Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Ahmed Intissar
Mohamed Vall Ould Moustapha

Solution explicite de l'équation des ondes dans un espace symétrique de type non compact de rang 1

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 12 (1993-1994), p. 25-28
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1993-1994__12__25_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1993–1994 (25–28)

SOLUTION EXPLICITE DE L'ÉQUATION DES ONDES DANS UN ESPACE SYMÉTRIQUE DE TYPE NON COMPACT DE RANG 1

Ahmed INTISSAR & Mohamed Vall OULD MOUSTAPHA[(1)]

RÉSUMÉ . — Dans cette note nous obtenons une solution explicite de l'équation des ondes dans l'espace hyperbolique.

ABSTRACT . — The aim of this note is to give an explicite solution for the wave equation in non compact type symmetric space of rank 1.

Lax et Phillips dans [1] ont obtenu une solution explicite de l'équation des ondes dans l'espace hyperbolique réel de dimension n. Ici on donne la solution dans le cas général hyperbolique $(\mathbb{K}H^n, ds)$ où $\mathbb{K}$ est l'un des corps classiques $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou $\mathbb{C}a$.

Plus explicitement on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} U(t,z) = L_n^d U(t,z) & (0.1) \\ U(0,z) = 0\,;\, \dfrac{\partial U}{\partial t}(0,z) = f(z);\, f \in C_0^\infty(\mathbb{K}H^n) & (0.2) \end{cases}$$

où L_n^d est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la variété riemannienne $(\mathbb{K}H^n, ds)$ donné en coordonnées géodésiques polaires par :

$$L_n^d = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left[(dn-1)\coth(r) + (d-1)\,\mathrm{th}(r)\right]\frac{\partial}{\partial r} + \sigma^2 + \Lambda(r)$$

avec $\sigma = \frac{(d(n+1)-2}{2}$; $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$; et $\Lambda(r)$ un opérateur différentiel du second ordre sur la sphère $S^{dn-1}(r)$ de rayon r.

La partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami L_n^d que l'on continue encore à noter L_n^d est donc

$$L_n^d = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left[(dn-1)\coth(r) + (d-1)\,\mathrm{th}(r)\right]\frac{\partial}{\partial r} + \sigma^2.$$

---

(1) M. Laurent Guillopé a indiqué au second auteur lors de son séjour à l'Institut Fourier en Janvier-Février 1994 un article Preprint de M. U. Bunke, M. Olbrich, A. Juhl, intitulé : *The wave kernel for the laplacian on locally symmetric space of rank one, theta function, trace formulas and the Selberg zeta function* - SFB 288 Preprint n°85 - Berlin, octobre 1993.
Classification A.M.S. : 58G25–58G30.

Notre résultat est le suivant :

THÉORÈME. — *Le problème (I) admet la solution unique donnée par :*

$$U(t,z) = c_\sigma \left(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\partial t}\right)^{[\sigma]-d+1} \left(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)\partial t}\right)^{[\frac{d-1}{2}]}$$
$$\int_{\mathbf{K}H^n} (\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{ch}^2 r)^{\frac{1-d}{2}+[\frac{d}{2}]} (\mathrm{ch}^2(t/2) - \mathrm{ch}^2(r/2))^{[\sigma]-\sigma} 1_+(r-t) f(z') d\mu(z')$$

où :

$$r = d(z,z')\,;\, c_\sigma = (2\pi)^{[\sigma - \frac{d}{2}+1]};\, 1_+(r-t) = \begin{cases} 1 & r < t \\ \frac{1}{2} & r = t \\ 0 & r > t \end{cases}$$

et $[m]$ est la partie entière de m.

Preuve succincte.

• Pour $d = 1$; $n = 1$ l'espace hyperbolique réel de dimension 1 $(\mathbf{R}H^1, ds)$ est équivalent à la droite numérique $\mathbf{R}$ munie de la métrique euclidienne et la solution du problème (I) dans ce cas est classique.

• Pour $d = 1$; $n \geq 2$ la fonction $U(t,z)$ coïncide avec celle obtenue par Lax et Phillips dans [1].

• Pour les cas $d \neq 1$ on utilise essentiellement le lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit $\Phi \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$, fixons $z' \in \mathbf{K}H^n$, posons :*

$$f(z) = \Phi\big(y(z,z')\big)$$

où $y = \mathrm{ch}^2 r$; $r = d(z,z')$, alors on a :

(i) $L_n^d f = \ell_n^d \Phi$ *avec :*

$$\ell_n^d \Phi(y) = 4y(y-1)\frac{\partial^2 \Phi(y)}{\partial y^2} + 4\left[(\sigma+1)y - \frac{d}{2}\right]\frac{\partial \Phi(y)}{\partial y} + \sigma^2 \Phi(y).$$

Posons :

$$A_y^d = y^{1-\frac{d}{2}} \frac{\partial}{\partial y} y^{\frac{d}{2}} \frac{\partial}{\partial y},$$

alors on a :

(ii) $[\ell_n^d, A_y^d] = -8y\frac{\partial}{\partial y}A_y^d - 4(\sigma+1)A_y^d$

(iii) $A_y^d y\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial y}A_y^d = A_y^d$

(iv) $A_y^d(x-y)^{(\frac{d-1}{2})} = -\left(x^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 (x-y)^{-\frac{d-1}{2}}.$

La preuve de ce lemme est laissée au lecteur.

1. Cas hyperbolique complexe $\mathbb{C}H^n$

PROPOSITION 1.1. — *Dans l'espace hyperbolique complexe* $\mathbb{C}H^n$, $n \geq 1$, *une solution de l'équation des ondes* (0.1) *est donnée par :*

$$W_n^2(t,z,z') = \Big(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\partial t}\Big)^{n-1}(\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{ch}^2 r)^{-\frac{1}{2}} \text{ avec } r = d(z,z').$$

Preuve. — Cette proposition se démontre par récurrence sur n. Pour $n = 1$ et $n = 2$ une simple vérification suffit. D'autre par, d'après le lemme 1 *(iv)* on a :

$$W_n^2(t,z,z') = c_n V_n^2(x,y)$$

où

$$V_n^2(x,y) = \begin{cases} (A_y^2)^{\frac{n-1}{2}} V_1^2(x,y) \\ (A_y^2)^{\frac{n-2}{2}} V_2^2(x,y) \end{cases}$$

avec

$$V_1^2(x,y) = (x-y)^{-\frac{1}{2}};\, V_2^2(x,y) = x^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x}V_1^2;\, x = \mathrm{ch}^2 t;\, y = \mathrm{ch}^2 r.$$

$$\begin{aligned} L_{n+2}^2 W_{n+2}^2(t,z,z') = \ell_{n+2}^2 V_{n+2}^2 &= \ell_n^2 A_y^2 V_n^2 + 8y\frac{\partial}{\partial y}A_y^2 V_n^2 + 4(n+1)A_y^2 V_n^2 \\ &= [\ell_n^2, A_y^2]V_n^2 + A_y^2\ell_n^2 V_n^2 + 8y\frac{\partial}{\partial y}A_y^2 V_n^2 + 4(n+1)A_y^2 V_n^2. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1 *(ii)* on a :

$$L_{n+2}^2 W_{n+2}^2(t,z,z') = A_y^2\ell_n^2 V_n^2 = A_y^2\partial_t^2 V_n^2 = \partial_t^2 A_y^2 V_n^2 = \partial_t^2 V_{n+2}^2 = \partial_t^2 W_{n+2}^2(t,z,z'). \ \blacksquare$$

THÉORÈME 1.1. — *Dans l'espace hyperbolique complexe* $\mathbb{C}H^n$; $n \geq 1$ *le problème (I) admet la solution unique donnée par :*

$$U(t,z) = (2\pi)^{-n}\Big(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\partial t}\Big)^{n-1}\int_{d(z,z')<t}\frac{f(z')}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{ch}^2 r}}d\mu(z') \text{ avec } r = d(z,z').$$

Preuve. — D'après la proposition 1.1, $U(t,z)$ vérifie bien l'équation des ondes (0.1). Pour voir les conditions aux limites (0.2) une simple vérification suffit :

2. Cas hyperbolique quaternionien $\mathbb{H}H^n$, $n \geq 1$

PROPOSITION 2.1. — *Dans l'espace hyperbolique quaternionien* $\mathbb{H}H^n$ *une solution de l'équation des ondes* (0.1) *est donnée par :*

$$W_n^4(t,z,z') = \Big(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\partial t}\Big)^{2n-2}\Big(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)\partial t}\Big)(\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{ch}^2 r)^{-\frac{1}{2}} \text{ avec } r = d(z,z').$$

THÉORÈME 2.1. — *Dans l'espace hyperbolique* $\mathbb{H}H^n$ *le problème* (I) *admet la solution unique données par :*

$$U(t,z) =$$
$$(2\pi)^{-2n}\Big(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\partial t}\Big)^{2n-2}\Big(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)\partial t}\Big)\int_{\mathbb{H}H^n}\frac{f(z')}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{ch}^2 r}}d\mu(z') \text{ avec } r=d(z,z').$$

3. Cas de l'espace hyperbolique octonien

PROPOSITION 3.1. — *Dans l'espace hyperbolique octonien* $\mathbb{C}aH^n$ *une solution de l'équation des ondes* (0.1) *est donnée par :*

$$W_2^8(t,z,z') = \Big(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\partial t}\Big)^{4n-4}\Big(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)\partial t}\Big)^{3}(\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{ch}^2 r)^{\frac{1}{2}} \text{ avec } r=d(z,z').$$

THÉORÈME 3.1. — *Dans l'espace hyperbolique* $\mathbb{C}aH^n$ *le problème* (I) *admet la solution unique données par :*

$$U(t,z) = (2\pi)^{-4n}\Big(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\partial t}\Big)^{4n-4}\Big(\frac{\partial}{\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)\partial t}\Big)^{3}\int_{d(z,z')<t}\frac{f(z')}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{ch}^2 r}}d\mu(z').$$

Pour voir les théorèmes 2.1 et 3.1 on utilise le même raisonnement utilisé pour démontrer le théorème 1.1. En regroupant les trois théorèmes et le résultat de Lax et Phillips on obtient le résultat du théorème 1.

Remarque. — Dans le cas de l'espace hyperbolique sur les nombres de Cayley (*i.e.* $d=8$) on a $n=1$ ou 2 avec $\mathbb{C}aH^1 \simeq \mathbb{H}H^2$.

Bibliographie

[1] LAX P.D. & PHILLIPS R.S. — *The asymptotic distribution of lattice points in euclidean and non euclidean spaces*, J. Funct. Anal. 46 (1982), 280–350.

A. INTISSAR
FACULTÉ DES SCIENCES DE RABAT
B.P. 1014
RABAT
(Maroc)

M.V. OULD MOUSTAPHA
UNIVERSITÉ DE NOUAKCHOTT
B.P. 798
NOUAKCHOTT
(Mauritanie)
Fax : 2222 587-09
Tél : 2222 587-10