Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

C. Bardos
G. Lebeau
J. Rauch

# Pôles de la diffusion acoustique et singularités Gevrey 3

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 4 (1985-1986), p. 127-130
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__127_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1985–1986 (127–130)

# PÔLES DE LA DIFFUSION ACOUSTIQUE ET SINGULARITÉS GEVREY 3

par *C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH*

## Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 3$, impair) une sous-variété à bord connexe, non bornée, de bord $\partial\Omega$ analytique compact. Dans $\mathbf{R}_t \times \Omega$ , on considère le problème mixte pour l'équation des ondes :

$$(1) \qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u(t,x) \equiv 0 & \text{dans } \mathbf{R}_t \times \Omega \\ u(t,x) \equiv 0 & \text{dans } \mathbf{R}_t \times \partial\Omega_x \\ u(0,x) = u_0(x) \ , \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) \end{cases}$$

On note $\underline{u}(t)$ les données de Cauchy à l'instant $t$ :

$$\underline{u}(t) = \left(u(t,x), \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)$$

et $H(\Omega) = H_1^0(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert fermeture de $C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme énergie :

$$(2) \qquad |(u_0, u_1)|_E^2 = \int_\Omega |\nabla_x u_0|^2 + |u_1|^2.$$

Si $\underline{u}(0) \in H(\Omega)$ , la solution de (1) est unique, $\underline{u}(t) \in H(\Omega)$ pour tout $t$ et on a

$$\underline{u}(t) = e^{tA}\underline{u}(0) \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\rho > 0$ tel que le complémentaire de $\Omega$ soit contenu dans la boule centrée à l'origine et de rayon $\rho$ . Pour étudier le comportement des solutions de (1), Lax et Philipps [3(a)] introduisent les sous-espaces suivants de $H(\Omega)$

$$(3) \qquad \begin{aligned} D_\pm^\rho = \{&\underline{u}(0) \in H(\Omega) \text{ t.q. la solution } u(t,x) \text{ de (1)} \\ &\text{avec donnée initiale } \underline{u}(0) \text{ vérifie} \\ &u(t,x) \equiv 0 \text{ pour } |x| < \pm t + \rho \text{ dans } \pm t > 0\}. \end{aligned}$$

Les sous-espaces $D_+^\rho$ , $D_-^\rho$ sont orthogonaux, et en désignant par $P_\pm^\rho$ les projecteurs orthogonaux sur $(D_\pm^\rho)^\perp$ , on pose pour $t \geq 0$ :

$$Z(t) = P_+^\rho e^{tA} P_-^\rho \ . \tag{4}$$

Alors $Z(t)$ est un semi-groupe de contractions sur

$$K = H(\Omega) \ominus (D_+^\rho \oplus D_-^\rho).$$

Si $B$ est le générateur de $Z(t)$ , Lax et Phillips ont prouvé [3(a)] que son spectre $\sigma(B)$ est purement ponctuel et que la résolvante $(\mu \text{ Id} - B)^{-1}$ est méromorphe dans $\mathbf{C}$ , holomorphe dans $\mathrm{Re}\mu \geq 0$ .

Les points du spectre $\sigma(B)$ sont par définition les pôles de la diffusion. Ce sont exactement les valeurs de $\mu \in \mathbf{C}$ pour lesquelles le problème aux limites elliptiques

$$(\mu^2 - \Delta)u \equiv 0 \text{ dans } \Omega \ ; \ u \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

possède une solution $u$ non identiquement nulle vérifiant la condition de radiation de Sommerfeld, c'est-à-dire de la forme (pour $n = 3$)

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{e^{-\mu|x-y|}}{|x-y|} v(y)dy.$$

Les points du spectre $\sigma(B)$ sont donc associés aux valeurs propres du Laplacien dans le domaine extérieur $\Omega$ .

*Remarque.* — Les pôles du prolongement méromorphe de la matrice $S$ de diffusion sont les $\omega$ complexes tels que $i\omega$ appartienne à $\sigma(B)$ .

## Résultats

On suppose que l'obstacle $\mathcal{O} = \mathbf{R}^n \backslash \Omega$ est non captif [3(b),5(a)]; on a alors les deux résultats suivants sur le spectre $\sigma(B)$ :

THÉORÈME 1. — *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\sigma(B) \subset \left\{\mu \in \mathbf{C} \ , \ \mathrm{Re}\mu \leq -C|\mu|^{1/3}\right\} . \tag{5}$$

THÉORÈME 2. — *On suppose de plus $\mathcal{O}$ strictement convexe et qu'il existe dans $\partial\Omega$ une géodésique fermée $\gamma$ , non dégénérée, de longueur $T$ , telle que $T$ ne soit longueur d'aucune autre géodésique fermée de $\partial\Omega$ .*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ , le sous-ensemble du spectre

$$\left\{\mu \in \sigma(B) \ , \ \mathrm{Re}\mu \geq -[C_0 + \varepsilon]|\mu|^{1/3}\right\}$$

est infini. Ici $C_0$ est la constante géométrique :

$$C_0 = 2^{-1/3} \cos(\frac{\pi}{6}\omega) \frac{1}{T} \int_0^T \rho^{2/3}(s) ds \ , \tag{6}$$

où $\rho(s)$ désigne la courbure de la géodésique $\gamma$ considérée comme courbe dans $\mathbf{R}^n$ , et où $-\omega \in \mathbf{R}_-$ est le zéro de plus petit module de la fonction d'Airy.

Le théorème 1 améliore l'estimation logarithmique de [3(b)] et le théorème 2 prouve que dans les bons cas, l'estimation (5) est optimale. Les hypothèses du théorème 2 sont génériques pour les obstacles strictement convexes.

Les preuves des deux théorèmes précédents utilisent des résultats de propagation des singularités pour l'équation des ondes avec obstacle. Notre obstacle étant toujours supposé *non captif*, toutes les singularités $C^\infty$ d'une solution de (1) dont la donnée de Cauchy $\underline{u}(0)$ est à support dans la boule de rayon $R$ , s'échappent à l'infini; plus précisément, il existe un instant $t(R) > 0$ tel que pour tout $t \geq t(R)$, $\underline{u}(t)$ soit de classe $C^\infty$ dans la boule de rayon $R$ .

Par contre, comme cela a été remarqué par J. Rauch [6], il demeure nécessairement pour tout temps des singularités analytiques près de l'obstacle. Il est donc naturel de se demander quel est le comportement des singularités relatives aux classes de Gevrey $G^s$ , $s \in [1, \infty[$ . Le théorème 1 est alors conséquence du fait que les singularités $G^s$ , $s \geq 3$ se comportent comme les singularités $C^\infty$ , *i.e.* s'échappent à l'infini [4(b)], l'indice critique 3 fournissant l'exposant 1/3 dans l'estimation (5).

Rappelons qu'une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ est de classe de Gevrey $s$ si et seulement si pour tout compact $K$ , il existe des constantes $A_K$ , $B_K$ telles que

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^n \ , \ \sup_K |\partial_X^\alpha f| \leq A_K B_K^{|\alpha|} (\alpha!)^s \ . \tag{7}$$

La preuve du théorème 2 est assez technique et repose d'une part sur la construction d'une parametrix asymptotique pour la diffraction [4(a)], d'autre part sur une formule de trace de R. Melrose :

$$\mathrm{Tr}(t) = \sum_{\mu_k \in \sigma(B)} e^{\mu_k t} = 2 \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega E(t, x, x) dx \ , \tag{8}$$

où $E(t, x, y)$ est la solution du problème mixte

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta_x) E(t, x, y) \equiv 0 \ , \ t \in \mathbf{R} \ , \ x \in \Omega \ , \ y \in \Omega \\ E(t, x, y)|_{x \in \Omega} \equiv 0 \\ E(0, x, y) = 0 \ , \ \frac{\partial E}{\partial t}(0, x, y) = \delta_{X=Y} \end{cases}$$

L'obstacle $\mathcal{O}$ étant supposé strictement convexe, on commence par prouver que la distribution $\mathrm{Tr}(t)$ définie pour $t > 0$ , est analytique en dehors des longueurs des géodésiques fermées de la frontière $\partial\Omega$ (on remarquera que d'après le théorème 1, $\mathrm{Tr}(t) \in G^3(\mathbf{R}_+^*)$). Si la conclusion du théorème 2 était fausse, on déduirait alors de l'estimation polynomiale de Melrose [5(b)] sur la distribution des pôles de la diffusion, que près de la période $T$, la fonction $\mathrm{Tr}(t)$ vérifierait une estimation de type (7) avec une constante $B$ "petite".

Toute la preuve consiste donc à calculer la constante $B$ fournie par le membre de droite de (8). Ce calcul se fait en utilisant des versions analytiques à poids Gevrey 3 des distributions intégrales de Fourier de Hörmander et les techniques classiques à la Duistermaat-Guillemin [2].

(Il s'agit essentiellement de manipuler des intégrales de phase de la forme

$$\int e^{i\varphi(x,\theta)-l(x,\theta)}a(x,\theta)d\theta$$

où $\varphi$ est une phase classique, $a$ un symbole analytique et $l(x,\theta)$ une fonction homogène de degré $1/3$ en $\theta$ et strictement positive).

## Bibliographie


[1] C. BARDOS, J.C. GUILLOT, J. RALSTON. — *La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné*, C.P.D.E.-7, 1982.

[2] J.J. DUISTERMAAT, V. GUILLEMIN. — *The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics*, .

[3] P.D. LAX AND S.R. PHILLIPS. —
(a) *Scattering theory*, Academic Press, 1967.
(b) *A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix*. Arch.Rat. Mecha. Anal. 40, 1971.

[4] G. LEBEAU. —
(a) *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction*, CPDE, 1984.
(b) *Propagation des singularités Gevrey pour le problème de Dirichlet*, Advances in Microlocal Analysis, H.G. Garnir, Nato ASI Series, 1985.

[5] R. MELROSE. —
(a) *Singularities and Energy Decay in Acoustical Scattering*, Duke. Math. Journal, 46, 1979.
(b) *Polynomial bound ...*, St Jean de Monts, 1984.

[6] J. RAUCH. — *The leading wave front for hyperbolic mixed problems*, Bull. Soc. Roy Sci. Liège, 46, 1977.


—◇—