Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GILLES COURTOIS

La première valeur propre non nulle du laplacien des p-formes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 8 (1989-1990), p. 73-75

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1989-1990__8__73_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1989–1990 (73–75)

LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE NON NULLE DU LAPLACIEN DES p-FORMES

par *Gilles COURTOIS*

Cet exposé est un résumé de [C-C] dans lequel les auteurs étudient les relations entre l'existence de petites valeurs propres non nulles pour le laplacien des p-formes et la géométrie d'une variété riemannienne compacte M.

Cette étude est motivée par le cas du laplacien des fonctions (*i.e.* $p = 0$) où les inégalités de Buser et Cheeger permettent de comprendre l'allure d'une variété M dont la première valeur propre $\lambda_1(M)$ est petite. Dans ce cas, en effet, M ressemble à une haltère, ce qui veut dire que la constante isopérimétrique de Cheeger $h(M)$ est elle aussi petite.

La constante de Cheeger est définie par

(0.1) $$h(M) = \inf\left[\operatorname{vol}\partial\Omega/\operatorname{vol}\Omega\ ,\ \operatorname{vol}\Omega \leqslant \operatorname{vol} M/2\right]$$

et nous avons les inégalités suivantes, *cf.* [Bu 1], [Bu 2], [CR].

(0.2) $$\frac{1}{4}h^2(M) \leqslant \lambda_1(M) \leqslant c_1\left(\delta h(M) + h^2(M)\right)$$

où c_1 est une constante qui dépend de la dimension de M et δ un minorant de la courbure de Ricci. Soit $\lambda_1(p, M)$ la première valeur propre non nulle du laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$ agissant sur les p-formes différentielles de M.

Rappelons que δ est l'adjoint de la différentielle extérieure d par rapport au produit scalaire $\langle\alpha, \beta\rangle = \int_M \alpha \wedge \beta$ où $*$ est l'opérateur de Hodge.

Contrairement au cas des fonctions, la constante de Cheeger $h(M)$ ne permet pas de minorer $\lambda_1(p, M)$ si $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $n = \dim M$.

THÉORÈME 1 ([C-C]). — *Soit $m \geqslant 3$ et $1 \leqslant p \leqslant (m-1)$ des entiers. Il existe une famille $M_t = (M, g_t)$, $0 < t \leqslant 1$ de variétés riemanniennes compactes de dimension m et de courbures sectionnelles et diamètre bornés telles que*

(a) $h(M_t) \geqslant c > 0$, *c indépendant de t.*

(b) $\lim_{t\to 0} \lambda_1(p, M_t) = 0$.

Les exemples du théorème 1 sont obtenus par des effondrements d'une variété M sur une variété N ayant plus de topologie que M, (*cf.* [PA], [C-G 1], [C-G 2] pour des définitions précises d'un effondrement). Par exemple les métriques de Berger g_t sur S^{2n+1} réalisent un effondrement de S^{2n+1} sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, (*cf.* [C-G], exemple 1.2) et $\lambda_1(S^{2n+1}_{g_t}, 2k)$ est arbitrairement petit, pour $1 \leqslant k \leqslant (n-1)$.

Ces exemples obtenus par effondrements sont en fait les seuls exemples de variétés à courbure et diamètre bornés ayant une petite valeur propre (non nulle). En effet, soit $\mathcal{M}(n,a,b)$ l'ensemble des variétés riemanniennes de courbure sectionnelle et diamètre bornés respectivement par a et b. On a le :

THÉORÈME 2. — *Il existe $\varepsilon = \varepsilon(n,a,b) > 0$ tel que si $M \in \mathcal{M}(n,a,b)$ et $\lambda_1(M,p) < \varepsilon$ pour un entier $0 < p < n$, alors M admet des effondrements.*

Remarque. — La propriété pour M d'admettre des effondrements est une propriété topologique de M, *cf.* [C-G 1], [C-G 2].

Plan de preuve du théorème 2. — Soit $\mathcal{M}(n,a,b,c)$ l'ensemble des variétés riemanniennes de dimension n, à courbure et diamètre majorés par a et b respectivement et à rayon d'injectivité minoré par c. Un théorème de Peters, [Pe], assure la relative compacité de $\mathcal{M}(n,a,b,c)$ dans la topologie C^1 des métriques (modulo l'action des difféomorphismes). La continuité de $\lambda_1(p,M)$ par rapport à la topologie C^1 sur l'ensemble des métriques entraîne que $\lambda_1(p,M)$ est minoré sur l'adhérence de $\mathcal{M}(n,a,b,c)$. Le fait que $\lambda_1(p,M)$ soit petit pour $M \in \mathcal{M}(n,a,b)$ entraîne donc que le rayon d'injectivité de M est petit. Le théorème 2 découle alors du théorème du rayon critique de Cheeger-Gromov, *cf.* [C-G 2].

BIBLIOGRAPHIE

[BU 1] BUSER P. — *On Cheeger inequality* $\lambda_1 \geqslant h^2/4$, Proc. of Symp. in Pure Math., **36** (1980), 29–77.

[BU 2] BUSER P. — *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Série 4, **15** (1982), 213–230.

[C-C] COURTOIS G., COLBOIS B. — *A note on the first non zero eigenvalue of the laplacian acting on p-forms*, Manuscripta Math., **68** (1990), 143–160.

[C-G 1] CHEEGER J., GROMOV M. — *Collapsing riemanniann manifolds while keeping their curvature bounded I*, J. Diff. Geom., **23** (1986), 309–346.

[C-G 2] CHEEGER J., GROMOV M. — *Collapsing riemanniann manifolds while keeping their curvature bounded II*, Preprint.

[CR] CHEEGER J. — *A lower bound for the smallest eigenvalue of the laplacian problems in analysis*, A symposium in honour of Bochner, Princeton University Press, N.J. (1970), 195–199.

[PA] PANSU P. — *Dégénérescence des variétés riemanniennes, d'après J. Cheeger et M. Gromov*, Astérisque **121**, 1985.

[PE] PETERS S. — *Convergence of riemanniann manifolds compositio*, Math., **62** (1987), 1–16.

Gilles COURTOIS
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)