

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

RENÉ MICHEL

**Une inégalité intégrale concernant certaines fonctions Log-concaves**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 6 (1987-1988), p. 65-70

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1987-1988\\_\\_6\\_\\_65\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1987-1988__6__65_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

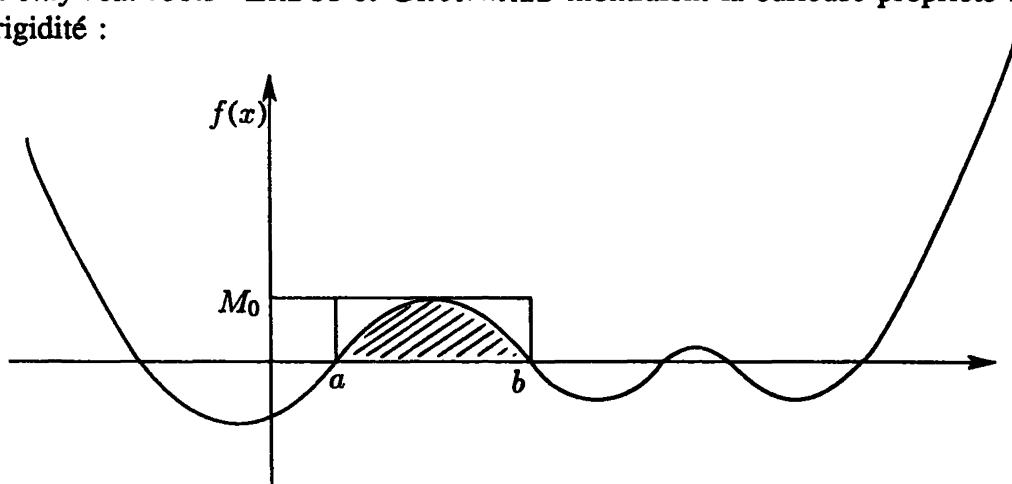
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNE INÉGALITÉ INTÉGRALE CONCERNANT CERTAINES FONCTIONS LOG-CONCAVES

par René MICHEL

1. — Dans un article de 1939 aux *Annals of Math.*, intitulé “*On polynomials with only real roots*” ERDÖS et GRÜNWARD montraient la curieuse propriété suivante de rigidité :



Soit, sur cette figure, le graphe d'un polynôme  $f$  dont toutes les racines sont réelles;  $a$  et  $b$  sont deux racines consécutives et  $f(x) > 0$  sur  $]a, b[$ . Alors, si  $M_0 = \sup_{t \in [a, b]} f(t)$ ,

$$(1.1) \quad \int_a^b f(t) dt \leq \frac{2}{3}(b-a) \cdot M_0 .$$

Si  $f$  est un polynôme du deuxième degré :  $f(x) = A(x-a)(b-x)$  il y a égalité dans cette relation.

Cette propriété fut reprise et généralisée à une fonction entière d'ordre inférieur à 2 n'ayant que des racines réelles dans un bel article de S.K. IYENGAR en 1941

(même revue) par une méthode toute différente et très "compréhensive"; il en résulte en particulier que l'inégalité (1.1) n'est atteinte que par les polynômes du deuxième degré.

L'analyse de la preuve de IYENGAR montre que l'inégalité (1.1) se généralise dans  $\mathbf{R}^n$  Euclidien, lorsque  $f$  vérifie une propriété de concavité et s'annule sur le bord de la sphère  $S_{n-1}$  d'une boule Euclidienne  $B_n$ , par la formule :

$$(1.2) \quad \int_{B_n} f(x) \cdot dx_1 \cdots dx_n \leq \frac{2}{n+2} \text{Vol}(B_n) \cdot \sup_{x \in B_n} f(x).$$

Ici encore la constante est optimale et l'égalité est obtenue seulement pour le polynôme  $p_0$  tel que :

$$p_0(x) = M_0(R^2 - \|x - a\|^2)$$

avec  $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n / \|x - a\|^2 < R^2\}$  et  $M_0 > 0$ , constant. La notation Vol désigne le volume Euclidien.

1.3. — Il est clair que l'on ne restreint pas la généralité en considérant dans la suite  $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n / \|x\|^2 < 1\}$ , c'est-à-dire en prenant  $a = 0$  et  $R = 1$ .

## 2. — L'espace de fonctions considéré.

2.1. DÉFINITION. — Soit  $f : B_n \rightarrow \mathbf{R}^+$  de classe  $C^2$ .  $f \in E \iff \exists \varphi$  définie et continue sur  $\overline{B_n}$ ,  $\varphi > 0$ , de classe  $C^2$  sur  $B_n$  telle que  $\text{Log } \varphi$  est concave et  $f(x) = (1 - \|x\|^2) \cdot \varphi(x)$ .

La propriété de Log-concavité est essentiellement utilisée ainsi : le Hessien de  $\text{Log } \varphi$  est en tout point une forme quadratique non positive :

$$\forall x \in B_n, \forall h \in \mathbf{R}^n, (\text{Log } \varphi)''(x)(h, h) \leq 0.$$

2.2. PROPRIÉTÉ. —  $E$  est stable par addition, par multiplication et par passage à la limite ponctuelle qui conserve la régularité.

Ces propriétés des fonctions Log-concaves sont classiques (voir par ex. [3]).

D'autre part puisque

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (1 - \|x\|^2) = -2,$$

la fonction  $1 - \|x\|^2$  est concave et positive; elle est donc aussi Log-concave, comme il est classique.

2.3. THÉORÈME. —  $\forall f \in E$ , l'inégalité (1.2) est vérifiée. L'égalité a lieu, si et seulement si,  $f$  est un polynôme du deuxième degré.

2.4. Remarque. — Dans l'écriture  $f(X) = (1 - \|X\|^2) \cdot \varphi(X)$  si  $\varphi$  n'est plus supposée Log-concave mais seulement Log-surharmonique la majoration (1.2) n'est

plus nécessairement vérifiée; par exemple, si  $n = 2$  et  $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)e^{x^2 - y^2}$  on voit rapidement que  $\max_{B_2} f = 1$  et en calculant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \iint_{B_2} f(x, y) dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - u) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} u^k \cos^k 2\theta\right) du d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - u) \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{u^{2p}}{(2p!)} \cos^{2p} 2\theta\right) du d\theta > \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

### 3. — Démonstration de l'inégalité (1.2).

3.1. — Soit  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in B_n$  et  $M_0 > 0$  fixés.

On considère le parabolöide elliptique  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , tangent en  $(x_0, M_0)$  au plan  $x_{n+1} = M_0$  et qui s'appuie sur la sphère  $S_{n-1}$  d'équation  $\|x\| = 1$ ,  $x_{n+1} = 0$ . Soit alors  $p : B_n \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par la condition :

$$\{(x, p(x)) / x \in B_n\} \subset \mathcal{P}$$

i.e. : le graphe de  $p$  est contenu dans le parabolöide  $\mathcal{P}$ .

3.2. PROPOSITION. — Si  $x^0 \neq 0$  on a :

$$p(x) = (1 - \|x\|^2) \cdot \frac{1}{v(x)}$$

où  $v : B_n \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est une fonction strictement concave sur  $B_n$ .

Cette proposition sera prouvée plus loin. Remarquons que si  $x^0 \neq 0$  la fonction  $p$  n'appartient pas à  $E$  : en fait  $1/v$  est strictement convexe comme  $\text{Log } 1/v$ .

Notons que par définition de  $E$ ,  $f$  atteint son maximum dans  $B_n$ .

La proposition 3.2 a la conséquence suivante :

3.3. PROPOSITION. — Soit  $f \in E$  telle que :

$$\sup_{x \in B_n} f(x) = f(x^0) = \sup_{x \in B_n} p(x) = p(x^0) = M_0 ;$$

si  $x^0 \neq 0$  on a  $f(x) < p(x)$  sur  $B_n - \{x^0\}$

si  $x^0 = 0$  on a  $f(x) \leq p_0(x)$  sur  $B_n$ .

*Démonstration de 3.3.* — Soit  $j \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|j\| = 1$ . Posons  $\tilde{f}(t) = f(x^0 + jt)$  et  $\tilde{p}(t) = p(x^0 + jt)$  avec  $t \in ]t_1, t_2[$  tel que  $x^0 + jt \in B_n$ .

Soit

$$\psi(t) = \text{Log } \tilde{f}(t) - \text{Log } \tilde{p}(t)$$

$$\psi(t) = \text{Log } \psi(x^0 + jt) + \text{Log } v(x^0 + jt)$$

d'après 3.2 et 2.1.

On a :

$$\psi(0) = \text{Log } \bar{f}(0) - \text{Log } \bar{p}(0) = M_0 - M_0 = 0$$

de même

$$\psi'(0) = \frac{\bar{f}'(0)}{\bar{f}(0)} - \frac{\bar{p}'(0)}{\bar{p}(0)} = 0$$

puisque  $f$  et  $p$  sont maximum en  $x^0$ .

D'autre part la concavité de  $\text{Log } \varphi$  et la stricte concavité de  $v$  impliquent, si  $x^0 \neq 0$ ,

$$\forall t \in ]t_1, t_2[ , \psi''(t) < 0 .$$

Il en résulte :  $\psi(t) < 0$ ,  $\forall t \in [t_1, t_2] - \{0\}$  donc

$$\bar{f}(t) < \bar{p}(t) .$$

En faisant varier  $j$  on a  $f(x) < p(x)$  sur  $B_n - \{x^0\}$ .

Si  $x^0 = 0$  on a  $p(x) = p_0(x) = M_0(1 - \|x\|^2)$  et  $v$  est constante. Dans ce cas les inégalités strictes sont remplacées par  $\leq$  dans les raisonnements ci-dessus.

3.4. Encadrement de  $\int_{B_n} p(X) dX_1 \cdots dX_n$ . — L'application linéaire  $u$  définie par :

$$(3.4.1) \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ X_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1^0 \cdot M_0^{-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2^0 \cdot M_0^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n^0 \cdot M_0^{-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

transforme le parabolôïde défini par :

$$p_0(x) = M_0(1 - \|x\|^2)$$

en le parabolôïde  $\mathcal{P}$  contenant le graphe de  $p$ . D'autre part, on a :

$$(3.4.2) \quad \int_{B_n} p_0(x) dx_1 \cdots dx_n = \text{Vol}(G_0)$$

avec  $G_0 = \{(x, y) \in B_n \times \mathbf{R}^+ ; 0 \leq y \leq p_0(x)\}$ .

On voit facilement que

$$u(G_0) \supset \{(X, y) \in B_n \times \mathbf{R}^+ ; 0 \leq y \leq p(X)\} .$$

Puisque  $\text{Det } u = 1$  on a

$$(3.4.3) \quad \text{Vol}(u(G_0)) = \text{Vol}(G_0)$$

et

$$(3.4.4) \quad \text{Vol}(u(G_0)) \geq \int_{B_n} p(X) dX_1 \cdots dX_n .$$

Par un calcul simple on obtient :

$$(3.4.5) \quad \int_{B_n} M_0(1 - \|x\|^2) dx_1 \cdots dx_n = \frac{2}{n+2} \cdot \text{Vol}(B_n) \cdot M_0 = \text{Vol}(G_0) .$$

D'autre part, d'après (3.3), on a, si  $f$  n'est pas un polynôme du deuxième degré,

$$(3.4.6) \quad \int_{B_n} f(x) dx_1 \cdots dx_n < \int_{B_n} p(x) dx_1 \cdots dx_n$$

et par conséquent d'après (3.4.6), (3.4.5), (3.4.4), (3.4.3) il vient l'inégalité cherchée :

$$(1.2) \quad \int_{B_n} f(x) dx_1 \cdots dx_n < \frac{2}{n+2} \cdot \text{Vol}(B_n) \cdot M_0 .$$

Il y a égalité dans (1.2) si et seulement si

$$f(x) = M_0(1 - \|x\|^2) = p_0(x)$$

d'après (3.3) et (3.4.5).

#### 4. — Vérification de la proposition 3.2.

On transforme par  $u \in S\ell(n+1, \mathbf{R})$  le graphe de  $p_0(x) = M_0(1 - \|x\|^2)$  définie sur  $B_n$ ; on obtient, en posant  $Y_{n+1} = \frac{1}{M_0} \cdot X_{n+1}$ , l'équation du graphe de  $p$  :

$$Y_{n+1} = 1 - (X_1 - x_1^0 \cdot Y_{n+1})^2 - \cdots - (X_n - x_n^0 \cdot Y_{n+1})^2$$

ou encore

$$(4.1) \quad \|x^0\|^2 \cdot Y_{n+1}^2 + (1 - 2\langle x^0, X \rangle) \cdot Y_{n+1} + \|X\|^2 - 1 = 0 .$$

Posons  $q(X) = \frac{1}{M_0} p(X)$ ,  $X \in B_n$ .

La racine positive dans (4.1) est  $q(X)$ ; notons  $W(X)$  la racine négative. On a donc

$$(4.2) \quad q(X) \cdot W(X) = \frac{\|X\|^2 - 1}{\|x^0\|^2}$$

$$(4.3) \quad q(X) + W(X) = \frac{-1}{\|x^0\|^2} + \frac{2\langle x^0, X \rangle}{\|x^0\|^2} .$$

Puisque  $x^0$  est quelconque, il suffit pour vérifier la concavité de dériver en un point  $X$  quelconque, dans la direction de  $X_1$  par exemple.

En dérivant dans (4.2) et (4.3) il vient :

$$(4.4) \quad \partial_1 q \cdot W + q \cdot \partial_1 W = \frac{2X_1}{\|x^0\|^2}$$

$$(4.5) \quad \partial_1 q + \partial_1 W = \frac{2x_1^0}{\|x^0\|^2}$$

$$(4.6) \quad \partial_1 \partial_1 q + \partial_1 \partial_1 W = 0$$

$$(4.7) \quad \partial_1 \partial_1 q \cdot W + 2 \partial_1 q \cdot \partial_1 W + q \cdot \partial_1 \partial_1 W = \frac{2}{\|x^0\|^2} .$$

On en déduit facilement

$$\partial_1 \partial_1 q \cdot (W - q) = 2 \left( \partial_1 q - \frac{x_1^0}{\|x^0\|^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\|x^0\|^2 - (x_1^0)^2}{\|x^0\|^4} \right) .$$

Puisque  $W(X) - q(X) < 0$  d'après (4.2) on a

$$(4.8) \quad \partial_1 \partial_1 q < 0 \text{ et } \partial_1 \partial_1 W > 0 \text{ sur } B_n .$$

En fait, on voit rapidement que ces inégalités sont nécessairement strictes.

En posant  $v(X) = -\frac{\|x^0\|^2}{M_0} \cdot W(X)$  et en tenant compte de (4.2) et (4.8) on obtient la proposition 3.2.

### Références

- [1] ERDÖS P. and GRÜN WALD T. — *On polynomials with only real roots*, Ann. of Math., 40 (3) (1939), 537-548.
- [2] IYENGAR K. — *A property of integral functions of order less than two with real roots*, Ann. of Math., 42 (4) (1941), 823-828.
- [3] ROBERTS A.W. et VARBERG D.E. — *Convex functions*, Academic Press, 1973.

René MICHEL  
 UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
 Département de Mathématiques  
 33, rue Pasteur  
 84000 AVIGNON