Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

GUY LAFFAILLE

Déterminants de laplaciens

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 5 (1986-1987), p. 77-84
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1986-1987__5__77_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1986–1987 (77–84)

DÉTERMINANTS DE LAPLACIENS

par *Guy LAFFAILLE*

1. Introduction

Soit M une surface compacte à bord ∂M de classe C^∞. Dans [OPS], OSGOOD, PHILLIPS et SARNAK donnent une formule explicite pour le déterminant du laplacien et montrent que le maximum de ce déterminant est atteint pour une métrique uniforme.

DÉFINITION. — *On appelle métrique uniforme une métrique sur M vérifiant une des propriétés suivantes :*

(i) si $\partial M = \varnothing$ alors M est fermée et a une courbure constante;

(ii) si $\partial M \neq \varnothing$ alors

(I) M a une courbure constante et ∂M est une réunion de géodésiques

ou

(II) M est plate et ∂M a une courbure géodésique constante.

Un hémisphère, un pantalon, un cylindre vérifient (I); un cylindre, le disque unité euclidien, un tore plat avec des trous circulaires égaux vérifient (II).

Dans la suite, on désigne par K la courbure de GAUSS, par χ la caractéristique d'EULER, par A l'aire, par k la courbure géodésique et par ds l'élément de longueur.

THÉORÈME 1.

a) Si M est fermée, la métrique uniforme est celle qui a un déterminant maximum parmi le métriques d'une classe conforme et d'aire donnée.

b) Si $\partial M = \varnothing$, la métrique uniforme de type (I) a un déterminant maximum *parmi les métriques d'une classe conforme, d'aire donnée et vérifiant*

$$\int_{\partial M} k ds \geqslant 0 \tag{CI}$$

c) Si $\partial M \neq \varnothing$, la métrique uniforme de type (II) a un déterminant maximum parmi les métriques d'une classe conforme, de longueur du bord donnée et vérifiant

$$\int_{\partial M} k ds \geqslant 2\pi\chi(M) \tag{CII}$$

2. Formule du déterminant

Soit M une surface sans bord et σ une métrique sur M. Soient $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ les valeurs propres du laplacien Δ. Soit u_j une base orthonormée de vecteurs propres ($\Delta u_j + \lambda_j u_j = 0$).

DÉFINITION. — *On pose*

$$\det{}' \Delta = \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i$$

On va montrer que cette définition a un sens. Pour cela on définit une fonction zeta par

$$\mathrm{Z}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s}$$

Cette fonction converge pour $\Re(s) > 1$ d'après le comportement asymptotique des valeurs propres et formellement on a $\det{}' \Delta = e^{-\mathrm{Z}'(0)}$.

En utilisant la fonction Γ, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \right) t^{s-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \left(\mathrm{Tr}\left(e^{t\Delta}\right) - 1 \right) t^{s-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{Tr}\left(e^{t\Delta} - \frac{1}{A} \right) t^{s-1} dt
\end{aligned}$$

Le noyau de $e^{t\Delta}$ est

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} u_j^2(x) = \frac{1}{4\pi t} + \frac{K(x)}{12\pi} + o(t)$$

Donc

$$\operatorname{Tr}\left(e^{\Delta t}\right) = \frac{A}{4\pi t} + \frac{\chi(M)}{6} + o(t)$$

et

$$\mathrm{Z}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\frac{A}{4\pi(s-1)} + \left(\frac{\chi(M)}{6} - 1\right)\frac{1}{s} + \text{analytique en } s\right\}$$

pour $\Re(s) > -1$.

On en déduit que Z est régulière en $s = 0$ et $\det' \Delta$ a bien un sens.

On désire faire varier la métrique : on fixe une métrique σ_0 sur M et on pose $\sigma = \rho\sigma_0$ avec $0 < \rho \in \mathrm{C}^\infty(M)$. On écrit $\rho = e^{2\varphi}$ et on fait varier φ. On a les formules :

$$\begin{cases} dA = e^{2\varphi} dA_0 \\ \Delta = e^{-2\varphi}\Delta_0 \\ K = e^{-2\varphi}(-\Delta_0\varphi + K_0) \end{cases} .$$

Un petit calcul de variations donne :

$$\begin{aligned} \delta\mathrm{Z}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \operatorname{Tr}\left(e^{\Delta t} - \frac{1}{A}\right) t^{s-1} dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \operatorname{Tr}\left(\delta\Delta e^{\Delta t}\right) t^s dt \\ \delta\Delta &= -2e^{-2\varphi}\delta\varphi\Delta_0 = -2\delta\varphi\Delta \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \delta\mathrm{Z}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \operatorname{Tr}\left(-2\delta\varphi\Delta e^{t\Delta}\right) t^s dt \\ &= -\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\operatorname{Tr}\left(2\delta\varphi\left(e^{\Delta t} - \frac{1}{A}\right)\right) t^s dt \\ &= \frac{2s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \operatorname{Tr}\left(\delta\varphi\left(e^{\Delta t} - \frac{1}{A}\right)\right) t^{s-1} dt \end{aligned}$$

La fonction Γ a un pôle simple en 0, donc en dérivant et en faisant $s = 0$, il reste :

$$\begin{aligned} \delta\mathrm{Z}'|_{s=0} &= 2\int_M (\delta\varphi)\left(\frac{K(x)}{12\pi} - \frac{1}{A}\right) e^{2\varphi} dA_0 \\ &= \frac{1}{6\pi}\int_M (\delta\varphi)(-\Delta_0\varphi + K_0) dA_0 - \delta\log A \end{aligned}$$

d'où en intégrant :

$$\log\det' \Delta_\varphi = -\frac{1}{6\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|^2 dA_0 + \int_M K_0\varphi dA_0\right\} + \log A + C$$

où C est une constante indépendante de φ.

Vérification : si φ est constante, ça marche!

$$\lambda_n = e^{-2\varphi}\lambda_n^0$$

$$Z_\varphi(s) = \sum \left(\lambda_n^0 e^{-2\varphi}\right)^{-s} = e^{2s\varphi} Z_0(s)$$

$$Z'_\varphi(0) = Z'_0(0) + 2\varphi\left(\frac{\chi(M)}{6} - 1\right).$$

3. Le cas où M a un bord

Soit k la courbure géodésique du bord de M. On a la formule supplémentaire :

$$k = e^{-2\varphi}(k_0 + \partial_n\varphi)$$

où ∂_n désigne la dérivée normale extérieure.

Soient $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \ldots$ les valeurs propres pour le problème de DIRICHLET.

On procède de la même façon et on a :

$$\mathrm{Tr}\left(e^{\Delta t}\right) = \frac{A}{4\pi t} - \frac{1}{8\sqrt{\pi t}}\int_{\partial M} ds + \frac{1}{6}\chi(M) + o(\sqrt{t}) \quad ,$$

d'où :

$$\log\det{}'\,\Delta_\varphi = -\frac{1}{6\pi}\left\{\int_M |\nabla_0\varphi|^2 dA_0 + \int_M K_0\varphi dA_0 + \int_{\partial M} k_0\varphi ds_0\right\} - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial M} kds + C$$

4. La fonctionnelle F

On va remplacer le déterminant du laplacien par une fonctionnelle.

Si $\partial M = \varnothing$, on pose

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla_0\varphi|^2 dA_0 + \int_M K_0\varphi dA_0 - \pi\chi(M)\log\left(\int_M e^{2\varphi} dA_0\right)$$

La formule de GAUSS-BONNET donne $F(\varphi + a) = F(\varphi)$. On a

$$F(\varphi) = -6\pi\log(\det{}'\,\Delta_\varphi) + \pi(6 - \chi(M))\log A.$$

On impose que $A = 1$ ou plutôt que

$$\int_M \varphi dA_0 = 0.$$

Si ψ minimise F avec $\int_M \psi dA_0 = 0$ alors $\varphi = \psi - \frac{1}{2}\log\left(\int_M e^{2\varphi} dA_0\right)$ minimise F avec $A = 1$.

Dans le cas à bord, on définit de même des fonctionnelles F_1 et F_2. On néglige les termes $\int_{\partial M} kds$, en se restreignant à $\int_{\partial M} kds = \text{cte}$.

On peut supposer que le bord est formé de géodésiques ($k_0 = 0$). Sinon on remplace σ_0 par $e^{2\varphi}\sigma_0$ où φ vérifie $\partial_n\varphi + k_0 = 0$. Si $k_0 = 0$, les fonctionnelles F_1 et F sont identiques.

Dans le cas où la longueur du bord est constante, on peut supposer que σ_0 est plate ($K_0 = 0$). Sinon on prend φ telle que $\Delta_0\varphi = K_0$.

Si σ est plate, alors $\int_{\partial M} kds = 2\pi\chi(M)$ et

$$F_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla\varphi|^2 dA_0 + \int_{\partial M} k_0\varphi ds_0 - 2\pi\chi(M)\log\left(\int_{\partial M} e^{\varphi} ds_0\right) \quad .$$

C'est encore invariant par translation. F_2 est minimisée par des fonctions harmoniques si on garde φ fixée sur le bord.

5. Le cas $\chi(M) \leqslant 0$

Les termes non linéaires dans F, F_1 et F_2 sont de même signe et ces fonctionnelles sont convexes en φ d'après l'inégalité de HÖLDER:

$$\int e^{\alpha\varphi+(1-\alpha)\psi} \leqslant \left(\int e^{\varphi}\right)^{\alpha}\left(\int e^{\psi}\right)^{1-\alpha} \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad .$$

Si $\partial M = \varnothing$, on choisit une suite $\varphi_n \in C^\infty(M)$ telle que $F(\varphi_n)$ converge vers $\alpha = \inf F(\varphi)$.

L'inégalité de POINCARÉ pour σ_0 donne :

$$\left|\int_M K_0\varphi dA_0\right| \ll \left(\int_M \varphi^2 dA_0\right)^{1/2} \ll \left(\int_M |\nabla_0\varphi|^2 dA_0\right)^{1/2}$$

et on a :

$$\log\left(\int_M e^{2\varphi} dA_0\right) \geqslant 0$$

car $A_0 = 1$ et $\int \varphi dA_0 = 0$. Alors il existe C telle que

$$\int_M |\nabla_0\varphi_n|^2 dA_0 \leqslant 0 \quad .$$

D'après le critère de compacité de RELLICH, il existe ψ dans $W^1(M')$, le 1-espace de SOBOLEV des fonctions de moyenne nulle, telle que φ_n converge faiblement dans $W^1(M')$, donc fortement dans $L^2(M)$ et point par point presque partout.

D'où :

$$\int_M |\nabla_0\psi|^2 dA_0 \leqslant \liminf \int_M |\nabla_0\varphi_n|^2 dA_0$$

$$\int_M K_0\psi dA_0 = \lim \int_M K_0\varphi_n dA_0$$

$$\int_M e^{2\varphi} dA_0 \leqslant \liminf \int_M e^{2\varphi_n} dA_0 \quad (\text{Fatou}).$$

Comme $\alpha = \inf F$, on a $F(\psi) = \alpha$. Donc ψ minimise F et la première variation de F est nulle en ψ :

$$-\Delta_0\psi + K_0 - \frac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi} dA_0} e^{2\psi} = 0$$

au sens faible et par régularité elliptique au sens classique. Alors $K_\psi = \dfrac{2\pi\chi(M)}{\int_M e^{2\psi} dA_0}$ est constante. Donc $\log\det'\Delta_\psi$ avec $A = 1$ a un maximum global unique à la métrique de courbure constante.

Toute métrique uniforme $e^{2\psi}\sigma_0$ est critique pour F; mais F est strictement convexe donc $\varphi = \psi$.

Si M a un bord non vide, des arguments du même type permettent de montrer le théorème.

6. Le cas de la sphère S^2

Les auteurs admettent que sur S^2 toute métrique est conforme à la métrique standard σ_0 ($K_0 = 1$).

Pour prouver la partie correspondante du théorème 1, il suffit de montrer que $\log\det'\Delta_\varphi$ soumis à la contrainte $A = 4\pi$ atteint son maximum si et seulement si $(S^2, e^{2\varphi}\sigma_0)$ est isométrique à (S^2, σ_0).

On remarque que si τ est une transformation de Möbius, $(S^2, |\tau'|^2\sigma_0)$ est isométrique à (S^2, σ_0). Si σ_0 donne un maximum du déterminant, cette famille de métrique donne aussi des maxima. Comme F n'est plus convexe, ce cas est plus difficile que le précédent.

On pose $u = 2\varphi$. On a $\chi(S^2) = 2$, donc $F(\varphi)$ admet $\varphi = 0$ comme extremum si et seulement si :

$$\frac{1}{4}\int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 \frac{dA_0}{4\pi} + \int_{S^2} u\frac{dA_0}{4\pi} - \log\left(\int_{S^2} e^u \frac{dA_0}{4\pi}\right) \geqslant 0 \quad .$$

On verra qu'il y a égalité si et seulement si $u = 2\log|\tau'| + \beta$.

On pose $d\mu = dA_0/4\pi$. On est ramené à :

$$0 \leqslant G(u) = \frac{1}{4}\int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu - \log\left(\int_{S^2} e^u d\mu\right) \quad ,$$

soumis à $\int_{S^2} u d\mu = 0$, avec égalité si et seulement si $u = 2\log|\tau'| - 2\int_{S^2} \log|\tau'| d\mu$.

Rappelons l'inégalité de MOSER [M] :

THÉORÈME. — *Si u est une fonction C^∞ sur S^2 telle que*

$$\int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu \leqslant 1 \qquad \int_{S^2} u d\mu = 0$$

alors il existe un constante absolue C telle que

$$\int_{S^2} e^{4\pi u^2} d\mu \leqslant C \quad .$$

On en déduit l'inégalité :

$$\log \int_{S^2} e^u d\mu \leqslant \frac{1}{16\pi} \int_{S^2} |\nabla u|^2 d\mu + \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} u d\mu + C,$$

où C est une autre constante.

MOSER remarque que l'on peut supposer $u \geqslant 0$ en remplaçant u par $|u|$ sans changer l'intégrale du gradient. On peut aussi utiliser le procédé de symétrisation : à la fonction $u(x) \geqslant 0$, on associe une fonction u^* ne dépendant que de la latitude en imposant que

$$\mu\{x \mid u^* > \rho\} = \mu\{x \mid u > \rho\} \quad \text{pour tout } \rho \geqslant 0.$$

Il est clair que u^* est monotone. Le résultat le plus important de la symétrisation est que l'intégrale du gradient diminue.

On en déduit qu'il existe une constante C telle que $G(u) \geqslant C$.

Maintenant on pose

$$G_\varepsilon(u) = \frac{1+\varepsilon}{4} \int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu - \log\left(\int_{S^2} e^u d\mu\right) \quad .$$

Il suffit de voir que pour $\varepsilon > 0$, on a $G_\varepsilon(u) \geqslant 0$.

D'après l'inégalité de MOSER, pour $\varepsilon > 0$ et C fixé, il existe B tel que :

$$\{u \mid G_\varepsilon(u) \leqslant C\} \subset \left\{u \mid \int_{S^2} |\nabla_0 u|^2 d\mu \leqslant B\right\} \quad .$$

Soit u_n une suite telle que $G_\varepsilon(u_n)$ converge vers $\inf G_\varepsilon$. On peut supposer que la suite converge faiblement dans dans $W^1(S^{2'})$ et point par point vers ψ. On peut supposer, par l'inégalité de MOSER, que $\exp(u_n)$ converge faiblement dans $L^2(S^2)$; la limite est alors $\exp(\psi)$, donc $\int_{S^2} e^{u_n} d\mu$ converge vers $\int_{S^2} e^{\psi} d\mu$.

Donc G_ε atteint son minimum global en $\psi \in W^1(S^{2'})$. Par symétrisation, on peut supposer que ψ est invariante par rotation autour de l'axe nord-sud et est monotone en θ.

Puisque ψ est critique pour G_ε, ψ satisfait

$$-\frac{1+\varepsilon}{2}\Delta_0\psi + 1 - \frac{e^\psi}{\int_{S^2} e^\psi d\mu} = 0 \quad .$$

On va voir que ces conditions imposent que $\psi = 0$, ce qui prouve que $G_\varepsilon(u) \geqslant 0$.

On pose $\psi = \psi_1 + a$ où $a = \log \int_{S^2} e^\psi d\mu$. Alors ψ_1 est monotone, ne dépend que la latitude et satisfait l'équation :

$$-\frac{1+\varepsilon}{2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\psi_1}{d\theta}\right) = e^{\psi_1} - 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

On a le lemme technique :

LEMME. — *Soit u une solution monotone sur $[0,\pi]$ de*

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{du}{d\theta}\right) = C(e^u - 1).$$

Si $C \neq 2$ alors u est constante.

On en déduit que $\psi = 0$, puisque sa moyenne est nulle.

Si ψ est minimisante, alors

$$-\frac{\Delta_0\psi}{2} + 1 - \frac{e^\psi}{\int_{S^2} e^\psi d\mu} = 0.$$

On en déduit que $\varphi = \psi/2$ est telle que $K_\varphi =$ cte. Donc la métrique $e^{2\varphi}\sigma_0$ est uniforme et le théorème 1 est vrai pour S^2.

Références

[M] J. MOSER. — *A Sharp Form of an Inequality by N. Trudinger*, Ind. Uni. Math. J., 20, 107–1092, 1971.

[OPS] OSGOOD, PHILLIPS et SARNAK. — *Extremals of Determinants of Laplacians*, preprint, 1987.