Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

M. Arcostanzo

Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 8 (1989-1990), p. 27-36
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1989-1990__8__27_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1989–1990 (27–36)

LE SPECTRE MARQUÉ DES LONGUEURS DES SURFACES À COURBURE NÉGATIVE

par *M. ARCOSTANZO*

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe. Désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes d'homotopie non triviales de M. Si $c \in \mathcal{C}$, alors il existe une géodésique périodique γ_c élément de c qui minimise la longueur des éléments de c. Soit $\ell_g(\gamma_c)$ la longueur de cette géodésique; le spectre marqué des longueurs de (M, g) est par définition $\mathcal{L}(g) = (\ell_g(\gamma_c))_{c\in\mathcal{C}} \in \mathbf{R}^{\mathcal{C}}$.

Ce spectre est inchangé si on remplace g par une métrique $\tilde{g}$ qui lui est isotope, c'est-à-dire $\tilde{g} = \psi * g$ où ψ est un difféomorphisme homotope à l'identité. Otal a montré le résultat suivant, qui est une sorte de réciproque de la remarque précédente :

THÉORÈME A (*cf.* [01]). — *Si M est une surface compacte connexe orientable de genre au moins 2, si g_1 et g_2 sont deux métriques sur M à courbures strictement négatives et vérifiant $\mathcal{L}(g_1) = \mathcal{L}(g_2)$, alors g_1 et g_2 sont isotopes.*

En fait, on peut affaiblir les hypothèses sur la courbure :

THÉORÈME A' (*cf.* [Fa]). — *Si M est une surface compacte connexe orientable de genre au moins 2, si g_1 et g_2 sont deux métriques sur M avec*

(a) g_1 est sans points conjugués.

(b) $\forall m \in M$, $Kg_2(m) \leqslant 0$ et $\{m \in M / Kg_2(m) = 0\}$ est de mesure nulle et si $\mathcal{L}(g_1) = \mathcal{L}(g_2)$,

alors g_1 et g_2 sont isotopes.

On a un résultat analogue dans un autre contexte : soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m, et $D \subset M$ un domaine homéomorphe à une boule fermée de $\mathbf{R}^n$. On peut définir une distance dans D : si $x, y \in D$, $d_D^g(x, y)$ est la borne inférieure des longueurs des chemins qui relient x à y en restant dans D. Par restriction, on obtient une distance $d^g_{\partial D}$ sur le bord de D. Si maintenant ψ est un difféomorphisme au voisinage de $\overline{D}$ qui laisse D invariant et dont la restriction à ∂D est l'identité, alors $d^g_{\partial D} = d^{\tilde{g}}_{\partial D}$, avec $\tilde{g} = \psi_* g$. Réciproquement, la distance sur le bord de D détermine en grande partie la métrique à l'intérieur de D en vertu du résultat suivant :

THÉORÈME B (*cf.* [02]). — *Supposons $n = 2$ et ∂D de classe C^1. Si g_1 et g_2 sont deux métriques, à courbures strictement négatives sur un voisinage de $\overline{D}$, et si $d^{g_1}_{\partial D} = d^{g_2}_{\partial D}$, alors $g_2 = \psi_* g_1$, où ψ est un difféomorphisme sur un voisinage de $\overline{D}$ avec $\psi(D) = D$ et $\psi_{|\partial D} = \mathrm{id}$.*

Dans la suite, on verra les idées fondamentales qui permettent de démontrer ces résultats; en particulier, il y a une analogie qui permet de considérer le problème B comme le problème A vu "à distance finie".

I. DU SPECTRE DES LONGUEURS À LA MESURE DE LIOUVILLE

1) La mesure de Liouville.

Le fibré cotangent T^*M d'une variété M possède une structure symplectique canonique : on définit une 1−forme μ sur T^*M par

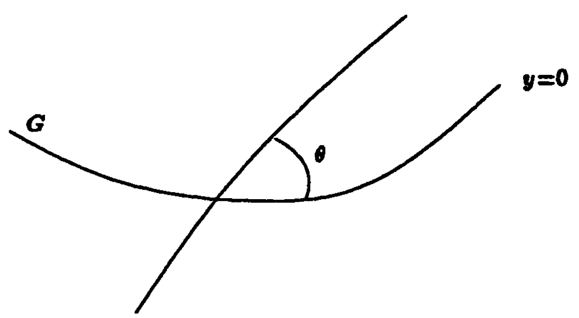
$$\forall z \in TT^*M\ ,\ \mu(z) = p_{T^*M}(z)(Tp_M(z)).$$

Alors $d\mu$ est une 2−forme fermée et non dégénérée qui donne la structure symplectique cherchée. Si maintenant (M, g) est riemannienne, on peut transférer la structure précédente sur TM : soit α et $d\alpha$ les formes correspondantes, alors

$$\forall z \in TTM\ ,\ \alpha(z) = g(p_{TM}(z), Tp_M(z)).$$

Notons encore $d\alpha$ la restriction de cette 2−forme au fibré unitaire SM ; $d\alpha$ est invariante par le flot géodésique, sa valeur absolue définit une mesure transverse invariante : c'est la mesure de Liouville $\Lambda(g)$.

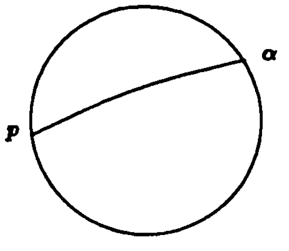
Son expression en coordonnées locales est la suivante : soit (x, y) des coordonnées locales sur M, $y = 0$ étant une géodésique G de M ; les géodésiques qui intersectent G sont supposées paramétrées par leur point d'intersection avec G et l'angle $\theta \in]0, \pi[$ qu'elles font en ce point avec le vecteur tangent à G. Alors dans ces coordonnées, la mesure de Liouville s'écrit



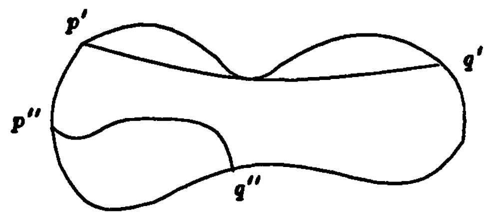
$$\Lambda(g) = \tfrac{1}{2} \sin\theta d\theta dx$$

2) Application au problème B.

On appelle géodésique de la distance $d^{g_i}_{\partial D}$ une courbe dans D joignant deux points de ∂D qui minimise la distance $d^{g_i}_D$ entre deux quelconques de ses points. On montre facilement que ces géodésiques sont C^1 et qu'on peut les paramétrer par les couples de points de ∂D. De plus, désignons par O_i l'ouvert constitué des géodésiques de $d^{g_i}_{\partial D}$ qui ont leurs extrémités transverses à ∂D et qui ne rencontrent ∂D qu'en leurs extrémités



un élément de O_i



les géodésiques $[p'q']$ et $[p''q'']$ ne sont pas dans O_i

Alors il y a "beaucoup" de géodésiques de $d^{g_i}_{\partial D}$ qui sont dans O_i en raison du fait suivant, qui est une conséquence du théorème de Sard et des hypothèses faites sur la courbure : pour tout $p \in D$ et tout vecteur unitaire u basé en p, il existe une unique géodésique de $d^{g_i}_{\partial D}$ passant par p et tangente en ce point à u ; de plus, l'ensemble des vecteurs de la fibre de SM au point p qui n'engendrent pas une géodésique élément de O_i est de mesure nulle.

Cela implique que l'on peut définir la mesure de Liouville sur l'ensememble des géodésiques de la distance $d^{g_i}_{\partial D}$, en oubliant celles qui ne sont pas dans O_i, sans changer son expression locale : la mesure de Liouville d'un ensemble F de géodésiques de $d^{g_i}_{\partial D}$ est $\Lambda(g_i)(F \cap O_i)$. L'expression en coordonnées locales donne immédiatement le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Si p et q sont deux points distincts de D, alors $d^{g_i}_D(p,q)$ est égale à la mesure de Liouville des géodésiques de $d^{g_i}_{\partial D}$ qui intersectent transversalement la géodésique de $d^{g_i}_D$ qui joint p à q.*

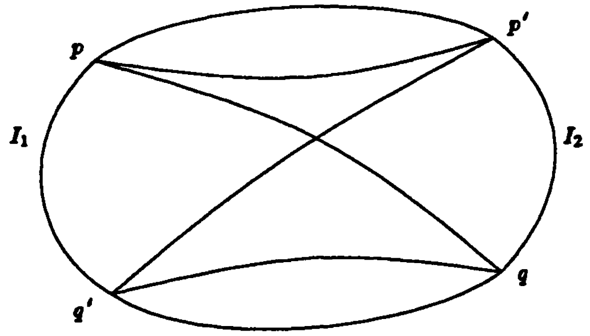
En particulier, si p et q sont deux points distincts de ∂D, on note $i(\Lambda(g_i),[pq])$ la mesure de Liouville des géodésiques de $d^{g_i}_{\partial D}$ qui intersectent transversalement la géodésique joignant p à q. On a alors

$$\forall p, q \in \partial B,\ p \neq q \Rightarrow\ d^{g_i}_{\partial D}(p,q) = i(\Lambda(g_i),[pq]) \qquad (*)$$

C'est cette formule qui réalise le lien entre la distance sur le bord de D et la mesure de Liouville.

On a alors la formule combinatoire suivante : si F_i désigne l'ensemble des géodésiques de $d^{g_i}_{\partial D}$ dont une extrémité est dans I_1 et l'autre extrémité dans I_2 ($I_1 \cap I_2 = \emptyset$), alors

$$\Lambda(g_i)(F_i) = \frac{1}{2}\left[i(\Lambda(g_i),[pq]) + i(\Lambda(g_i),[p'q']) - i(\Lambda(g_i),[pp']) - i(\Lambda(g_i),[qq'])\right]$$



Il existe une application naturelle Φ qui, à une géodésique de $d^{g_1}_{\partial D}$, associe la géodésique de $d^{g_2}_{\partial D}$ qui a mêmes extrémités. Des résultats précédents, on tire immédiatement la

PROPOSITION. — *$d^{g_1}_{\partial D} = d^{g_2}_{\partial D}$ si et seulement si $\Phi_* \Lambda(g_1) = \Lambda(g_2)$;*

3) Application au problème A.

Considérons $\widetilde{M}$, revêtement universel de M, muni de la métrique $\tilde{g}_i$, relevé de la métrique g_i. Il est connu que l'ensemble des géodésiques de $(\widetilde{M}, \tilde{g}_i)$ s'identifie à l'ensemble des paires de points de $\widetilde{M}^{\tilde{g}_i}_{\infty}$, cercle à l'infini de $\widetilde{M}$, et que $\overline{\widetilde{M}} = \widetilde{M} \cup \widetilde{M}^{\tilde{g}_i}_{\infty}$, muni d'une topologie convenable, est homéomorphe à une boule fermée de $\mathbf{R}^2$ euclidien (*cf.* [Eb–ON]). Remarquons que $\pi_1(M)$, groupe des automorphismes de revêtement de M, agit par isométries sur $\widetilde{M}$, et donc agit sur $\widetilde{M}^{\tilde{g}_i}_{\infty}$.

La mesure de Liouville $\Lambda(g_i)$ sur les géodésiques de (M, g_i) se relève en une mesure $\widetilde{\Lambda}(g_i)$ sur les géodésiques de $(\widetilde{M}, \tilde{g}_i)$. Cette mesure est positive, invariante sous l'action de $\pi_1(M)$ et finie sur les compacts. C'est donc un exemple de courant géodésique :

DÉFINITION (*cf.* [Bo1], [Bo2]). — *On appelle courant géodésique une mesure de Borel positive sur les géodésiques de $\widetilde{M}$, invariante sous l'action de $\pi_1(M)$ et finie sur les compacts. Une définition équivalente et plus facile à visualiser géométriquement consiste à définir un courant géodésique comme une mesure positive invariante transverse au feuilletage géodésique de M.*

Un autre exemple fondamental de courants géodésiques est le suivant : comme $K_{g_i} < 0$, dans toute classe d'homotopie libre non triviale c, le minimum de la longueur des lacets de c est réalisé par une unique géodésique périodique γ_c. Si cette géodésique est primitive, on peut lui associer un courant géodésique $j(c)$, égal à la somme des masses de Dirac associées aux relevés de γ_c dans $\widetilde{M}$. Sinon $\gamma_c = \gamma^p_{c'}$ avec $\gamma_{c'}$ primitive et $p \in \mathbf{Z}$, auquel cas on définit $j(c) = |p| j(c')$. L'importance de ces courants $j(c)$ est que l'ensemble $\{\lambda j(c) / \lambda \in \mathbf{R}^*_+,\ c \in \mathcal{C}\}$ est dense dans l'ensemble $\mathcal{C}(M)$ des courants géodésiques muni de la topologie de la convergence vague.

Une propriété importante des courants géodésiques est l'existence d'un nombre d'intersection, c'est-à-dire d'une application $i : \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \longrightarrow \mathbf{R}_+$, bilinéaire, symétrique et continue (*cf.* [Bo1]) : $i(j(c), j(c'))$ n'est rien d'autre que le cardinal de $\gamma_c \cap \gamma_{c'}$; et pour $\lambda \in \mathcal{C}(M)$, $i(\lambda, j(c))$ peut être décrit ainsi : c'est la mesure λ des géodésiques qui intersectent transversalement I_c, intervalle fondamental d'un relevé quelconque de γ_c. En raison de l'expression en coordonnées de la mesure de Liouville, il vient

$$\forall c \in \mathcal{C}, \quad \ell g_i(\gamma_c) = \ell_{\tilde{g}_i}(I_c) = i(\widetilde{\Lambda}(g_i), j(c))$$

qui est l'analogue exact de la formule (*) du 2).

Le résultat suivant vient donc sans surprise :

PROPOSITION. — *L'application* $I : \lambda \in \mathcal{C}(M) \mapsto (i(\lambda, j(c)))_{c \in \mathcal{C}} \in \mathbf{R}^{\mathcal{C}}$ *est injective.*

La preuve est plus délicate que dans le 2), car on ne peut appliquer la formule combinatoire qu'à des segments de géodésiques de longueur finie. L'idée consiste à l'appliquer à des intervalles fondamentaux de plus en plus grands et dont les extrémités tendent vers des éléments de $\widetilde{M}_\infty$.

L'interprétation du résultat obtenu est aussi plus difficile : d'après le théorème d'Anosov, les feuilletages géodésiques de (M, g_1) et (M, g_2) sont topologiquement conjugués, donc, en passant au revêtement universel, il existe un homéomorphisme Φ, $\pi_1(M)$–équivariant, entre les géodésiques de $(\widetilde{M}, \tilde{g}_1)$ et celles de $(\widetilde{M}, \tilde{g}_2)$ (*cf.* aussi [Fl] où il est construit à partir de $\pi_1(M)$ un ensemble $\overline{G}$ muni d'une action naturelle de $\pi_1(M)$ tel que pour toute métrique g sur M, il existe un homéomorphisme Φ^g, $\pi_1(M)$ équivariant, entre $\overline{G}$ et $\widetilde{M}^{\tilde{g}}_\infty$). Le résultat du 3) est alors :

PROPOSITION. — $\mathcal{L}(g_1) = \mathcal{L}(g_2) \Leftrightarrow \Phi_* \widetilde{\Lambda}(g_1) = \widetilde{\Lambda}(g_2)$.

Remarquons que si g_1 et g_2 sont des métriques hyperboliques, la dernière égalité implique que g_1 et g_2 sont isotopes (*cf.* [Bo2], p. 147).

II. L'ANGLE MOYEN ENTRE DEUX MÉTRIQUES À COURBURE NÉGATIVE

1) Une justification de ce qui va suivre.

Plaçons-nous dans le cadre du problème B et supposons qu'il existe ψ difféomorphisme sur un voisinage de $\overline{D}$ avec $g_2 = \psi_* g_1$, $\psi(D) = D$ et $\psi_{|\partial D} = \mathrm{id}$. Si p et q sont deux points distincts de ∂D, notons $[p, q]_i$ la géodésique de $d^{g_i}_{\partial D}$ qui les joint. De $\psi_{|\partial D} = \mathrm{id}$, on déduit que $\psi([p, q]_1) = [p, q]_2$, et donc que ψ induit sur les géodésiques de $d^{g_1}_{\partial D}$ l'application Φ introduite au I.2). Par conséquent, si x est un point de l'intérieur de D, et si p, p', q et q' sont quatre points distincts de ∂D vérifiant $\{x\} = [pp']_1 \cap [qq']_1$, on a forcément $\psi(x) = \Phi([pp']_1) \cap \Phi([qq']_1)$.

On sait alors quelle doit être la définition de ψ ; toutefois, pour que cette définition soit cohérente, il faut que le faisceau de géodésiques passant par x soit transformé par Φ en une famille de géodésiques de $d^{g_2}_{\partial D}$ qui s'intersectent toutes en un seul point. Ce même raisonnement s'applique au cas du problème A, une fois le difféomorphisme ψ relevé en un difféomorphisme $\tilde{\psi}$ de $\widetilde{M}$.

2) Définition de l'angle moyen et premières propriétés.

Soit v un vecteur unitaire de la surface M. Faisons-le tourner dans sa fibre d'un angle $\theta \in]0,\pi[$, et soit $\theta \cdot v$ le vecteur obtenu. Relevons ces deux vecteurs dans $\widetilde{M}$, et considérons l'image par Φ (introduit au I.3)) des géodésiques engendrées par ces deux vecteurs. Elles se coupent avec un angle $\gamma(v,\theta)$. Remarquons que cet angle ne dépend pas du relevé choisi dans $\widetilde{M}$, puisque Φ est $\pi_1(M)$ équivariant. La fonction γ est continue, donc on peut l'intégrer, d'abord en intégrant dans la fibre de v par rapport à la mesure de Lebesgue, puis sur toute la surface M. Remarquons que cela revient à intégrer γ comme fonction de v sur tout SM par rapport à la forme volume de Liouville $\alpha \wedge d\alpha$, avec les notations de I.1).

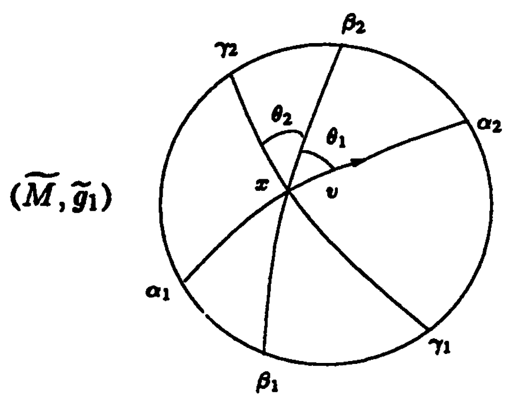
DÉFINITION. — $\forall \theta \in]0,\pi[$, $\Gamma(\theta) = \frac{1}{\nu(SM)} \int_{SM} \gamma(v,\theta) d\nu$ *où* ν *désigne la mesure introduite.*

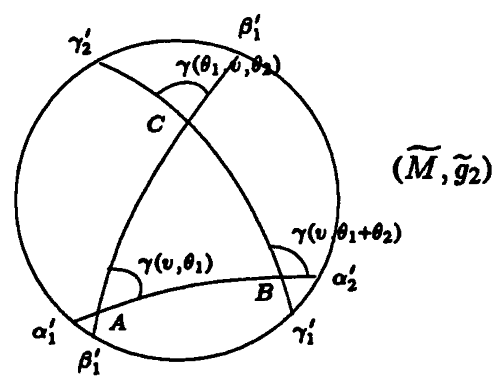
Dans le cas du disque D, on a la même définition en considérant directement les images par Φ des géodésiques engendrées par les deux vecteurs. La fonction γ est continue sur O_1, donc presque partout et par suite elle est mesurable.

PROPOSITION. — Γ *est continue,* $\Gamma(\pi - \theta) = \pi - \Gamma(\theta)$ *pour* $\theta \in]0,\pi[$ *et* $\Gamma(\theta_1 + \theta_2) \geqslant \Gamma(\theta_1) + \Gamma(\theta_2)$ *si* $\theta_1, \theta_2 \in]0,\pi[$ *avec* $\theta_1 + \theta_2 \in]0,\pi[$.

Preuve. — La continuité est claire pour la surface M, c'est une conséquence du théorème de Lebesgue pour le disque D.

Clairement $\gamma(v,\theta) + \gamma(\theta \cdot v, \pi - \theta) = \pi$, et l'invariance de la mesure de Lebesgue par rotation assure $\Gamma(\theta) + \Gamma(\pi - \theta) = \pi$ en intégrant.





Pour la troisième assertion, on écrit que la somme des angles intérieurs au triangle géodésique (ABC) est $\leqslant \pi$ d'après les hypothèses de courbure, avec égalité si et seulement si $A = B = C$, d'où $\gamma(v, \theta_1) + \gamma(\theta_1 \cdot v, \theta_2) \leqslant \gamma(v, \theta_1 + \theta_2)$ et le résultat voulu par intégration.

De plus, comme $\Gamma(\theta) > 0$ pour $\theta > 0$ et $\lim_{\theta \to 0} \Gamma(\theta) = 0$, Γ s'étend en un homéomorphisme de $[0, \pi]$ dans lui-même. Il est alors facile de voir qu'une condition suffisante pour obtenir $\Gamma = \mathrm{Id}$ est que Γ vérifie

(C) pour toute fonction convexe $F : [0, \pi] \to \mathbf{R}$, on a

$$\int_0^\pi F(\Gamma(\theta)) \sin\theta d\theta \leqslant \int_0^\pi F(\theta) \sin\theta d\theta.$$

3) Preuve de la condition (C).

En intégrant l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\pi F(\Gamma(\theta)) \sin\theta d\theta &\leqslant \frac{1}{\nu(SM)} \int_{SM} \left(\int_0^\pi F(\gamma(v, \theta)) \sin\theta d\theta \right) d\nu \\ &\leqslant \frac{1}{\nu(SM)} \int_{SM} \overline{F}(v) d\nu. \end{aligned}$$

Dans le cas de la surface M, $d\nu$ est invariante par le flot géodésique, donc peut être approchée dans la topologie vague par des combinaisons linéaires de mesures invariantes par le flot géodésique et supportées par des géodésiques fermées. Le second membre s'écrit alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell_{g_1}(\gamma_c^1)} \int_{\gamma_c^1 \times]0,\pi[} F(\gamma(\dot{\gamma}_c^1(t), \theta)) \sin\theta d\theta dt &= \frac{1}{\ell_{g_2}(\gamma_c^2)} \int_{\gamma_c^2 \times]0,\pi[} F(\theta') \sin\theta' d\theta' dt \\ &= \int_0^\pi F(\theta) \sin\theta d\theta \end{aligned}$$

car $\mathcal{L}(g_1) = \mathcal{L}(g_2)$ et $\Phi_* \Lambda(g_1) = \Lambda(g_2)$.

Dans le cas du disque D, les mesures supportées par des géodésiques sont remplacées par des masses de Dirac. Le principe reste le même.

4) Fin de la démonstration.

Elle est plus simple dans le cas de la surface M, à cause de la continuité de γ. Comme $\Gamma = \mathrm{id}$, on a égalité dans l'inégalité de Jensen et ceci pour toute fonction convexe F, ce qui implique $\gamma(v, \theta) = \theta$. On peut alors définir $\tilde{\psi}$ comme indiqué au II.1). Il est facile de voir que $\tilde{\psi}$ est bijective et $\pi_1(M)$–équivariante. En fait

PROPOSITION. — *$\tilde{\psi}$ est une isométrie entre $\widetilde{M}_\infty^{g_1}$ et $\widetilde{M}_\infty^{g_2}$.*

Preuve. — On constate que la distance entre deux points p et q de $(\widetilde{M}, \tilde{g}_1)$ est la mesure de Liouville $\widetilde{\Lambda}(g_1)$ des géodésiques de $(\widetilde{M}, \tilde{g}_1)$ qui séparent p et q, et on a une relation analogue pour la $\tilde{g}_2$−distance des points $\tilde{\psi}(p)$ et $\tilde{\psi}(q)$. Comme $\Phi_*\tilde{\Lambda}(g_1) = \tilde{\Lambda}(g_2)$ et qu'une géodésique de $(\widetilde{M}, \tilde{g}_1)$ qui sépare p et q est envoyée par Φ sur une géodésique de $(\widetilde{M}, \tilde{g}_2)$ qui sépare $\tilde{\psi}(p)$ et $\tilde{\psi}(q)$, on a la conclusion

$\tilde{\psi}$ se projette alors sur M en une isométrie ψ telle que $\psi_* g_1 = g_2$.

Par construction ψ envoie tout lacet sur un lacet qui lui est librement homotope, donc ψ est bien homotope à l'identité.

Pour le disque D, le raisonnement est plus délicat puisque $\gamma(v, \theta)$ n'est continue que sur l'ouvert dense O_1, il faut donc faire un passage à la limite pour montrer que ψ est bien définie. Ses propriétés se montrent de la même manière.

III. Tentatives d'extension des résultats précédents

1) Le théorème A'.

La démonstration est calquée sur celle du théorème A, il nous suffit d'en modifier quelques points. Dans toute la suite g_0 désigne une métrique hyperbolique sur $\dot{M}$ et g une métrique riemannienne quelconque. On dira qu'une g−géodésique de M est minimisante si un relèvement quelconque de cette géodésique au revêtement universel minimise la distance entre deux quelconques de ses points. En particulier, une métrique est sans points conjugués si et seulement si toutes ses géodésiques sont minimisantes.

Proposition 1. — *Il existe une constante $K(g)$ telle que toute $\tilde{g}$−géodésique minimisante du revêtement universel $\widetilde{M}$ est dans un K−voisinage d'une unique $\tilde{g}_0$−géodésique. L'application Φ ainsi définie est continue, surjective et propre, ainsi que $\pi_1(M)$−équivariante.*

Proposition 2. — *Si $g = g_2$, Φ est un homomorphisme.*

En effet, un résultat dû à Green affirme que la région située entre deux $\tilde{g}_2$−géodésiques minimisantes est à courbure partout nulle, et $\{m \in \widetilde{M} / K g_2(m) = 0\}$ est de mesure nulle.

Grâce à ces deux résultats, on peut associer à toute $\tilde{g}_1$−géodésique une $\tilde{g}_2$−géodésique de manière $\pi_1(M)$−équivariante, et par suite définir comme précédemment la fonction Γ, alors qu'on ne peut plus utiliser le théorème d'Anosov.

De plus, aux mesures de Liouville définies sur (M, g_1) et (M, g_2), on peut associer des courants géodésiques sur $(\widetilde{M}, \tilde{g}_0)$, notés $\overline{\Lambda}(g_1)$ et $\overline{\Lambda}(g_2)$. En particulier, on montre que $i(\overline{\Lambda}(g_i), \overline{\Lambda}(g_i))$ est proportionnel aux aires de M pour g_1 et g_2, ce qui permet de prouver la condition (C).

Les autres changements à apporter à la démonstration sont mineurs.

2) Extension du résultat du théorème A à la dimension n.

Les résultats sont encore partiels. L'idée (*cf.* [03]) consiste à intégrer la 2–forme canonique $d\alpha$ sur une famille de géodésiques bien choisie et à montrer que le résultat obtenu, dénommé birapport, est équivalent au spectre marqué des longueurs ou de la distance $d_{\partial D}$.

Commençons par le cas d'une boule compacte B munie d'une métrique à courbure strictement négative. On a sur l'espace des géodésiques une 2–forme canonique ω induite par la deux-forme $d\alpha$ de SM décrite au I.1). Soit $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$ deux intervalles disjoints de ∂B, orientés respectivement de a vers b et de c vers d. En intégrant ω sur l'ensemble des géodésiques orientées dont la première extrémité est dans I et la seconde dans J, on trouve $\omega(I \times J) = \tau(b,d) + \tau(a,c) - \tau(b,c) - \tau(a,d)$, où τ désigne la distance entre deux points de ∂B.

DÉFINITION. — *On appelle birapport des quatre points (a,b,c,d) le nombre réel*

$$B(a,b,c,d) = \tau(b,d) + \tau(a,c) - \tau(b,c) - \tau(a,d).$$

Comme $\tau(a,c) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to d} B(b,d,a,c)$, la donnée de τ est équivalente à la donnée de B.

On essaye ensuite d'étendre ce résultat à un cas non compact : soit (N,g) une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure strictement négative et de sphère à l'infini N_∞. On se donne a,b,c, et d quatre points distincts de N_∞ et on appelle γ (resp. γ') la géodésique qui joint a et b (resp. c et d). Comme avant, on cherche à intégrer ω sur la famille des géodésiques orientées qui joignent un point de γ' à un point de γ.

PROPOSITION – DÉFINITION. — *Cette intégrale existe, c'est la limite de $B(a_n,b_n,c_n,d_n)$ pour toutes suites $(a_n),(b_n),(c_n),(d_n)$ convergeant respectivement vers a,b,c et d. On la note $B(a,b,c,d)$, c'est une fonction continue sur l'ensemble des quadruplets de points de N_∞.*

Dans le cas où N est le revêtement universel d'une variété riemannienne complète M à courbure strictement négative, on a le résultat suivant

THÉORÈME. — *La donnée du spectre marqué des longueurs de (M,g) est équivalente à la donnée du birapport sur l'ensemble des quadruplets de points de l'ensemble limite L du groupe $\pi_1(M)$.*

Car si $\gamma \in \pi_1(M)$, de points fixes γ^+ et $\gamma^- \in L$, alors pour $z \in L$, $B(\gamma^-,\gamma^+,\gamma(z),z)$ est le double de la longueur de la géodésique qui représente γ. Dans l'autre sens, si $a',b' \in L \subset N_\infty$, on peut trouver $a'_n, b'_n \in N$ convergeant vers a' et b' de telle sorte que γ_n, projection dans M de la géodésique qui joint $a'n$ à $b'n$, ait des vecteurs tangents à ses extrémités arbitrairement proches dans TM, et se laisse donc approcher par des géodésiques périodiques de longueurs connues par hypothèse.

BIBLIOGRAPHIE

[Bo1] BONAHON F. — *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3*, Ann. Maths, 124 (1986), 71–158.

[Bo2] BONAHON F. — *The geometry of Teichmüller space via geodesic currents*, Invent. Math., 92 (1988), 139–162.

[Eb-ON] EBERLEIN P., O'NEIL P. — *Visibility manifolds*, Pacific J. Math., 46 (1973), 45–109.

[Fa] FATHI A. — *Le spectre marqué des longueurs des surfaces sans points conjugués*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., t. 309, série I (1989), 621–624.

[Fl] FLOYD W. — *Group completions and limit sets of Kleinian groups*, Invent. Math., 57 (1980), 205–218.

[O1] OTAL J.-P. — *Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative*, article.

[O2] OTAL J.-P. — *Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque*, article.

[O3] OTAL J.-P. — *Une remarque sur le flot géodésique des variétés à courbure négative*, article.

M. ARCOSTANZO
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)