Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

THIERRY PAUL

Estimations spectrales autour d'un niveau critique

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 11 (1992-1993), p. 105-112
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1992-1993__11__105_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
GRENOBLE
1992–1993 (105–112)

ESTIMATIONS SPECTRALES AUTOUR D'UN NIVEAU CRITIQUE

Thierry PAUL

Ce texte expose les résultats obtenus dans un article de R. Brummelhuis, T. Paul et A. Uribe "Spectral estimates around a critical level", soumis pour publication à "Duke Mathematical Journal".

I. Introduction

La formule des traces, associée au nom de Gutzwiller pour l'opérateur de Schrödinger en physique et aux noms de Chazarain, Colin de Verdière et Duistermaat-Guillemin, pour les opérateurs intégraux de Fourier en mathématique, est devenue un outil important pour l'étude du spectre d'hamiltoniens quantiques, spécialement pour le cas où le flot classique est non intégrable, voire même chaotique, situation dans laquelle on ne sait pas d'écrire une à une les valeurs propres. Elle donne une information semi-classique "en moyenne" sur le comportement de l'ensemble des valeurs propres d'un opérateur de la forme $a(x, \hbar D_x)$ qui sont dans un intervalle de grandeur d'ordre $\hbar$ ainsi que sur les fonctions propres correspondantes. Plus précisément, soit

$$A_\hbar = \sum_{j=0}^{N} \hbar^j A_j \tag{1}$$

où A_j est un opérateur différentiel d'ordre j sur une variété riemannienne compacte sans bord (une classe plus générale est étudiée dans [PU]). Soit

$$H(x,p) = \sum_{j=0}^{N} \sigma_{\text{prin}}(A_j)(x,p) \tag{2}$$

le symbole de $A_\hbar(\sigma_{\text{prin}}(A_j)$ est le symbole principal de A_j). Alors sous certaines hypothèses d'ellipticité (voir [PU]), si $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ avec $\widehat{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ et si E *est une valeur régulière de* H, [PU],

$$\operatorname{Trace} \varphi\Big(\frac{A_\hbar - E}{\hbar}\Big) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k \hbar^{-(n-1)+k} . \tag{3}$$

De plus certains coefficients c_k peuvent être calculés ; on n'exposera pas ici ceux faisant intervenir les trajectoires périodiques de $H(x,p)$ sur la surface d'énergie Σ_E. Le terme principal du développement est $c_0\hbar^{-(n-1)}$ et c_0, dans le cas où la dimension de H est > 1, est donné par

$$c_0 = \frac{\widehat{\varphi}(0)}{(2\pi)^n} \int_{\Sigma_E} d\mu_L \tag{4}$$

où $d\mu_L$ est la mesure de Liouville sur Σ_E, c'est-à-dire la restriction de la mesure de Lebesgue à Σ_E, divisée par $|\nabla H|$.

L'hypothèse de régularité de E est essentielle dans la méthode utilisée pour montrer (3), mais ne semble pas forcément nécessaire, dans le résultat. En effet, si $|\nabla H|$ s'annule sur Σ_E, la mesure de Liouville "explose" précisément sur Θ, ensemble des zéros de $|\nabla H|(x,p)$. Cependant plusieurs cas se présentent suivant la dimension de Θ et posent les questions suivantes :

a) $\int_{\Sigma_E} d\mu_L < +\infty$: dans ce cas est-ce que $\operatorname{Trace}\varphi\Big(\frac{A_\hbar - E}{\hbar}\Big)$ a encore un développement asymptotique et son terme principal est-il le même que dans (3) ?

b) $\int_{\Sigma_E} d\mu_L = +\infty$: $\operatorname{Trace}\varphi\Big(\frac{A_\hbar - E}{\hbar}\Big)$ a-t-il encore un développement asymptotique et quelle est la "trace" de l'explosion de (4) dans son terme principal ?

Une application importante de la formule des traces est "l'extension" de (3) au cas où φ est la fonction caractéristique de $]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$. Alors $\widehat{\varphi}$ n'est plus à support compact et $\operatorname{Trace}\varphi\Big(\frac{A_\hbar - E}{\hbar}\Big) = \#\Big\{E_j(\hbar) \in]E - \frac{\hbar}{2}, E + \frac{\hbar}{2}[\Big\}$, où $\{E_j(\hbar)\}$ est le spectre de $A_\hbar$. On peut alors montrer, par des arguments de type "taubérien", que $\operatorname{Trace}\varphi(\frac{A_\hbar - E}{\hbar})$ se comporte alors comme $\frac{\hbar^{-(n-1)}}{(2\pi)^n} \int_{\Sigma_E} d\mu_L$, avec diverses estimations du reste. Cette dernière affirmation a une signification physique importante : elle dit que, en accord avec les inégalités de Heisenberg, chaque état "occupe" dans l'espace de phase un volume $(2\pi\hbar)^n$. En effet le volume de $H^{-1}(]E - \frac{\hbar}{2}, E + \frac{\hbar}{2}[)$ se comporte comme $\hbar \times \int_{\Sigma_E} d\mu_L$, ce qui, divisé par $(2\pi\hbar)^n$ donne bien $\frac{\hbar^{-(n-1)}}{(2\pi)^n} \int_{\Sigma_E} d\mu_L$. On peut montrer facilement que, dans le cas où E est une valeur critique de H, $\operatorname{vol}\Big(H^{-1}(]E - \frac{\hbar}{2}, E + \frac{\hbar}{2}[)\Big)$ a un comportement très différent dans les cas a) et b) exposés plus haut :

a) $\operatorname{vol}\Big(H^{-1}(]E - \frac{\hbar}{2}, E + \frac{\hbar}{2}[)\Big) \sim \hbar \int_{\Sigma_E} d\mu_L$, alors que,

b) $\operatorname{vol}\Big(H^{-1}(]E - \frac{\hbar}{2}, E + \frac{\hbar}{2}[)\Big) \sim \text{const} \times \hbar \log(\frac{1}{\hbar})$.

Cette remarque incite à penser que des puissances logarithmiques pourraient apparaître dans (3) dans le cas b) (ainsi que dans le cas a) dans les termes d'ordre supérieurs).

Nous allons montrer que c'est effectivement le cas et allons calculer le développement asymptotique lorsque $\hbar \to 0$ de Trace $\varphi(\frac{A_\hbar - E}{\hbar})$, dans le cas où E est une valeur critique du symbole de $A_\hbar$, sous diverses hypothèses que nous présenterons dans la section II. Nous présenterons aussi des résultats sur le comptage des valeurs propres contenues dans $]E - \frac{\hbar}{2}, E + \frac{\hbar}{2}[$ ainsi que sur la localisation des fonctions propres correspondantes ; le résultat principal dans cette dernière direction étant que, si la dimension de la sous-variété critique est suffisamment grande, les fonctions propres sont "piégées" par Θ et se concentrent microlocalement sur la sous-variété critique (voir [CdV-P] pour un résultat plus précis en dimension 1).

Une esquisse très succincte des preuves est présentée dans la section III. On utilise essentiellement deux types d'arguments :

– un théorème de phase stationnaire à phase "dégénérée" qui permet d'obtenir la nature du développement asymptotique.

– la théorie des distributions lagrangiennes singulières de Guillemin-Melrose-Uhlmann ([GU], [MU]) pour le calcul de certains des coefficients.

II. Résultats

Dans tout ce qui suit $A_\hbar$ sera de la forme (1), avec A_j opérateur différentiel (à coefficients C^∞) d'ordre j. On suppose que $A_\hbar$ est elliptique, dans le sens que $H(x,p) \geq c > 0$. Le spectre de $A_\hbar$ est alors discret et on le note $\{t_j(\hbar),\ j = 0, 1, \ldots\}$.

On suppose de plus que H a une variété critique non-dégénérée Θ dans le sens de Bott. C'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE PRINCIPALE. — *L'ensemble des points critiques de H est une sous-variété lisse Θ, et H a un hessien normal non dégénérée sur Θ, c'est-à-dire :*

$$Q(H)_2 := d_z^2 H : \left(T_z(T^* H)/T_z(\Theta)\right)^2 \to \mathbf{R}$$

est non dégénéré pour tout $z \in \Theta$.

De plus, on suppose que les multiplicités des valeurs propres de $Q(H)_2$ sont indépendantes de $z \in \Theta$.

Puisque la différentielle de H est nulle dans le tangent à Θ, les composantes connexes de Θ sont contenues dans des surfaces d'énergie et l'on supposera que Θ est connexe (sinon chaque composante connexe donne trivialement une contribution que l'on ajoute). On aura donc

$$\Theta \subset H^{-1}(E_c) . \tag{5}$$

THÉORÈME 1. — *Soit n la dimension de M, N la codimension de Θ dans $T^*(M)$ et ν le nombre de valeurs propres négatives de $Q(H)_z$. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que sa transformée de Fourier a un support dans un voisinage suffisamment petit de zéro. Alors, lorsque $\hbar \to 0$,*

A. Si $\nu \geq 1$, $N - \nu \geq 1$ sont impairs,

$$\sum_j \varphi\Big(\frac{E_j(\hbar) - E_c}{\hbar}\Big) \sim \hbar^{-(n-1)} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0,1} c_{j,\ell} \hbar^j \left[\log(1/\hbar)\right]^\ell . \tag{6}$$

De plus, le premier coefficient "logarithmique" non nul, $c_{j_0,1}$ est obtenu pour

$$j_0 = \frac{N}{2} - 1 . \tag{7}$$

B. Si $\nu \geq 1$, $N - \nu \geq 1$ et l'un des deux est pair, ou si le Hessien de H est défini positif ou négatif sur Θ, alors

$$\sum_j \varphi\Big(\frac{E_j(\hbar) - E}{\hbar}\Big) \sim \hbar^{-(n-1)} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \hbar^{j/2} . \tag{8}$$

De plus, l'hypothèse sur la taille du support de $\widehat{\varphi}$ peut être supprimée (en gardant $\widehat{\varphi}$ à support compact quelconque) si l'on suppose que le flot linéarisé de H autour de Θ n'a pas de trajectoire périodique.

Dans tous les cas, on peut calculer :

– le coefficient du terme principal du développement asymptotique.

– le coefficient du premier terme "logarithmique".

Ces coefficients font intervenir une mesure canonique sur Θ. Nous renvoyons le lecteur à [BPU] pour ces résultats généraux et présentons les cas particuliers suivants :

THÉORÈME 2.

1. Avec les hypothèses précédentes, si $N > 2$ alors le terme principal est le même que dans le cas régulier :

$$C_{0,0} = C_0 = \frac{\widehat{\varphi}(0)}{(2\pi)^n} \int_{\Sigma_E} d\mu_L . \tag{9}$$

2. *Dans le cas d'un opérateur de Schrödinger* $-\hbar^2\Delta+V(x)$ *en une dimension et* Θ *alors réduite à un point* $(X_0,0)$ *avec* $V''(X_0)<0$,

$$C_{0,1}=\frac{-1}{\sqrt{-V''(X_0)}}\ . \tag{10}$$

Le théorème suivant concerne le comptage des valeurs propres, soit :

$$N^c(\hbar)=\#\{E_j(\hbar)\in]E_c-c\hbar,E_c+c\hbar[\} \tag{11}$$

THÉORÈME 3. — *Soit* $f(\hbar)$ *le terme principal des développements asymptotiques du théorème 1, avec* $\widehat{\varphi}(0)=1$. *Supposons que le flot linéarisé de* H *sur* $T_z(T^*M)/T_z(\Theta)$ *pour tout* $z\in\Theta$ *n'a pas de trajectoire périodique de période non nulle. Supposons de plus que, si* $N>2$ *l'ensemble des trajectoires périodiques du flot de* H, *de période non nulle, sur* Σ_{E_c}/Θ *est de mesure de Liouville nulle. Alors :*

$$N(\hbar)=2cf(\hbar)+o(f(\hbar))\ . \tag{12}$$

Remarque. — Il est facile de montrer que dans tous les cas, $2cf(\hbar)\sim\frac{\mathrm{vol}\,H^{-1}(]E_c-c\hbar,E_c+c\hbar[)}{(2\pi\hbar)^n}$ quand $\hbar\to 0$, ce qui est, encore une fois, en accord avec le principe de Heisenberg.

Le dernier théorème concerne la localisation des fonctions propres. Dans le cas d'une surface d'énergie régulière, les résultats de Schnirelman, Zelditch, Colin de Verdière et Helffer-Robert-Martinez, [S], [Z], (CdV], [HMR] montrent que si le flot est ergodique sur la surface d'énergie, les fonctions propres se dé-microlocalisent sur toute la surface d'énergie. Dans le cas d'une valeur critique, si $N>2$ alors la notion d'ergodicité est encore bien définie et on obtient le même résultat. Si $N=2$, alors sans aucune hypothèse d'ergodicité, on montre que les fonctions propres se concentrent, presque toutes, sur Θ.

Pour cela on utilise une quantification semi-classique décrite dans [PU] qui associe à toute fonction $a\in(T^*M)$ un opérateur "de la forme" $a(x,\hbar D_x)$. on a alors :

THÉORÈME 4. — *Soit* $\{\psi_j^\hbar\}$ *une base orthonormée de fonctions propres de* $S_\hbar$, $S_\hbar\psi_j^\hbar=E_j(\hbar)\psi_j^\hbar$. *Alors il existe un sous-ensemble de densité un*

$$L(\hbar)\subset\{j;|E_j(\hbar)-E_c|<c\hbar\},$$

(c'est-à-dire $\lim_{\hbar\to 0}\frac{\#L(\hbar)}{N(\hbar)}=1$*) tel que :*

1. *Si* $N>2$ *et si le flot de* H *est ergodique sur* Σ_E,

$$\lim_{\substack{\hbar\to 0\\ j\in L(\hbar)}}\langle\psi_j^\hbar,a(x,\hbar D_x)\psi_j^\hbar\rangle=\frac{1}{\int_{\Sigma_c}d\mu_L}\int_{\Sigma_E}a\,d\mu_L\ . \tag{13}$$

2. Si $N = 2$, quel que soit le flot de H, si a est constante, $a = a_\Theta$, sur Θ, alors :

$$\lim_{\substack{\hbar \to 0 \\ j \in L(\hbar)}} \langle \psi_j^\hbar, a(x, \hbar D_x)\psi_j^\hbar \rangle = a_\Theta \ . \qquad (14)$$

Remarque. — (14) donne bien la microlocalisation sur Θ dans le sens que si $a = 0$ sur Θ alors $\langle \psi_j^\hbar, a(x, \hbar D_x)\psi_j^\hbar \rangle \to 0$.

III. Esquisse des preuves

On écrit d'abord, *en omettant plusieurs microlocalisations qui justifient toutes les intégrales,*

$$\text{Trace}\, \varphi\Big(\frac{A_\hbar - E}{\hbar}\Big) = \int \widehat{\varphi}(t)\, \text{Trace}\, e^{it\left(\frac{A_\hbar - E}{\hbar}\right)} dt \ . \qquad (15)$$

Ce qui ramène le calcul, comme d'habitude, à l'étude des singularités de

$$\text{Trace}\, e^{it\left(\frac{A_\hbar - E}{\hbar}\right)} \ .$$

On écrit ensuite une expression du noyau intégral du propagateur en terme d'intégrales oscillantes de la forme :

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}[S(t,x,p) - yp - tE]} \alpha(x, y, t, p, \hbar^{-1}) dp$$

et (15) s'exprime alors comme

$$\int \widehat{\varphi}(t) e^{\frac{i}{\hbar}[S(t,x,p) - xp - tE]} \alpha(x, x, t, p, \hbar^{-1}) dp\ dx\ dt \ . \qquad (16)$$

L'intégrale (16) est alors coupée en 2 morceaux : I_1 au voisinage de Θ ; I_2 ailleurs, qui se traite par les méthodes habituelles. Au voisinage, les conditions de non dégénérescence et d'invariance des multiplicités du hessien de H de l'hypothèse principale, permettent d'effectuer, par le Lemme de Morse, un changement de variable ramenant (16) à une intégrale oscillante à phase cubique. Plus précisément on prend des coordonnées locales autour de $\Theta(z', \omega)$ telle que $\Theta = \{z' = 0\}$. I_1 se ramène alors à :

$$I_1 = \hbar^{-h} \int e^{i\frac{t}{\hbar}(E - E_c - \frac{1}{2}\langle Q\omega, \omega\rangle)} \widehat{\varphi}(t) \beta(t, \omega; \hbar^{-1}) dt\ d\omega$$

expression valable uniformément pour E autour de E_c (Q est la forme quadratique du Hessien). La méthode de la phase stationnaire dépend crucialement alors du fait que $E = E_c$ ou non. En effet, on s'aperçoit que si $E \neq E_c$ la phase est non dégénérée et le développement asymptotique est le même qu'habituellement. Si $E = E_c$ on a :

$$I_1 = \hbar^{-h} \int e^{i\frac{t}{\hbar}\frac{\langle Q\omega, \omega\rangle}{2}} \widehat{\varphi}(t) \beta(t, \omega; \hbar^{-1}) dt\ d\omega \qquad (17)$$

et il faut établir le développement asymptotique d'une telle intégrale, qui est "non standard" car la phase est dégénérée aux points critiques. On résout ce problème par le "Lemme de phase stationnaire généralisée" suivant :

LEMME. — *Soit* $I(k) = \int_{\mathbf{R}^3} a(t,u,v)e^{iktuv}dt\,du\,dv$ *où* $a \in c_0^\infty(\mathbf{R}^3)$. *Alors, lorsque* $k \longrightarrow \infty$,

$$I(k) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0,1} c_{j\ell} k^{-1-j} (\log k)^\ell \ . \tag{18}$$

Ce lemme se démontre en utilisant la transformée de Mellin (voir [BPU]) et on peut calculer tous les coefficients $c_{j\ell}$.

Ce lemme permet d'obtenir le développement asymptotique de I_1, suivant la signature de Q.

Cette première étape permet d'obtenir la nature des développements asymptotiques du Théorème 1.

Pour calculer les premiers coefficients, qui sont implicites dans (17) en raison du changement de variable du Lemme de Morse qui n'est pas explicite, on étudie la distribution suivante :

$$\gamma(s,E) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_j \varphi(k(E_j(1/k) - E)) \Big) e^{iks} \tag{19}$$

$\gamma(s,E)$ a été tout d'abord définie dans [PU], d'après [GU], et permet, par l'étude de ses singularités, d'établir la formule des traces dans le cas régulier. On montre que $\gamma(s,E)$ est une distribution lagrangienne singulière dans le sens de Guillemin, Melrose, Uhlmann [MU], [GUh] associé aux deux lagrangiennes Λ_0 et Λ_1 suivantes :

$$\Lambda_0 = \{(s=0,\ E=E_c\ ;\ \theta, t)\} = T^*_{(0,0)}(\mathbf{R}_2)$$
$$\Lambda_1 = \{(s=0,\ E\ ;\ \theta=0,,t)\} = N^*(s=0)\ .$$

Cela signifie que, microlocalement, sur Λ_0 et sur Λ_1, loin de $\Lambda_1 \cap \Lambda_0$, γ est une distribution lagrangienne classique, dont le symbole "explose" lorsque l'on se rapproche de l'intersection. Or $\gamma(s,E)$ sur Λ_1 loin de $\Lambda_1 \cap \Lambda_0$ a été étudiée dans [PU] et l'on connaît son symbole. De plus $\gamma(s,E)$ sur Λ_0 loin de $\Lambda_1 \cap \Lambda_0$ a été étudiée dans [GU], section 5, et son symbole calculé.

La confrontation de "l'explosion" vers $\Lambda_1 \cap \Lambda_0$ des symboles et du développement asymptotique établi ultérieurement permet de calculer les premiers coefficients.

Le théorème 3 utilise un théorème taubérien démontré dans [BPU] et le théorème 4 est une adaptation de [HMR].

Remarque. — Les méthodes de [BU] permettent d'étendre ces résultats aux opérateurs de Schrödinger sur $\mathbf{R}^n$.

Références

[BPU] BRUMMELHUIS R., PAUL T., URIBE A. — *Spectral estimates near a critical level*, Soumis pour publication à Duke Math. Journal.

[BU] BRUMMELHUIS R., URIBE A. — *A trace formula for Schrödinger operators*, Comm. Math. Phys. **136** (1991), 567–584.

[CdV] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Comm. Math. Phys. **102** (1985), 497–502.

[CdV-P] COLIN DE VERDIÈRE Y., PARISSE B. — *Équilibre instable en régime semi-classique I : concentration microlocale*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 252, Grenoble , soumis à Comm. PDE.

[HMR] HELFFER B., MARTINEZ A., ROBERT D. — *Ergodicité et limite semi-classique*, Comm. Math. Phys. **109** (1987), 313–326.

[GUh] GUILLEMIN V., UHLMANN G. — *Oscillatory integrals with singular symbols*, Duke Math. J. **48** (1981), 251–267.

[GU] GUILLEMIN V., URIBE A. — *Circular symmetry and the trace formula*, Invent. Math. **96** (1989), 385–423.

[MU] MELROSE R.B., UHLMANN G. — *Lagrangian intersection and the Cauchy problem*, Comm. Pure Appl. Math. **32** (1979), 483–519.

[PU] PAUL T., URIBE A. — *Sur la formule semi-classique des traces*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **313** I (1991), 217–222, *The semi-classical trace formula*, preprint.

[S] SCHNIRELMAN A. — *Ergodic properties of eigenfunctions*, Usp. Math. Nauk **29** (1974), 181–182.

[Z] ZELDITCH S. — *Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke Math. J. **55** (1987), 919–941.

Thierry PAUL
Département de Mathématiques
Université de PARIS-DAUPHINE
Place de Lattre de Tassigny
75775 PARIS Cedex 16
(France)