Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

LUC ROZOY

Test théorique d'un axiome de la relativité générale

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 12 (1993-1994), p. 11-18
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1993-1994__12__11_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1993–1994 (11–18)

TEST THÉORIQUE D'UN AXIOME DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Luc ROZOY

Introduction

Dans un article avec J. Grommer, en 1927, Einstein écrit que le second membre de ses équations «est conditionné par le fait que la divergence de ce tenseur est nulle. Si on admet que la matière est disposée le long d'étroits "tubes d'univers", on en déduit grâce à un raisonnement élémentaire un théorème selon lequel les axes de ces "tubes d'univers" sont des lignes géodésiques (en l'absence de champ électromagnétique). Autrement dit : la loi du mouvement est une conséquence de la loi du champ». Einstein n'a pas voulu tirer les conséquences de ce raisonnement parce que c'était faire de la relativité générale classique où la matière est traitée comme un milieu continu sans essayer de prétendre expliquer les particules élémentaires. Ici nous étudions cette relativité générale classique où la matière n'est pas expliquée par sa structure atomique. Nous rappelons le raisonnement "élémentaire" dont parle Einstein qui n'a connu de formulation rigoureuse qu'avec le travail de Lichnérowicz conduisant aux conditions de raccordement entre différents milieux matériels traités comme des milieux continus macroscopiques. Seulement alors la relativité générale prend un statut global. Pour tester la cohérence interne de cette relativité générale globale, dans le preprint n°266 de l'Institut Fourier nous nous posons le problème de la balle liquide : si une goutte de fluide

Classification A.M.S. : 51.

parfait est stationnaire dans un univers asymptotiquement plat, il est raisonnable qu'elle soit sphérique. Nous montrons que les conditions de raccordement sont cruciales pour que ce résultat soit vrai. En effet en supposant que les surfaces de pression constantes et leur généralisation dans le vide soient difféomorphes à la sphère, nous obtenons que chacune de ces surfaces possède au moins un ombilic et le théorème de Poincaré sur la somme des indices d'un champ continu de directions et son comportement par déformations continues nous permet de construire un chemin constitué d'ombilics le long duquel les germes de la métrique s'annulent à un ordre suffisant pour déduire de l'existence du modèle réel un modèle à symétrie sphérique de référence. Les travaux des autres auteurs sur le sujet donnent alors la symétrie sphérique par comparaison du modèle réel et du modèle à symétrie sphérique de référence grâce à un théorème du maximum pour une équation elliptique appliquée à l'intérieur du fluide et à l'extérieur. Pour pouvoir faire ce raisonnement, il faut pouvoir appliquer le théorème de Poincaré qui nécessite la continuité des directions de courbure des surfaces de pression constante. Sur la surface de séparation entre le fluide et le vide cette continuité équivaut exactement aux conditions de raccordement de Lichnérowicz. Il s'agit d'un test de cohérence interne profond de ces conditions. Rien, *a priori*, ne permettait de penser que la validité de la conjecture de la balle liquide dépendait si précisément de cet axiome.

Le but du présent exposé est de présenter l'axiome des conditions de raccordement du point de vue du géomètre riemannien. Cet axiome est particulièrement peu clair dans la littérature classique et malheureusement l'exposé que j'en avais tenté encore plus obscur! J'espère que ce texte sera plus accessible.

Des conditions de raccordement à l'axiome des géodésiques.

Ces conditions remontent à SYNGE. Nous utilisons leur présentation par Lichnérowicz [1].

Un modèle au sens d'Einstein est une variété V_4 de dimension quatre, munie d'une métrique g pseudo riemannienne (de signature $-+++$ ou $+---$) telle que :

a) dans le vide le tenseur de Ricci soit nul,

b) ailleurs le tenseur de Ricci vérifie

$$Ricci = \chi(T - \frac{\text{trace}(T)}{2}g) \text{ ou bien } S = Ricci - \frac{\text{trace}(Ricci)}{2}g = \chi T$$

où T est le tenseur d'énergie impulsion du milieu, *Ricci* désigne le tenseur de Ricci associée à la pseudo-métrique g et S le tenseur d'Einstein.

Dans la suite T sera le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait, c'est-à-dire de la forme : $T = (p+\rho)u \otimes u + \rho g$, p et ρ étant la pression et la densité du fluide supposées non négatives et u un vecteur dont la norme pour g est -1 (pour une signature $- + ++$), ce vecteur représentant le quadrivecteur relativiste du fluide.

Einstein n'indique pas comment s'effectue le raccordement entre les différents milieux. Par nature sa présentation est purement locale. Elle reflète que *dans un domaine de dimensions restreintes* il est impossible de distinguer les effets de l'inertie de ceux de la gravitation. (Il illustre souvent son propos par les études d'un expérimentateur dans un ascenseur, reproduisant une situation déjà évoqué par Lewis Carol dans Sylvie et Bruno non sans dérision 30 ans auparavant). Einstein voulant à tout prix éviter les quanta ne pouvait se satisfaire d'une présentation classique. Il devait ajouter:

c) *principe des géodésiques* : la trajectoire spatio-temporelle de tout point matériel (non chargé) dans un champ de gravitation extérieur donné est une géodésique de la géométrie pseudo-riemannienne, orientée dans le temps.

Nous allons expliquer comment ce principe peut se déduire des précédents en relativité générale classique en introduisant à la place les conditions de raccordement.

Pour cela définissons mathématiquement ce qu'est une variété différentiable de classe C^k (munie d'une structure) lorentzienne.

Une *variété à n dimensions* est un espace topologique connexe dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à la boule euclidienne à n dimensions. (Pour la relativité $n = 4$).

Une *variété différentiable de classe C^k* est une classe d'équivalence d'atlas de classe C^k Cela signifie qu'une manière particulière de se donner une variété consiste à s'imposer une collection de cartes (localement le modèle est $\mathbf{R}^n$ où n est la dimension imposée) et une manière de passer d'une carte à une autre la où deux cartes représentent une même portion de la variété. Dire que la variété est de classe C^k signifie que ces changements de cartes s'expriment localement par des difféomorphismes d'ouverts de $\mathbf{R}^n$ de classe C^k. La confusion provient généralement de la non définition explicite des changement de cartes que l'on s'autorise. A titre d'exemple certains mathématiciens n'emploient que des transformations affines de $\mathbf{R}^n$ (des rotations, des translations, des symétries et c'est tout!) Ils obtiennent ainsi la notion de variété affine. Certaines structures globales peuvent ne pas admettre de structures affines, la rigidité introduite par ces changements de cartes (les seuls autorisés) ne pouvant recouvrir toute la structure globale. (De tels résultats sont difficiles à obtenir). La construction heuristique et historique de la relativité générale ne procède pas de manière différente mais cette situation est cachée. Les idées philosophiques de Mach affirment que les lois de la nature ne doivent pas dépendre de l'observateur, qu'elle sont les mêmes pour n'importe quel observateur. Comme les observateurs admissibles ne sont pas clairement identifiés, une ambiguïté reste. En relativité restreinte, les observateurs sont attachés à des "repères rigides" et chaque "repère rigide" se déduit d'un autre par une transformation de Lorentz. Ainsi la relativité restreinte est une sorte de géométrie affine particulière, étudiée en tant que tel par certains mathématiciens indépendamment de son utilisation physique. Par la suite le passage à la relativité générale fut la volonté d'agrandir la famille des changements de cartes possibles. En passant de la relativité restreinte à une structure différentiable, il faut dire aussi quelles classes de changement de carte on s'autorise. Rien de tel n'est précisé par Einstein. Même en tenant compte des confusions entre variétés, variétés différentiables, variétés différentiables munies d'une structure lorentzienne qui existaient à cette époque, l'obsession d'Einstein d'éviter les quanta ne le conduisait pas à préciser ces points de rigueur. C'est ce que nous allons faire pour la relativité générale classique : la matière est traitée comme un milieu continu, il n'y a pas de particules élémentaires. Pour cela avant de passer à la géométrie lorentzienne, en restant dans le cadre des variétés différentiables, citons

un théorème de Whitney : "Soit $\mathcal{V}$ une variété différentiable de dimension n, de classe C^k avec $k \geq 1$. Alors il existe un difféomorphisme de classe C^k entre $\mathcal{V}$ et une variété $\mathcal{W}$ *analytique* sous variété analytique d'un espace euclidien de dimension $2n + 1$."([3])

Ce résultat ne dépend pas d'une structure métrique additionnelle, il est propre à la structure différentiable et explique un certain malaise et la confusion qui existe sur le sujet. Si nous nous imposons une structure différentiable de classe C^k avec $k = 1$, nous pourrons trouver un atlas analytique (théoriquement). On pourrait penser aborder la classe de différentiabilité de la métrique lorentzienne sans être gêné par celle de la structure différentiable, mais ce n'est pas la distinction pertinente dans les choix des changements de cartes à prendre comme admissible par la relativité. La relativité est basée sur la géométrie pseudo-riemannienne et c'est la géométrie intrinsèque qui doit contenir les axiomes et pas son expression dans un système de coordonnées. Cette difficulté technique date de la naissance de la géométrie riemannienne.Voila l'argument intuitif de Riemann à propos des hypothèses fondant sa géométrie : pour se donner une forme quadratique sur une variété, dans un système de coordonnées particulières, il faut se donner $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions de n variables. Mais un changement de système de coordonnées fait intervenir n fonctions de n variables. Riemann en déduit qu'intuitivement il doit être possible de trouver $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ fonctions de n variables définies intrinsèquement sur la variété, ne dépendant pas du système des coordonnées choisies.

Pour mettre en évidence ces $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités, Riemann effectue un calcul dans un système de coordonnées assez illisible pour nos habitudes actuelles, mais dont le résultat généralise la notion de courbure de Gauss d'une surface plongées dans $\mathbf{R}^3$ courbure qui ne dépend pas du plongement de la surface dans $\mathbf{R}^3$, qui ne dépend que de la géométrie de dimension deux induite par $\mathbf{R}^3$ sur la surface.

Ces calculs pénibles d'un résultat si remarquable de Riemann peuvent être présentés de manière intrinsèque à partir de la notion de connexion de Koszul et reviennent à définir un tenseur trois fois covariant et une fois contravariant en associant à tout triplet X, Y, Z de champ de vecteurs le nouveau champ de vecteurs

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \ ,$$

où ∇ est la connexion sans torsion associée à la métrique riemannienne.

Les quantités obtenues par Riemann expriment que le tenseur de courbure se calcule en fonction de la métrique. Exprimons cela sous la forme :

$$\text{Riem} = \text{Riem}(g).$$

Dire que Riem est un tenseur s'interprète en disant que cette définition est invariante par difféomorphisme local. Soit donc f un difféomorphisme. Nous aurons

$$f^*\text{Riem}(g) = \text{Riem}(f^* g),$$

où f^* représente l'application linéaire tangente à f.

Soit f_λ une famille à un paramètre de difféomorphismes avec$f_0 =$ identité. Si nous dérivons $f_\lambda^*\text{Riem}(g) = \text{Riem}(f_\lambda^* g)$ relativement à λ et que nous y faisons $\lambda = 0$, nous obtenons les identités de Bianchi. ([2]).

Premières identités de Bianchi :

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,$$

secondes identités de Bianchi :

$$\nabla_W R(X,Y)Z + \nabla_Y R(X,Z)W + \nabla_Z R(X,W)Y = 0,$$

pour tout quadruplet (W, X, Y, Z) de vecteurs tangents.

Ces identités traduisent l'invariance par changement de carte des courbures intrinsèques, elles sont un prolongement de l'argument du décompte des dimensions de Riemann.

Étudions maintenant une famille particulière de difféomorphismes qui laissent invariante globalement une certaine hypersurface de notre variété $\mathcal{V}_4$ vérifiant les équations d'Einstein. Notre hypersurface hérite de son plongement dans $\mathcal{V}_4$ d'une géométrie (peut-être dégénérée pour le moment puisque la métrique g est pseudo-riemannienne). Cette géométrie ne peut pas être quelconque si la forme quadratique de Lorentz vérifie les équations d'Einstein. De plus si la famille de difféomorphismes transportent cette hypersurface sur elle même sans être l'identité, en restreignant le raisonnement précédent conduisant aux identités de Bianchi, nous en déduisons que les équations d'Einstein imposent certaines contraintes supplémentaires au passage de S, notre hypersurface particulière.

La proposition de Lichnérowicz est de préserver ces conditions en *imposant axiomatiquement* qu'une hypersurface de séparation entre deux milieux différents héritent des mêmes contraintes pour ses géométries induites par son plongement dans chacun des milieux (l'hypersurface est un bord de chaque milieu, et un bord hérite lui aussi d'une géométrie de plongements). Ces contraintes sont ce qu'il appelle "les conditions initiales du problème de Cauchy relativiste". Notre manière de voir les séparent du reste de la présentation axiomatique de Lichnérowicz. Comme ce sont elles et elles seules que nous voulons tester, cette démarche nous montre leur origine sans référence particulière au problème de Cauchy. Voila comment Lichnérowicz procède.

Dans le vide, sur une hypersurface S, ($Ricci = 0$) est équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{c} Ricci(X,Y) = 0 \text{ pour tout couple } (X,Y) \text{ de vecteurs tangents à l'hypersurface } S \\ S(V,X) = 0 \text{ pour tout vecteur } V \text{ perpendiculaire à } S \text{ et tout } X \text{ quelconque} \end{array} \right\}$$

et Lichnérowicz remarque que $S(V,X) = 0$ forment dans un système particulier de coordonnées 4 équations qui ne font intervenir sur S que la métrique (de S) et les dérivées premières de la métriques de V_4 dans la direction perpendiculaire à S. Pour cela il faut que cette hypersurface ne soit pas singulière pour le problème de Cauchy. Dans le cas du vide cela revient à dire aussi que sa géométrie induite par son plongement ne soit pas dégénérée (c'est le cas si l'espace tangent à l'hypersurface contient un vecteur normal parce que isotrope).

Sa proposition *axiomatique* revient à imposer que ces conditions $S(V,X) = 0$ soient vérifiées pour chacune des géométries induites sur S par chacun des deux milieux. En terme de géométrie riemannienne, la géométrie du plongement de S dans V_4 ne fait intervenir que la métrique et ses dérivées d'ordre un dans la direction perpendiculaire à S. Lichnérowicz impose donc que les deux géométries extrinsèques de S dans V_4 soient les mêmes. C'est cette proposition axiomatique qui permet d'obtenir le principe des géodésiques. Ainsi, un axiome se substitue à un autre, mais clarifie les données mathématiques sous-jacentes. Si le principe des géodésiques conduit à de multiples tests expérimentaux, celui du raccordement nous donne dans cet article un test théorique. Mais tout d'abord comment redonne-t-il le principe des géodésiques? Si le deuxième milieu est un schéma fluide parfait alors $T = (p+\rho)u \otimes u + pg$ où u est un vecteur de norme -1 pour la pseudo-métrique. Si le premier milieu est le vide $T = 0$. Alors $S(V,X) = 0$ pour X quelconque et V perpendiculaire à S impose pour le fluide $T(V,X) = 0$ et donc u est tangent à S et p est nulle sur S. Ces conclusions spectaculaires montrent de quelles manières le recollement se répercute sur le comportement physique du milieu.

Utilisons maintenant les identités de Bianchi pour un schéma matière pure (p est identiquement nulle dans le milieu). Les lignes de courant du schéma intérieur sont alors des géodésiques de la géométrie de ce milieu (à cause des identités de Bianchi appliquées sur la forme particulière du tenseur d'impulsion-énergie $T = \rho u \otimes u$), donc aussi des géodésiques du milieu extérieur sur la surface de séparation S qui se trouve être engendrée par de telles géodésiques.

Deux conséquences cruciales pour la relativité générale classique s'en dégagent :

1) en considérant une portion de plus en plus petite de matière pure, à la limite, la trajectoire obtenue est une géodésique du vide orientée dans le temps,

2) une surface de séparation entre le vide et un milieu schéma matière pure ou même fluide parfait doit être engendrée par des géodésiques du schéma extérieur orientées dans le temps.

Lichnérowicz applique cette démarche à d'autres milieux et fait intervenir d'autres idées (hypersurfaces caractéristiques, propagation des ondes). Nous avons volontairement séparé de l'ensemble de son travail, cet axiome de recollement des courbures de plongement pour pouvoir le discuter lui et lui seul.

Remarque. — Lichnérowicz montre que les équations d'Einstein faisant intervenir la courbure et les identités de Bianchi ont une conséquence inéluctable : si on se pose un problème de Cauchy attaché à une hypersurface S, sur S les données de Cauchy laissent subsister la possibilité de changement de coordonnées (et donc l'introduction de nouvelles cartes) qui laissent invariantes les coordonnées de S et les données de Cauchy mais qui introduisent des discontinuités arbitraires pour les dérivées secondes dans la direction perpendiculaire à S des quantités $g(V, X)$ où X est un vecteur quelconque et V un vecteur perpendiculaire à S. En termes géométrique cela signifie que ce sont les courbures de plongement qu'il faut recoller. De chaque coté de l'hypersurface si on prend des coordonnées quelconques, la classe de différentiabilité en sera affectée. Il est particulièrement difficile de formuler en termes de coordonnées cette notion qui est intrinsèque à la géométrie et cela explique toutes les confusions sur le sujet sans compter la difficulté provenant de l'interférence avec le théorème de Whitney cité plus haut si l'on veut à tout prix parler de classe de différentiabilité.

En résumé retenons que ce sont les géométries extrinsèques du plongement pseudo-riemannien qui doivent se recoller (et non une classe de différentiabilité C^1 bien que l'on puisse désigner une classe particulière de repères dans lesquels la différentiabilité C^1 puisse être posée en axiome : les coordonnées de Gauss)

Donc physiquement les cartes introduites par le théorème de Withney sont des parasites. Cela est considéré comme paradoxal par beaucoup : en effet n'est-il pas plus agréable de considérer les modèles lisses, analytiques, qui semblent esthétiquement plus satisfaisants? Mais si l'atlas est analytique, les quantités physiques manipulées (pression, densité par exemple) ne le sont pas nécessairement.

En conclusion la relativité générale classique prend un statut global quand on accepte de préserver les courbures de plongement pour une hypersurface de séparation entre différents milieux matériels, une hypersurface entre le vide et un milieu matériel devant hériter d'une métrique de plongement définie positive et non dégénérée.

Seule une telle démarche assurera une cohérence globale à la théorie et c'est ce que nous montrons sur l'exemple de la balle liquide : elle ne sera sphérique que si les courbures de plongement de la surface de séparation S sont les mêmes pour chaque milieu. Cela entraîne la continuité des directions de courbure de plongement des surfaces de pression constante et leur généralisation dans le vide, et construit un modèle à symétrie sphérique de référence donnant le résultat. Autrement la balle liquide n'est pas sphérique et des contre-exemples peuvent être construits.

Bibliographie

[1] LICHNÉROWICZ A. — *Théorie relativiste de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1955.

[2] KAZDAN J. — *Another proof of Bianchi's identity in Riemannian geometry*, Proc.AMS **81** (1981), 341–342.

[3] WHITNEY H. — *Differentiable manifold*, Annals of Mathematics **37** , n°3 (1936), 645–680.

Luc ROZOY
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)