Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

HUBERT PESCE

Isospectralité des nilvariétés

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome S9 (1991), p. 121-122
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991__S9__121_0>

RENCONTRES DE THEORIE SPECTRALE ET GEOMETRIE
GRENOBLE 1991
(Aussois du 7 au 14 avril)

Isospectralité des nilvariétés

Hubert PESCE

Institut Fourier *
Université de Grenoble 1
B.P. 74
38402 SAINT MARTIN D'HERES CEDEX
FRANCE

* Laboratoire associé au CNRS.

On regarde les problèmes d'isospectralité sur des variétés du type $(\Gamma \setminus G, m)$ où G est nilpotent simplement connexe, Γ un sous-groupe uniforme et m une métrique qui se relève en une métrique invariante à gauche sur G.

Dans le cas où $G = \mathbf{R}^m$, un théorème, dû à Kneser et non publié, affirme qu'il n'y a qu'un nombre fini de tores plats isospectraux et non deux à deux isométriques, à un tore donné. En utilisant des méthodes de réduction de formes quadratiques, on peut majorer ce nombre par un nombre ne dépendant que du rapport systolique du tore donné. Cette méthode permet de redémontrer que deux tores plats de dimension deux isospectraux sont isométriques (voir [3]).

De manière générale, si G est nilpotent, Gordon et Wilson ont, *cf.* [1], introduit un sous-groupe de Aut (G) : AIA $(G;\Gamma)$ tel que si $\varphi \in$ AIA $(G;\Gamma)$, alors les variétés $(\Gamma \setminus G, m)$ et $(\Gamma \setminus G, \varphi^* m)$ ont même spectre du Laplacien (resp. des longueurs).

Dans le cas où G **est de rang deux** (le groupe dérivé est inclus dans le centre, on a une sorte de réciproque :

PROPOSITION [2-5]. — *Soit* $\{m_s\}_s \in I$ *une famille continue de métriques, qui se relèvent en une métrique invariante à gauche sur G, telles que les variétés* $(\Gamma \setminus G, m_s)$ *ont toutes le même spectre du Laplacien, alors* $m_s = \varphi_s^* m$ *où* $\varphi_s \in$ *AIA* $(G;\Gamma)$.

PROPOSITION [6]. — *La proposition précédente est vraie si l'on change "spectre du Laplacien" en "spectre des longueurs".*

Dans le cas où $G = H_n$, on peut montrer que le spectre du Laplacien détermine un nombre fini de classes d'isométries, *cf.* [4].

Références

[1] GORDON C., WILSON E. — *Isospectral deformations of compact solvmanifolds*, Journal of Differential Geometry, **19**.

[2] OUYANG H. — *On spectral rigidity of deformations modulo almost inner automorphisms on two-step nilmanifold*, Preprint.

[3] PESCE H. — *Borne explicite du nombre de tores plats isospectraux à un tore donné*, Preprint de l'Institut Fourier.

[4] PESCE H. — *Finitude spectrale des variétés de Heisenberg*, Preprint de l'Institut Fourier.

[5] PESCE H. — *Calcul du spectre d'une nilvariété de rang deux et applications*, Preprint de l'Institut Fourier.

[6] PESCE H. — *Manuscrit*,.