Mitsuru Ikawa

Sur la décroissance d'énergie locale du problème extérieur avec plusieurs $(n \geq 3)$ obstacles strictement convexes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 145-150

<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__145_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1985–1986 (145–150)

SUR LA DÉCROISSANCE D'ÉNERGIE LOCALE DU PROBLÈME EXTÉRIEUR AVEC PLUSIEURS ($n \geq 3$) OBSTACLES STRICTEMENT CONVEXES

par *Mitsuru IKAWA*

1. Introduction

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné dans $\mathbf{R}^3$ à la frontière lisse Γ . Posons

$$\Omega = \mathbf{R}^3 - \overline{\mathcal{O}}$$

et supposons que Ω est connexe. Nous allons considérer l'équation des ondes dans Ω avec condition de Dirichlet au bord :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \Box u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbf{R} \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R} \\ u(x,0) = f_1(x) \quad , \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x). & \end{cases}$$

On définit l'énergie totale $E(u;t)$ en temps t d'une solution u de (1.1) par

$$E(u;t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \Big(|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)|^2 + \sum_{j=1}^{3} |\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)|^2 \Big) dx \ .$$

Il est bien connu que l'énergie totale est constante au cours du temps, c'est-à-dire,

$$E(u;t) = E(u;0) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbf{R} \ .$$

Mais, l'influence de la donnée initiale sur le voisinage de l'obstacle s'affaiblit de plus en plus, et la plupart de l'énergie se propage dans le lointain. Plus précisément, définissons l'énergie locale dans $\Omega_R = \Omega \cap \{x \ ; \ |x| < R\}$ par

$$E(u,R \ ; \ t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_R} \Big(|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)|^2 + \sum_{j=1}^{3} |\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)|^2 \Big) dx \ .$$

Alors nous avons

$$E(u,R\ ;\ t) \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty$$

pour toute donnée initiale $\{f_1, f_2\} \in (C_0^\infty(\Omega_R))^2$. La vitesse de décroissance de l'énergie locale a un rapport étroit avec la forme des obstacles. Pour expliquer cela introduisons la notion "d'obstacle captif ".

DÉFINITION. — *On dit que O est non-captif lorsque, pour tout $R > 0$, il existe T_R tel que tous les rayons brisés de l'optique géométrique partant d'un point de Ω_R soient sortis de Ω_R au bout du temps T_R . Sinon, on dit que O est captif.*

Alors, lorsque O est non-captif, nous avons une décroissance de la forme suivante :

$$E(u,R\ ;\ t) \le C_R e^{-at} E(u,R\ ;\ 0)$$

pour toute $f = \{f_1, f_2\} \in (C_0^\infty(\Omega_R))^2$ où a est une constante positive déterminée par O ([LMP], [MRS], [M]). Par contre, lorsque O est captif, on a

$$\sup_{f \in (C_0^\infty(\Omega_R))^2} E(u,R\ ;\ t)/E(u,R\ ;\ 0) = 1$$

pour tout $r \ge 0$ ([R]).

Jusqu'à maintenant, on ne sait pas beaucoup de choses sur les types de décroissance d'énergie locale pour des obstacles captifs. Nous avons considéré, comme un exemple très simple de configuration captive, le cas où O se compose de deux obstacles strictement convexe, et montré que $E(u,R\ ;\ t)$ décroît exponentiellement pour des données dans $(C_0^\infty(\Omega_R))^2$ ([I1]) . Nous allons considérer dans la suite une généralisation de [I1] : le cas de plusieurs obstacles strictement convexes.

2. Enoncé du résultat

Soit

$$O = \bigcup_{j=1}^{J} O_j \quad , \quad (3 \le J < \infty)$$

où O_j sont des ouverts bornés dans $\mathbf{R}^3$ à frontière lisse Γ_j . Supposons que

$(H\,1)$ pour tout j , la courbure gaussienne de Γ_j est strictement positive en tout point.

De plus, nous faisons les hypothèses suivantes sur les positions relatives des O_j :

$(H\,2)$ pour tout $\{j_1, j_2, j_3\} \subset \{1, 2, \ldots, J\}^3$ tel que $j_l \ne j'_l$ si $l \ne l'$, l'enveloppe convexe de $\overline{O}_{j_1}$ et $\overline{O}_{j_2}$ a une intersection vide avec O_{j_3} ,

$(H\,3)$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sum \lambda_\gamma d_\gamma e^{\alpha d_\gamma} < \infty$$

où la sommation est prise sur tous les rayons périodiques primitifs γ dans Ω , d_γ notent la longueur de γ et $\lambda_\gamma = |\beta_\gamma \beta'_\gamma|^{\frac{1}{2}}$, β_γ et β'_γ étant les valeurs propres de l'application de Poincaré de γ de module < 1 .

Le résultat que nous voulons montrer est le suivant :

THÉORÈME 1. — *Supposons $(H\,1) \sim (H\,3)$ vérifiées. Alors on a une décroissance de l'énergie locale du type*

$$(2.1)\qquad E(u,R\,;\,t) \leq C_R e^{-at}\left(\|f_1\|^2_{H^3(\Omega)} + \|f_2\|^2_{H^2(\Omega)}\right)\ ,\ \{f_1,f_2\} \in (C_0^\infty(\Omega_R))^2$$

où a est une constante positive indépendante de R .

Remarque 2.1. — Dans le cas de deux obstacles strictement convexes, il n'y a qu'un seul rayon périodique primitif et on a établi la décroissance exponentielle de l'énergie locale ([I 1]) .

Remarque 2.2. — Considérons le cas où tous les O_j sont des boules avec le même rayon ρ . Soient A_j , $j = 1,2,\ldots,J$ les centres des O_j . Posons

$$d_{\min} = \min_{j\neq l} |A_j - A_l|\ .$$

Si $\rho < 2d_{\dim}(J+2)^{-1}$, alors $O = \cup_{j=1}^J O_j$ satisfait à $(H\,3)$.

3. Sur la résolvante de Δ

Pour montrer le théorème précédent, il est important de considérer le comportement de la résolvante de Δ . Considérons le problème au bord avec paramètre complexe μ

$$(3.1)\qquad \begin{cases} (\mu^2 - \Delta)u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \Gamma\ , \end{cases}$$

où $g \in C^\infty(\Gamma)$. Pour $\Re e\,\mu > 0$, (3.1) a une solution unique dans $H^2(\Omega)$. Notons la solution u comme suit :

$$u = U(\mu)g\ .$$

Alors $U(\mu)$ peut être considéré comme une fonction holomorphe dans $\Re e\,\mu > 0$ à valeurs $\mathcal{L}\left(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\overline{\Omega})\right)$, où $\mathcal{L}(E,F)$ note l'ensemble des applications linéaires bornées de E dans F . Rappelons que $U(\mu)$ se prolonge à une fonction holomorphe dans $\Re e\,\mu \geq 0$ et mémomorphe dans C tout entier ([LP],[Mi]). Il est prévu que la distribution des pôles de $U(\mu)$ est liée étroitement à la forme de O.

Concernant le prolongement analytique de $U(\mu)$ dans $\Re e\,\mu \leq 0$ nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Supposons que les O_j vérifient $(H\,1) \sim (H\,3)$. Posons*

$$F(\alpha) = \sum_{\gamma} \lambda_\gamma d_\gamma e^{\alpha d_\gamma}(1 - \lambda_\gamma d_\gamma e^{\alpha d_\gamma})^{-1} ,$$

$$a_0 = \sup\{\alpha \ ; \ F(\beta) < \infty, \forall \beta < \alpha\}.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $U(\mu)$ est holomorphe dans

$$D_\varepsilon = \{\mu \ ; \ \Re e\,\mu > -(a_0 - \varepsilon) \ , \ |\mu| > C_\varepsilon\}$$

et nous avons l'estimation

$$\sup_{x \in \Omega_R} |(U(\mu)g)(x)| \leq C_{R,\varepsilon} \left(\|g\|_{H^2(\Gamma)} + |\mu|^2 \|g\|_{L^2(\Gamma)}\right) \ , \ \forall \mu \in D_\varepsilon \ . \tag{3.2}$$

Remarque 3.1. — L'hypothèse $(H\,3)$ implique $a_0 > 0$.

Montrons que le théorème 2 implique le théorème 1. Soit $h \in C_0^\infty(\Gamma \times (0,\infty))$. Considérons le problème

$$\begin{cases} \Box w = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbf{R} \\ w = h & \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R} \\ \operatorname{Supp} w \subset \Omega \times \{t \geq 0\} & . \end{cases} \tag{3.3}$$

En employant la transformée de Laplace par rapport à t , nous pouvons exprimer w comme

$$w(x,t) = \int_{\Re e\,\mu = \alpha > 0} (U(\mu)\hat{h}(\cdot,\mu))e^{\mu t} d\mu \ , \tag{3.4}$$

où

$$\hat{h}(x,\mu) = \int e^{-\mu t} h(x,t)dt \ .$$

Vu que U est holomorphe sur $\Re e\,\mu = 0$, le théorème 2 implique l'existence d'un $a > 0$ tel que $U(\mu)$ est holomorphe dans $\Re e\,\mu \geq -a$. Avec l'aide de (3.2) nous pouvons pousser le chemin de l'intégration de (3.4) jusqu'à $\Re e\,\mu = -a$, et nous avons, pour $x \in \Omega_R$,

$$\begin{aligned} |w(x,t)| &\leq C_R e^{-at} \int_{\Re e\,\mu = -a} \left(\|\hat{h}(\cdot,\mu)\|_{H^2(\Gamma)} + |\mu|^2 \|\hat{h}(\cdot,\mu)\|_{L^2(\Gamma)}\right) |d\mu| \\ &\leq C_R e^{-at} \|h\|_{H^2(\Gamma \times \mathbf{R})} e^{at_0} \ , \ t_0 = \sup\{t \ ; \ h(\cdot,t) \neq 0\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Le problème (1.1) se réduit au problème (3.3) : le théorème 1 en résulte.

4. Idée de la démonstration du théorème 2

Soient $g \in C^\infty(\Gamma_j)$ et φ une fonction régulière à valeurs réelles définie dans un voisinage $\mathcal{U}$ dans $\mathbf{R}^3$ du support g . Supposons que

$$|\nabla\varphi| = 1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{U}$$

et que les courbures principales de la surface $\{y \; ; \; \varphi(y) = \varphi(x)\}$ par rapport à $\nabla\varphi$ sont positives pour tout $x \in u$. Posons

$$m(x,t \; ; \; k) = e^{ik(\varphi(x)-t)}g(x)h(t) \; ,$$

où $h \in C_0^\infty(0,1)$, et considérons le problème au bord pour $\Box$ avec une donnée au bord oscillatoire m

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{cases} \Box u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbf{R} \\ u = m & \text{sur } \Gamma \times \mathbf{R} \\ \operatorname{Supp} u \subset \Omega \times \{t \geq 0\} & . \end{cases}$$

Nous construisons une solution asymptotique pour (4.1) de la même manière que dans [I 1,I 2] . En appliquant à cette solution asymptotique la transformée de Laplace par rapport à t , nous avons le

LEMME 4.1. — *Pour $N \in \mathbf{N}$ quelconque, il existe $u_{(N)}(x,\mu \; ; \; k)$ avec les propriétés suivantes :*

(i) $u_{(N)}$ est une fonction holomorphe dans D_ε à valeur $C^\infty(\overline{\Omega})$,

(ii) $$\sup_{x\in\Omega_R} |u_{(N)}| \leq C_R \sum_{l=0}^{N} \left\{(a_0 + \Re e\, \mu)^{-1}F(-\Re e\, \mu\right\}^{l+1} \cdot k^{-l}(|g|_{2N} + |\varphi|_{2N}) \; ,$$

(iii) $(\mu^2 - \Delta)u_{(N)} = 0$ *dans* Ω ,

(iv) $u_{(N)} = e^{ik\varphi}g + r_{(N)}$ *sur* Γ

où nous avons pour tout $x \in \Gamma$, $\mu \in D_\varepsilon$

$$|r_{(N)}| \leq C\left\{(a_0 + \Re e\, \mu)^{-1}F(-\Re e\, \mu)\right\}^{N+1}k^{-N} \times (|g|_{2N} + |\varphi|_{2N}) \; .$$

Avec le lemme ci-dessus et en invoquant le même argument que dans [I 1] , on obtient le théorème 2.

Bibliographie

[I 1] M. IKAWA. — *Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex obstacles*, Osaka J. Math., **19** (1982), 459-509.

[I 2] M. IKAWA. — *On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J. Math. Kyoto Univ., **23** (1983), 127-194.

[L-P] P.D. LAX and R.S. PHILLIPS. — *Scattering theory*, Academic Press, New York, 1967.

[L-M-P] P.D. LAX, C.S.MORAWETZ and R.S. PHILLIPS. — *Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle*, Comm. Pure Appl. Math., **16** (1963), 447-486. .

[M] R. MELROSE. — *Singularities and energy decay in acoustical scattering* , Duke Math. J., **46** (1979), 43-59.

[M-R-S] C.S. MORAWETZ, J. RALSTON and W.A. STRAUSS. — *Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles*, Comm. Pure Appl. Math., **30** (1977), 447-508.

[Mi] S. MIZOHATA. — *Sur l'analyticité de la fonction spectrale de l'opérateur Δ relatif au problème extérieur*, Proc. Japan Acad., **39** (1963), 352-357.

[R] J. RALSTON. — *Solutions of the wave equation with localized energy*, Comm. Pure Appl. Math, **22** (1969), 807-823.

—◇—

Mitsuru IKAWA
Department of Mathematics
Osaka University
Toyonaka 560
JAPON