Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Thierry Bouche

Sur le noyau de la chaleur associé aux puissances tensorielles d'un fibré en droites complexes. Estimations asymptotiques et théorèmes d'annulation

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 12 (1993-1994), p. 41-49

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1993-1994__12__41_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1993–1994 (41–49)

SUR LE NOYAU DE LA CHALEUR ASSOCIÉ AUX PUISSANCES TENSORIELLES D'UN FIBRÉ EN DROITES COMPLEXES

Estimations asymptotiques et théorèmes d'annulation

Thierry BOUCHE

Introduction

L'objet de cet exposé est de présenter aux géomètres riemanniens les techniques de théorie spectrale que j'ai été amené à utiliser pour traiter de certains problèmes en géométrie analytique. La première section présente les objets considérés, et donne la version riemannienne d'énoncés obtenus dans les [Bi], i=1, 2, 3. En particulier, je montre qu'un équivalent uniforme comme celui du théorème 1.1 ci-dessous peut impliquer un résultat d'annulation sous des hypothèses autorisant un tout petit peu de négativité. Le contexte dans lequel je me place pour cet exposé est le suivant : M est une variété riemannienne compacte de dimension d, L (resp. E) un fibré vectoriel complexe hermitien C^∞ de rang 1 (resp. r) au dessus de M. On se donne une connexion riemannienne sur L et on note ∇_k la connexion induite sur $E(k) = E \otimes L^{\otimes k}$. On a alors un «laplacien brut» $\Delta_k = \nabla_k^* \nabla_k$ agissant sur les sections de $E(k)$ et l'on définit l'opérateur de Schrödinger suivant : $\square_k = \frac{1}{k}\Delta_k + V$ où V est un opérateur autoadjoint d'ordre 0. L'intérêt des géomètres complexes pour ce type d'opérateur date de l'article [De] dans lequel J.-P. Demailly a montré que le laplacien antiholomorphe agissant sur les (p,q)-formes à valeur dans $E(k)$ peut être interprété comme un laplacien $k\,\square_k$ pourvu que l'on remplace E par le fibré (non holomorphe en général) $\bigwedge^{p,q} T^*M \otimes E$. Le problème spécifique qui m'occupe ici est l'étude spectrale de l'opérateur $\square_k$. La brève histoire de ce problème peut se résumer ainsi : en 85, Demailly établit l'asymptotique de Weyl pour cet opérateur. Simultanément, Y. Colin de Verdière publie [CdV] qui relève de préoccupations voisines. Un peu plus tard, J.-M. Bismut trouve un équivalent ponctuel pour le noyau de la chaleur associé (méthodes probabilistes), que E. Getzler généralise à différentes situations (méthodes analytiques). Je donne ci-dessous les grandes lignes de la méthode analytique que j'ai employé pour obtenir en outre un contrôle

Classification A.M.S. : 35P10 - 32L05

plus précis de l'uniformité par rapport au temps.

1. L'équivalent pour la trace de $e^{-t\,\Box_k}$

L'opérateur $\Box_k$ introduit plus haut est elliptique (son symbole est celui du laplacien riemannien agissant sur les fonctions tensorisé par l'identité de $E(k)$) et de Fredholm, il a donc un spectre discret $V_{\min} \leq \mu_1^k \leq \cdots \leq \mu_j^k \leq \cdots$ qui s'accumule en l'infini. Le champ magnétique de $k\,\Box_k$ est la 2-forme de courbure de la connexion $\nabla_k = kB + C$ où B est la courbure de L, et C provient des courbures de M et E. En un point $x \in M$ où B_x est de rang $2s$ on note $B_j(x), j = 1, \ldots, s$ les valeurs propres positives de la forme B par rapport à la métrique de M en x. L'opérateur de la chaleur associé à $\Box_k$ est $H_k = \frac{\partial}{\partial t} + \Box_k$, il est défini sur les sections de $E(k)$ au dessus de $\mathbb{R} \times M$. Le semi-groupe associé $e^{-t\,\Box_k}$ est régularisant et admet un noyau $K_k(t,x,y) \in \mathrm{Hom}(E(k)_y, E(k)_x)$ défini par

$$e^{-t\,\Box_k} f(t,x) = \int_M K_k(t,x,y).f(y)dy.$$

Les propriétés de $\Box_k$ impliquent l'existence du développement suivant pour K_k (les valeurs propres μ_j^k sont comptées avec multiplicité et la famille $(\psi_j^k)_j$ est une base L^2-orthonormée de sections propres associées)

$$K_k(t,x,y) = \sum_{j\geq 1} e^{-t\mu_j^k}\,\psi_j(x) \otimes \psi_j^*(y).$$

Comme $K_k(t,x,x)$ est un endomorphisme de la fibre $E(k)_x$, on appelle $e_k(t,x)$ sa trace. Elle vérifie les formules classiques :

$$e_k(t,x) = \sum_{j\geq 1} e^{-t\mu_j^k} |\psi_j^k(x)|^2 \quad \text{et} \quad \int_M e_k(t,x)dx = \sum_{j\geq 1} e^{-t\mu_j^k}. \qquad (*)$$

La formule $e_\infty(t,x) = r(2\pi t)^{-\frac{d}{2}}\,\mathrm{tr}_{E(k)}\, e^{-tV(x)} \prod_{j=1}^{s} \frac{tB_j(x)}{\mathrm{sh}\, tB_j(x)}$ définit sur $\mathbb{R} \times M$ une fonction positive C^∞. J'ai démontré dans [B1] le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Lorsque $k \to +\infty$, la fonction $k^{-\frac{d}{2}} e_k(t,x)$ converge vers la fonction $e_\infty(t,x)$ définie ci-dessus uniformément par rapport à $(t,x) \in]0,k^\varepsilon[\times M$ pour un $\varepsilon > 0$ donné.*

Plus précisément, si on fixe $x_0 \in M$ et $\eta \in]0, \frac{1}{6}[$, pour toute suite de réels r_k telle que la suite $k^{-\frac{1}{2}+\eta} r_k$ est encadrée par des constantes positives, et pour toute suite Ω_k d'ouverts de M contenant pour tout k la boule géodésique de centre x_0 et de rayon r_k, on a $k^{-\frac{d}{2}} e_k(t,x) \to e_\infty(t,x)$ pour tout $t \in]0,k^\varepsilon[$ dès que $\varepsilon < \eta$.

La démonstration de ce théorème repose sur deux ingrédients (tous deux inspirés de l'article fondamental [McK-S] de Mc Kean et Singer) :

- Un «principe de localisation» pour e_k qui nous assure que l'équivalent n'est pas altéré en un point x_0 si l'on remplace $\Box_k$ par le même opérateur avec conditions de

Dirichlet au bord d'une boule centrée en x_0 dont le rayon ne tend pas trop vite vers 0. (cf. conditions sur r_k ci-dessus).

- Un développement en série entière explicite de $t \mapsto e_k(t, x_0)$ à partir du noyau de la chaleur associé au cas où B et V sont constants et dont le contrôle se réduit à celui des dérivées d'ordre inférieur à deux des champs B et V.

La condition plus précise qui apparaît dans l'énoncé du théorème 1.1 provient simplement d'une lecture attentive de [B1] : le principe de localisation minore l'ordre de grandeur des rayons r_k des boules utilisées à la première étape tandis que les estimées C^∞ sur $\Box_k$ le majorent (d'où l'encadrement portant sur η); si l'on connaît précisément l'ordre de r_k, il est facile de contrôler l'uniformité par rapport au temps. Nous allons maintenant aborder quelques applications géométriques de ce théorème.

1.1. Théorie spectrale de $\Box_k$

Notons $\mathcal{H}(M, E(k))$ le noyau de l'opérateur $\Box_k$. La formule $(*)$ implique trivialement en tenant compte du théorème 1.1

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}(M, E(k)) &\leq \int_M e_k(t, x)\, dx \text{ pour tout } t > 0 \\ &\leq C(t) k^{\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

En faisant tendre t vers l'infini dans la deuxième inégalité, on récupère une constante C optimale. Cette observation est à la base de l'obtention par Bismut des inégalités de Demailly [De] qui donnent en particulier un ordre de grandeur pour la multiplicité de la valeur propre nulle de $\Box_k$. Mais lorsque cette constante est nulle, on peut seulement conclure $\dim \mathcal{H}(M, E(k)) = o(k^{\frac{d}{2}})$. Le contrôle de l'uniformité par rapport à t permet dans certains cas d'améliorer radicalement ces estimations puisqu'il est possible d'obtenir l'annulation de $\mathcal{H}(M, E(k))$. En effet, du théorème 1.1 on déduit

$$e_k(t, x) \leq C k^{\frac{d}{2}} e_\infty(t, x) \text{ si } t \leq k^\epsilon$$

ce qui implique

$$\dim \mathcal{H}(M, E(k)) \leq C k^{\frac{d}{2}} \int_M e_\infty(k^\epsilon, x)\, dx \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Il suffit par conséquent que $\limsup k^{\frac{d}{2}} \int_M e_\infty(k^\epsilon, x)\, dx < C^{-1}$ pour conclure à l'annulation des espaces $\mathcal{H}(M, E(k))$ à partir d'une certaine valeur de k. En particulier, il suffit que la suite de fonctions $k^{\frac{d}{2}} e_\infty(k^\epsilon, x)$ converge vers 0 en convergence dominée pour obtenir cette annulation. Cette remarque conduit au

THÉORÈME 1.2. — *Supposons qu'il existe une fonction continue sur M γ_0, telle que l'on ait pour tout $u \in C^\infty(M, E(k))$ $< (V + (\sum B_j) \mathrm{Id}_{E(k)})u, u > \geq \gamma_0 \|u\|^2$ en tout point de M, vérifiant $\gamma_0 > 0$ presque partout et*

$$\int_M \gamma_0^{-\lambda} < +\infty$$

pour un $\lambda > 3d$. Alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(M, E(k)) = 0$ dès que $k \geq k_0$.

Démonstration. — Le point de départ de la démonstration est l'inégalité suivante entre fonctions sur $\mathbb{R}^+$:

$$\frac{x}{\operatorname{sh} x} \leq \mathrm{e}^{-x}(x+1).$$

qui implique

$$e_\infty(t,x) \leq C\mathrm{e}^{-t\gamma_0} \prod_{j=1}^{\frac{d}{2}} \left(\frac{1}{t} + B_j\right)$$

en tenant compte du fait que la condition du théorème 1.2 implique que toutes les valeurs propres de V au point x sont supérieures à $\gamma_0 - \sum B_j$. Maintenant, le théorème 1.1 implique qu'il existe une constante C telle que

$$e_k(k^\varepsilon, x) \leq C k^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-k^\varepsilon \gamma_0}.$$

On choisit $\varepsilon = \frac{d}{2\lambda} < \frac{1}{6}$ et on utilise le fait que la fonction $x^\lambda \mathrm{e}^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ pour conclure

$$e_k(k^\varepsilon, x) \leq C\gamma_0^{-\lambda}.$$

L'hypothèse que nous avons faite sur γ_0 permet alors d'affirmer que la suite formée par les fonctions $e_k(k^\varepsilon, x)$ converge presque partout vers 0 sur M en convergence dominée. ∎

Évidemment, une version effective de ce théorème serait infiniment plus utile. Il est cependant remarquable qu'il aboutit à un résultat d'annulation dans un cas où la méthode de Bochner classique ne peut s'appliquer, le tenseur V n'étant pas défini positif. En fait, on peut exploiter la positivité héritée du champ magnétique tant qu'elle contrôle les valeurs propres négatives du champ électrique. Dans le cas complexe, les tenseurs B et V proviennent tous deux de la courbure de L, leur interaction peut être analysée un petit peu plus finement, ce qui m'a permis de généraliser certains théorèmes de Kodaira (cf. [B3]).

1.2. Minoration de la première valeur propre de $\Box_k$

Sous l'hypothèse du théorème 1.2, on sait donc que la plus petite valeur propre du laplacien $\Box_k$ ne s'annule pas pour k grand. Il n'est cependant pas évident que la limite inférieure de cette valeur propre soit non nulle lorsque $k \to +\infty$. Il est classique de déduire une minoration de la première valeur propre d'un opérateur à partir d'une majoration de la trace du semi-groupe associé. C'est ce que nous obtenons si nous renforçons un peu les hypothèses :

THÉORÈME 1.3. — *S'il existe $m > 0$ tel $\gamma_0 \geq m$ sur M, alors, la première valeur propre μ_1^k de $\Box_k$ a une limite inférieure supérieure à m lorsque $k \to +\infty$.*

Démonstration. — Ce théorème est une conséquence immédiate de la formule $(*)$ car elle implique

$$\mathrm{e}^{-\mu_1^k t} \leq \sum_j \mathrm{e}^{-\mu_j^k t} = \int_M e_k(t,x),$$

ce qui donne

$$\mu_1^k \geq -k^{-\varepsilon} \log \int_M e^{-k^\varepsilon \gamma_0} - o(1) = m - o(1)$$

d'après les estimations ci-dessus. ■

Il est à signaler que l'on peut également obtenir une minoration du type $\mu_1^k \geq Ck^\alpha$ ($\alpha < 0$) sous des hypothèses analogues à celles du théorème 1.2, $|\alpha|$ étant contrôlé par l'ordre d'annulation de γ_0 (cf. [B3]).

2. Quelques résultats dans le cas complexe

Avec les outils présentés plus haut, on peut obtenir des renseignements assez fins sur les espaces de sections $\Box_k$-harmoniques. Dans le cas complexe (M variété analytique complexe de dimension $n = \frac{d}{2}$ et L fibré holomorphe), ces résultats requièrent « de la positivité » pour le fibré L, ce qui signifie en particulier qu'il aura beaucoup de sections holomorphes. Ce qui est à ma connaissance particulier à la situation complexe, c'est que le laplacien antiholomorphe Δ_k'' agissant sur les formes de type (p, q) peut être interprété en tout degré comme un opérateur $\Box_k$ agissant sur les sections de $\bigwedge^{p,q} T^*M \otimes E(k)$. Les théorèmes des sections précédentes peuvent par conséquent contrôler simultanément les spectres de Δ_k'' en plusieurs degrés (donc, par exemple l'indice de $\bar\partial + \bar\partial^*$). Nous débutons par un exemple d'application de ce phénomène.

2.1. Fonction de distorsion

DÉFINITION 2.1. — *Si $(s_1, \ldots, s_{N_k})$ est une base orthonormée de l'espace $\mathcal{H}(M, E(k))$ pour une norme L^2, on appelle* fonction de distorsion *du fibré $E(k)$ la fonction C^∞ sur M à valeurs positives*

$$b_k(x) = \sum_{j=1}^{N_k} |s_j(x)|^2.$$

Cette fonction contient de nombreuses informations sur les sections harmoniques de $E(k)$; elle permet par exemple de comparer la norme L^2 à la norme sup (ces deux normes sont bien sûr équivalentes sur $\mathcal{H}(M, E(k))$ quoiqu'il soit en général impossible de majorer une norme sup par une intégrale).

THÉORÈME 2.1. — *Supposons que L est positif sur M, i.e. $\omega = \frac{i}{2\pi} c(L)$ définit une métrique kählérienne sur M. Munissons M de l'élément de volume $dx = \frac{\omega^n}{n!}$, et $C^\infty(M, E(k))$ de la métrique L^2 induite, alors on a l'équivalent suivant :*

$$b_k(x) \sim rk^n$$

uniformément sur M.

On a évidemment $e_k(t,x) = b_k(x) + \rho_k(t,x)$ où ρ_k est la partie du noyau de la chaleur qui provient des valeurs propres non nulles de $\square_k$. En utilisant le fait que $\bar\partial$ envoie injectivement la partie non nulle du spectre de Δ_k'' en degré 0 dans le spectre de Δ_k'' en degré 1 et l'équivalent du théorème 1.1 (et une connaissance explicite de $B = c(L)$ et du tenseur V qui est dans ce cas la multiplication par $p + q - n$ sur les (p,q)-formes, donc de positivité croissante avec le degré) il est facile de voir que la fonction $\rho_k(k^\epsilon, x)$ tend uniformément vers 0 sur M ; le théorème ci-dessus suit (cf. [B1]). *A priori* ce type de résultat devrait s'étendre à d'autres situations couvertes par le théorème 1.1 pourvu que l'on ait un contrôle suffisant de la première valeur propre non nulle de $\square_k$. On en trouvera quelques applications dans [B2]. En voici une (construction de «sections pics») :

THÉORÈME 2.2. — *Pour $x_0 \in M$ donné, il existe pour tout k un élément σ_k de $\mathcal{H}(M, E(k))$ de norme L^2 unité telle que, si B_k est une boule géodésique de centre x_0 et de rayon $\sqrt{k}\log k$ on ait*

$$\int_{M\setminus B_k} |\sigma_k|^2\,dx = o(1).$$

De plus $\sup_{M\setminus B_k} |\sigma_k|^2 = o(k^n)$.

Démonstration. — On suppose E trivial de rang 1. Comme $\omega = \frac{i}{2\pi}c(L)$ il existe un repère local holomorphe ℓ et des coordonnées $(z_1,\dots,z_n)$ au voisinages de x_0 dans lesquelles on a

$$\begin{aligned} |\ell(z)|^2 &= 1 - 2\pi|z|^2 + O(|z|^4) \\ \omega_k &= i\partial\bar\partial|z|^2 + O(|z|^2) \end{aligned}$$

Choisissons pour σ_k un élément de norme 1 de l'orthogonal de l'espace des sections de L^k qui s'annulent en x_0, on a alors $|\sigma_k(x_0)|^2 = b_k(x_0) = k^n + o(k^n)$. Si l'on pose $\sigma_k = f_k\ell^k$ au voisinage de x_0, on aura dans les coordonnées (z_j) :

$$|\sigma_k(x_0)|^2 = |f_k(0)|^2 \le \frac{1}{\mathrm{Vol}(S(0,t))}\int_{S(o,t)} |f_k(z)|^2 dV_{S_t}$$

(où $S(0,t)$ est la sphère euclidienne de rayon t) par l'inégalité de la moyenne dans $\mathbb{C}^n$ appliquée à la fonction holomorphe f_k. En multipliant cette inégalité par $(1 - 2\pi t^2)^k$ et en intégrant sur $t \in]0, r_k[$, on obtient :

$$\begin{aligned} |f_k(0)|^2 b_n \int_0^{r_k} t^{2n-1}(1-2\pi t^2)^k\,dt &\le \int_0^{r_k} dt \int_{S(0,t)} |f_k(z)|^2(1-2\pi|z|^2)^k dV_{S_t} \\ &= \int_{B(0,r_k)} |f_k(z)|^2(1-2\pi|z|^2)^k d\lambda. \end{aligned}$$

où $b_n = \mathrm{Vol}(B(0,1))$ est le volume de boule unité et $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{C}^n$, ce qui implique $d\lambda_z = 2^{-n}dx + O(|z|^2)$. On a aussi $|f_k(z)|^2(1-2\pi|z|^2)^k = |\sigma_k(z)|^2 +$

$O(|z|^2)$. Un calcul simple montre que l'intégrale $\int_0^{r_k} t^{2n-1}(1-2\pi t^2)^k\,dt$ est équivalente à $\frac{(n-1)!k!}{2^{n+1}\pi^n(n+k)!}$ dès que $r_k \geq k^{\frac{1}{2}}\log k$. On déduit donc de la précédente majoration

$$k^n - o(k^n) \leq |\sigma_k(x_0)|^2 \leq k^n \int_{B(0,r_k)} |\sigma_k(z)|^2 \frac{\omega^n}{n!} + o(k^n)$$

Cette estimation achève la démonstration de la première assertion du théorème. Une fois cette assertion connue, on sait que l'intégrale de $|\sigma_k(z)|^2$ sur toute boule ne contenant pas x_0 tend vers 0. La seconde assertion en découle si l'on fait usage à nouveau de la deuxième majoration ci-dessus en un point différent de x_0. ∎

2.2. Une asymptotique spectrale

Pour finir, je cite le théorème suivant, dont le point *(iii)* est une version légèrement généralisée du théorème 3.7 de [A-B] démontré en commun avec A. Abbes. Les outils résumés ici, et développés dans les [Bi] permettent sans difficulté d'obtenir cet énoncé un peu plus général en suivant la démonstration originale (section 3 de [A-B]). Dans cette section X est une variété complexe projective lisse de dimension $n \geq 1$ et L un fibré en droites hermitien à courbure positive $ic(L)$, on suppose également donné un fibré vectoriel hermitien quelconque E de rang r sur X. On munit X d'une métrique ω (non nécessairement kählérienne) et on pose $dV = \omega^n/n!$, on définit aussi sur X l'élément de volume $dx = r(\frac{i}{2\pi}c(L))^n/n!$. Étant donnée une fonction continue positive de log intégrable $f : X \to \mathbb{R}^+$, on définit sur $H^0(X, E\otimes L^{\otimes k})$ la forme quadratique (L^2 pondérée) q_k par $q_k(\sigma) = \int_X f(x)|\sigma(x)|^2 dV$. On note $\lambda_0^k, \ldots, \lambda_{N_k}^k$ les valeurs propres de la forme q_k par rapport au produit scalaire L^2, et $\operatorname{tr} q_k$ (resp. $\det q_k$) leur somme (resp. leur produit) on a alors le résultat suivant qui décrit le comportement asymptotique des λ_j^k lorsque $k \to +\infty$:

THÉORÈME 2.3. — *Lorsque $k \to +\infty$*

(i) $\lambda_0^k \to \inf_X f$ *et* $\lambda_{N_k}^k \to \sup_X f$;

(ii) $\operatorname{tr} q_k = \sum_{j=0}^{N_k} \lambda_j^k \sim k^n \int_X f\,dx$;

(iii) $\log\det q_k = \sum_{j=0}^{N_k} \log \lambda_j^k \sim k^n \int_X \log f\,dx$.

Remarque. — Dans [A-B] nous avons traité le cas où $f = |s|^2$ est le carré de la norme ponctuelle d'une section globale de L, $\omega = \frac{i}{2\pi}c(L)$, et E est trivial de rang 1. Le résultat plus général que je présente ici permet en particulier de donner un sens aux estimations à l'infini de [A-B] même lorsque L n'a pas de section en prenant pour f la racine k-ième de la norme d'une section de L^k. L'introduction du fibré E pourrait avoir une importance pour les applications non arithmétiques du théorème. Notons enfin que les résultats de [B 2] permettent d'étendre le théorème aux (p,q)-formes harmoniques à valeur dans $E \otimes L^k$ si $ic(L)$ est d'indice constant q. Je dois également signaler qu'un problème tout à fait analogue est traité dans le livre [B-G], pp. 107 et *sq*. Le théorème 13.13 que l'on peut y lire signifie (dans le cas E trivial de rang 1), avec les notations du théorème 2.4 : $\sum_j F(\lambda_j^k) \sim \gamma_n k^n \int_X F(f)dx$ pour toute fonction F continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (la multiplication par f étant considérée comme un opérateur de Toeplitz d'ordre 0). On peut donc considérer les points (i) et (ii) de notre théorème soit comme une conséquence de ce résultat (si $r = 1$), soit comme une méthode relativement simple de calcul de la constante γ_n. Par contre, le point (iii) ne semble pas accessible à la méthode de [B-G] qui provient déjà de la densité des fonctions C^∞ parmi les fonctions continues, il s'agit plutôt d'une extension du théorème 13.13 de [B-G] à la fonction log. Je donne ci-dessous les idées qui relient ces énoncés à ce qui a été fait précédemment.

Démonstration. — La première remarque à faire est que le théorème 2.3 implique en particulier que la suite des fonctions $x \mapsto |\sigma_k(x)|^2$ converge vers la masse de Dirac au point x_0 («les normes des sections pics ressemblent à des gaussiennes»). Par conséquent, $q_k(\sigma_k) \to f(x_0)$. Cette observation implique le point (i) en choisissant pour x_0 un point où f atteint son minimum (resp. son maximum). Le point (ii) se déduit sans efforts d'une version du théorème 2.2 qui s'énonce $b_k dV \sim k^n dx$ dans notre situation puisque l'on a $\operatorname{tr} q_k = \sum_j \int_X f\,|s_j|^2 dV = \int_X f\, b_k dV$ (les s_j sont ici comme dans la définition 2.1). La limite inférieure du point (iii) se ramène aussi à ce théorème : si la famille (s_j) est une base L^2-orthonormée de $\mathcal{H}(M, E(k))$ qui diagonalise q_k, on a par définition $\lambda_j^k = q_k(s_j) = \int_X f\,|s_j|^2 dV$. Chaque (s_j) étant de norme 1 pour le produit scalaire L^2, l'élément de volume $|s_j|^2 dV$ est de volume total 1 sur X. On a par conséquent pour chaque $j = 0, \ldots, N_k$

$$\log \int_X f\,|s_j|^2 dV \geq \int_X \log f\,|s_j|^2 dV.$$

En sommant ces inégalités sur j et en utilisant le fait que l'on peut calculer la fonction de distorsion b_k dans une base orthonormée quelconque (ici (s_j)), on obtient :

$$\sum_{j=0}^{N_k} \log \lambda_j^k \geq \int_X \log f\, b_k dV,$$

ce qui permet de conclure.

On comprend alors pourquoi il est problématique de démontrer la limite supérieure du point (iii) ! elle correspond au cas d'égalité dans l'inégalité de concavité du logarithme, mais une section holomorphe d'un fibré très positif est très loin d'être constante ! Il est cependant toujours possible d'approximer une telle section *localement* par une constante, et de «localiser» le raisonnement ci-dessus. C'est ce que nous avons fait dans [A-B].

Bibliographie

(voir [B2] et [De] pour des références plus complètes sur le sujet)

[A-B] A. ABBES ; TH. BOUCHE : *Sur le théorème de Hilbert-Samuel (arithmétique)*, prépublication, *voir* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **317** (1993), 589–591. (version détaillée soumise aux Ann. Inst. Fourier (Grenoble))

[B-G] L. BOUTET DE MONVEL ; V. GUILLEMIN : *The spectral theory of Toeplitz operators*, Princeton University Press and University of Tokyo Press. Princeton, New Jersey 1981.

[B1] TH. BOUCHE : *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), 117–130.

[B2] TH. BOUCHE : *Asymptotic results for hermitian line bundles over complex manifolds : the heat kernel approach*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 247, Grenoble , 13 p.

[B3] TH. BOUCHE : *Two vanishing theorems for holomorphic vector bundles of mixed sign*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 256, Grenoble , à paraître dans Math. Z. (1994), 8 p.

[CdV] Y. COLIN DE VERDIÈRE : *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques*, Comm. Math. Phys. **105** (1986), 327–335.

[De] J.-P. DEMAILLY : *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 189–229.

[McK-S] H. P. JR. MAC KEAN ; I. M. SINGER : *Curvature and the eigenvalues of the laplacian* J. Differential Geom. **1** (1967), 43–69.

Institut Fourier
Laboratoire associé au CNRS (URA 188)
Université de Grenoble I, B.P. 74
F-38402 St-Martin d'Hères Cedex
e-mail : bouche@fourier.grenet.fr

(15 décembre 1994)