Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

PHILIPPE DELANOË

Adaptation globale de la méthode de Weingarten et réalisations de disques ajustés

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 6 (1987-1988), p. 41-47
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1987-1988__6__41_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1987–1988 (41–47)

ADAPTATION GLOBALE DE LA MÉTHODE DE WEINGARTEN ET RÉALISATIONS DE DISQUES AJUSTÉS

par *Philippe DELANOË*

Dans quelle mesure la notion abstraite de variété *Riemannienne* généralise-t-elle celle, concrète, de sous-variété de l'espace Euclidien qui historiquement l'a engendrée? Traduite en termes précis cette question est celle de l'existence, pour une variété Riemannienne donnée, d'une immersion *isométrique* (ou "réalisation") de cette variété dans un espace Euclidien de dimension aussi petite que possible; en général cette dimension augmentera avec le degré de *régularité* souhaité pour l'immersion. Sur ce chapitre de la géométrie contemporaine le lecteur peut consulter [9], [5] et leurs références, ainsi que [3] et le livre [4]. Le présent exposé se rapporte à un thème plus restreint, celui de "réaliser" une surface abstraite dans l'espace Euclidien de dimension 3 (empressons-nous de dire que ce n'est pas toujours possible).

Soit g une métrique Riemannienne lisse définie dans un voisinage Ω de l'origine dans $\mathbf{R}^2$; soit e la métrique Euclidienne standard de $\mathbf{R}^3$. Par définition, une immersion $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ est *isométrique* si elle vérifie le système différentiel non-linéaire 3×3 du premier ordre $f^*e = g$ (f^*e désignant l'image réciproque de e par f , qui est bien une métrique si f est une immersion). Lorsque $K(g)$, la courbure de Gauss de g , est *positive*, E. Heinz [6] (Lemma 2) a montré l'équivalence de ce système avec un système 2×2 *quasilinéaire* du second ordre découvert par Darboux [1]. Quel que soit le signe de $K(g)$, Weingarten [11] a inventé une méthode pour réduire de façon équivalente le système $f^*e = g$ à *une seule équation* différentielle non-linéaire du second ordre, l'équation de Darboux, qui est de type "Monge–Ampère" (*i.e.* la non-linéarité fait intervenir un déterminant-Hessien) et qui est *elliptique* lorsque $K > 0$, *hyperbolique* lorsque $K < 0$ (et change donc de type lorsque K change de signe, à ce sujet voir [8]). L'idée de Weingarten s'appuie sur le *Lemme fondamental de Riemann* : une métrique Riemannienne *plate* G étant donnée sur Ω , il existe au voisinage de chaque point de Ω deux coordonnées locales (x, y) telles que G s'écrive $(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$. Ce résultat fournit déjà deux des trois composantes de la réalisation souhaitée, en cherchant la troisième composante comme *une* fonction lisse z sur Ω telle que le tenseur,

$$G(g,z) := g - dz \otimes dz$$

soit une ***métrique plate*** sur Ω, z doit donc vérifier les deux conditions suivantes :

$$G(g,z) \text{ est partout définie positive} \tag{1}$$

$$K[G(g,z)] = 0\,. \tag{2}$$

Lorsqu'il existe une fonction z remplissant ces deux conditions, Weingarten en déduit bien un plongement isométrique *local* $f := (x,y,z)$ dans $\mathbf{R}^3$, (x,y) étant fournies par le Lemme de Riemann appliqué à la métrique plate $G(g,z)$.

L'objet de cet exposé est de décrire une situation dans laquelle on puisse *rendre globale* la méthode de Weingarten. La notion essentielle pour cela est celle de *convexité* (*cf. infra*). Ce faisant, on améliore du point de vue de *la régularité globale* les résultats de [6] et de [10] concernant la réalisation d'une calotte convexe de courbure positive; amélioration importante car une réalisation globalement C^2 se heurte à des *obstructions géométriques* [5] (Appendice 3) [4] (chapitre 3.2.3).

La méthode de Weingarten globale peut aussi être adaptée pour traiter de la réalisation d'une calotte convexe de courbure négative de *genre* espace dans l'espace de Minkowski (de dimension trois).

Préalablement, nous devons rendre global le Lemme de Riemann. C'est à cette tâche, intéressante par elle-même, que nous allons consacrer la première partie de l'exposé. En seconde partie nous exposerons un théorème de réalisabilité globale dans l'espace Euclidien. En troisième partie, nous décrirons un résultat analogue dans l'espace de Minkowski. Pour les détails nous renvoyons à [2].

Avant d'entrer dans le vif du sujet, je tiens à remercier les membres du Séminaire de théorie spectrale et géométrie de leur invitation début Février et à exprimer le plaisir que j'ai eu à faire leur connaissance.

1. Une version globale du Lemme de Riemann

Dans cette partie nous travaillons en dimension quelconque. Soit D un disque topologique fermé de dimension n muni d'une structure de variété à bord de classe C^r , r réel au moins égal à 3. Notons Ω l'intérieur de D , Γ son bord. Soit G une métrique Riemannienne sur D de classe $C^{r-1}(D)$ vérifiant l'hypothèse de *convexité* suivante : il existe une fonction réelle $z \in C^r(D)$ nulle sur Γ et convexe au sens de la métrique G . Cette dernière condition signifie que la restriction de z à toute géodésique de G est convexe, ou encore, que la matrice Hessienne des dérivées covariantes secondes de z dans la connexion Riemannienne de G , que cette matrice, est en tout point de D positive. Fixons désormais une telle fonction z .

THÉORÈME 1 [2]. — *L'application exponentielle (associée à G), au point P de Ω où z atteint son minimum, est une isométrie globalement régulière de classe C^r*

d'un convexe fermé de l'espace tangent T_PD muni de la métrique Euclidienne $G(P)$, sur (D, G).

Preuve. — G étant plate, d'une part elle n'admet pas de points conjugués, $\exp_P$ est donc un difféomorphisme sur son image, d'autre part c'est une application *affine* (pour T_PD muni de sa structure plate canonique) [7] (Lemme 3), elle respecte donc la *convexité.*

Soit $T := \{t \in [z(P), 0] | \{z \leqslant t\}$ est inclus dans l'image de $\exp_P\}$. On raisonne par *connexité* sur T qui est bien sûr non vide. "T est fermé" résulte de [7] (Lemme 3); "T est (relativement) ouvert" résulte du théorème de Cauchy appliqué sur $\{z = t\}$ aux géodésiques en provenance de P à vitesse unitaire, la convexité de z impliquant pour les vitesses d'arrivée d'être *strictement sortantes* de $\{z \leqslant t\}$. Conclusion : $0 \in T$ et $\exp_P$ est *surjective*, c'est donc un difféomorphisme *global* (classiquement) de classe C^{r-2}.

Mais il y a plus, car $\exp_P$ est *affine*. Etant (classiquement) une isométrie en $0 \in T_PD$, où sa Jacobienne vaut l'identité, elle est alors une isométrie en *tout* point,

$$\exp_P^* G = G(P) .$$

Ainsi est-elle *harmonique*, donc localement de classe C^r. Nous la voulons *globalement* de classe C^r.

Pour cela nous remarquons que, G étant plate, tout vecteur tangent définit un champ de vecteurs *parallèle*; en outre, la régularité du transport parallèle est meilleure que celle de l'exponentielle (liée à la dépendance par rapport à des conditions initiales), un champ de vecteurs parallèle pour G (de classe C^{r-1}) est de classe $C^{r-1}(D)$. Or si l'on considère les coordonnées géodésiques normales associées à un repère orthonormé $(e_1, \ldots, e_n)$ de T_PD, le *gradient* (pour G) de chaque coordonnée x^i n'est autre que le champ de vecteurs parallèle défini par le vecteur correspondant e^i. Ces coordonnées sont donc *globalement* régulières de classe $C^r(D)$ ce qui traduit la même régularité globale pour l'application $\exp_P$ Q.E.D.

2. Réalisabilité globale d'un disque ajusté

Hypothèses. — Soit D un disque topologique fermé de dimension 2, dont on note encore Ω, l'intérieur, et Γ, le bord, muni d'une structure de variété à bord de classe $C^{k+1,\alpha}$, $\alpha \in]0, 1[$, k entier au moins égal à 4. Soit g une métrique Riemannienne de classe $C^{k,\alpha}(D)$ et de courbure $K(g) > 0$ sur D, vérifiant l'hypothèse suivante : il existe une fonction réelle de classe $C^{k,\alpha}(D)$, nulle sur Γ et strictement convexe (pour g).

PROBLÈME. — *Soit (D, g) vérifiant les hypothèses précédentes. Chercher un plongement isomérique de classe $C^{k,\alpha}(D)$ de (D, g) dans $\mathbf{R}^3$, qui applique Γ dans un plan et tel qu'il existe une projection de $\mathbf{R}^3$ sur ce plan induisant une application bijective sur l'image de D.*

Si le problème est soluble il l'est de manière *unique* au sens où l'image de D , qui est une "calotte strictement convexe", est *rigidement liée* au plan d'ancrage de son bord [10] (p. 260) (ce qui rend la condition d'ancrage naturelle).

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, ce problème se heurte à des obstructions de nature géométrique; en regard de celles-ci, la méthode de Weingarten *globale* fournit une condition nécessaire et suffisante sur (D,g) garantissant sa réalisabilité. Cette condition, dite "d'ajustement" de (D,g) est une condition C^2 *fermée* décrite dans la

DÉFINITION 1. — *(D,g) vérifiant les hypothèses précédentes est dite ajustée s'il existe une fonction réelle $f \in C^{k,\alpha}(D)$ nulle sur Γ , strictement convexe pour g et telle que $G(g,f)$ soit une métrique Riemannienne sur D de courbure* non positive.

Notons que l'exemple non C^2-réalisable construit dans [5] (Appendice 3) à partir d'une inégalité géométrique de Burago [5] (Appendice 2), est *C^2-stable*, en bonne cohérence avec le caractère C^2 *fermé* de la condition d'ajustement.

THÉORÈME 2 [2]. — *Le problème précédent admet une solution si et seulement si (D,g) est ajustée.*

Principe de la preuve. — Montrons d'abord que l'ajustement de (D,g) est une condition *nécessaire* pour sa réalisabilité. Considérons une calotte strictement convexe γ de $\mathbf{R}^3$ ancrée au plan π sur lequel elle se projette bijectivement parallèlement à la direction δ . Soit D l'image (fermée) de cette projection. δ n'étant pas dans π , il existe un automorphisme linéaire de $\mathbf{R}^3$ qui envoie δ sur Oz et induit l'identité sur π . Dans la métrique Euclidienne E image réciproque de la métrique standard par cet automorphisme, γ est une calotte strictement convexe "droite", *i.e.* γ est le graphe en coordonnées (x,y,z) *orthonormées* (pour E) d'une fonction $Z \in C^{k,\alpha}(D)$ strictement convexe nulle au bord de D . Si l'on note $F : D \to \mathbf{R}^3$ le plongement associé à Z , dire que γ "réalise" g c'est dire que $F^*E = g$, ce qui s'écrit encore

$$G(g,Z) = e \tag{3}$$

e désignant la métrique Euclidienne standard (induite par E) sur π . (3) implique pour Z de vérifier (1) et (2). Donc γ est bien *ajustée*.

Réciproquement, montrons que l'ajustement de (D,g) est une condition *suffisante* pour sa réalisabilité. La preuve repose sur la méthode de Weingarten rendue *globale* en remarquant qu'il suffit, pour réaliser (D,g), de trouver $z \in C^{k,\alpha}(D)$ strictement convexe et nulle sur Γ , vérifiant les conditions (1) (2). On vérifie qu'un tel z , s'il existe, est encore (strictement) convexe pour la métrique plate $G(g,z)$ qui est de classe $C^{k-1,\alpha}(D)$. Dès lors, les "composantes x et y" de classe $C^{k,\alpha}(D)$ du plongement isométrique (x,y,z) cherché sont fournies, après choix d'un repère *orthonormé* (pour $G(g,z)$) de l'espace tangent à D au point P où z atteint son minimum, par le théorème 1 appliqué à $[D, G(g,z)]$.

Les conditions (1) et (2) s'écrivent respectivement dans D ,

$$|dz|^2 < 1 \; ; \; \det(D^2 z)[1 - |dz|^2]^{-1} = K(g)$$

en notant, $(D^2 z)$ l'endomorphisme de TD canoniquement associé (par g) à la Hessienne de z dans la métrique g , et $|dz|$ la norme (ponctuelle) de la 1-forme dz dans la métrique g . L'équation (de type Monge–Ampère) traduisant la condition (2) s'appelle "l'équation de Darboux". Manifestement si $z \in C^{k,\alpha}(D)$ est strictement convexe nulle sur Γ et vérifie dans D l'équation de Darboux, $K(g) \in C^{k-2,\alpha}(D)$ étant positive, z vérifiera *automatiquement* la condition (1) qui se propage par continuité à partir du point où z atteint son *minimum*. En définitive, pour réaliser (D, g), il suffit de résoudre le *problème de Dirichlet* : trouver $z \in C^{k,\alpha}(D)$ strictement convexe et nulle sur Γ , solution dans D de l'équation de Darboux. L'ajustement de (D, g) fournit précisément une *solution inférieure* de ce problème. Une solution supérieure s'en déduit aisément et cela permet de résoudre (de manière *unique*) par la méthode de continuité (voir [2]).

Remarque (en réponse à une question posée). — L'équation de Darboux peut à première vue prêter à confusion vis-à-vis de l'expression (plus connue) de la *courbure de Gauss d'un graphe*. Décrivons la situation pour clarifier les idées. Si z est la solution du problème de Dirichlet juste mentionné sur (D, g) et si Δ est le domaine strictement convexe de R^2 sur lequel prennent leurs valeurs des coordonnées (x, y) *associées à* z au moyen du théorème 1, $K(g)$ est liée à l'expression z^* de z dans la carte (x, y) (dont le graphe au-dessus de Δ *réalise* g) par l'équation bien connue,

$$K(g) = \det(D_0^2 z^*)[1 + |dz^*|_0^2]^{-2}$$

avec des notations déjà définies mais cette fois dans la métrique *Euclidienne standard* de Δ (ce qui est symbolisé par l'indice 0). L'équation de Darboux se distingue donc parfaitement de celle de la courbure de Gauss. Une remarque similaire vaudra pour l'équation de la section suivante.

3. Réalisation dans l'espace de Minkowski

Plaçons-nous dans les hypothèses de la section précédente, mais en supposant cette fois $K(g) < 0$.

PROBLÈME. — *Existe-t-il un plongement isométrique $C^{k,\alpha}(D)$ de (D, g) dans l'espace de Minkowski standard* $\mathbf{M}^3$ *, c'est-à-dire dans* $\mathbf{R}^3$ *muni de la métrique*

$$dx \otimes dx + dy \otimes dy - dt \otimes dt \; , \tag{4}$$

qui envoie Γ *dans un* plan *de genre espace ?*

La condition d'ancrage de l'image de Γ à un plan de genre espace est *rigide* (pour le groupe $O(2, 1)$) ce qui la rend naturelle.

Adapter la méthode de Weingarten globale c'est ici chercher $t \in C^{k,\alpha}(D)$ strictement convexe (pour g) nulle sur Γ telle que la métrique Riemannienne

$$G^*(g, t) := g + dt \otimes dt$$

soit plate, ce qui s'exprime encore par un problème de Dirichlet pour une équation de type Monge–Ampère *elliptique* (différente de celle de Darboux) [2]. Si t existe, t est aussi *convexe* pour la métrique plate $G^*(g,t)$ de classe $C^{k-1,\alpha}(D)$; le théorème 1 s'applique donc à $G^*(g,t)$ et fournit un couple (x,y) de coordonnées spatiales de classe $C^{k,\alpha}(D)$ telles que (x,y,t) soit le plongement désiré, *i.e.* telles que g s'écrive sur D sous la forme (4).

DÉFINITION 2. — *(D,g) vérifiant les hypothèses précédentes est dite ajustée s'il existe $T \in C^{k,\alpha}(D)$ strictement convexe pour g , nulle sur Γ et telle que $G^*(g,t)$ soit de courbure* non négative.

THÉORÈME 3 [2]. — *Le problème précédent admet une solution si et seulement si (D,g) est* ajustée.

L'ajustement de (D,g) équivaut à l'existence d'une solution *inférieure* du problème de Dirichlet juste mentionné, et permet ainsi de le résoudre (de manière *unique*) par la méthode de continuité.

L'ajustement est aussi une condition *nécessaire* pour la résolution du problème. En effet, supposons (D,g) réalisée par une surface Σ dans $\mathbf{M}^3$, dont le bord Γ est dans un plan de genre espace; prenons des coordonnées de Lorentz (x,y,t) (*i.e.* dans lesquelles la métrique de $\mathbf{M}^3$ s'écrive comme en (4)) telles que $\{t=0\}$ soit le plan contenant Γ . g étant réalisée, Σ *est nécessairement de genre espace* donc la projection sur $\{t=0\}$ parallèlement à l'axe Ot induit sur Σ une application *bijective* (autrement dit, toute calotte de genre espace dans $\mathbf{M}^3$ est nécessairement *droite*). Soit D le fermé de $\{t=0\}$ délimité par Γ; Σ est donc le graphe $t=T(x,y)$ d'une fonction $T \in C^{k,\alpha}(D)$ nulle sur Γ . Ce graphe réalisant g , on montre que T (ou $-T$) est nécessairement *strictement convexe* sur *D muni de la métrique g* , et que la métrique $G^*(g,T)$ est de courbure *nulle.* (D,g) est donc bien *ajustée.*

Remarque. — Nous ne connaissons pas d'inégalité géométrique pour une calotte convexe dans $\mathbf{M}^3$ permettant de construire un exemple non réalisable comme celui de [5] (Appendice 3). A ce jour il n'est donc pas prouvé que la définition 2 précédente soit pertinente.

Références

[1] DARBOUX G. — *Théorie générale des surfaces*, vol. 3, Paris, 1894.

[2] DELANOË PH. — *Réalisations globalement régulières de disques strictement convexes dans les espaces d'Euclide et de Minkowski par la méthode de Weingarten*, Prépublication n° 181 de l'Université de Nice (Mathématiques), à paraître dans Ann. Sc. Ecole Norm. Sup., 1988.

[3] GREENE R.E. — *Isometric embeddings of Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds*, Memoirs of the A.M.S. 97, 1970.

[4] GROMOV M.L. — *Partial differential relations*, Springer-Verlag, 1986.

[5] GROMOV M.M. & ROKHLIN V.A. — *Plongements et immersions en géométrie Riemanienne*, Ouspekhi Mat. Naouk, **25** (5) (1970), 3-62 (en russe).

[6] HEINZ E. — *Existence theorems for one-to-one mappings associated with elliptic systems of second order II*, J. Analyse Math, **17** (1966), 145-184.

[7] KOSZUL J.L. — *Variétés localement plates et convexité*, Osaka J. Math., **2** (1965), 285-290.

[8] LIN C.S. — *The local isometric embedding in* $\mathbf{R}^3$ *of 2-dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly*, Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), 867-887.

[9] NASH J. — *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Annals of Math., **63** (1) (1956), 20-63.

[10] POGORELOV A.V. — *Géométrie extrinsèque des surfaces convexes*, Naouka Moscou 1969, (en russe); traduction anglaise :A.M.S. Translations of mathematical monographs 35, 1973.

[11] WEINGARTEN J. — *Über die Theorie der Aufeinander abwickelbaren Oberflächen*, Berlin, 1984.

Philippe DELANOË
C.N.R.S.
Université de Nice
Parc Valrose
06034 NICE Cedex