SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Comment distribuer des points uniformément sur une sphère ? (D'après Lubotzky, Phillips et Sarnak)

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 9-18

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__9_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1986–1987 (9–18)

COMMENT DISTRIBUER DES POINTS UNIFORMÉMENT SUR UNE SPHÈRE?

(D'après Lubotzky, Phillips et Sarnak)

par *Yves COLIN DE VERDIÈRE*

Il y a plusieurs mesures possibles de l'uniformité de la la distribution d'un ensemble fini de points sur une variété riemanniennne compacte homogène X. Lorsqu'on s'intéresse à l'intégration numérique des fonctions sur X, un invariant possible est défini ainsi :

si $S = \langle a_1, b_1 = a_1^{-1}, ..., a_l, b_l = a_l^{-1} \rangle$ est une partie finie symétrique de Isom(X), on mesure l'uniformité de la distribution des orbites $S.x_0$ ($x_0 \in X$) à l'aide de l'opérateur T_S défini sur $L^2(X)$ par :

$$(T_S f)(x) = \sum_{\gamma \in S} f(\gamma x) .$$

L'opérateur T_S est symétrique, de norme $2l$ et $T_S(1) = 2l.1$, on en déduit que T_S laisse invariant l'espace $L_0^2(X) \subset L^2(X)$, formé des fonctions de moyenne nulle. On pose

$$\delta_S = \| T_{S|L_0^2(X)} \| .$$

On a aussi

$$\delta_S = \sup\{|\lambda| | \lambda \quad \text{valeur propre de} \quad T_{S|L_0^2}\},$$

en effet, T_S commute avec le laplacien et admet donc une base orthonormée de fonctions propres communes avec lui. La bonne répartition moyenne des orbites est mesurée par la petitesse de δ_S par rapport à $2l$.

Remarque. — Soit $m > \dim(X)/2$ et C (ne dépendant que de X) telle que :

$$\|f\|_{L^\infty(X)} \leq C \|f\|_{H^m(X)} ,$$

on a :

$$\forall f \in H_m(X),\ \forall x_0 \in X,\ \left|\int_X f - \frac{1}{2l}\sum_{\gamma\in S} f(\gamma x_0)\right| \leq C\frac{\delta_S}{2l}\|f\|_{H^m(X)}\,.$$

On introduit un autre invariant de la façon suivante : soit G_S le sous-groupe de Isom(X) engendré par S, soit :

$$S^{(s)} = \{\gamma \in G_S | \gamma \text{ est un mot de longueur } \leq s \text{ en } S\}\,,$$

on s'intéresse à la croissance par rapport à s de $\delta_{S^{(s)}}$.

Il n'est pas clair qu'on puisse trouver des S tels que $\delta_S < 2l$, et en fait dans le cas des tores plats, c'est impossible.

1. Cas des tores

Soit $X = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ muni d'une métrique plate et S un sous-ensemble fini, symétrique de X, opérant par translation sur lui-même:

$$S = \{\pm a_i | 1 \leq i \leq l\}\,.$$

Les valeurs propres de $T_{S|L_0^2(X)}$ sont les nombres

$$\lambda_\nu = 2\sum_{i=1}^{l} \cos(2\pi\langle\nu|a_i\rangle\,,$$

où $\nu \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, la fonction propre e_ν étant l'exponentielle $e^{2\pi i\langle\nu|x\rangle}$. Alors ε étant donné, il existe $\nu \in \mathbf{Z}^n - \{0\}$, tel que $\forall i$, $d(\langle\nu|a_i\rangle, \mathbf{Z}) \leq \varepsilon$ (théorème de récurrence).

On en déduit qu'il existe des ν non nuls, tels que λ_ν soit arbitrairement proche de $2l$, et donc $\delta_S = 2l$.

2. Résultats de Lubotzky, Phillips et Sarnak

Dans les articles [LPS 1] et [LPS 2], les auteurs montrent que le cas de S^2 est très différent de celui des tores; ils prouvent en particulier les trois théorèmes suivants :

THÉORÈME A . — *$\forall S \subset SO(3)$ avec $\#S = 2l$, on a*

$$\delta_S \geq 2\sqrt{2l-1}\,.$$

THÉORÈME B . — *$\forall p$ premier, $p \equiv 1(\text{mod}4)$, il existe un sous-ensemble S_p à $p+1$ éléments de $SO(3)$ tel que :*

$$\delta_{S_p} = 2\sqrt{p}\,.$$

THÉORÈME C . — *Si on pose $\#S_p^{(s)} = N_{p,s}$, on a :*

$$\delta_{S_p^{(s)}} \leq \text{C.Log}\,(N_{p,s})\sqrt{N_{p,s}}\,.$$

Le théorème A est comparativement facile et dépend de résultats de Kesten ([K]) sur le support de la mesure spectrale associée à un groupe de type fini. Le théorème B dépend des conjectures de Weil, démontrées par Deligne, via une majoration asymptotique des coefficients de Fourier de formes modulaires convenables. Le théorème C est une conséquence assez simple du théorème B.

Dans cet exposé, nous nous contentons de décrire les résultats de Kesten, la preuve du théorème A et la construction des ensembles S_p.

3. Mesure spectrale d'un graphe homogène

Soit Γ un graphe homogène sous l'action d'un groupe G. On suppose Γ de degré (valence) $q+1$ et muni de la mesure qui donne la masse 1 à chaque sommet. Sur $L^2(G)$, on définit un opérateur T par la formule :

$$(Tf)(x) = \sum_{x'\sim x} f(x')\,.$$

T est relié au laplacien combinatoire standard par $T = (q+1)\text{Id} - \Delta$.

L'exemple fondamental est le *graphe de Cayley,* Γ_G d'un groupe G associé à un système S *symétrique* de $2l = q+1$ générateurs : les sommets de Γ_G sont les points de G, il y a une arête entre g et g' chaque fois qu'il existe $\gamma \in S$ tel que $\gamma g = g'$. Γ est homogène sous l'action de G par translation à droite sur lui-même. Si G est libre, Γ est un arbre homogène.

On a une notion de *mesure spectrale* associée au graphe homogène Γ, qui est un cas particulier de la notion chère aux physiciens de *densité d'états* (voir à ce sujet, par exemple [CV 1]).

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue; par le calcul fonctionnel, est associé à f un opérateur $f(T)$ sur $L^2(\Gamma)$, qui admet une matrice $[f(T)]_{x,x'}$. A cause de l'homogénéité de Γ, on a évidemment :

$$\forall x, x' \quad [f(T)]_{x,x} = [f(T)]_{x',x'}\,.$$

On considère alors, pour $x_0 \in \Gamma$ fixé, la forme linéaire sur $C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ définie par :

$$L(f) = [f(T)]_{x_0,x_0}\,.$$

L est une forme linéaire positive ($f \geq 0 \Rightarrow f(T) \geq 0 \Rightarrow [f(T)]_{x_0,x_0} \geq 0$); $L(1) = 1$ et donc L définit une mesure de probabilité μ sur $\mathbf{R}$, c'est la mesure spectrale de Γ.

Dégageons quelques propriétés de μ :

i) Si Γ a $N < \infty$ sommets, on a : $\mu = 1/N \sum_{i=1}^{N} \delta(\lambda_i)$, où $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_N$ sont les valeurs propres de T; en effet, on a :

$$\mathrm{Tr} f(T) = \sum_{x \in \Gamma} [f(T)]_{x,x} = N \int f d\mu \, .$$

ii) Support (μ) = spectre (T) .

En effet :

a) si $]a,b[\cap \mathrm{Spectre}(T) = \emptyset$ et $f \in C_0(]a,b[), \mathbf{R})$, on a $f(T) = 0$ et donc $]a,b[\cap \mathrm{Supp}(\mu) = \emptyset$.

b) Réciproquement, si $]a,b[\cap \mathrm{Supp}(\mu) = \emptyset$, on a, pour toute f à support dans $]a,b[$,

$$[f^2(T)]_{x,x} = 0$$

et comme

$$[f^2(T)]_{x,x} = \sum_{x' \in \Gamma} ([f(T)]_{x,x'})^2 \, ,$$

$f(T) = 0$. En particulier $\mathrm{Supp}\mu \subset [-2l, 2l]$.

iii) $\int t^s d\mu = m_s$ est le nombre de lacets d'origine x et de longueur s, où la longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes parcourues. En particulier, on a : $m_s(\Gamma) \geq m_s(A_q)$, où A_q est l'arbre homogène de degré $q+1$.

iv)$\|T\| = \mathrm{limsup}(m_s)^{1/s}$. En effet, soit $F(\lambda) = \int (\lambda - t)^{-1} d\mu(t)$, c'est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - \mathrm{Spectre}(T)$, la relation précédente découle du calcul du rayon de convergence de la série de Laurent de F.

v) Calcul de μ à partir de la résolvante; on a :

$$\mu = \frac{1}{2i\pi} [(t + i0 - T)^{-1} - (t - i0 - T)^{-1}]_{x,x} \, .$$

vi) Soit G_n une suite décroissante de sous-groupes de G, d'indices finis et dont l'intersection est $\{e\}$, on a :

$$\mu_G = \mathrm{lim} \mu_{G_n \backslash G}$$

La preuve consiste à regarder la limite des $m_s(G_n)$.

Venons-en au théorème de Kesten, concernant le cas du graphe de Cayley d'un groupe G de générateurs S :

THÉORÈME (KESTEN 1959) . — *Soit (G, S), avec $\#S = 2l$ et $d_{G,S}$ la norme de l'opérateur T associé, on a :*

$$2\sqrt{2l-1} \leq d_{G,S} \leq 2l$$

avec :

$$d_{G,S} = 2\sqrt{2l-1} \Longleftrightarrow (G, S) \text{ libre}$$
$$d_{G,S} = 2l \Longleftrightarrow G \text{ moyennable} .$$

Preuve. — La majoration de $d_{G,S}$ est évidente par définition de T_S qui est somme de $2l$ opérateurs de norme 1; la minoration résulte de iii) et iv) : en effet ces relations prouvent que $\|T\|$ est minimale à l fixé, lorsque Γ est un arbre. Il reste à prouver que $d = 2\sqrt{2l-1}$ lorsque (G, S) est libre, ce qui sera fait au §4.

La caractérisation des groupes libres comme un minimum absolu de $d_{G,S}$ est faite dans [K]; elle est délicate , mais cette caractérisation n'est pas utile pour ce qui suit.

L'autre extrême, le cas moyennable, est plus accessible. Rappelons qu'un groupe est *moyennable* s'il existe une moyenne invariante définie sur toute fonction bornée de G dans $\mathbf{R}$, positive sur les fonctions positives, telle que la fonction 1 soit de moyenne 1.

La propriété de moyennabilité admet une interprétation géométrique, c'est la condition de Fölner :

(F) G est dit de Fölner si $\forall \varepsilon > 0$, il existe une partie finie $A \subset G$ telle que $\#bA \leq \varepsilon \#A$, où $\#bA$ est le nombre d'arêtes joignant A au complémentaire de A dans le graphe de Cayley de G. Cette propriété est indépendante du système de générateurs, c'est une propriété isopérimétrique.

On a alors le :

THÉORÈME . — *G , de type fini, est moyennable si et seulement si G est de Fölner.*

La preuve se trouve dans [GL].

Il est alors facile de relier la condition (F) et la condition spectrale $d_{G,S} = 2l$, en effet cette condition se traduit sur le laplacien par inf(Spectre Δ) $= 0$: l'équivalence résulte alors du minimax appliqué à la fonction caractéristique de A dans un sens et de l'inégalité de Cheeger dans l'autre ([DK]).

4. Cas des arbres

Ici Γ est un arbre homogène de degré $2l = q + 1$.

4a. Spectre et résolvante. — La matrice de la résolvante s'obtient par résolution de :

$$(\lambda - T)f = \delta(x_0)\,, \quad f \in L^2(\Gamma)\,.$$

Par symétrie, $f(x)$ est une fonction u_n de la distance n de x à x_0. Cette suite doit satisfaire

$$\lambda u_0 - (q+1)u_1 = 1 \tag{1}$$

$$\lambda u_n - (u_{n-1} + q u_{n+1}) = 0 \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 (q+1) q^{n-1} < +\infty \tag{3}$$

On est amené à chercher u_n sous la forme $u_n = C\alpha^n$, où α est solution de

$$q\alpha^2 - \lambda\alpha + 1 = 0 \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{1}{\lambda - (q+1)\alpha}\,.$$

L'équation caractéristique n'a de solution vérifiant (3) que si $\lambda \notin I_q = [-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}]$.

Dans ce cas, on obtient pour $\lambda \notin$ Spectre(T) :

$$[(\lambda - T)^{-1}]_{x,x} = \frac{2q}{(q-1)\lambda - (q+1)F(\lambda)}\,,$$

où $F(\lambda)$ est la détermination de $\sqrt{\lambda^2 - 4q}$ dans $\mathbf{C} - I_q$ équivalente à λ lorsque λ est grand. Les propriétés 3.iii et3.v montrent alors que : spectre$(T) = I_q$ et donc $d_\Gamma = \sqrt{2q}$. On a aussi par le calcul de μ dans 4.v :

$$d\mu = \frac{(q+1)\sqrt{4q - t^2}}{2\pi((q+1)^2 - t^2)} dt\,.$$

On vérifie en particulier que $\int d\mu = 1$.

4b. Calcul fonctionnel. - On définit des opérateurs T_n par $(T_n f)(x) = \sum_{d(x,x')=n} f(x')$. Il est clair que les T_n sont donnés par des polynômes $T_n = P_n(T_1)$.

Par exemple :

$$P_0 = 1,\ P_1 = t,\ P_2 = t^2 - (q+1), \dots\,.$$

On a le résultat suivant :

$$a_{n,m} = \int P_n(t) P_m(t) d\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (q-1)q^{n-1} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Preuve. — D'après la définition de μ, on a : $a_{n,m} = [P_n P_m(T)]_{x,x}$; comme $P_n P_m(T) = P_n(T) \circ P_m(T)$, on a :

$$a_{n,m} = \sum_{d(x,x')=n} \sum_{d(x',x)=m} 1\,.$$

Les polynômes $P'_n = ((q-1)q^{n-1})^{-1/2}P_n$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R}, \mu)$.

Calcul des P_n : ce calcul est fait par les auteurs, on trouve :

$$P_n = Q_n - Q_{n-2} \text{ où } Q_n(2\sqrt{q}\cos\theta) = q^{n/2}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} .$$

5. Preuve du théorème A

Comme T_S commute avec le laplacien, il préserve les espaces propres du laplacien canonique de S^2, les espaces H_n d'harmoniques sphériques. Rappelons (cf [BGM]) que H_n est l'espace vectoriel des restrictions à S^2 des polynômes homogènes de degré n, harmoniques dans $\mathbf{R}^3$ et qu'on a $\dim(H_n) = 2n+1$. et

$$H_n = \mathrm{Ker}(\Delta - n(n+1)) .$$

Définissons des mesures μ_n sur $\mathbf{R}$ à support dans $[-2l, 2l]$ par

$$\mu_n = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\lambda_{n,j} ,$$

où $\lambda_{n,1} \leq ... \leq \lambda_{n,2n+1}$ sont les valeurs propres de $T_{S|H_n}$.

Le théorème A est alors une conséquence immédiate du :

THÉORÈME . — *Lorsque $n \to \infty$, les mesures μ_n convergent vaguement vers une mesure μ qui est la mesure spectrale du groupe G_S relativement aux générateurs de S.*

(Le théorème A s'en déduit immédiatement puisque visiblement tout point du support de μ est un point du spectre essentiel de T_S, car point d'accumulation de valeurs propres de T_S).

Preuve. — Le théorème précédent est conséquence d'une mini-formule de traces qui s'écrit ainsi :

$$(\star) \qquad \mathrm{Tr}(T^s_{S|H_n}) = \sum\nolimits_\gamma^{(s)} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_\gamma}{\sin\frac{\theta_\gamma}{2}} ,$$

où $\sum^{(s)}$ est la somme sur les mots de longueur s par rapport à S et si γ est un tel mot considéré comme une rotation, $\theta_\gamma \in [0, \pi]$ est l'angle de cette rotation.

La formule $(\star)$ est élémentaire, on a :

$$(T^s_S f)(z) = \sum\nolimits_\gamma^{(s)} f(\gamma z)$$

et donc si T_γ est défini par :

$$T_\gamma f(z) = f(\gamma z) ,$$

on a $T_S^s = \sum_\gamma^{(s)} T_\gamma$, et :

$$\mathrm{Tr} T^s_{S|H_n} = \sum\nolimits_\gamma^{(s)} \mathrm{Tr}(T_{\gamma|H_n}) ,$$

puis la trace de $T_{\gamma|H_n}$ (valeur du caractère χ_n de la représentation naturelle de $SO(3)$ dans H_n sur γ) se calcule en diagonalisant $T_\gamma$par rapport à la base usuelle des harmoniques sphériques relative à l'axe de la rotation γ (les $Y_{l,n}$).

$$\mathrm{Tr} T_{\gamma|H_n} = \chi_n(\gamma) = \sum_{|l|\leq n} e^{il\theta_\gamma} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta_\gamma}{\sin\frac{\theta_\gamma}{2}}.$$

Cela conclut la preuve de ($\star$). Il serait intéressant d'étendre cette formule à un contexte plus général (espaces symétriques compacts, espaces homogènes).

Considérons maintenant les μ_n, on a :

$$\int t^s d\mu_n = \frac{1}{2n+1}\mathrm{Tr}(T^s_{S|H_n}) ,$$

et donc, en appliquant ($\star$) :

$$\int t^s \mu_n \to \#\{\gamma|\theta_\gamma = 0\} = m_s ,$$

lorsque $n \to \infty$. On en déduit le résultat cherché. Il est remarquable que μ ne dépend pas la représentation de G_S dans $SO(3)$, mais seulement du groupe abstrait G_S et de son système de générateurs S.

6. Construction des S_p

Soit $\mathbf{H}$ le corps des quaternions. Un élément q de $\mathbf{H}$ est $q = x + yi + zj + tk$ de norme $N(q) = q\bar{q} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, et on peut associer à tout quaternion non nul une rotation $\hat{q}$ de $\mathbf{H}_1 = \{q|x=0\}$ par

$$\hat{q}.z = \frac{1}{N(q)} qz\bar{q} .$$

On désigne par $\mathbf{H}(\mathbf{Z})$ l'ensemble des quaternions à coordonnées entières.

Pour tout p premier, il existe $8(p+1)$ quaternions entiers de norme p ([HW]). Lorsque $p \equiv 1 \pmod 4$, il existe $p+1$ de ces quaternions tels que $x > 0$, y, z, t pairs.

$$p = 5 \quad 1 \pm 2i, 1 \pm 2j, 1 \pm 2k$$

$$p = 13 \quad 1 \pm i \pm j \pm k, 3 \pm 2i, 3 \pm 2j, 3 \pm 2k$$

$$p = 17 \quad 1 \pm 4i, 1 \pm 4j, 1 \pm 4k, 3 \pm 2i \pm 2j, 3 \pm 2j \pm 2k, 3 \pm 2i \pm k$$

S_p est l'ensemble des $p + 1$ rotations associées à ces quaternions.

7. Problèmes

Dans [LPS3] et [LPS4], les mêmes auteurs appliquent des méthodes du même type pour construire des graphes explicites de degré $q+1$ ayant un λ_1 le plus grand possible relativement au nombre de sommets.

Je mentionne ici en conclusion quelques problèmes de nature variée :

i) *Analyse numérique* : comment calculer efficacement les valeurs propres et vecteurs propres des T_p?

ii) *Analyse harmonique* : il est facile de voir que les T_p ($p \equiv 1(\text{mod}4)$) commutent entre eux. On met ainsi en évidence une base orthonormée spéciale des harmoniques sphériques : les $W_{n,j}$ ($n = 0, 1, \dots ; 1 \leq j \leq 2n + 1$. Quelles sont leurs propriétés?

a) Du point de vue du développement d'une fonction arbitraire en série de Fourier?

b) A-t-on $\|W_{n,j}\|_{L^\infty} \leq$ constante?

c) A-t-on des propriétés d'ergodicité analogue à celles de [CV2[, c'est à dire, si $\mu_{j,n} = |W_{n,j}|^2\sigma_0$, est-ce-que les $\mu_{j,n}$ convergent vers σ_0 lorsque $n \to \infty$?

Il est en effet vraisemblable que pour beaucoup de problèmes la base $(W_{n,j})$, ne privilégiant plus une des directions des axes de $\mathbf{R}^3$, a de meilleures propriétés que la base usuelle des $(Y_{l,n})$.

8. Bibliographie

[BGM] BERGER, GAUDUCHON, MAZET . — *Le spectre d'une variété riemannienne compacte*, LNM 194, Springer, 1974.

[C] CARTIER. — *Harmonic analysis on trees*, Proc. Symp. Pure Math., **26** (1973), 419-424.

[CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Minoration des sommes de valeurs propres d'un domaine et conjecture de Polya*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Chambéry- Grenoble, **3** (1984-1985), VI1-VI11.

[CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Comm. Math. Phys., **102** (1985), 497-502.

[D] DELIGNE. — *La conjecture de Weil I*, Publ. Math. IHES, **43** (1974), 273-307.

[DK] DODZIUK. — *Difference equations, isoperimetric inequalities and transience of certain random walks*, Trans. AMS, **284** (1984), 787-794.

[GF] GREENLEAF. — *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand, 1969.

[GV] GROMOV . — *Structures métriques pour les variétés riemanniennes, rédigé par Lafontaine et Pansu*, Cedic-Nathan, 1980.

[HW] HARDY, WRIGHT. — *An introduction to number theory*, Oxford U.P., 1962.

[K] KESTEN. — *Symmetric random walks on groups*, Trans. AMS, **92** (1959), 336-354.

[LPS1] LUBOTZKY, PHILLIPS, SARNAK. — *Hecke operators and distributing points on the sphere I*, preprint, (1986), 0-65.

[LPS2] LUBOTZKY, PHILLIPS, SARNAK. — *Hecke operators and distributing points on the sphere II*, preprint, (1986), 0-35.

[LPS3] LUBOTZKY, PHILLIPS, SARNAK. — *Explicit expanders and the Ramanujan conjectures* , preprint, (1986), 0-7.

[LPS4] LUBOTZKY, PHILLIPS, SARNAK. — *Ramanujan graphs* , preprint, (1986), 0-33.