Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GILLES F. ROBERT

Formule(s) de Pesin

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 8 (1989-1990), p. 63-72
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1989-1990__8__63_0>

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1989–1990 (63–72)

FORMULE(S) DE PESIN

par *Gilles F. ROBERT*

Introduction

M étant une variété Riemannienne compacte de classe $C^r, r \geq 3$ sans points focaux, Pesin donne une formule pour l'entropie du flot géodésique (f^t), mesurée pour la mesure de Liouville λ:

$$h_\lambda(f^1) = \int_{SM} \mathcal{H}(v)\, d\lambda(v)$$

où $\mathcal{H}(v)$ est la courbure moyenne au point $m = \pi(v)$ de l'horosphère (dans M) passant par m orthogonal à v.

La démonstration de cette égalité s'effectue en trois étapes:

1) Inégalité de Ruelle.

Si M est compacte et $T : M \to M$ est un C^1-difféomorphisme préservant la mesure μ, on a l'inégalité:

$$(*) \qquad h_\mu(T) \leq \int_M \chi_T^+(x)\, d\mu(x)$$

où $\chi_T^+(x)$ est la somme des exposants caractéristiques de Lyapounoff positifs.

2) Première formule de Pesin.

Si on suppose de plus que T est $C^{1,\alpha}$ et que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $(*)$ devient une égalité.

3) Deuxième formule de Pesin.

Une manipulation de l'intégrale permettra alors de prouver l'égalité cherchée.

Préliminaires

1. Définition de l'Entropie.

Les démonstrations peuvent être trouvées dans [M2,pp.207–226] ou dans [R1]; je ne les expliciterai pas.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ étant deux partitions de M, on convient de noter $\mathcal{P}(x)$ l'élément de $\mathcal{P}$ contenant $x \in M$ et $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ la partition engendrée par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

On définit alors:

l'entropie de $\mathcal{P}$ comme

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P)$$

et l'entropie relative de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{Q}$ comme

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &= \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \mu(Q) \left[-\sum_{P \in \mathcal{P}} \frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(Q)} \log \frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(Q)} \right] \\ &= -\sum_{\substack{P \in \mathcal{P} \\ Q \in \mathcal{Q}}} \mu(P \cap Q) \log \frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(Q)} \end{aligned}$$

On aura alors $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{Q}) + H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q})$ et, si $\mathcal{P}$ est plus fine que $\mathcal{P}_0$:

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) &\geq H_\mu(\mathcal{P}_0|\mathcal{Q}) \\ H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P}) &\leq H_\mu(\mathcal{Q}|\mathcal{P}_0) \end{aligned}$$

Si $T : M \to M$ préserve alors la mesure μ, on définit l'entropie de T relativement à la partition $\mathcal{P}$ comme

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\mu\Big(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\mathcal{P}\Big)$$

On a alors $h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} H_\mu(\mathcal{P}| \bigvee_{j=0}^{n} T^{-j}\mathcal{P})$.

La suite du second membre étant alors décroissante, il vient

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) \leq H_\mu(\mathcal{P}|T^{-1}\mathcal{P})$$

Autre écriture.

Si on remarque alors $H_\mu(\mathcal{P}) = \int_M -\log \mu(\mathcal{P}(x))\, d\mu(x)$, appelant $\mathcal{P}^n$ la partition $\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\mathcal{P}$, on a la formule

$$h_\mu(T, \mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \int_M -\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^n(x))\, d\mu(x).$$

Le théorème de Shannon-McMillan-Breiman, qui permet d'assurer la convergence de la suite de fonctions $\left(-{}^1\!/_n \log \mu(\mathcal{P}^n(x))\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}^1$ pour le cas où $\mathcal{P}$ a une entropie finie, nous permet d'écrire

$$h_\mu(T,\mathcal{P}) = \int_M - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\log \mu(\mathcal{P}^n(x))\right) d\mu(x).$$

Si on appelle alors entropie mesurée de T le réel $h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(T,\mathcal{P})$, et si $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de partitions engendrant la tribu Borélienne de M, le théorème de Kolmogorov-Sinaï nous assure

$$h_\mu(T) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(T,\mathcal{P}_n).$$

2. Exposants de Lyapounoff–Théorème d'Oseledec's.

Voir [O] ou [M2,pp.267–281]

Si T est un difféomorphisme sur M compacte, il existe un ensemble $\Lambda \subset M$ *de mesure pleine pour toute mesure invariante* vérifiant:

$$\forall x \in \Lambda, \quad \begin{cases} \exists \lambda_1(x) > \lambda_2(x) > \ldots > \lambda_m(x) \\ \exists E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \ldots \oplus E_m(x) = T_x M \end{cases}$$
$$\forall v \in E_i(x), \qquad v \neq 0 \Longrightarrow \lambda_i(x) = \lim_{n\to\infty} {}^1\!/_n \log \|(D_x T^n)v\|$$

On appelle $E_i(x)$ les espaces caractéristiques en x et $\lambda_i(x)$ les exposants de Lyapounoff associés. On pose alors

$$\chi_T^+(x) = \sum_{\lambda_i(x)>0} \lambda_i(x) \dim Ei(x).$$

1. Inégalité de Ruelle

L'idée de la démonstration consiste à choisir une partition de M qui permette de mesurer les exposants de Lyapounoff.

Pour ce faire, Ruelle [R2] utilise une triangulation de la variété, tandis que Mañe [M2,pp.281–285] préfère utiliser le Théorème de Nash-Moser.

Soit donc un plongement isométrique de M dans $\mathbb{R}^\ell$.

M étant fermée dans $\mathbb{R}^\ell$, pour tout $y \in \mathbb{R}^\ell$, il existe $x = \pi(y)$ dans M vérifiant $d(y,x) = \inf_{m\in M} d(y,m) = d(y,M)$, y appartient alors à l'espace affine $(T_x M)^\perp$ orthogonal à $T_x M$ passant par x.

Si on note alors $B_\varepsilon((T_x M)^\perp)$ la boule de rayon ε centrée en x contenue dans cet espace, ceci prouve le résultat suivant:

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ouvert $M_\varepsilon = \left\{ y \in \mathbb{R}^\ell \mid d(y, M) \leq \varepsilon \right\}$ est

$$M_\varepsilon = \bigcup_{x \in M} B_\varepsilon((T_x M)^\perp),$$

La continuité du rayon d'injectivité de l'exponentielle normale sur M compacte permet alors de trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que $(x_1, x_2) \in M$

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow B_{\varepsilon_0}((T_{x_1} M)^\perp) \cap B_{\varepsilon_0}((T_{x_2} M)^\perp) = \emptyset.$$

Ceci permet alors de prolonger $T : M \to M$ en $T_0 : M_{\varepsilon_0} \to M_{\varepsilon_0}$ difféomorphisme sur son image et vérifiant:

$$T_0 : M \longrightarrow M \text{ et } T_{0|M} = T$$

$$\forall x \in M, \quad \begin{cases} (D_x T_0) : (T_x M)^\perp \longrightarrow (T_{(T_0 x)} M)^\perp \\ \|(D_x T_0)_{|(T_x M)^\perp}\| \leq 1/2 \end{cases}$$

Soit un indice j fixé, à $x \in \mathbb{R}$ on associe $T_j(x)$ la tranche de M par l'hyperplan $x_j = x$.

Appelant $\Sigma_j = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu(T_j(x)) \neq 0\}$, le fait que μ soit une mesure de probabilité entraine que Σ_j est au plus dénombrable.

Ceci permet donc, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ étant non dénombrable, de trouver $x = (x_1, \ldots x_\ell)$ tel que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, et tout $j \in [1, \ell]$, on ait $\mu(T_j(x_j + q)) = 0$.

On effectue alors une translation ramenant $(x_1, \ldots x_\ell)$ en $(0, \ldots 0)$ et on considère, $n \geq 1$ étant donné, la partition $\mathcal{P}_n$ de $\mathbb{R}^\ell$ en cubes de la forme

$$\left[\frac{q_1}{n}, \frac{q_1 + 1}{n}\right[\times \ldots \times \left[\frac{q_\ell}{n}, \frac{q_\ell + 1}{n}\right[,$$

La suite de partitions $(\mathcal{P}_n)_{n \geq 1}$ engendrant la tribu Borélienne de M privé d'un ensemble de mesure nulle, comme la partition $\mathcal{P}_{mn}$ est plus fine que $\mathcal{P}_m \vee \mathcal{P}_n$, le théorème de Kolmogorov-Sinaï montre

$$h_\mu(T) = \lim_{n \to \infty} h_\mu(T, \mathcal{P}_n \cap M).$$

Comme de plus $h_\mu(T, \mathcal{P}_n \cap M) \leq H_\mu(\mathcal{P}_n \cap M | T^{-1}(\mathcal{P}_n \cap M))$, la concavité de la fonction $x \mapsto \log x$ montre

$$H_\mu(\mathcal{P}_n \cap M | T^{-1}(\mathcal{P}_n \cap M)) \\ \leq \sum_{A \in \mathcal{P}_n \cap M} \mu(A) \log \# \left\{ B \in \mathcal{P}_n \cap M \mid B \cap T^{-1}(A) \neq \emptyset \right\},$$

Si on pose alors $\nu_{T,n}(x) = \# \left\{ B \in \mathcal{P}_n \mid B \cap T^{-1}(A) \neq \emptyset \right\}$ pour $x \in A$, on a

$$h_\mu(T, \mathcal{P}_n \cap M) \leq \int_M \log \nu_{T,n}(x) \, d\mu(x),$$

On pose alors $\nu_T(x) = \limsup_{n\to\infty} \nu_{T,n}(x)$ et le théorème de convergence dominée de Lebesgue montrera alors

$$h_\mu(T) \le \int_M \log \nu_T(x)\, d\mu(x).$$

Cette inégalité reste bien entendu vraie si, au lieu de T prolongé par T_0, je considère T^n prolongé par T_0^n, j'ai donc

$$h_\mu(T) = \frac{1}{n} h_\mu(T^n) \le \int_M \frac{1}{n} \log \nu_{T^n}(x)\, d\mu(x).$$

Le fait que T_0^n soit un difféomorphisme sur son image montre alors, en appelant Q_0 le cube $[-1,1]^\ell$:

$$\nu_{T^n}(x) \le \sup_y \# \{P \in \mathcal{P}_1 \mid (y + (D_x T_0^n) Q_0) \cap P \ne \emptyset\},$$

Cette inégalité étant renforcée si je considère à la place de Q_0 un parallélépipède le contenant.

Soit donc Q un tel parallélépipède dont les vecteurs de base $(e_k)_{1\le k\le \ell}$ soient

(1) Soit dans un espace caractéristique $E_i(x)$

(2) Soit dans $(T_x M)^\perp$.

$y \in \mathbb{R}^\ell$ étant alors fixé, le parallélogramme $(y + (D_x T_0^n) Q)$ aura pour côtés $(\|(D_x T_0^n) e_k\|)_{1\le k\le \ell}$, un lemme simple montre alors que le nombre de cubes de côté 1 le rencontrant est inférieur au produit des longueurs des côtés supérieurs à 1 multiplié par une constante, on a alors

$$\nu_{T^n}(x) \le \text{ Cste } \prod_{\|(D_x T_0^n) e_k\| > 1} \|(D_x T_0^n) e_k\|,$$

et donc

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu_{T^n}(x) \le \sum_{\lambda_i(x) > 0} \lambda_i(x) \dim Ei(x) = \chi_T^+(x).$$

Il suit, après une autre utilisation du théorème de convergence dominée

$$h_\mu(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} h_\mu(T^n) \le \int_M \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \nu_{T^n}(x)\, d\mu(x)$$
$$h_\mu(T) \le \int_M \chi_T^+(x)\, d\mu(x).$$

2. Première formule de Pesin

La première démonstration de cette formule, donnée par Pesin dans [P1], rentre dans le cadre d'une étude beaucoup plus large concernant en particulier les variétés stables et instables. Cette étude n'étant pas nécessaire à la démonstration, nous suivrons plutôt le plan de celle donnée par Mañe dans [M1].

Cette démonstration comprend deux étapes:

Première étape.

Si μ invariante est absolument continue par rapport à une autre mesure ν, si $\rho : M \to]0,1[$ est telle que $(\log \rho)$ soit intégrable par rapport à μ, on a

$$h_\mu(T) \geq \int_M h_\nu(T,\rho,x)\,d\mu(x)$$

où $h_\nu(T,\rho,x) = \limsup_{n\to\infty} \left(-{}^1\!/\!_n \log \nu(S_n(T,\rho,x))\right)$

et $S_n(T,\rho,x) = \left\{y \in M \mid \forall 0 \leq j \leq n, d(T^j(x),T^j(y)) \leq \rho(T^j(x))\right\}$.

Démonstration. — On pose $r_n = e^{-n}$ et $U_n = \{x \in M \mid r_{n+1} \leq \rho(x) < r_n\}$, comme on a $n\mu(U_n) = \int_{U_n} n\,d\mu(x) \leq \int_{U_n} \left[-\log \rho(x)\right]\,d\mu(x)$, l'intégrabilité de $(\log \rho)$ entraine alors la convergence de la série de terme général $n\mu(U_n)$.

On construit alors une partition $\mathcal{P}$ en utilisant l'existence de $C > 0$ et pour tout $r \leq \operatorname{diam}(M)$, d'une partition $(\mathcal{P}_r)$ de M en parties de diamètre inférieur à r dont le cardinal soit majoré par

$$\#\mathcal{P}_r \leq C\left({}^1\!/\!_r\right)^{\dim M}$$

Les atomes de la parition $\mathcal{P}$ seront alors les $(U_n \cap P)$ pour $P \in \mathcal{P}_{r_{n+1}}$.

On aura alors pour $x \in U_n$, $\operatorname{diam}\mathcal{P}(x) \leq r_{n+1} \leq \rho(x)$ et la convergence de $\sum n\mu(U_n)$ montrera, avec la concavité de $x \mapsto \log x$, que $\mathcal{P}$ a une entropie finie.

Notant alors $\mathcal{P}^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\mathcal{P}$, on aura

$$h_\mu(T) \geq h_\mu(T,\mathcal{P}) = \int_M \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\log \mu(\mathcal{P}^n(x))\right)\,d\mu(x).$$

L'absolue continuité de μ par rapport à ν entrainera

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(\mathcal{P}^n(x))}{\nu(\mathcal{P}^n(x))} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)(x) \qquad \nu \text{ presque-partout.}$$

On aura alors

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log \mu(\mathcal{P}^n(x))\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log \nu(\mathcal{P}^n(x))\right) + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log \frac{\mu(\mathcal{P}^n(x))}{\nu(\mathcal{P}^n(x))}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log \mu(\mathcal{P}^n(x))\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log \nu(\mathcal{P}^n(x))\right) \qquad \mu \text{ p-p.}$$

L'inégalité $\operatorname{diam} \mathcal{P}(x) \leq \rho(x)$ entrainant $\mathcal{P}^n(x) \subset S_n(T, \rho, x)$, on aura

$$\lim_{n \to \infty} \left(-{}^1\!/\!_n \log \nu(\mathcal{P}^n(x))\right) \geq h_\nu(T, \rho, x),$$

et donc

$$h_\mu(T) \geq \int_M h_\nu(T, \rho, x)\, d\mu(x).$$

Deuxième étape.

Supposant alors que T est $C^{1,\alpha}$ et que ν est la mesure de Lebesgue, le problème consiste à trouver, $\varepsilon > 0$ étant fixé, $N \geq 1$, $\rho : M \to]0, 1[$ et $K \subset M$ vérifiant

(1) $(\log \rho)$ est μ-intégrable,

(2) $\mu(K^c) \leq \varepsilon$

(3) $h_\nu(T^N, \rho, x) \geq N[\chi_T^+(x) - \varepsilon]$ pour $x \in K$.

En effet, on aura alors:

$$\begin{aligned}
h_\mu(T) = \frac{1}{N} h_\mu(T^N) &\geq \frac{1}{N} \int_M h_\nu(T^N, \rho, x)\, d\mu(x) \\
&\geq \frac{1}{N} \int_K h_\nu(T^N, \rho, x)\, d\mu(x) \geq \frac{1}{N} \int_K N[\chi_T^+(x) - \varepsilon]\, d\mu(x) \\
&\geq \int_K \chi_T^+(x)\, d\mu(x) - \varepsilon \geq \int_M \chi_T^+(x)\, d\mu(x) - \varepsilon(1 + C)
\end{aligned}$$

où C majore $\chi_T^+(x)$ pour μ-presque tout $x \in M$.

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $(*)$ est une égalité.

Démonstration. — Cette démonstration étant longue et technique, je ne la détaillerai pas, me contentant d'en exposer les idées principales.

Notant $E^u(x) = \bigoplus_{\lambda_i(x) > 0} E^i(x)$ et $E^0(x) = \bigoplus_{\lambda_i(x) \leq 0} E^i(x)$, si on pose $\Sigma_j = \{x \in M \mid \dim E^u(x) = j\}$ et $\mu_j(A) = \mu(A \cap \Sigma_j)/\mu(\Sigma_j)$ quand $\mu(\Sigma_j) \neq 0$, la linéarité de l'entropie permet d'écrire $h_\mu(T) = \sum_{\mu(\Sigma_j) \neq 0} h_{\mu_j}(T_{|\Sigma_j})$ et on peut alors se contenter d'effectuer la démonstration pour $M = \Sigma_j$.

L'idée consiste alors à assimiler M à un espace vectoriel par le choix d'un atlas, ce qui permet de parler de graphes et de dispersion de ces graphes.

Le fait que ν soit la mesure de Lebesgue permettant d'écrire

$$\nu(A) = B(x) \int_{E^0(x)} \nu_{|y+E^u(x)}(A \cap (y + E^u(x)))\, d\nu_{|E^0(x)}(y)$$

où $\nu_{|E^0(x)}$ et $\nu_{|y+E^u(x)}$ sont les mesures de Lebesgue sur les deux espaces affines et $B(x)$ l'"angle" entre ces deux espaces.

On pose alors $\Lambda_n(y) = S_n(T^N, \rho, x) \cap (y + E^u(x))$ et on cherche à minorer

$$\begin{aligned} h_\nu(T^N, \rho, x) &= \limsup_{n\to\infty}\Big(-\frac{1}{n}\log\int_{E^0(x)} \nu_{|y+E^u(x)}(\Lambda_n(y))\, d\nu_{|E^0(x)}(y)\Big) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty}\Big(-\frac{1}{n}\log \sup_{y\in E^0(x)} \nu_{|y+E^u(x)}(\Lambda_n(y))\Big) \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \inf_{y\in E^0(x)}\Big(-\frac{1}{n}\log \nu_{|y+E^u(x)}(\Lambda_n(y))\Big) \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, les théorèmes d'Egorov et Birkhoff montrent alors l'existence de $K_0 \subset M$, $N \geq 1$, $\lambda > \beta > 1$ tels que $\mu(K_0^c) \leq \varepsilon$ et, posant $g = T^N$

$$\forall x \in K_0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \forall v \in E^u(x), \|(D_x g^n)v\| \geq \lambda^n \|v\| \\ \forall v \in E^0(x), \|(D_x g^n)v\| \leq \beta^n \|v\| \\ (1/nN) \log|\det(D_x g^n)_{|E^u(x)}| \geq \chi_T^+(x) - \varepsilon \end{cases}$$

Posant alors $\rho(x) = \xi^{N(x)}$ où $N(x) = \min\{n \geq 1 \mid g^n(x) \in K_0\}$ et ξ est petit, on a la propriété que si $x \in K_0$, $g^n(x) \in K_0$, $y \in E^0(x)$ et $\Lambda_n(y) \neq \emptyset$, alors $g^n(\Lambda_n(y))$ est un graphe dont on majore la dispersion, on peut alors en majorer le volume et donc:

$$\text{Cste} \geq \int_{\Lambda_n(y)} |\det(D_z g^n)_{|T_z\Lambda_n(y)}|\, d\nu(z),$$

et la troisième inégalité permet de conclure.

3. Deuxième formule de Pesin

Dans le cadre du flot géodésique d'une variété compacte sans points focaux, l'ergodicité de la mesure de Liouville limite à cette seule mesure les cas d'application de l'égalité ci-dessus, les conditions de régularité étant satisfaites pour une métrique C^3.

Si à $v \in SM$ on associe un parallélépipède $\Pi(v)$ de l'espace instable $E^u(x)$ et si on pose

$$\lambda_t(v) = \frac{\mathrm{Vol}(df^t\Pi(v))}{\mathrm{Vol}(\Pi(v))} \text{ et } \overline{\lambda_t}(v) = \frac{\mathrm{Vol}(d\pi df^t\Pi(v))}{\mathrm{Vol}(d\pi\Pi(v))}$$

Ces deux quantités seront indépendantes du choix de $\Pi(v)$ et on aura

$$\chi_{f^t}(v) = \lim_{n\to\infty} 1/n \log\lambda_{nt}(v) = \lim_{n\to\infty} 1/n \log\overline{\lambda_{nt}}(v)$$

La première égalité provient directement de la définition, alors que la seconde vient du fait que $(d\pi)_{|E^u(v)}$ et son inverse ont des normes bornées uniformément sur SM.

Remarquant alors $\lambda_{nt}(v) = \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_t(f^{jt}(v))$, on a

$$h_\lambda(f^t) = \int_{SM} \chi_{f^t}^+(v)\, d\lambda(v) = \int_{SM} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \log\lambda_t(f^{jt}(v))\, d\lambda(v).$$

Le théorème de Birkhoff permet alors d'écrire

$$h_\lambda(f^t) = \int_{SM} \log \lambda_t(v)\, d\lambda(v)$$

On aura alors

$$h_\lambda(f^1) = \frac{1}{t} h_\lambda(f^t) = \int_{SM} \frac{1}{t} \log \lambda_t(v)\, d\lambda(v)$$

$$\text{et, de même } h_\lambda(f^1) = \int_{SM} \frac{1}{t} \log \overline{\lambda_t}(v)\, d\lambda(v)$$

On exprimera alors $\lim_{t\to 0} {}^1\!/\!_t \log \lambda_t(v)$ et $\lim_{t\to 0} {}^1\!/\!_t \log \overline{\lambda_t}(v)$ en termes de courbures principales de l'horosphère.

Remarquons que, la métrique étant de classe C^3, les fonctions de Busemann sont de classe C^2, donc les horosphères aussi, ce qui assure l'existence des courbures principales.

Soit donc $(e_i(v))_{1\leq i\leq n-1}$ la base orthonormée de $v^\perp$ formée des directions des courbures principales de l'horosphère et $K_i(v)$ les valeurs de ces courbures.

Appelant alors $(\xi_i(v))_{1\leq i\leq n-1}$ la base de $E^u(v)$ vérifiant $d\pi\xi_i(v) = e_i(v)$ et $Y_i(t) = d\pi df^t\xi_i(v)$ le champ de Jacobi limite défini par la valeur initiale $Y_i(0) = e_i(v)$, la définition de l'horosphère montrera $Y_i'(0) = -K_i(v)e_i(v)$.

Si je choisis alors pour parallélépipède celui basé sur $(\xi_i(v))_{1\leq i\leq n-1}$, le parallélépipède $d\pi df^t \Pi(v)$ sera basé sur $(Y_i(t))_{1\leq i\leq n-1}$ et $\overline{\lambda_t}(v)$ sera le déterminant de la matrice donnant les $Y_i(t)$ dans la base transportée parallèlement à $(e_i(v))$, la dérivée à l'origine sera alors la trace de la matrice dérivée, c'est à dire

$$\lim_{t\to 0} {}^1\!/\!_t \log \overline{\lambda_t}(v) = \lim_{t\to 0} \frac{\overline{\lambda_t}(v) - 1}{t} = \sum_{i=1}^{n-1} -K_i(v) = \mathcal{H}(v).$$

et la même manipulation sur $\lambda_t(v)$ permet d'écrire

$$\lim_{t\to 0} {}^1\!/\!_t \log \lambda_t(v) = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{K_i(v)}{1 + K_i(v)^2}(1 - \overline{K_i}(v))$$

où $\overline{K_i}(v) = \langle R(v, e_i(v))v \mid e_i(v)\rangle$ est la courbure sectionnelle suivant le 2-plan engendré par v et $e_i(v)$, on a donc

$$\begin{aligned} h_\lambda(f^1) &= \int_{SM} \mathcal{H}(v)\, d\lambda(v) \\ &= \int_{SM} -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{K_i(v)}{1 + K_i(v)^2}(1 - \overline{K_i}(v))\, d\lambda(v). \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[M1] MAÑE R. — *A proof of Pesin's formula*, Ergodic Theory Dynamical Systems, **1** (1980), 95–102.

[M2] MAÑE R. — *Ergodic Theory & Differentiable Dynamics*, Springer-Verlag, 1987.

[O] OSELEDEC'S V.I. — *A multiplicative ergodic theorem*, Trans. Moscow Math. Soc., **19** (1968), 197–231.

[P1] PESIN YA.B. — *Characteristic exponents & Smooth ergodic theory*, Russian Math. Surveys, **32–4** (1977), 55–114.

[P2] PESIN YA.B. — *Equations for the entropy of a geodesic flow on a compact Riemannian manifold without focal points*, Math. Notes, **24** (1978), 796–805.

[R1] ROKHLIN V.A. — *Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations*, Russian Math. Surveys, **22–5** (1967), 1–52.

[R2] RUELLE D. — *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Brasil. Mat., **9–1** (1978), 83–87.

Gilles F. ROBERT
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)