SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

RICHARD KENYON

Pavages autosimilaires à similitudes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 10 (1991-1992), p. 19-23

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1991-1992__10__19_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1991–1992 (19–23)

PAVAGES AUTOSIMILAIRES À SIMILITUDES

par *Richard KENYON*

Un **pavage** du plan est un recouvrement localement fini par des **pavés** : ensembles compacts, qui sont l'adhérence de leurs intérieurs, deux pavés ayant leurs intérieurs disjoints.

Il s'agit d'étudier les pavages qui ont la propriété dynamique suivante : une homothétie dilatante laisse invariant le pavage (après éventuelle subdivision des pavés). (Figure 1).

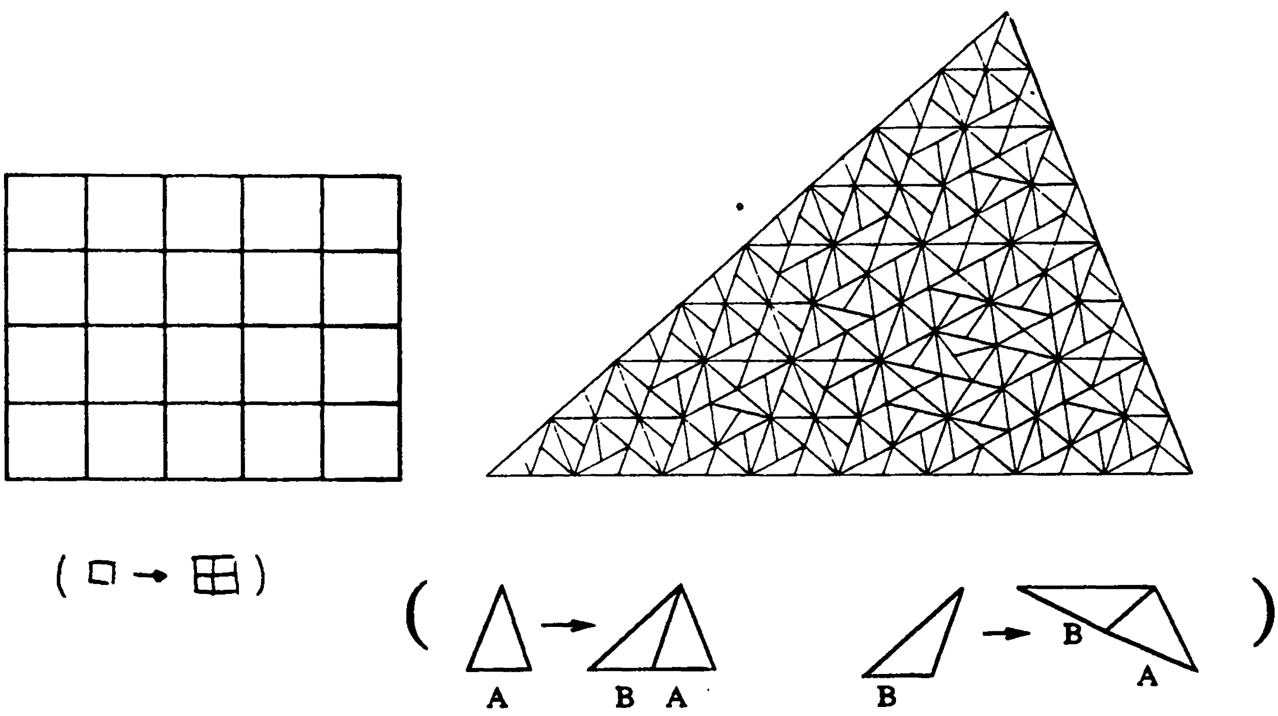

Figure 1 : Pavages autosimilaires à similitudes.

W.P. Thurston [2] a étudié le cas des pavages à translations, c'est-à-dire avec un nombre fini de pavés à translation près. Avec des hypothèses raisonnables, il y a des conditions très contraignantes sur les dilatations possibles. Il a démontré que λ est la dilatation d'un tel pavage si et seulement si λ est un entier algébrique, strictement plus grand en module que ses conjugués de Galois (à l'exception de $\overline{\lambda}$).

On s'intéresse ici [1] à la même question pour les pavages à **similitude** près. (Théorème 4).

À un pavage du plan P ayant un nombre fini de pavés à similitude près, on associe un espace compact $X = X(P)$ (le "pavage universel" de P) de la façon suivante :

On appelle GP l'ensemble des pavages du plan gP, où g appartient au groupe G des similitudes du plan (applications complexes affines $z \mapsto az + b$). Puis on définit X' comme ensemble des classes d'équivalence de GP, où $gP \sim g'P$ si et seulement si gP et $g'P$ diffèrent par une application complexe **linéaire** (une homothétie). On dit qu'un pavage est **normalisé** si l'ensemble des pavés contenant l'origine a mesure 1. Il existe des pavages normalisés dans chaque classe d'équivalence $[gP]$.

Il existe une topologie naturelle sur X' : un voisinage de base d'un pavage normalisé consiste en tous les pavages normalisés qui, après une petite translation, coïncident (à une homothétie près) avec ce pavage, dans $B_R(0)$, pour R grand donné.

Finalement, X est un compactifié de X' : on définit X comme ensemble des points limites des suites $[g_i P] \in X'$: une suite $[g_i P]$ a une sous-suite pour laquelle les pavages normalisés convergent pour tout $R > 0$ pour la métrique de Hausdorff sur les compacts de $\overline{B_R(0)}$; X est l'ensemble des points limites de telles suites.

Une limite peut ne pas être un pavage dans notre sens, sauf près de l'origine. Voir exemples.

LEMME 1. — *X est compact.*

On dit que P a un **nombre fini d'arrangements locaux** si les pavés de P ne se recollent que d'un nombre fini de façons, et si pour chaque $R > 0$ il y a un nombre borné de pavés dans la partie de $[gP]$ (normalisé) contenue dans $B_R(0)$.

LEMME 2. — *Si P a un nombre fini d'arrangements locaux, alors chaque point de X correspond à un pavage du plan (avec les mêmes types de pavés que P, à similitude près).*

L'espace X est localement un produit d'un ouvert dans $\mathbf{C}$ avec un espace S de dimension 0. X est feuilleté par des surfaces qui ont une structure complexe affine provenant de la structure affine de G agissant sur $\mathbf{C}$. Il y a une application de P dans X correspondant au sous-groupe de translations $\mathbf{R}^2$ de G : l'image de $x \in \mathbf{R}^2$ est la classe d'équivalence du pavage $-x + P$. L'image de P est incluse dans une seule feuille de X; cette feuille est dense dans X par définition.

LEMME 3. — *Un pavage P qui a un nombre fini d'arrangements locaux est* **quasipériodique** *(c'est-à-dire que chaque arrangement local apparaît partout dans le pavage, et à une distance (normalisée) bornée de chaque point) si et seulement si toute feuille de X est dense dans X.*

Exemples.

Si P est périodique dans deux directions, alors $X' = X$ est un tore.

Pour le pavage de la figure 2, P n'a pas un nombre fini d'arrangements locaux.

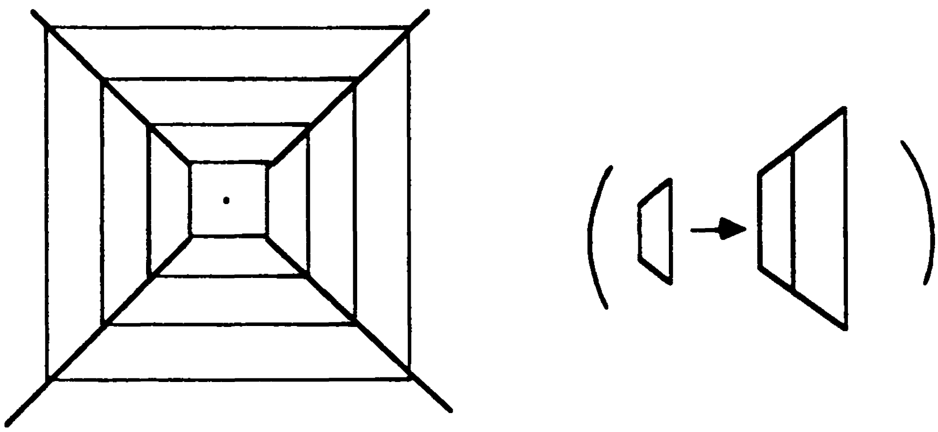

Figure 2 : Pavage avec un nombre infini d'arrangements locaux, avec motif de subdivision.

Pour la figure 3, P a un nombre fini d'arrangements locaux, mais n'est pas quasipériodique. Les feuilles de X, sauf une exception, sont toutes des cylindres, qui s'accumulent en une autre feuille de X, un tore correspondant au pavage périodique par des carrés.

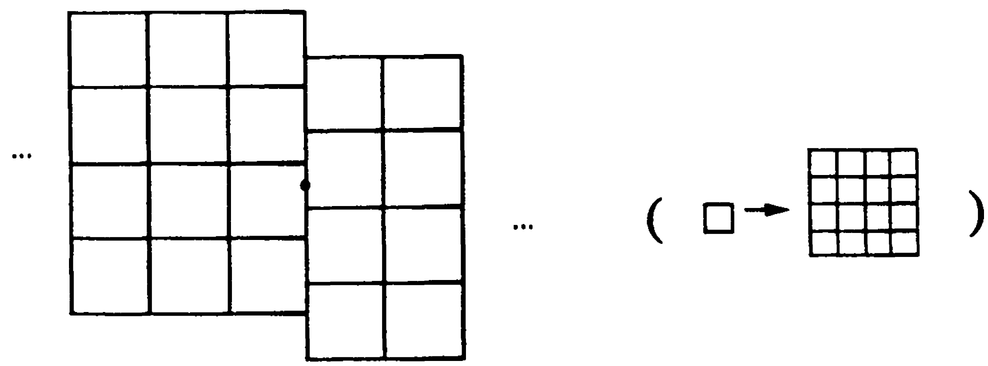

Figure 3 : Pavage non-quasipériodique, avec motif de subdivision.

DÉFINITION. — Un pavage P est **autosimilaire** s'il a un nombre fini d'arrangements locaux, s'il est quasipériodique et s'il est invariant par une homothétie dilatante. (L'image de chaque pavé recouvre exactement un ensemble de pavés.)

En particulier, il y a une application affine $\varphi : X(P) \to X(P)$ dilatante sur les feuilles. φ est Anosov sur X et les pavés de P sont l'intersection de la feuille $P \subset X$ avec les rectangles d'une partition de Markov pour φ.

THÉORÈME 4. — *Soit P un pavage autosimilaire avec dilatation $\varphi(z) = \lambda z$. Alors λ est algébrique. Réciproquement, pour chaque $\lambda \in \mathbf{C}$ algébrique, $|\lambda| > 1$, il existe un pavage autosimilaire à similitudes, invariant par λ.*

Pour les détails, voir [1].

Exemple. — Pour le pavage autosimilaire de la figure 4, on code les pavés de la façon suivante : l'adresse d'un pavé est une suite $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots}$, $x_i \in \{0, 1, \ldots, 12\}$. L'adresse du pavé couvrant l'origine est $\{0, 0, \ldots\}$, et pour deux pavés $T_1 = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $T_2 = \{y_1, y_2, \ldots\}$, si T_1 est couvert par $\varphi(T_2)$ alors $x_i = y_{i-1}$ pour $i > 1$ et x_1 décrit où se trouve T_1 dans l'image de T_2. Donc φ agit comme décalage à droite sur les adresses des pavés.

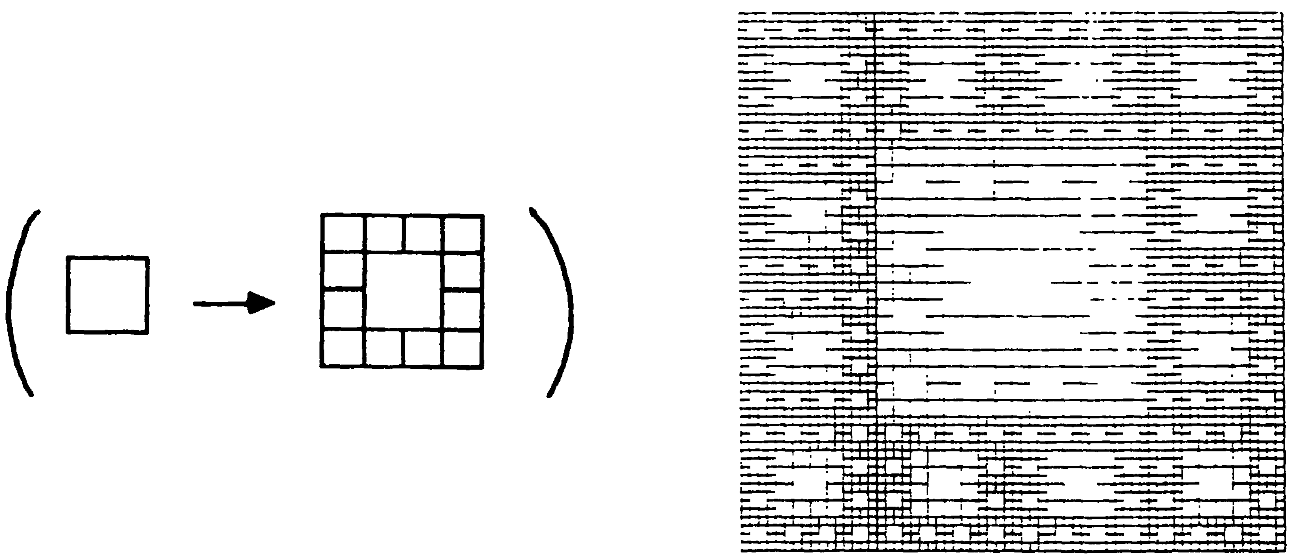

Figure 4 : Un pavage autosimilaire, avec motif de subdivision d'un pavé.

On voit que X est localement produit de $\mathbf{C}$ par un Cantor $\mathbf{Z}_{13}$, l'ensemble des entiers 13-adiques. On peut même codifier chaque point de X, par une suite bi-infinie $\{\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$ telle que φ agit comme shift à droite. Avec ce codage, on voit que φ est un homéomorphisme d'Anosov.

Bibliographie

[1] R. KENYON. — *Inflationary tilings with a similarity structure*, Prépublication de l'Institut Fourier.

[2] W. P. THURSTON. — *Groups, tilings, and finite state automata*, AMS colloquium lectures, 1990.

Richard KENYON
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
URA188 du CNRS
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)