YVES CARRIÈRE
LUC ROZOY

# Complétude des deux-tores lorentziens

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 12 (1993-1994), p. 19-24
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1993-1994__12__19_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1993–1994 (19–24)

# COMPLÉTUDE DES DEUX-TORES LORENTZIENS

*Yves CARRIÈRE, Luc ROZOY*

En géométrie riemannienne, la métrique définit une distance et la topologie introduite par cette distance est la même que la topologie sous-jacente de la variété différentiable. En particulier, si la topologie sous-jacente est complète ( et donc si toute suite de Cauchy est convergente au sens de la distance introduite par la métrique) alors les géodésiques sont complètes en le sens suivant : l'abscisse curviligne varie de $-\infty$ à $+\infty$. En géométrie lorentzienne, la signature est $(-+\ldots+)$ au lieu de $(++\ldots+)$ et la pseudo-distance n'est plus positive ou nulle. Les géodésiques conservent un sens : au lieu de minimiser la distance entre deux points rapprochés, elles rendent stationnaire la pseudo-distance entre ces deux points (et le calcul des variations n'est pas modifié et conduit aux équations de Lagrange dans les deux cas). Dans le cas lorentzien, l'abscisse curviligne le long d'une géodésique peut être nulle. On la remplace alors par le paramètre affine $\lambda$ intervenant dans les équations de Lagrange. (Cela redonne un multiple de l'abscisse curviligne dans le cas riemannien). Alors il se peut que la complétude de la topologie sous-jacente de la variété ne conduise pas à la complétude des géodésiques. Le paramètre affine $\lambda$ peut être limité à un intervalle maximal du type $]a, b[$ avec $a$ et/ou $b$ finis. C'est ce phénomène que nous voulons étudier ici.

Mentionnons aussi une autre différence dans le cas compact : il existe au moins une géodésique périodique dans chaque classe d'homotopie dans le cas riemannien obtenue en prenant un minimum des longueurs des lacets d'une classe. La pseudo-métrique n'étant pas positive, ce résultat disparaît pour une situation lorentzienne et même dans les cas les plus simples rien n'est connu à ce sujet.

On ne connaît pas grand chose non plus quant à la complétude des géodésiques lorentziennes sauf en imposant des conditions draconiennes sur la courbure ou comme ici en dimension deux. C'est le cas si la courbure est nulle [C] : les géodésiques sont toutes complètes. Si la variété est localement symétrique et si les géodésiques dites de

---

*Classification A.M.S.* : 53C50.

lumière sont complètes (c'est-à-dire celles dont la direction de leur tangente annule la forme de Lorentz) alors les autres géodésiques le sont aussi [L]. Ici nous traiterons le cas de la dimension deux.

En relativité générale, un modèle a un sens physique si les géodésiques sont complètes. En effet, le paramètre affine le long d'une géodésique du genre temps représente le temps propre d'une particule non chargée qui se déplace sous l'action de la gravitation et ce temps propre doit être infini (sinon la particule aboutit sur une singularité rendant infini certaines courbures mais nous ne l'envisageons pas). La relativité générale est tellement difficile à utiliser qu'une étude claire dans le cas lorentzien de dimension deux est déjà précieuse : c'est la première situation que nous connaissions où l'on voit les limites entre la complétude et la non complétude.

**Des particularités de la dimension deux.**

Nous choisissons donc la dimension deux et en contre partie laissons totalement libre la courbure de la géométrie.

En dimension deux l'existence de coordonnées très spéciales permet d'obtenir des résultats. Ainsi notre démarche ne sera pas généralisable facilement en dimension supérieure. Il est important de bien comprendre les différences entre le riemannien et le lorentzien vis à vis des systèmes particuliers de coordonnées qui nous intéressent.

Dans le cas lorentzien l'existence de directions isotropes définies globalement sur la variété imposent dans le cas compact que la caractéristique d'Euler de la variété soit nulle. Rien de tel n'existe dans le cas riemannien. *A partir de maintenant nous nous plaçons sur le tore de dimension deux.* Un tore riemannien est toujours *globalement* conformément plat. En effet si la fonction réelle $\varphi$ vérifie

$$\Delta_g \varphi = G$$

où $G$ est la courbure de Gauss associée à la métrique $g$ et $\Delta_g$ son Laplacien alors la métrique $e^{2\varphi} g$ est plate (un calcul en coordonnées le montre en utilisant la transformation de la courbure sous l'action d'une multiplication conforme de la métrique). Comme sur un tore riemannien le Laplacien est résoluble et que sur un tore plat il existe des coordonnées globales $x$ et $y$ associées à la métrique $dx^2 + dy^2$ de $\mathbf{R}^2$ quotientée par deux translations, nous en déduisons que l'on peut représenter globalement la métrique sous la forme $ds^2 = f(x, y)(dx^2 + dy^2)$. De telles coordonnées locales $(x, y)$ s'appellent coordonnées isothermes, elles datent de Gauss, et une transformation passant de coordonnées isothermes à d'autres coordonnées isothermes s'expriment à l'aide d'une fonction holomorphe (si la transformation respecte l'orientation). C'est la structure complexe qui se trouve ainsi définie, et un tore riemannien est donc toujours globalement conformément plat.

Rien de tel n'existe dans le cas lorentzien et nous devons comprendre pourquoi. L'analogue des coordonnées isothermes riemanniennes serait des coordonnées telles que la métrique s'exprime sous la forme $ds^2 = f(x, y)(dx^2 - dy^2)$ ou sous la forme $ds^2 = f(x, y)dxdy$. L'obtention *locale* de telles coordonnées est très facile :

il suffit de prendre les courbes intégrales des directions isotropes (celles qui annulent la forme quadratique de Lorentz) comme courbes coordonnées pour obtenir un tel système dont la classe de différentiabilité est la même que celle de la pseudo-métrique initiale. Mais il n'y a aucune raison pour que ces coordonnées puissent être définies globalement. Cette remarque est centrale pour la suite. Exprimé autrement (peut-être à un quadruple revêtement d'orientation près) *la donnée d'une structure lorentzienne sur le tore de dimension deux définit deux feuilletages transverses et orientés que nous appellerons toujours $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$*. Notre étude cherche à relier les propriétés de ces feuilletages à la complétude géodésique de la structure lorentzienne. En particulier si la structure lorentzienne est globalement conformément plate chacun de ces feuilletages est conjugué (globalement) à un feuilletage linéaire du tore (c'est-à-dire un feuilletage par une famille de droites parallèles dans le modèle du tore où $\mathbb{R}^2$ est quotienté par $\mathbb{Z}^2$) et comme nous utiliserons toujours des pseudo-métriques de classe au moins $\mathcal{C}^2$, cette conjugaison sera aussi $\mathcal{C}^2$. Dans ce cas nous obtiendrons la complétude géodésique.

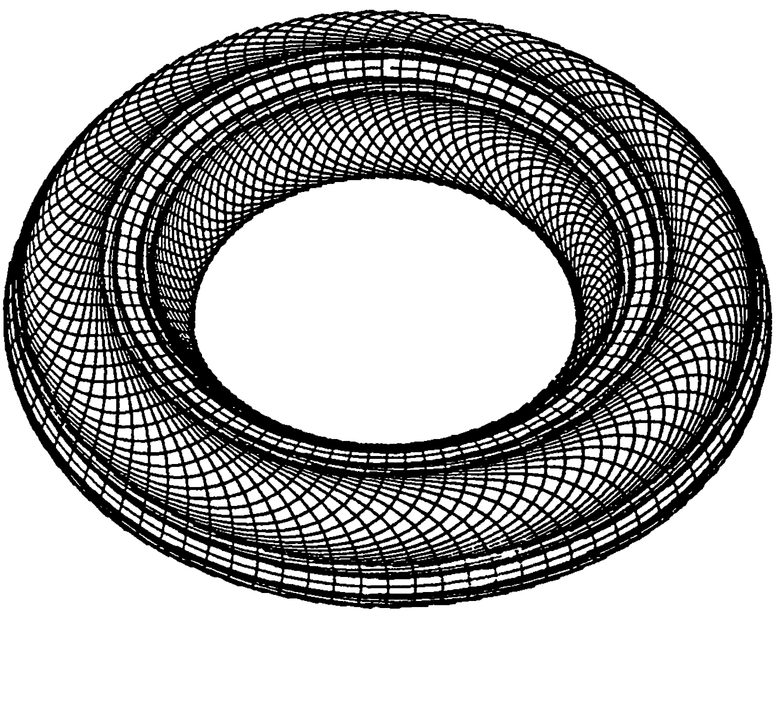
En général $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ne sont pas conjugués à des feuilletages linéaires. Un exemple de cette situation est donné par

**Le tore de Clifton-Pohl.**

Soit

$$g = \frac{1}{x^2 + y^2} dxdy$$

définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Cette métrique est invariante par homothéties. Choisissons par exemple l'homothétie de rapport 2 et quotientons $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par cette homothétie. Les couronnes $r \in (2^k, 2^{k+1})$ pour $k$ dans $\mathbb{Z}$ sont identifiées. Nous obtenons le tore de Clifton-Pohl. Il a toutes ses géodésiques de lumières (dont 4 sont fermées) incomplètes. Les feuilletages de lumières sont deux feuilletages de Reeb transverses, nous avons tenté de les représenter dans le dessin suivant :



Dans cet exemple, il existe des géodésiques de lumière fermées attractives d'un côté (pour un des feuilletage $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{G}$) et les géodésiques attirées sont incomplètes. Ce phénomène est "générique" en le sens suivant :

LEMME. — *Si $\sigma_0$ est une géodésique de lumière fermée et attractive d'un côté, alors presque toute géodésique de lumière attirée par $\sigma_0$ est incomplète.*

*Démonstration.* — On peut voir le demi-voisinage de $\sigma_0$ attiré par $\sigma_0$ comme étant le domaine $D = \{0 < x, 0 \leq y \leq y_0\} \subset \mathbf{R}^2$ quotienté par l'action de

$$\gamma(x, y) = (x + 1, \varphi(y))$$

où $\varphi$ est une application vérifiant $\varphi(y) < y$ si $0 < y \leq y_0$ ; l'axe $Ox$ se projetant sur $\sigma_0$ et la métrique ayant dans $D$ pour expression :

$$g = f(x, y)dxdy$$

où $f > 0$ vérifie l'équation d'invariance

$$f(x, y) = (\varphi^k)'(y)f(x + k, \varphi^k(y)) \tag{1}$$

uniquement pour les $k \geq 0$ puisque seuls les itérés positifs de $\gamma$ sont définis.

Sous la forme $g = f(x, y)dxdy$ les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$f\frac{d^2x}{d\lambda^2} + \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{dx}{d\lambda})^2 = 0 \text{ et } f\frac{d^2y}{d\lambda^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{dy}{d\lambda})^2 = 0. \tag{$*$}$$

Les géodésiques de lumières attirées par $\sigma_0$ vérifient $\frac{dy}{d\lambda} = 0$. Avec $(*)$ nous obtenons : $f(x, y_0)\frac{dx}{d\lambda} = C^{te} \neq 0$.

L'incomplétude de la géodésique d'équation $y = y_0$, implique la convergence de la série :

$$\int_0^\infty f(\xi, y_0)d\xi = \sum_{k=0}^{\infty}(\varphi^k)'(y_0)\int_0^1 f(\xi, \varphi^k(y_0))d\xi$$

la deuxième expression étant obtenue grâce à un changement de variable et à l'équation d'invariance (1). Du fait que $f$ est encadrée par des constantes $> 0$ sur $[0, 1] \times \mathbf{S}^1$, ceci revient encore à la convergence des séries :

$$\psi(y_0) = \sum_{k=0}^{\infty}(\varphi^k)'(y_0) \tag{2}$$

or les itérés de $J = ]\varphi(y_0), y_0[$ par $\varphi$ sont disjoints, donc la série $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(\varphi^k(J))$ est convergente où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue. Comme elle s'obtient en intégrant $\psi$ sur $J$, la somme de la série (2) converge pour presque tout $y_0 \in J$. ■

D'après ce lemme, si une métrique lorentzienne sur le tore a toutes ses géodésiques de lumière complètes alors ses feuilletages de lumière n'ont pas de composantes de Reeb, ce qui d'après Kneser ([Kn] cf.[Gl]) implique qu'il possède une courbe fermée transverse coupant toutes les feuilles. En appliquant le théorème de Denjoy (cf.[H],[HH],[G] ou [MS]) au nouveau difféomorphisme introduit par une telle section, nous en déduisons que si les feuilletages de lumière d'un deux-tore lorentzien sont complets, alors ils sont conjugués de manière $\mathcal{C}^0$ à un feuilletage linéaire.

Nous renvoyons le lecteur ou la lectrice à l'article [CR] pour les démonstrations correspondantes.

Réciproquement si les feuilletages de lumière sont conjugués de manière $\mathcal{C}^1$ à un feuilletage linéaire, alors ils sont complets.

Si cette conjugaison est de classe $\mathcal{C}^2$ alors les autres géodésiques sont encore complètes.

Dans le cas général nous ne savons pas discuter de la complétude de toutes les géodésiques si la conjugaison de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ à des feuilletages linéaires est de classe inférieure à deux. Cependant dans le cas particulier où un des feuilletages, disons $\mathcal{G}$, est formé de cercles, $\mathcal{F}$ est alors obtenu par suspension d'un difféomorphisme du cercle $\varphi$ et les résultats de Poincaré, Denjoy, Hermann nous permettent de démontrer les deux résultats remarquables suivant :

Les géodésiques de lumière sont complètes si et seulement si $\varphi$ est $\mathcal{C}^0$ conjugué à une rotation.

Si $\varphi$ est $\mathcal{C}^1$ conjugué à une rotation alors toutes les géodésiques sont complètes.

# Bibliographie


[C] CARRIÈRE Y. — *Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines*, Invent. Math. **95** (1989), 615–628.

[CR] CARRIÈRE Y.,ROZOY L.. — *Complétude des métriques lorentziennes de $T^2$ et difféomorphismes du cercle*, Bol. Soc. Bras. Mat. **25** (1994), .

[Gl] GLUCK H. — *Dynamical behavior of geodesics fields*, Proceedings of the International conference at Northwestern, Lecture Notes in Mathematics 819, pp. 190-215, 1979.

[G] GODBILLON C. — *Dynamical systems on surfaces*, Universitext, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983.

[GL] GUEDIRI M., LAFONTAINE J. — *Sur la complétude des variétés pseudoriemanniennes*, A paraître au J. of Geom. and Physic, 1993.

[H] HERMAN M. — *Sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Pub. Math. I.H.E.S. **49** (1979), 5-234.

[HH] HECTOR G.,HIRSCH U. — *Introduction to the geometry of foliations, Part A*, Aspects of Mathematics, Vieweg, Braunschweig, 1981.

[Kn] KNESER H. — *Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen*, Math. Annalen **91** (1924), 135-154.

[L] LAFUENTE J. — *A geodesic completeness theorem for locally symmetric Lorentz manifolds*, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid **1** (1988), 101-110.

[MS] DE MELO W., VAN STRIEN S. — *One-dimensional dynamics*, Ergebnisse Math. 25, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993.

[O] O'NEILL B. — *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[RS2] ROMERO A., SÁNCHEZ M. — *New properties and examples of incomplete Lorentzian tori*, J. Math. Phys. **35** (1994), 1992-97.



Yves CARRIÈRE, Luc ROZOY
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)