Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

Colette Anné

Fonctions propres sur des variétés avec des anses fines, application à la multiplicité

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 7 (1988-1989), p. 123-133
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1988-1989__7__123_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1988–1989 (123–133)

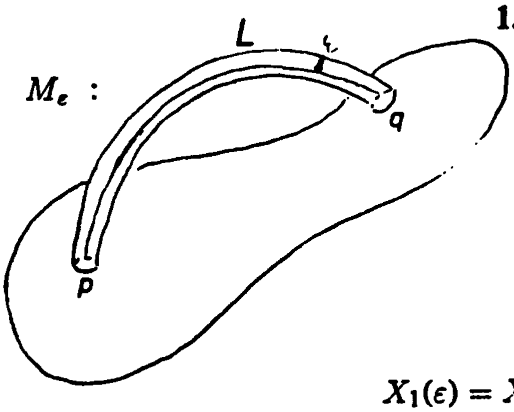
FONCTIONS PROPRES SUR DES VARIÉTÉS AVEC DES ANSES FINES, APPLICATION À LA MULTIPLICITÉ

par *Colette ANNÉ*

RÉSUMÉ. — On présente ici l'étude des fonctions propres du Laplacien lorsque l'on fait une perturbation par ajout d'une anse fine à une variété riemannienne compacte X_1. Ce travail se situe donc dans la suite de [A] qui donnait un résultat de convergence du spectre. Nous nous sommes restreints à la dimension 2. Les résultats de cette étude (théorème 1 ci-dessous) permettent alors d'énoncer un théorème concernant l'augmentation de la multiplicité d'une valeur propre (théorème 2) : si une valeur propre λ_0 de X_1, de multiplicité m, est fortement stable (SAH au sens de Colin de Verdière [CdV]); notons E_0 l'espace propre correspondant. Alors en tout couple de points (p,q) de la variété tel que l'une des deux formes linéaires $l_\pm(f) = f(p) \pm f(q)$ est nulle sur E_0 on peut ajouter une anse fine telle que par perturbation de la métrique de départ la variété M_ε obtenue admet λ_0 comme valeur propre de multiplicité $(m+1)$.

1. Introduction

M_ε :



Comment sont les fonctions propres du Laplacien sur M_ε?

On a vu ([A]) que par normalisation de la forme volume sur l'anse, il suffit d'étudier le modèle suivant. Si (X_1, g) est une surface compacte et p, q deux points distincts de X_1 ; L un réel $L > 0$:

$$X_1(\varepsilon) = X_1 - (B(p,\varepsilon) \cup B(q,\varepsilon))$$

$X_2 = [O, L] \times S^1$ muni de la métrique cylindrique, en utilisant l'isométrie

$$L_2(X_2, \varepsilon ds \wedge d\theta) \to L_2(X_2)$$
$$h \mapsto \sqrt{\varepsilon} h.$$

On se ramène à un problème de couplage entre les formes quadratiques $\int |df|^2$ sur $X_1(\varepsilon)$ et $\int \left(|\frac{\partial h}{\partial s}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\frac{\partial h}{\partial \theta}|^2\right)$ sur X_2 par les conditions de recollement aux bords. Posons

$M_\varepsilon = X_1(\varepsilon) \cup_r X_2$, $L_2(M_\varepsilon) = L_2(X_1(\varepsilon)) \times L_2(X_2)$ et

$$H^1(M_\varepsilon) = \{(f_1, f_2) \in H^1(X_1(\varepsilon)) \times H^1(X_2) | f_{2|\partial X_2} = \sqrt{\varepsilon} f_{1|\partial X_1(\varepsilon)}\}.$$

La forme quadratique q_ε de domaine $H^1(M_\varepsilon)$

$$q_\varepsilon(f_1, f_2) = \int_{X_1(\varepsilon)} |df_1|^2 + \int_{X_2} \left(|\frac{\partial f_2}{\partial s}|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\frac{\partial f_2}{\partial \theta}|^2 \right)$$

définit, par polarisation, un opérateur autoadjoint Δ_ε dans l'espace de Hilbert $L_2(M_\varepsilon)$, Laplacien de M_ε.

On sait déjà que le spectre de Δ_ε converge vers l'union des spectres de Δ_1, opérateur de Laplace-Beltrami de (X_1, g) et de Δ_2, opérateur de Laplace avec conditions de Dirichlet sur $[O, L]$.

Les fonctions de l'une des deux parties peuvent se voir sur M_ε. On a :

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon \ : \quad & H^1(X_1) \to H^1(M_\varepsilon) \\ & f \mapsto (f_{|X_1(\varepsilon)}, h_\varepsilon(f)) \end{aligned}$$

où $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} h_\varepsilon(f)$ est la prolongée harmonique, pour Δ_ε, de la donnée au bord de X_2 : $f_{|\partial X_1(\varepsilon)}$

$$\begin{aligned} \Psi_\varepsilon \ : \quad & H_0^1([O, L]) \to H^1(M_\varepsilon) \\ & h \mapsto (O, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h). \end{aligned}$$

Soit λ dans le spectre limite ($\lambda \in \mathrm{Sp}(\Delta_1) \cup \mathrm{Sp}(\Delta_2)$) et I un intervalle ouvert tel que

$$I \cap (\mathrm{Sp}(\Delta_1) \cup \mathrm{Sp}(\Delta_2)) = \{\lambda\}.$$

$E_\varepsilon(I)$ est l'espace propre de Δ_ε relatif à l'intervalle I, E_λ l'espace propre de Δ_1 pour la valeur propre λ (peut-être $E_\lambda = \{0\}$!) et $h_\lambda(s) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \sqrt{\lambda} s$ si $\lambda = (\frac{n\pi}{2})^2$.

2. Théorème abstrait

Un couple $(f, \lambda) \in H^1(M_\varepsilon) \times \mathbf{R}$ est un quasi-mode si f est proche d'une fonction propre de Δ_ε de valeur propre proche de λ. Pour décider si (f, λ) est un quasi-mode, on a :

PROPOSITION 1. — *$(q, \mathcal{D})$ est une forme quadratique positive fermée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

$\|f\|_1^2 = \|f\|^2 + q(f)$. Π_I *est le projecteur spectral associé à l'intervalle* $I =]\alpha, \beta[$, $\alpha \notin \mathrm{Sp}(q)$, $\beta \notin \mathrm{Sp}(q)$.

$\exists C > 0$ *tel que si* $f \in \mathcal{D}$ *et* $\lambda \in I$ *vérifient :*

$$\|f\| = 1 \text{ et } (*)\ \forall g \in \mathcal{D} \quad |q(f, g) - \lambda(f, g)| \leqslant \partial \|g\|_1$$

alors

$$\|\Pi_{I^c}(f)\|^2 + q(\Pi_{I^c}(f)) \leqslant \frac{C}{a^2}\partial^2$$

où a minore la distance de α et β au spectre de q.

N.B. La propriété $(*)$ peut se dire $\|(A-\lambda)f\|_{-1} \leqslant \delta$ si A est l'opérateur défini par q.

Démonstration. — Posons $\varphi = f - \Pi_I(f) = \Pi_{I^c}(f)$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ si $\varphi_0 = \Pi_{]-\infty,a[}(f)$ et $\varphi_1 = \Pi_{]b,+\infty[}(f)$.

Appliquons $(*)$ à φ_0 :

$$|q(\varphi_0) - \lambda\|\varphi_0\|^2| \leqslant \partial\|\varphi_0\|_1$$

mais $\alpha - a < 0$ (et alors $\varphi_0 = 0$!) ou $q(\varphi_0) \leqslant (\alpha - a)|\varphi_0|^2$, donc

$$\|\varphi_0\|_1^2 \leqslant (1 + \alpha - a)|\varphi_0|^2$$

et

$$(a\|\varphi_0\|^2) \leqslant \partial\|\varphi_0\|_1$$

$$\Rightarrow \|\varphi_0\|^2 \leqslant \frac{\partial^2}{a^2}(1+\alpha-a) \quad \text{et} \quad q(\varphi_0) \leqslant \frac{(\alpha-a)(1+\alpha-a)}{a^2}\partial^2$$

On a des majorations similaires en appliquant $(*)$ à φ_1. □

Grâce à cette proposition on peut décider si un espace vectoriel approche un espace propre avec :

PROPOSITION 2. — *Si, avec les mêmes notations que dans la proposition 1,* $\dim E(I) = m$ $(E(I) = \operatorname{Im}\Pi_I)$ *et si* $(f_1 \dots f_m)$ *est une famille orthonormée d'éléments de $\mathcal{D}$ qui vérifient* $\|\Pi_{I^c}(f)\|_1 \leqslant \frac{\partial}{m}$ *(avec* $\frac{\partial^2}{1-\partial^2} < a$*).*

Alors si $E = \ll f_j \gg$, $d(E, E(I)) = O(\partial)$ *et si de plus* $[q(f_i, f_j)]$ *se diagonalise dans la base orthonormée* $\varphi_1 \dots \varphi_m$ *de E avec les valeurs propres μ_j de multiplicité m_j, alors on pose* $I_j =]\mu_j - \frac{\alpha}{3}, \mu_j + \frac{\alpha}{3}[$ *(α minorant les distances mutuelles des μ_j et leur distance au bord de I) et E_j l'espace engendré par les φ_i de valeur propre μ_j. Alors*

$$E = \oplus^\perp E_j \quad d(E_j, E(I_j)) = O(\frac{\partial^2}{\alpha}) \text{ et sur } E(I_j) : \Delta = \mu_j \mathrm{Id} + O(\partial^2).$$

Démonstration de la proposition 2. — Les φ_j sont orthonormés, $q(\varphi_j, \varphi_k) = \mu_j \partial_{jk}$ et

$$\|\Pi_{I^c}(\varphi_j)\|_1 \leqslant \partial$$

$$\Downarrow$$

(1) $$q(\Pi_I(\varphi_j), \Pi_I(\varphi_k)) = q(\varphi_j, \varphi_k) + O(\partial^2)$$

(2) $$\langle \Pi_I \varphi_j, \Pi_I \varphi_k \rangle = \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle + O(\partial^2)$$

Soit alors $(\varepsilon_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ obtenue par othonormalisation de $(\Pi_I(\varphi_j))_{1\leqslant j\leqslant m}$.

D'après (2),

$$\varepsilon_j = \Pi_I\varphi_j + O(\partial^2)$$

donc

$$\begin{aligned} q(\varepsilon_j, \varepsilon_k) &= q(\Pi_I\varphi_j, \Pi_j\varphi_k) + O(\partial^2) \\ &= \mu_j\partial_{jk} + O(\partial^2) \\ \Rightarrow (A-\mu_j)\varepsilon_j &= O(\partial^2). \end{aligned}$$

Si $\varepsilon_j = e_j + q_j$, $e_j \in E(I_i)$, $\mu_j = \mu_i$

$$(A-\mu_i)(g_j) = O(\partial^2)$$

$$\Rightarrow \|g_j\| \leqslant c\frac{\partial^2}{d}$$

et

$$(A-\mu_i)e_j = O(\partial^2).$$

Remarque. — Ces résultats sont des versions "forme quadratique" du théorème de Helffer ([H] p.30), ils ont par ailleurs été démontrés par Colin de Verdière d'une manière différente utilisant les fermions.

3. $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Delta_2) - \mathrm{Sp}(\Delta_1)$

Il faut alors estimer $\|r\|_{-1}$ où $r = (\Delta_\varepsilon - \lambda)\Psi_\varepsilon(h_\lambda)$:

$$F = (f, h) \in H^1(M_\varepsilon)$$

$$\sqrt{2\pi}r(F) = \int_{X_2}(\Delta_\varepsilon - \lambda)h_\lambda \cdot h + \int_{\partial X_2}\frac{\partial h_\lambda}{\partial \vec{n}} \cdot h$$

$$\frac{\partial h_\lambda}{\partial n}(s=0, L) = \pm\sqrt{\frac{2\pi}{L}}$$

donc :

$$\begin{aligned} |r(F)| &\leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon\lambda}{\pi L}}\int_0^{2\pi}(|f(\exp_p(\varepsilon O)| + |f(\exp_q(\varepsilon O))|)dO \\ &\leqslant c\sqrt{|\varepsilon\log\varepsilon|}\|f\|_1. \end{aligned}$$

Conséquence. — La fonction propre sur M_ε s'écrit :

$\Psi_\varepsilon(h_\lambda) + O(\sqrt{|\varepsilon\log\varepsilon|})$ et sa valeur propre est $\lambda_\varepsilon = \lambda + O(\varepsilon\log\varepsilon)$.

4. $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Delta_1) - \mathrm{Sp}(\Delta_2)$

Il faut ici estimer $\|r_1\|_{-1}$ si $r_1 = (\Delta_\varepsilon - \lambda)\Phi_\varepsilon(f_\lambda)$ et $f_\lambda \in E_\lambda$ est normée.

Soit $F = (f, h) \in H^1(M_\varepsilon)$, $\Phi_\varepsilon(f) = (f, h_\varepsilon)$

$$\begin{aligned} r_1(F) &= \int \langle d\Phi_\varepsilon(f_\lambda), dF\rangle - \lambda \int \Phi_\varepsilon(f_\lambda) \cdot F \\ &= \int_{\partial X_1(\varepsilon)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \vec{n}} \cdot f + \int_{\partial X_2} \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial \vec{n}} \cdot h - \lambda \int_{X_2} h_\varepsilon \cdot h \end{aligned}$$

$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \vec{n}}$ est bornée, donc $|\int_{\partial X_1(\varepsilon)} \frac{\partial f_\lambda}{\partial \vec{n}} \cdot f| \leqslant C\varepsilon\sqrt{|\log \varepsilon|}\|f\|_1$, les deux derniers termes sont en $\sqrt{\varepsilon}$. Donc

$$\|r_1\|_{-1} = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Conséquence. — On a $\langle \Phi_\varepsilon(f_1), \Phi_\varepsilon(f_2)\rangle = O(\varepsilon)$ et $q_\varepsilon(\Phi_\varepsilon f_1, \Phi_\varepsilon f_2) = O(\varepsilon)$ à cause des estimées de $h_\varepsilon(f_j)$.

Donc $d(E_\varepsilon(I), \Phi_\varepsilon(E_\lambda)) = O(\sqrt{\varepsilon})$ et les valeurs propres de $E_\varepsilon(I)$ s'écrivent $\lambda + O(\varepsilon)$.

5. $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Delta_1) \cap \mathrm{Sp}(\Delta_2)$

Il faut alors mesurer l'interaction entre E_λ et R_λ, et donc avoir un quasi-mode venant de l'anse qui interagit avec la surface; on choisira la fonction propre d'une bobine V_ε qui tend vers h_λ

$$V_\varepsilon = \left[X_1(\varepsilon) \cap \left(B(p, \rho) \cup B(q, \rho)\right)\right] \cup_r X_2.$$

D'après le théorème 1, si ρ est choisi en sorte que λ n'est pas valeur propre des disques $B(p, \rho), B(q, \rho)$, le laplacien avec conditions de Dirichlet sur V_ε admet une unique valeur propre λ^ε avec $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda^\varepsilon = \lambda$ et sa fonction propre normée φ^ε qui tend vers $\Psi_\varepsilon(h_\lambda)$.

On notera dans la suite $\varphi^\varepsilon = \psi'_\varepsilon(h_\lambda)$.

PROPOSITION 3. — *Si $(F_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$ est le mode qui tend vers $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} h_\lambda, \lambda)$ de (V_ε, g^0) où on a muni les deux couronnes $C_1(\varepsilon) = B(p, \rho) \cap X_1(\varepsilon)$ et $C_2(\varepsilon) = B(q, \rho) \cap X_2(\varepsilon)$ de la métrique plate $dr^2 + r^2 d\theta^2$*

$$\|F_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_1 = O(\sqrt{\varepsilon}) \quad (\textit{dans } H^1(M_\varepsilon))$$

et : $\lambda_\varepsilon = \lambda + 4\varepsilon\sqrt{\lambda}\log \varepsilon + O(\varepsilon)$

$$F_\varepsilon = \begin{cases} (\textit{sur le cylindre}) & \sqrt{\dfrac{2}{L}} \sin \dfrac{n\pi}{L} s + O(\sqrt{\varepsilon}) \\ (\textit{sur les couronnes } C_i(\varepsilon)) & \sqrt{\varepsilon} c_i(\varepsilon)(\log r + g_{i\varepsilon}(r)) \end{cases}$$

F_ε est invariante par rotation, $c_i(\varepsilon)$ est bornée en ε, $\rho_{i\varepsilon}(1)$ les restrictions à la couronne de fonctions C^∞ sur le disque qui convegent et $r_0 = (\Delta_\varepsilon - \lambda_\varepsilon)F_\varepsilon$ vérifie (1) $\|r_0\|_{-1} = O(\sqrt{\varepsilon})$.

D'après (1) et la proposition 1 appliquée à V_ε et à M_ε, $\lambda^\varepsilon = \lambda_\varepsilon + O(\varepsilon)$, $\varphi^\varepsilon = F_\varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon})$, plus exactement

$$\|F_\varepsilon - \langle F_\varepsilon/\varphi^\varepsilon\rangle\varphi^\varepsilon\|^2 + \Phi_\varepsilon(F_\varepsilon - \langle F_\varepsilon/\varphi^\varepsilon\rangle\varphi^\varepsilon) = O(\varepsilon)$$

et

$$\|\Pi_{I^c}F_\varepsilon\|^2 + q_\varepsilon(\Pi_{I^c}F^\varepsilon) = O(\varepsilon)$$

donc aussi

$$\|\Pi_{I^c}\varphi^\varepsilon\| + q_\varepsilon(\Pi_{I^c}\varphi^\varepsilon)^2 = O(\varepsilon).$$

Donc une base orthonormée $f_1 \dots f_m$ de E_λ étant choisie, l'espace vectoriel E_ε engendré par $\Phi_\varepsilon(f_1)\dots\Phi_\varepsilon(f_m)$ et φ^ε approche $E_\varepsilon(I)$.

Soit $(e_1 \dots e_{m+1})$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(\Phi_\varepsilon(f_1)\dots\Phi_\varepsilon(f_m), \varphi^\varepsilon)$.

On a, comme pour le théorème précédent :

$$i \leqslant j,k \leqslant m \quad\Rightarrow\quad e_j = \Phi_\varepsilon(f_j) + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad q_\varepsilon(e_j, e_k) = \lambda\partial_{jk} + O(\varepsilon)$$

$$e_{m+1} = (1 + O(\varepsilon))(\varphi^\varepsilon - \sum_1^m \langle\varphi^\varepsilon, \Phi_\varepsilon(f_j)\rangle\Phi_\varepsilon(f_j) + O(\varepsilon))$$

(car $\langle\varphi^\varepsilon, \Phi_\varepsilon(f_j)\rangle = O(\sqrt{\varepsilon})$).

Il reste à calculer les termes croisés :

$$q_\varepsilon(\varphi^\varepsilon, \Phi_\varepsilon(f_j)) = \lambda\int_{C_1(\varepsilon)\cup C_2(\varepsilon)} f_j\varphi^\varepsilon + \int_{\partial X_1(\varepsilon)} \varphi^\varepsilon\frac{\partial f_j}{\partial\vec{n}} + \int_{\partial X_2}\varphi^\varepsilon\frac{\partial h_\varepsilon(f_j)}{\partial\vec{n}}.$$

De $\|\varphi^\varepsilon - F_\varepsilon\|_1 = O(\sqrt{\varepsilon})$ et des estimées de F_ε on déduit que :

$$q_\varepsilon(\varphi^\varepsilon, \Phi_\varepsilon(f_j)) = \lambda\int_{C_1(\varepsilon)\cup C_2(\varepsilon)} f_j\varphi^\varepsilon + O(\varepsilon)$$

et donc :

$$\begin{aligned} q_\varepsilon(e_{m+1}, e_j) &= q_\varepsilon(\varphi^\varepsilon, \Phi_\varepsilon(f_j)) - \langle\varphi^\varepsilon, \Phi_\varepsilon(f_j)\rangle q_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(f_j) + O(\varepsilon)) \\ &= -\lambda\int_{X_2}\varphi^\varepsilon\cdot h_\varepsilon(f_j) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

$\varphi^\varepsilon = F_\varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon})$, F_ε est invariante par rotation, la partie invariante par rotation de $h_\varepsilon(f_j)$ est :

$$\sqrt{\varepsilon}\big(\frac{s}{L}(f_j(q) - f_j(p)) + f_j(p)\big) + O(\varepsilon).$$

Donc :

$$\int_{X_2}\varphi^\varepsilon h_\varepsilon(f_j) = \sqrt{\varepsilon}\mathcal{L}(f_j) + O(\varepsilon)$$

$$\mathcal{L}(f) = \frac{2L}{n}(f(p) - (-1)^n f(q))$$

et

$$\boxed{q_\varepsilon(e_{m+1}, \epsilon_j) = -\sqrt{\varepsilon}\mathcal{L}(\Delta_1 f_j) + O(\varepsilon)}$$

Remarque. — On vient de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Si I est un intervalle dont les bords ne rencontrent pas $\mathrm{Sp}(\Delta_1)\cup\mathrm{Sp}(\Delta_2)$ et si l'espace propre de Δ_1 relatif à I, $E_I(\Delta_1)$, a une base orthonormée $(f_1 \dots f_m)$ de valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, l'espace propre de Δ_2 relatif à I est de dimension 1 $\mathrm{Sp}\,\Delta_2 \cap I = \{\lambda\}$ de fonction propre h_λ, alors $E_\varepsilon(I)$ admet une base orthonormée privilégiée $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{m+1}$ dans laquelle la forme quadratique q_ε s'écrit :*

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 & -\sqrt{\varepsilon}\mathcal{L}(\Delta_1 f_1) \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_m & -\sqrt{\varepsilon}\mathcal{L}(\Delta_1 f_m) \\ -\sqrt{\varepsilon}\mathcal{L}(\Delta_1(f_1)) & \dots & (-\sqrt{\varepsilon}\mathcal{L}(\Delta_1(f_m)) & \lambda + 4\varepsilon\sqrt{\lambda}\log\varepsilon \end{vmatrix} + O(\varepsilon)$$

cette base vérifie $\varepsilon_j = e_j + O(\sqrt{\varepsilon})$ si $(e_1 \dots e_{m+1})$ est l'orthonormalisée de $(\Phi_\varepsilon(f_1) \dots \Phi_\varepsilon(f_m), \varphi^\varepsilon)$. Donc $e_j = \Phi_\varepsilon(f_j) + O(\sqrt{\varepsilon})$ et $e_{m+1} = \varphi^\varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon})$.

Reprenons le cas où $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \lambda$.

On voit qu'il se présente deux cas :

(*) si $\mathcal{L}_{|E_\lambda} = 0$ le développement de $q_{\varepsilon|E_\varepsilon(I)}$ est :

$$\begin{vmatrix} \lambda & & & \\ & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & \lambda & \\ & 0 & & \lambda + 4\varepsilon\sqrt{\lambda}\log\varepsilon \end{vmatrix} + O(\varepsilon)$$

Il y a donc une fonction propre localisée sur l'anse.

(*) Si $\mathcal{L}_{|E_\lambda} \not\equiv 0$. Choisissons $f_1 \dots f_{m-1}$ dans le noyau de $\mathcal{L}_{|E_\lambda}$ et posons $a_m = -\lambda\mathcal{L}(f_m) \neq 0$. Le développement de $q_{\varepsilon|E_\varepsilon(I)}$ est :

$$\begin{vmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \ddots\ 0 & & \\ 0 & & \lambda & \sqrt{\varepsilon}a_m \\ & 0 & \sqrt{\varepsilon}a_m & \lambda + 4\varepsilon\sqrt{\lambda}\log\varepsilon \end{vmatrix} + O(\varepsilon)$$

Δ_ε admet $(m-1)$ valeurs propres en $\lambda + O(\varepsilon)$ donc l'espace propre correspondant est à distance $\sqrt{\varepsilon}$ de $\ll \Phi_\varepsilon(f_1) \cdots \Phi_\varepsilon(f_{m-1}) \gg$ une valeur propre en $\lambda + \sqrt{\varepsilon}a_m + O(\varepsilon\log\varepsilon)$ de fonction propre $\Phi_\varepsilon(f_m) + \varphi_\varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon})$ et une valeur propre en $\lambda - \sqrt{\varepsilon}a_m + O(\varepsilon\log\varepsilon)$ de fonction propre $\Phi_\varepsilon(f_m) - \varphi_\varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon})$, il n'y a pas de fonction propre localisée sur l'anse.

7. Application à l'augmentation de multiplicité

Peut-on, par ajout d'une anse fine, augmenter la multiplicité de λ ? Nous allons utiliser les méthodes de stabilité introduites par Colin de Verdière.

Soit (X_1, g_0) une surface compacte et λ_0 une valeur propre du Laplacien de (X_1, g_0) de multiplicité m stable (SAH) dans les variations de métriques sur X_1 de classe C^k ($k \geqslant 1$). C'est-à-dire $\mathcal{M}_k = \{g/$ métriques sur X_1 de classe $C^k\}$ est un espace de Banach, $g_0 \in \mathcal{M}_k$ et sur un voisinage U de g_0 les métriques qui admettent λ_0 comme valeur propre de multiplicité m forment une sous-variété W de codimension $\frac{m(m+1)}{2}$. Comme l'a fait remarquer Gérard Besson, il convient de fixer l'espace de Hilbert des fonctions L^2, sur X_1 en $L_2(X_1, dv_{g_0})$. Pour une métrique g proche de g_0 on étudie le spectre de l'opérateur A_g

$$A_g(u) = \sqrt{\frac{dv_g}{dv_{g_0}}}\Delta_g\left(\sqrt{\frac{dv_g}{dv_{g_0}}}u\right) \quad \text{si } \Delta_g \text{ est le Laplacien sur } (X_1, g).$$

Il existe une petite isométrie U_g de E_{g_0} l'espace propre de $\Delta_{g_0} = A_{g_0}$ relatif à l'intervalle I tel que $I \cap \mathrm{Sp}(\Delta_{g_0}) = \{\lambda_0\}$ sur E_g l'espace propre de A_g relatif à l'intervalle I. (Si g est proche de g_0 $\dim E_g = \dim E_{g_0}$). On pose alors

$$\begin{aligned} q : (U \subset \mathcal{M}_k) &\to \mathcal{Q}(E_{g_0}) \\ g &\mapsto q_g = \langle A_g \circ U_g ; U_g \rangle \end{aligned}$$

($\mathcal{Q}(E_{g_0})$ est l'ensemble des formes quadratiques sur E_{g_0}) et on fait l'hypothèse
(H1) : *q est une submersion en g_0.*

Soit maintenant $\mathcal{G} = \{(g, L); g \in \mathcal{M}^k; L > 0\}$ et $\lambda_0 = \left(\frac{n\pi}{L_0}\right)^2$ $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ $L_0 > 0$ et $\mathcal{L}_0(f) = (f(p) - (-1)^n \mathcal{L}(q))$. Il nous faut construire $\mathcal{Q} : \mathcal{G} \to \mathcal{Q}(E_0)$ qui corresponde au $q_\varepsilon | E_\varepsilon(I)$ que nous avons étudié.

$$E_0 = E_{g_0} \oplus \mathbf{R}h_{\lambda_0}$$

si g est proche de g_0 et L de L_0, il existe d'après [CdV] une petite isométrie $U_{g,L} = U_g \oplus U_L$ de E_0 sur $E_g \oplus \mathbf{R}h_\lambda = E(g, L)$. D'après les calculs précédents $(\Phi_\varepsilon \oplus \Psi'_\varepsilon)(E_g \oplus \mathbf{R}h_\lambda)$ est proche de $E_\varepsilon(I)$. Choisissons une base $u_1 \dots u_m$ de E_{g_0}. C_ε est l'orthonormalisation de Schmidt de $\Phi_\varepsilon(U_g u_1) \dots \Phi_\varepsilon(U_g u_m), \Psi'_\varepsilon(U_L h_{\lambda_0})$. Enfin il existe une isométrie D_ε de $C_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \oplus \Psi'_\varepsilon \circ U_{g,L}(E_0)$ sur $E_\varepsilon(I)$. Notons $U_\varepsilon = D_\varepsilon \circ C_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon \oplus \Psi'_\varepsilon$.
A étudier :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\varepsilon : \mathcal{G} &\to \mathcal{Q}(E_0) \\ (g, L) &\mapsto q_\varepsilon \circ U_\varepsilon \circ U_{g,L}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 2. — *Si $\mathcal{L}_{0|E_{g_0}} = 0$ et (H1) il existe dans un voisinage $\mathcal{O}$ de (g_0, L_0) un élément (g, L) tel que $\mathcal{Q}_\varepsilon(g, L) = \lambda_0 \mathrm{Id}$ et $\mathcal{Q}_\varepsilon$ est essentielle en ce point.*

Démonstration. — Ecrivons $\mathcal{Q}(E_0) = \mathcal{Q}(E_{g_0}) \oplus E^*_{g_0} \oplus \mathbf{R}$. D'après notre dernier théorème, on a : $\mathcal{Q}_\varepsilon = \mathcal{Q}^1_\varepsilon + R_\varepsilon$ où $\mathcal{Q}^1_\varepsilon = (q_g, -\sqrt{\varepsilon}\mathcal{L} \circ A_g \circ U_g, (\frac{n\pi}{L})^2 \circ U_L))$ et $\|R_\varepsilon\| = O(\varepsilon \mathrm{Log} \varepsilon)$.

Soit $H_\varepsilon \in \mathrm{End}(\mathcal{Q}(E_0))$: $H_\varepsilon(q, \ell, \alpha) = (q, -\sqrt{\varepsilon}\ell, \alpha)$ $(H_\varepsilon(\lambda_0) = \lambda_0)$. Définissons enfin : $\mathcal{Q}_\varepsilon^0 = H_\varepsilon^{-1} \circ \mathcal{Q}_\varepsilon$. Alors :

$$\mathcal{Q}_\varepsilon^0 = \mathcal{Q}_0 + B_\varepsilon \quad \text{avec} \quad \|B_\varepsilon\| = O(\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon)$$

et

$$\mathcal{Q}_0 = (q_\varepsilon, \mathcal{L} \circ A_g \circ U_g, (\frac{n\pi}{L})^2 \circ U_L).$$

Rappelons que $f : \mathcal{O}$ (ouvert dans un Banach) $\to E$ espace de Banach (continue) est essentielle en $\lambda_0 = f(p_0)$, $p_0 \in \mathcal{O}$, si il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall f' : \mathcal{O} \to E$ continue

$$\|f - f'\| < \alpha \Rightarrow \lambda_0 \in \mathrm{Im} f'.$$

Donc, λ_0 essentielle en p_0 pour $\mathcal{Q}_\varepsilon \Leftrightarrow \lambda_0$ essentielle en p_0 pour $\mathcal{Q}_\varepsilon^0$. Par ailleurs, $\mathcal{Q}_0$ vérifie SAH, pour $\lambda_0 \Rightarrow \exists \varepsilon_1 > 0$ tel que $\varepsilon < \varepsilon_1 \Rightarrow \lambda_0$ essentielle pour $\mathcal{Q}_\varepsilon^0$.

Il suffit donc de vérifier : $\lambda_0 = \mathcal{Q}_0(g_0, L_0)$ *vérifie* SAH *en* (g_0, L_0).

Ceci se fait facilement en reprenant les calculs de [B].

$$d_{(g_0,L_0)}\mathcal{Q}^0(h, \ell) = (\langle \dot{A}(0).,.\rangle, \mathcal{L}_0 \circ (\dot{A}(0) + A(0) \circ \dot{U}(0)), \frac{\partial}{\partial L}((\frac{n\pi}{L})^2 \circ U_L)\ell)$$

(puisque $\mathcal{L}_{0|E_{g_0}} = 0$.) U_L est l'homothétie de rapport $\sqrt{\frac{L_0}{L}}$ la surjectivité par rapport à la dernière variable est donc claire. Il faut montrer :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : \mathcal{M}_k &\to \mathcal{Q}(E_{g_0}) \oplus E_{g_0}^* \\ g &\mapsto (\langle A_g \circ U_g, U_g, \mathcal{L}_0 \circ A_g \circ U_g) \end{aligned}$$

vérifie SAH en $(\lambda_0, 0)$.

Preuves. — Fixons une base $u_1 \dots u_m$ de E_{g_0}. Si $\mathcal{Q}$ n'est pas une submersion, il existe des scalaires $(\alpha_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m}$ et $(\beta_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ tels que :

$$\forall h \in T_{g_0}\mathcal{M}^k \quad \sum_{i \leqslant j} \alpha_{ij} \langle d_{g_0}A(h)u_i, u_j\rangle + \mathcal{L}_0\big[((d_{g_0}A(h) + A_{g_0} \circ d_{g_0}U(h))(\sum \beta_j u_j)\big] = 0.$$

Restreignons-nous à $h \in T_{g_0}W$ correspondant à une variation conforme de la métrique $g_t = e^{tf}g_0$: $h \in T_{g_0}W \Rightarrow$ la première somme est nulle car $q_{g_t} = c^{\text{te}} = \lambda_0$! Ecrivons $v = \sum_{j=1}^m \beta_j u_j$, $v_f(t) = U_{g_t}(v)$

$$h = \dot{g}_{(0)} \in T_{g_0}(W) \Leftrightarrow f \in (E_{g_0}^2)^\perp \quad \text{(voir [B])}.$$

On a donc :

$$\forall f \in (E_{g_0}^2)^\perp \quad \mathcal{L}(\dot{A}(0)v_f + A(0)\dot{v}_f) = 0.$$

Mais

$$(A_{g_t} - \lambda_0)v_f(t) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{A}(0)v_f + A_0\dot{v}_f = \lambda_0\dot{v}_f$$

donc

(2) $$\forall f \in (E_{g_0}^2)^\perp \quad \mathcal{L}(\dot{v}_f) = 0$$

par ailleurs, d'après la ligne précédente $\dot{v}_f = (A_0 - \lambda_0)^{-1} \circ \dot{A}_0(v_f)$. Mais (voir [B])

$$\dot{A}_0 = -\frac{1}{2}(\lambda_0 + \Delta)(f_v) \quad \text{(en dimension 2!).}$$

Et :

$$\dot{v}_f = -\lambda_0(\Delta_{g_0} - \lambda_0)^{-1}(f_v) - \frac{1}{2}(f_v).$$

Donc (2) $\Leftrightarrow \forall f \in (E^2_{g_0})^\perp$

$$\mathcal{L}_0(f_v) + 2\lambda_0 \int_{X_1} (R_{\lambda_0}(p, X) - (-1)^n R_{\lambda_0}(q, X)) f(x) v(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow v(p)\delta_p - (-1)^n v(q)\delta_q + 2\lambda_0 v R_{\lambda_0}(p, .) - (-1)^n 2\lambda_0 v R_{\lambda_0}(q, .) \in E^2_{g_0} \subset C^\infty.$$

L'étude des singularités en p (ou q) : δ_p est en $\frac{1}{r^2}$ et $R_{\lambda_0}(p, .)$ en $\log r$, impose alors que tout soit nul : $v = 0 \Rightarrow \beta_j = 0 \; \forall j, \;\; 1 \leqslant j \leqslant m$. λ_0 vérifie SAH pour q donc aussi $\alpha_{ij} = 0$.

8. Applications

Ce théorème d'augmentation de multiplicité s'applique à la sphère S^2 canonique pour n'importe quel espace propre pourvu que p et q soient antipodaux (les fonctions propres sont des polynômes homogènes de $\mathbf{R}^3$!) Cela donne des grandes multiplicités pour des grandes valeurs propres d'un tore. Pour la première valeur propre non nulle, on obtient une multiplicité 4 WAH. Mais on sait que le tore équilatéral a une première valeur propre non nulle de multiplicité 6 SAH.

Les résultats nouveaux n'apparaissent donc que pour $\lambda_n, \;\; n \geqslant 3$, $(\lambda_1 = 0 < \lambda_2, \ldots, \ldots)$: il existe des tores ayant une valeur propre λ_n de multiplicité $2k$, $n = (k-1)^2 + 1$.

Cette technique s'adapte sans problème au recollement en un point d'un cylindre, M_ε est alors une variété à bord, on obtient alors :

si λ_k est une valeur propre de X_1 de multiplicité m_k stable (SAH) et si il existe un point $p \in X$, où toutes les fonctions propres de λ_k s'annulent, il existe sur M_ε une métrique qui admet la valeur propre λ_k avec multiplicité $m_k + 1$ faiblement stable pour la condition au bord de Dirichlet.

On retrouve ainsi un résultat de Colin de Verdière. Il existe une sphère avec un trou de deuxième valeur propre de multiplicité 3 faiblement stable (on sait par ailleurs, [N], que c'est la multiplicité maximale pour une sphère trouée) : soit sur S^2 une métrique g telle que λ_2 soit de multiplicité 2 SAH; ceci existe d'après la stabilité de la multiplicité de la deuxième valeur propre de (S^2, can). Alors les lignes modales des deux fonctions propres se coupent (sinon cela contredirait le fait que $\lambda_1(\Omega)$ est strictement décroissant par rapport à l'ouvert Ω, en regardant, pour une fonction propre f, $\Omega = \{f > 0\}$ car $\lambda_1(\Omega) = \lambda$ valeur propre de f !). Il suffit alors d'appliquer le résultat ci-dessus.

N.B. Les détails de calcul sont dans [A1], à paraître.

Références

[A1] ANNÉ C. — *Des anses pour augmenter la multiplicité*, à paraître.

[A] ANNÉ C. — *Spectre du Laplacien et écrasement d'anses*, Ann. scient. ENS, **4 série t.20** (1987), 271–280.

[B] BESSON G. — *Propriétés génériques des fonctions propres et multiplicité*, Prépub. Institut Fourier *n*°81, à paraître in Comment. Math. Helv. 1989 , 1987.

[B2] BESSON G. — *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Four. Grenoble, 30 Fasc.1 (1980), 109–128.

[C] CHENG S.Y. — *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv., **51** (1976), 43–55.

[CdV] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Sur une hypothèse de transversalité d'Arnold*, Comment. Math. Helvetici, **63** (1988), 184–193.

[CdV2] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien*, Comment. Math. Helvetici, **61** (1986), 254–270.

[CdV3] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Construction de Laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. scient. ENS, 4 série t. 20 (1987), 599–616.

[CdV4] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, Prépub. Institut Fourier n° 71 (à paraître au Journal of Combinatorial Theory B.), 1987.

[CdV5] COLIN DE VERDIÈRE Y. — *Variations spectrales*, Manuscript non publié.

[GHL] GALLOT S., HULLIN D., LAFONTAINE J. — *Riemannian Geometry*, Springer, 1987.

[H] HELFFER B. — *Semi-Classical Analysis for the Schrödinger Operator and Applications*, Springer-Verlag Lecture Notes, 1988.

[N] NADIRASHVILI N.S. — *Multiples Eigenvalues of the Laplace operator*, Math. USSR Sbornik, **61 n° 1** (1988), 225–238.

Colette ANNÉ
INSTITUT FOURIER
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex (France)