FERNAND PELLETIER

Sur le théorème de Gauss-Bonnet pour les pseudo-métriques singulières

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 99-105
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__99_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1986–1987 (99–105)

SUR LE THÉORÈME DE GAUSS-BONNET POUR LES PSEUDO-MÉTRIQUES SINGULIÈRES

par *Fernand PELLETIER*

1) Introduction

Une pseudo-métrique g est un champ de formes bilinéaires symétriques sur une variété M . Lorsque g est non dégénérée et M compacte, le théorème classique de Chern-Gauss-Bonnet ([1], [2]) affirme que, l'intégrale de la forme Pfaffienne d'une connection métrique compatible avec g , est égale à la classe d'Euler de M . Cette propriété n'est plus vraie, en général, si g est dégénérée . L'objet de cet exposé est d'étudier une telle situation lorsque le lieu singulier de g, c'est-à-dire l'ensemble des points de M où g est dégénérée , est une sous-variété de codimension 1.

2) Rappels sur le théorème de Gauss-Bonnet pour les connections métriques

Soit g une métrique pseudo-riemannienne sur une variété M de dimension M . Une connexion métrique compatible avec g ou connexion g-métrique est une application $\mathbf{R}$-bilinéaire

$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ ($\Gamma(M)$ espace des champs de vecteurs sur M) ayant les propriétés suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y \\ (2) & \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y\end{array}\right\} \text{pour toute fonction } f \text{ sur } M \text{ et tout } X \text{ et } Y \text{ de } \Gamma(M)$$

(3) $\quad X\{g(Y,Z)\} = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ pour tout X, Y et Z de $\Gamma(M)$.

Il existe une unique connexion métrique à torsion nulle, c'est la connexion de Levi-Civita caractérisée par :

(4) $$g(\nabla_X Y, Z) = X\{g(Y,Z)\} + Y\{g(X,Z)\} - Z\{g(X,Y)\} + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) .$$

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un champ de repères orthonormés sur un ouvert U de M . Pour toute connection g-métrique , il existe une matrice de 1-forme (ω_i^j) , $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ sur U telle que :

$$\nabla_X X_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_i^j(X) X_j .$$

La matrice de courbure de ∇ est la matrice $(\Omega_i^j), 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$ de 2 formes caractérisées par :

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \wedge \omega_k^j .$$

Supposons M connexe, de dimension paire $n = 2p$, et notons (Ω_{ij}) le produit de (Ω_i^j) par la matrice $\begin{pmatrix} -I_r & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$, $r + s = n$, si (r, s) est la signature de g sur M . La forme Pfaffienne de ∇ sur M est la $2p$-forme Δ définie par ([3])

$$\Delta_{|U} = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^p \frac{1}{2^p p!} \Sigma \varepsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_{2p}} \Omega_{\alpha_1} \alpha_{2p} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\alpha_{2p-1} \alpha_{2p}}$$

où $\varepsilon_{\alpha_1 \cdots \alpha_{2p}}$ vaut $+1$ ou -1 selon que $(\alpha_1 \cdots \alpha_{2p})$ est une permutation paire ou impaire de $(1 \cdots 2p)$.

Lorsque M est compacte orientable on a ([1], [2], [3]).

THÉORÈME DE GAUSS-BONNET. — *L'intégrale de Δ sur M est égale à la caractéristique d'Euler Poincaré de M.*

3) Pseudo-métriques génériques

Une *pseudo-métrique sur* M est un champ C^∞ de formes bilinéaires symétriques. Le *lieu singulier de* g est l'ensemble des points x de M où le rang de g en x n'est pas égal à $n = \dim M$. En général, $\Sigma(g)$ sera non vide. Sur chaque composante connexe, de $M - \Sigma(g)$, g est une métrique pseudo-riemannienne de signature constante et cette signature peut varier d'une composante connexe à une autre. Sur $\Sigma(g)$, le noyau de g en x est l'espace $K_g(x) = \{u \in T_x M / g_x(u,v) = 0$ pour tout $v \in T_x M\}$. L'ensemble $\Sigma(g)$ est la réunion des ensembles $\Sigma_c(g) = \{x \in \Sigma(g) | \dim K_g(x) = c\}$. Dans l'ensemble $\mathcal{P}(g)$ des pseudo-métriques sur M muni de la topologie C^∞ de Whitney, génériquement $\Sigma_c(g)$ est une sous-variété de codimension $\frac{c(c+1)}{2}$ de M éventuellement vide. Une pseudo-métrique ayant cette propriété *sera dite générique*. Sur chaque $\Sigma_c(g)$, lorsque g est générique, le noyau définit un champ c-plan K_g . Les positions relatives de K_g et $T\Sigma_c(g)$ permettent de définir des ensembles singuliers "d'ordre supérieur" analogue au singularités de Thom-Boardman pour les applications (voir [5]).

4) Connexion duale g-métrique

Soit g une pseudo-métrique générique sur M . Si $\Sigma(g)$ est non vide, il n'existe pas, en général, de connexion g-métrique, c'est-à-dire d'application $\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ ayant les propriétés (1), (2) et (3) ci-dessus. En effet, soit K un champ de vecteurs sur un voisinage U de $x \in \Sigma_1(g)$ qui engendre le noyau de g sur $\Sigma_1(g) \cap U$ et qui est transverse à $\Sigma_1(g)$. (génériquement cette situation représente sur un ouvert dense de $\Sigma_1(g)$). L'équation locale de $\Sigma_1(g)$ est alors $g(K,K) = 0$ et comme K est transverse à $\Sigma(g)$ on a $K\{g(K,K)\} \neq 0$ sur $\Sigma(g) \cap U$. D'autre part, s'il existait une connexion g-métrique ∇ sur M on aurait $K\{g(K,K)\} = 2g(\nabla_K K, K)$ d'après (3). Mais K étant le noyau de g sur $\Sigma(g) \cap U$, $g(\nabla_K K, K) = 0$ sur $\Sigma(g)$ alors $K\{g(K,K)\} \neq 0$!

A la notion de connexion g-métrique, on va substituer la notion de connexion duale g-métrique : une connexion duale g-métrique ([4]) est une application $\mathbf{R}$-bilinéaire $D : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Lambda^1(M)$ (espace des 1-formes sur M) ayant les propriétés suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} (1') & D_X fY = X(f)g(Y,\ \ ) + fD_X Y \\ (2') & D_{fX} Y = fD_X Y \end{array}\right\} \text{pour toute fonction } f \text{ sur } M \text{ et tout } X, Y \in \Gamma(M)$$

$$(3') \quad X\{g(Y,Z)\} = (D_X Y(Z) + D_X Z(Y) .$$

Il existe toujours une telle connexion duale : la connexion duale de Levi-Cevita caractérisée par :

$D_X Y(Z)$ est égal au second membre de (4).

A une connexion duale g-métrique D est associée une unique connexion g-métrique sur $M - \Sigma(g)$ définie par $g(\nabla_X Y, Z) = D_X Y(Z)$. On peut donc associer à toute connexion duale g-métrique, lorsque $n = \dim M = 2p$, une forme Pfaffienne Δ sur $M - \Sigma(g)$ qui est la forme Pfaffienne de ∇ sur $M - \Sigma(g)$.

Si, de plus, M est compacte, $M - \Sigma(g)$ a un nombre fini de composantes connexes M_i , $i = 1 \cdots q$. Lorsque $\Sigma(g)$ est non vide la frontière de M_i est une pseudo-variété compacte contenue dans $\Sigma(g)$. Dans le cas particulier où g est générique et $\Sigma(g) = \Sigma_1(g)$, l'adhérence de M_i est une variété compacte à bord. L'étude de l'intégrale de Δ sur $M - \Sigma(g)$ revient donc dans ce cas à l'étude de l'intégrale de Δ sur la variété compacte à bord $\overline{M}_i$, $i = 1 \cdots q$ ($\overline{M}_i$ étant l'adhérence de M_i dans M).

5) Intégrale de la forme Pfaffienne d'une connexion duale g-métrique sur une variété compacte à bord

Dans tout ce paragraphe, N est une variété compacte connexe orientable à bord ∂N non vide, de dimension paire $n = 2p$ et g est une pseudo-métrique sur N . Lorsque g est une métrique riemannienne, rappelons que l'on a ([3])

$$\int_N \Delta = \chi(N) + \sum_{k=1}^{p} a_k \int_{\partial N} \theta_k$$

où $\chi(N)$ est la caractéristique d'Euler Poincaré de N
$a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_p$ sont des constantes universelles
$\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots, \theta_p$ sont des $2p-1$ formes sur ∂N qui ne dépendent que de la seconde forme fondamentale de ∂N et de la courbure de la connexion induite sur ∂N .

Lorsque g est une métrique pseudo-riemannienne, on peut établir un résultat analogue moyennant l'hypothèse suivante : la pseudo-métrique induite par g sur ∂N est non dégénérée.

On se place désormais dans la "situation singulière" suivante :

(5) le lieu singulier de g est égal à ∂N .

(6) le noyau de g est transverse à ∂N .

Il existe alors un voisinage collier $\emptyset : \partial N \times [0,1[\to N$ ayant les propriétés suivantes :

- chaque composante connexe de $V = \emptyset(\partial N \times [0,1[)$ est un voisinage d'une seule composante connexe de ∂N.
- la pseudo-métrique induite par g sur $\emptyset(\partial N \times \{t\})$ est non dégénérée.

On dira alors que $\emptyset : \partial N \times [0,1[\to N$ est au *voisinage collier* adapté à g.

Etant donné un voisinage collier $\emptyset : \partial N \times [0,1[\to N$ adapté à g , soit X un champ de vecteurs non nul sur $V = \emptyset(\partial N \times [0,1[)$ orthogonal à $\emptyset(\partial N \times \{t\})$ pour tout $0 \leqslant t < 1$. La fonction $g(X,X)$ est alors nulle sur ∂N . On impose l'hypothèse supplémentaire suivante :

(7) la fonction $\varphi : V \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi(x) = g_x(X,X)$ est non dégénérée sur ∂N .

Soit D une connexion duale g métrique sur N et ∇ la connexion g métrique sur $N - \partial N$ associée (comme à la fin du paragraphe 4). On note Δ la forme

Pfaffienne de ∇ sur $N - \partial N$. Etant donné un voisinage $\emptyset : \partial N \times [0,1[\to N$ adapté à g , sur la variété $N_t = N - \emptyset(\partial N \times [0,t[)$ on a :

THÉORÈME A. — *1) Soit F le fibré tangent au feuilletage $\{\emptyset(\partial N) \times \{t\}\}$. Il existe des $2p-1$ formes $\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_p$ sur F telles que :*

$$\int_{N_t} \Delta = \chi(N) + \sum_{k=1}^{p} a_k t^{\frac{1}{2}-k} \int_{\partial N_t} \theta_k + O(t^{\frac{1}{2}})$$

où a_k sont des constantes qui ne dépendent que de g .

2) Lorsque N est une surface, l'intégrale $\int_{N_t} \Delta$ est convergente si et seulement si $\int_{\partial N} \theta_1 = 0$. Dans ce cas, pour tout voisinage collier adapté à g on a $\int_N \Delta = \lim_{t \to 0} \int_{N_t} \Delta = \chi(N)$.

Considérons un champ de vecteurs non nuls K sur ∂N qui engendre le noyau de g en tout point de ∂N . On appelle seconde forme fondamentale de ∂N (relativement à K) l'application :

$\pi : \Gamma(\partial N) \times \Gamma(\partial N) \to \mathbf{R}$ ($\Gamma(\partial N)$ espace des champs de vecteurs sur ∂N)

définie par

$$\pi(X,Y) = D_X Y(K) .$$

On dira que ∂N est *autoparallèle* (relativement à la connexion duale g-métrique D) si et seulement si π est identiquement nulle. Cette propriété ne dépend pas du choix de K . On a alors

THÉORÈME B. — *Lorsque ∂N est autoparallèle l'intégrale $\int_{N_t} \Delta$ est convergente pour tout voisinage collier adapté à g et $\int_N \Delta = \lim_{t \to 0} \int_{N_t} \Delta = \chi(N)$.*

6) Applications aux pseudo-métriques génériques dont le lieu singulier est de codimension 1

Revenons à la situation d'une pseudo-métrique g générique sur une variété compacte M de dimension paire $n = 2p$. On suppose de plus que le lieu singulier $\Sigma(g)$ est une sous-variété de M de codimension 1 (c'est-à-dire $\Sigma(g) = \Sigma_1(g)$) et que le noyau de g est transverse à $\Sigma(g)$. Il existe alors un voisinage $\emptyset : \Sigma(g) \times]-1,1[\to M$ ayant les propriétés suivantes :

- Chaque composante connexe de $\emptyset(\Sigma(g) \times]-1,1[)$ est voisinage d'une seule composante connexe de $\Sigma(g)$.

- La pseudo-métrique induite par g sur $\emptyset(\Sigma(g) \times \{t\})$, $-1 < t < 1$ est non dégénérée.

On dira alors que $\emptyset : \Sigma(g)\times]-1,1[\to M$ est un ***voisinage adapté*** à g.

L'adhérence $\overline{M}_i$ de chaque composante connexe M_i de $M - \Sigma(g)$ est une variété compacte à bord et la pseudo-métrique $g_i = g_{|M_i}$ vérifie les hypothèses (5), (6) et (7). Etant donné une connexion duale g-métrique sur M et Δ sa forme Pfaffienne sur $M - \Sigma(g)$ on a alors ([8]).

THÉORÈME I. — *Soit $\emptyset : \Sigma(g)\times]-1,1[\to M$ un voisinage adapté à g et F le fibré tangent au feuilletage $\{\emptyset(\Sigma(g) \times \{t\}\}$. Il existe des $(2p-1)$-formes $\theta_1,\dots,\theta_h,\dots,\theta_p$ sur F telles que, sur la variété $M_t = M - \emptyset[-t,t[$ on ait :*

$$\int_{M_t} \Delta = \chi(M) + \sum_{k=1}^{p} t^{\frac{1}{2}-k}\Big(\sum_{j=1}^{r}\sum_{h=k}^{p} a_{jhk}\int_{\Sigma_j(g)} \theta_h^{h-k}\Big) + O(t^{\frac{1}{2}})$$

où les a_{jhk} sont des constantes qui ne dépendent que de g

$\Sigma_1(g),\dots,\Sigma_j(g),\dots,\Sigma_r(g)$ sont les composantes connexes de $\Sigma(g)$

θ_h^l $h = 1\cdots p$ est définie par récurrence de la manière suivante :

$$\theta_h^{\circ} = \theta_h \ , \ \theta_h^l = L_{\emptyset_*\frac{\partial}{\partial t}}\theta_k^{l-1} \ ,$$

$l \geqslant 1$, $L_{\emptyset_*\frac{\partial}{\partial t}}$ étant la dérivée de Lie par $\emptyset_*\frac{\partial}{\partial t}$.

Pour les surfaces compactes, on a de plus ([8]).

THÉORÈME II. — *L'intégrale $\int_M \Delta$ est convergente si et seulement si*

$$\int_{\Sigma_j(g)} \theta_1 \text{ est nulle pour } j = 1,\dots,p \ .$$

Dans ce cas pour tout voisinage $\emptyset : \Sigma(g)\times]-1,1[\to M$ à g l'intégrale de Δ sur la variété $M_t = M - \emptyset(]-t,t[)$ est convergente et on a

$$\int_M \Delta = \lim_{t\to 0}\int_{M_t} \Delta = \chi(M) \ .$$

Soit g une pseudo-métrique générique sur M dont le lieu singulier est une sous-variété de M de codimension 1. On *dira que $\Sigma(g)$ est autoparallèle*, relativement à une connexion duale g-métrique D , si $D_X Y(Z) = 0$ pour tout champ de vecteurs X et Y tangent à $\Sigma(g)$ et Z orthogonal à $\Sigma(g)$. D'après [7], la pseudo-métrique induite par g sur $\Sigma(g)$ est alors non dégénérée. Par suite, g vérifie alors les hypothèses du début de ce paragraphe. En appliquant le théorème B à l'adhérence de chaque composante connexe de $M - \Sigma(g)$ on obtient ([7], [8]) :

THÉORÈME III. — *Avec les hypothèses précédentes, l'intégrale de la forme Pfaffienne Δ de D est égale à $\chi(M)$.*

Bibliographie

[1] S.S. CHERN. — *A simple intrinsic proof of Gauss-Bonnet formula for closed riemannian manifolds*, Ann. of Math. Stud., **45**.(4) (1944), 747-752.

[2] S.S. CHERN. — *Pseudo-riemannian geometry and Gauss-Bonnet formula*, Ann. Acad. Brazil, **95** (1963), 17-26.

[3] W. GREUB, S. HALPERIN ET R. VANSTONE. — *Connections, curvature and cohomologie, Tome I et II*, Acad. Press, 1973.

[4] M. KOSSOWSKI. — *Fold singularities in pseudo-riemannian geodesic tubes*, AMS-proceedings, **95** (1985), 463-469.

[5] F. PELLETIER. — *Singularités génériques de pseudo-métriques sur une variété*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **296** (1983), 219-221.

[6] F. PELLETIER. — *Formule de Gauss-Bonnet pour certaines pseudo-métriques*, Séminaire sud-rhodanien de géométrie - Travaux en cours, Hermann-Paris, 1985.

[7] F. PELLETIER. — *Caractérisations des sous-variétés génériques totalement géodédiques d'une variété semi-riemannienne*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., **303** (1986), 651-654.

[8] F. PELLETIER. — *Intégrale de la forme Pfaffienne d'une connexion duale g-métrique*, Note proposée au C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., .

Université de Savoie
Mathématiques
BP 1104
73011 CHAMBERY Cedex