cambridge University Press, 1990.

[G-S] GUILLEMIN V. & STERNBERG S. — *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, 1984.

[W] WALLACH N. — *Symplectic geometry and Fourier analysis*, Brookline, Mass., Math. Sci. Press, 1977.

Hubert PESCE
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)