Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

LAURENT GUILLOPÉ

Sur la théorie spectrale de quelques variétés non compactes

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 4 (1985-1986), p. 115-126
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1985-1986__4__115_0>

Séminaire de théorie spectrale et géométrie
CHAMBÉRY-GRENOBLE
1985–1986 (115–126)

SUR LA THÉORIE SPECTRALE DE QUELQUES VARIÉTÉS NON COMPACTES

par *Laurent GUILLOPÉ*

On s'intéresse ici à la théorie spectrale d'opérateurs différentiels (en pratique des laplaciens) définis sur des variétés riemmanniennes X non compactes. Voici quelques situations où nos résultats s'appliqueront naturellement :

– X est une variété cylindrique à l'infini *i.e.* X est l'union d'une variété à bord compacte et d'un nombre fini de produits riemanniens du type $Y \times \mathbf{R}^+$ avec Y compacte. On prendra pour hamiltonien le laplacien sur les fonctions (comme dans les deux situations suivantes) ([2]);

– X est un espace localement symétrique $\Gamma\backslash S$ non compact, de volume fini dont la compactification de Borel-Serre est une variété à bord. S est l'espace symétrique associé à un groupe de Lie réel semi-simple G_∞ contenant Γ comme sous-groupe discret ([6]);

– X est une variété à pointes, union d'une partie compacte et d'un nombre fini de parties cylindriques ou de pointes (*i.e.* parties non compactes élémentaires des espaces localement symétriques du type précédent). On citera l'exemple des variétés avec un nombre fini de pointes et à courbure constante en dehors d'un compact ([5]);

– dans un des cas précédents, on ajoute à la donnée de X celle d'un fibré hermitien, par exemple un fibré spinoriel avec coefficient, avec son laplacien provenant d'opérateurs de Dirac ([7]).

Abandonnant ce cadre géométrique, on citera l'opérateur de Schrödinger H sur la droite réelle, avec potentiel régulier et constant en dehors d'un compact. Cet exemple emprunté à la mécanique quantique peut, en fait, être considéré comme le paradigme des situations que l'on vient d'énumérer : plus, il inspire le modèle abstrait introduit ci–dessous et dont l'étude est au cœur de cet exposé. Nous utiliserons par la suite tout à fait librement une terminologie empruntée à la quantique, cela donnera, selon nous, quelques images analogiques commodes, on évitera d'en demander plus.

Soit $S(\mu)$ le système, qu'on dira au potentiel $\tilde{\mu}(\mu)$ ($\tilde{\mu}(\mu) \geq 0$), dont l'espace des états est l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(\mu) = L^2(\mathbf{R}^+, dx_\mu)$ et l'énergie donnée par la forme quadratique

$$Q(\mu)(f) = \int_0^\infty \{|f'(x_\mu)|^2 + \tilde{\mu}(\mu)|f(x_\mu)|^2\}\, dx_\mu$$

de domaine $H^1(\mathbf{R}^+, dx_\mu)$. Soit $\mathcal{S}_{\text{int}}$ un système dit d'interaction, dont l'espace des états est l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{int}}$ et l'énergie donnée par une forme quadratique Q_{int} de domaine $\mathcal{D}_{\text{int}}$ telle que l'injection $\mathcal{D}_{\text{int}} \hookrightarrow \mathcal{H}_{\text{int}}$ soit compacte (ce qui correspondra à une interaction à courte portée).

Etant donnée une famille $\mathcal{M} = \{\mu\}$ et un système d'interaction $\mathcal{S}_{\text{int}}$, nous noterons $\mathcal{S}_0$ le système (dit libre) associé, dont l'espace des états est la somme hilbertienne $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{int}} \oplus \bigoplus_{\mu\in\mathcal{M}} \mathcal{H}(\mu)$ et la forme quadratique $Q_0 = Q_{\text{int}} \oplus \bigoplus_{\mu\in\mathcal{M}} Q_\mu$.

Par système avec interaction (associé à à la famille $\mathcal{M}$ et au système $\mathcal{H}_{\text{int}}$), nous entendrons un système $\mathcal{S}$ d'espace d'états $\mathcal{H}$ et d'énergie donnée par une forme quadratique Q, de domaine $\mathcal{D}(Q)$ inclus dans $\mathcal{D}(Q_0)$, telle que, si l'on note $\mathcal{H}_\varepsilon(\mu) = L^2([\varepsilon, +\infty], dx_\mu)$ et $\mathcal{D}_\varepsilon(\mu) = H^1([\varepsilon, +\infty], dx_\mu)$, on ait

$$\mathcal{D}(Q) \cap \bigoplus_\mu \mathcal{H}_\varepsilon(\mu) = \bigoplus_\mu \mathcal{D}_\varepsilon(\mu) \text{ et } Q_{|\mathcal{D}_\varepsilon(\mu)} = Q(\mu) \quad (\forall\varepsilon > 0).$$

L'interaction des systèmes $S(\mu)$ est donnée par leur couplage via le système d'interaction $\mathcal{S}_{\text{int}}$.

Au système $\mathcal{S}$ on associe le spectre de potentiel $\sigma_p(\mathcal{S}) = \{\tilde{\mu}(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ et on note $m(\tilde{\mu})$ (resp. $M(\tilde{\mu})$) le nombre de systèmes avec potentiel $\tilde{\mu}$ (resp. au plus égal à $\tilde{\mu}$) On fera l'hypothèse suivante :

($H0$) $M(\tilde{\mu})$ est à croissance polynomiale.

L'analyse spectrale de l'hamiltonien H du système $\mathcal{S}$ est résumée dans le théorème suivant :

THÉORÈME 0.1. — (a) *H a un spectre ponctuel avec comme seul point d'accumulation éventuel $+\infty$.*

(b) *L'opérateur H a pour spectre absolument continu $[\tilde{\mu}_1, +\infty[$ et opère sur son sous-espace d'absolue continuité de manière unitairement équivalente à H_0.*

(c) *Le spectre singulier continu de H est vide.*

Les arguments de Donnelly [2] donnent l'énoncé (a) tandis que la théorie de la diffusion à la Enss, telle qu'explicitée par Perry [8], livre les résultats sur le spectre continu. On se rapportera aux notes de l'auteur pour les adaptations nécessaires.

Affiner l'étude du spectre absolument continu de l'hamiltonien H en introduisant l'analogue des ondes planes monochromatiques de la mécanique quantique, qui apparaissent comme des séries d'Eisenstein dans l'étude spectrale des quotients $\Gamma\backslash G$, permet de préciser la forme des opérateurs d'onde et de l'opérateur (et des matrices) de diffusion, puis de prouver des identités de Maaß-Selberg utilisées dans les calculs de formule de trace et de théorème d'indice.

On définit ainsi la notion de systèmes d'ondes planes $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)$ dépendant de deux nombres quantiques : le potentiel $\tilde{\mu}$ et une énergie complexe λ dans un ensemble FP, dit feuillet physique. Le système $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)$ est un élément de $\mathrm{HOM}(\mathbf{C}^{m(\tilde{\mu})}, \mathcal{H}_{\mathrm{loc}})$ où $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ est l'espace de Banach des fonctions d'états localement dans $\mathcal{H}$. En utilisant d'autres nombres quantiques (qui existent de manière naturelle dans certains systèmes cités ci-dessus), on aurait pu introduire des véritables fonctions d'ondes planes. Le lecteur se convaincra aisément de l'intérêt à ne pas introduire trop tôt ces règles de sélection.

En fait c'est le bord du feuillet FP, contenant le spectre d'énergie réelle qui nous intéresse. On intoduit la surface spectrale Σ du système S : c'est une surface de Riemann contenant le feuillet FP, revêtement ramifié de $\mathbf{C}$ au-dessus du spectre de potentiel $\sigma_p(S)$. On a alors le résultat fondamental :

THÉORÈME 0.2. — *Pour tout $\tilde{\mu}$, $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)$ ($\lambda \in FP$) se prolonge méromorphiquement à Σ.*

La méthode de démonstration consiste en une extension de celle employée par Colin de Verdière pour le prolongement des séries d'Eisenstein sur une surface de Riemann ([1]).

On obtient comme corollaire immédiat un ensemble d'équations fonctionnelles, ensemble paramétré par les automorphismes du revêtement $(\Sigma, \mathbf{C})$. En fait ce n'est que la version explicite de la monodromie du faisceau localement constant, de base $\mathbf{C} \setminus \sigma_p(S)$, engendré localement par les sections $E_{\tilde{\mu}}$.

Après avoir exprimé les opérateurs d'onde $W_\pm = \mathrm{s}\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0}$ en terme des systèmes d'ondes, on peut donner une forme quasi-explicite aux matrices de diffusion à l'aide de coefficients intervenant dans l'écriture des équations fonctionnelles. Nous donnons dans le paragraphe 5 les énoncés précis de ces résultats.

Le caractère unitaire des matrices de diffusion donne une première famille de relations entre ces coefficients évalués aux énergies réelles. On en obtient d'autres à partir de relations à la Maaß–Selberg *i.e.* du calcul de fonctions d'onde tronquées. Remarquons que ces relations de Maaß–Selberg sont à la base des démonstrations classiques ([3]) du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein.

On termine en appliquant les résultats précédents à la situation archétype, celle de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel avec un potentiel constant à l'infini. Les situations géométriques sont plus riches, mais demandent un matériel qu'on ne peut développer ici : signalons toutefois que, pour un laplacien sur un espace symétrique de rang 1, les coeficients de transfert $T_{\tilde{\mu},\tilde{\mu}'}$ introduits ci–dessous sont nuls pour $\tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}'$ et des matrices diagonales de blocs 2×2 sinon (cela résulte de l'étude d'Harish-Chandra sur le terme constant des séries d'Eisenstein).

1. La surface spectrale

Soit Σ la surface de Riemann associée aux fonctions racine carrée ($z \to \sqrt{z-\tilde{\mu}}$, $\tilde{\mu} \in \sigma_p$). C'est un revêtement de $\mathbf{C}$, d'ordre fini si $\sharp\sigma_p$ est fini et infini sinon, ramifié au dessus de σ_p, dont on notera $\tilde{\lambda}$ la projection. Dans la suite, λ (resp. Λ) notera la variable générique dans $\mathbf{C} \setminus [\tilde{\mu}_1, +\infty[$ (resp. Σ) et on identifiera $\mathbf{C} \setminus [\tilde{\mu}_1, +\infty[$ à un feuillet FP (le feuillet physique) de Σ de telle sorte que les fonctions racine carrée ($\Lambda \to \sqrt{\Lambda - \tilde{\mu}}$, $\tilde{\mu} \in \sigma_p$) définies sur Σ (par construction de Σ) prennent des valeurs complexes de partie imaginaire non négative sur FP ($\lambda \to \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}}$, ainsi que d'autres fonctions de la variable λ, notent des fonctions définies sur FP. Remplacer λ par Λ indiquera un prolongement méromorphe à Σ qu'on aura justifié). La surface Σ sera appelée *surface spectrale* du système S.

S'il n'y a qu'une seule masse, $(\Sigma, \mathbf{C}, \tilde{\lambda})$ s'identifie au revêtement de $\mathbf{C}$ par lui-même avec la projection ($\sigma \to (a\sigma + b)^2 + \tilde{\mu}$) ($a$, b complexes, a non nul), le feuillet physique FP est alors $\{\sigma \in \mathbf{C} \mid \Im m\,(a\sigma + b) > 0\}$ et l'application racine carrée $\sqrt{\Lambda - \tilde{\mu}} = a\sigma + b$. S'il y a deux masses, Σ s'identifie à la courbe de $\mathbf{C}^2$ $\{\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \mid {\lambda_1}^2 + \tilde{\mu}_1 = {\lambda_2}^2 + \tilde{\mu}_2\}$, avec application projection $\tilde{\lambda}(\Lambda) = {\lambda_1}^2 + \tilde{\mu}_1$ et racines carrées $\sqrt{\Lambda - \tilde{\mu}_i} = \lambda_i$; on a un plongement de Σ dans $\mathbf{R}^3$ comme un hyperboloïde à une nappe. En général, on peut prendre pour Σ la partie de $\mathbf{C}^{\sigma_p}$ d'équation ${\lambda_{\tilde{\mu}_1}}^2 + \tilde{\mu}_1 = {\lambda_{\tilde{\mu}_2}}^2 + \tilde{\mu}_2 = \dots$.

Le groupe G d'automorphismes du revêtement $(\Sigma, \mathbf{C}, \tilde{\lambda})$ est décrit en termes de générateurs et relations de la manière suivante : A chaque lacet $\gamma_{\tilde{\mu}}$, générateur de $\pi_1(\mathbf{C} \setminus \{\tilde{\mu}\}, i)$, de degré 1 avec l'orientation standard de $\mathbf{C}$ et homotope à zéro dans $(\mathbf{C} \setminus \sigma_m) \cup \{\tilde{\mu}\}$, on associe un générateur, noté $\gamma_{\tilde{\mu}}$. Les uniques relations, en sus des relations de commutativité $\gamma_{\tilde{\mu}}\gamma_{\tilde{\mu}'}{\gamma_{\tilde{\mu}}}^{-1}{\gamma_{\tilde{\mu}'}}^{-1} = 1$, sont ${\gamma_{\tilde{\mu}}}^2 = 1$.

Le groupe G possède un autre système $\{\gamma(\tilde{\mu})\}$ de générateurs (avec les mêmes relations) définis par $\gamma(\tilde{\mu}) = \Pi_{\tilde{\nu} \leq \tilde{\mu}} \gamma_{\tilde{\nu}}$. Le premier sera utilisé pour écrire les équations fonctionnelles de la partie 4 alors que le second interviendra dans le calcul des opérateurs d'ondes et des matrices de diffusion.

2. Systèmes d'ondes planes

Commencons par quelques notations.

Etant donné un système S et son espace d'états $\mathcal{H}$, on introduit

$$\mathcal{H}_{\mathrm{loc}} = \mathcal{H}_{\mathrm{int}} \oplus \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}(\mu) \tag{2.1}$$

avec $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}(\mu) = L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+, dx_\mu)$. Sur $\mathcal{H}_e(\mu) \cap \mathcal{D}(H)$, l'hamiltonien H opère comme $H(\mu) = -d^2/dx_\mu^2 + \tilde{\mu}(\mu)$. On notera H_{loc} le prolongement de H à $\mathcal{D}(H) + \bigoplus_{\mu \in \mathcal{M}} \mathcal{H}_{\mathrm{loc}}(\mu)$, défini sur $L^2_{\mathrm{loc}}([\varepsilon, \infty[, dx_\mu)$ ($\varepsilon > 0$) par $H_{\mathrm{loc}} = H(\mu)$ au sens distribution. Adoptant la décomposition (2.1), on parlera pour un élément h de $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ de ses composantes dans $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}$, dans $\mathcal{H}(\mu)$ et on écrira $h = (h_{\mathrm{int}}, (h_\mu))$.

Pour une fonction χ régulière sur $\mathbf{R}^+$, valant 1 sur $[1, \infty[$ et nulle au voisinage de l'origine, on notera aussi par χ l'opérateur de multiplication par χ induit sur $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ et défini par $\chi.(h_{\mathrm{int}}, (h_\mu)) = (0, (\chi(x_\mu)h_\mu))$.

Notons alors par $\Psi_{\mu}^{\pm}(\lambda)$ $(\lambda \in FP)$ l'élément de $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ dont la seule composante non nulle est dans $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ et vérifie $\Psi_{\mu}^{\pm}(\lambda)(x_\mu) = \chi(x_\mu)e^{\pm i\sqrt{\lambda-\tilde{\mu}(\mu)}\,x_\mu}$, $\mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{\pm}(\lambda)$ l'opérateur d'identification naturelle de $\mathbf{C}^{m(\tilde{\mu})} = \oplus_{\mu:\tilde{\mu}(\mu)=\tilde{\mu}}\mathbf{C}$ avec le sous-espace $\oplus_{\mu:\tilde{\mu}(\mu)=\tilde{\mu}}\mathbf{C}\Psi_{\mu}^{\pm}(\lambda)$ de $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$. Remarquons que $(H_{\mathrm{loc}} - \lambda)\Psi_{\mu}^{\pm}(\lambda)$ est dans $\mathcal{H}$.

Pour h_1 et h_2 dans $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$, on écrira $h_1 \sim h_2$ si h_1 et h_2 ont des composantes dans $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ égales pour $x_\mu \geq 2$, et ce pour tout μ . On utilisera une notation analogue pour les applications à valeurs dans $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$.

DÉFINITION 2.1. — *Soit λ dans FP et $\tilde{\mu}$ un potentiel de $\sigma_p(S)$. Le système d'ondes planes, d'énergie λ et de potentiel $\tilde{\mu}$, est l'endomorphisme $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)$ de $\mathbf{C}^{m(\tilde{\mu})}$ dans $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$ défini par*

$$E_{\tilde{\mu}}(\lambda) = \mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{-}(\lambda) - (H - \lambda)^{-1}(H_{\mathrm{loc}} - \lambda)\mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{-}(\lambda)\ .$$

Remarque 2.2. — Si $m(\tilde{\mu}) = 1$, $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)$ est déterminé par la fonction d'ondes $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)1$, on identifiera système d'ondes et fonction d'ondes dans le cas d'un potentiel $\tilde{\mu}$ sans multiplicité.

PROPOSITION 2.3. — (a) *Il existe des fonctions méromorphes $T_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}}(\lambda)$, définies pour λ dans FP, à valeurs dans* $\mathrm{HOM}(\mathbf{C}^{m(\tilde{\mu})}, \mathbf{C}^{m(\tilde{\mu}')})$, *telles que*

$$E_{\tilde{\mu}}(\lambda) \sim \mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{-}(\lambda) + \sum_{\tilde{\mu}'\in\sigma_p} \mathcal{V}_{\tilde{\mu}'}^{+}(\lambda)T_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}}(\lambda) \quad .$$

(b) *Le système d'ondes $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)$ est caractérisé par les deux propriétés suivantes :*

(i) $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)\Phi - \mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{-}(\lambda)\Phi \in \mathcal{H}$, $\Phi \in \mathbf{C}^{m(\tilde{\mu})}, \lambda \in FP$;

(ii) $(H_{\mathrm{loc}} - \lambda)E_{\tilde{\mu}}(\lambda) = 0$, $\lambda \in FP$.

(c) *Pour tout potentiel $\tilde{\mu}$, $T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\lambda)$ est inversible (en tant que fonction méromorphe) pour λ dans FP.*

Preuve. — La composante de $(H-\lambda)^{-1}\big((H_{\mathrm{loc}} - \lambda)\mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{-}(\lambda)\Phi\big)$ dans $\mathcal{H}(\mu)$ est une combinaison linéaire d'exponentielles $\Psi_{\mu}^{\pm}(\lambda)$ $(x_\mu \geq 2)$, dont seule $\Psi_{\mu}^{+}(\lambda)$ est de carré intégrable : le (a) en résulte. Le (b) se déduit de la définition des systèmes $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)$ et du fait que H étant autoadjoint, $FP \setminus \mathbf{R}$ ne contient pas de valeurs propres. Enfin, si $T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\lambda)$ était non inversible, pour Φ élément non trivial de son noyau, les composantes de potentiel $\tilde{\mu}$ de $(H - \lambda)^{-1}\big((H_{\mathrm{loc}} - \lambda)\mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{-}(\lambda)\Phi\big)$ seraient nulles sans que cela soit vrai pour $(H_{\mathrm{loc}} - \lambda)\mathcal{V}_{\tilde{\mu}}^{-}(\lambda)\Phi$, ce qui est impossible, d'après la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre. □

Inspiré par la théorie de la diffusion sur la droite, on introduit les définitions :

DÉFINITION 2.4. — *On appelle coefficients de transfert les matrices $T_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}}$. On notera $T_{\tilde{\mu}'\tilde{\mu}}$ par $C_{\tilde{\mu}}$.*

3. Le prolongement des systèmes d'ondes planes

Ce paragraphe est consacré tout entier à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Pour tout potentiel $\tilde{\mu}$, le système d'ondes planes $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)$ $(\lambda \in FP)$ admet un prolongement méromorphe à Σ.*

Nous allons nous limiter à montrer le prolongement méromorphe à Σ de l'onde plane $E_{\tilde{\mu}_1}(\lambda)\Phi_{\mu_1}$ $(\lambda \in FP)$. La démonstration vaut évidemment pour toutes les fonctions d'ondes $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)\Phi$ $(\tilde{\mu} \in \sigma_m, \Phi \in \mathbf{C}^{m(\tilde{\mu})})$: le théorème en résultera.

Soit $\Sigma_l = \tilde{\lambda}^{-1}(\mathbf{C} \setminus [\tilde{\mu}_l, +\infty])$ et Σ_l^P la composante connexe du feuillet physique FP dans Σ_l. Vu que $\Sigma = \bigcup_{l \geq 1} \Sigma_l^P$, il suffit d'effectuer le prolongement méromorphe à Σ_l^P pour l quelconque, afin d'obtenir le prolongement méromorphe à Σ tout entier. Soit donc l arbitraire, fixé jusqu'à la fin de ce paragraphe. On note par Λ_l le point générique de Σ_l^P.

Soit $\mathcal{M}_l = \{\mu \mid \tilde{\mu}(\mu) < \tilde{\mu}_l\}$. Pour a dans $\mathcal{A}_l = (\mathbf{R}_*^+)^{\mathcal{M}_l}$ (avec $a_{\mu_1} = 2$), notons par S^a le système d'interaction d'espace d'états $\mathcal{H}(S^a) = \mathcal{H}_{\text{int}} \oplus \bigoplus_{\mu \in \mathcal{P}} L^2([0, a_\mu], dx_\mu)$ et d'énergie donnée par la restriction de la forme quadratique Q.Introduisons l'onde plane $E^a(\lambda)$ $(\lambda \in FP)$ défnie par

$$E^a(\lambda) = \mathcal{V}_{\tilde{\mu}_1}^-(\lambda)\Phi_{\mu_1} - \left(H(S^a) - \lambda\right)^{-1}\left((H_{\text{loc}} - \lambda)\mathcal{V}_{\tilde{\mu}_1}^-(\lambda)\Phi_{\mu_1}\right).$$

A priori, $E^a(\lambda)$ est un élément de $\mathcal{H}(S^a)_{\text{loc}}$ vérifiant $(H^a_{\text{loc}} - \lambda)E^a(\lambda) = 0$. Par prolongement analytique (en les variables x_μ, $\mu \in \mathcal{M}_l$), on considère dans la suite $E^a(\lambda)$ comme un élément de $\mathcal{H}(S)_{\text{loc}}$. Les composantes de $E^a(\lambda)$ dans $\mathcal{H}(\mu)_{\text{loc}}$ sont précisées dans le tableau suivant :

$\mathcal{H}(\mu_1)$	$e^{-i\sqrt{\lambda - \tilde{\mu}_1}\, x_{\mu_1}} + t^a_{\mu_1}(\lambda)\cos\sqrt{\lambda - \tilde{\mu}_1}(x_{\mu_1} - a_{\mu_1})$
$\mathcal{H}(\mu), \mu \in \mathcal{M}_l - \{\mu_1\}$	$t^a_\mu(\lambda)\cos\sqrt{\lambda - \tilde{\mu}(\mu)}(x_\mu - a_\mu)$
$\mathcal{H}(\mu), \mu \notin \mathcal{M}_l$	$t^a_\mu(\lambda)e^{i\sqrt{\lambda - \tilde{\mu}(\mu)}(x_\mu - a_\mu)}$

Les fonctions $t^a_\mu(\lambda)$ sont méromorphes sur FP et analytiques par rapport au paramètre a. On note $K' = \{\mu \in \mathcal{M}_l \setminus \{\mu_1\} \mid t^a_\mu \equiv 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}_l\}$ et $K = \mathcal{M}_l \setminus K'$. On suppose $\mathcal{M}$ totalement ordonné de telle manière que la projection $\mathcal{M} \to \sigma_p$ soit croissante et μ' désignera le successeur de μ.

LEMME 3.2. — *Soit $\big(a(k)\big)$ une suite d'éléments de $\mathbf{R}^{\mathcal{M}_l}$ indexée par K telle que, pour tout k dans K, on ait :*

(i) $a(k)_{\mu_1} = 2$;

(ii) $a(k^+)_{k^+} \neq a(k)_{k^+}$;

(iii) $a(j)_{k^+} = a(k^+)_{k^+}$, $j \geq k^+$.

La famille $\big(E^{a(k)}(\lambda)\big)_{k \in K}$ est libre pour λ dans le complémentaire d'un ensemble dénombrable du feuillet FP.

Preuve. — Soit U un ouvert dense de $\mathbf{C}$ dont le complémentaire contient l'ensemble des zéros et des pôles des $t_k^{a(k)}$ ($k \in K \setminus \{\mu_1\}$) et celui des zéros des fonctions $\sin\sqrt{\lambda - \tilde{\mu}(\mu)}\big(a(\mu^+)_{\mu^+} - (a(\mu)_{\mu^+}\big)$ pour tous les μ dans K . Vu la construction de K, $PF \setminus U$ est dénombrable. On suppose désormais λ dans U.

Soit (α_k) une suite de $\mathbf{C}^K$ telle que $\sum_{k\in K} \alpha_k E^{a(k)}(\lambda) = 0$. Montrons par récurrence que α_k est nul pour tout k dans K. Si $K = \{\mu_1\}$, on a $\alpha_{\mu_1} = 0$.

Sinon, on a

$$\sum_{k\in K} \alpha_k \frac{dE^{a(k)}}{dx_{\mu_1^+}}(\lambda)\big(a(\mu_1^+)_{\mu_1^+}\big) = \\ - \alpha_{\mu_1} t_{\mu_1^+}^{a(\mu_1)} \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}_1} \sin\sqrt{\lambda - \tilde{\mu}_1}\big(a(\mu_1^+)_{\mu_1^+} - a(\mu_1)_{\mu_1^+}\big)$$

et la définition de U implique la nullité de α_{μ_1} .

Supposons α_k nul pour $k < \nu$ ($k \in K$). Si ν est maximal dans K, on a clairement $\alpha_\nu = 0$. Sinon, par l'hypothèse de récurrence, on tire de l'égalité

$$\sum_{k\in K} \alpha_k E^{a(k)}(\lambda) = \sum_{k\geq\nu} \alpha_k E^{a(k)}(\lambda)$$

la nullité de α_ν en utilisant la relation

$$\sum_{k\geq\nu} \alpha_k \frac{dE^{a(k)}}{dx_{\nu^+}}(\lambda)\big(a(\nu^+)_{\nu^+}\big) = \\ - \alpha_\nu t_{\nu^+}^{a(\nu)} \sqrt{\lambda - \tilde{\mu}(\nu)} \sin\sqrt{\lambda - \tilde{\mu}(\nu)}\big(a(\nu^+)_{\nu^+} - a(\nu)_{\nu^+}\big) . \quad \square$$

PROPOSITION 3.3. — *L'onde plane $E_{\tilde{\mu}_1}(\lambda)\Phi_1$ ($\lambda \in FP$) admet un prolongement méromorphe à Σ_l^P.*

Preuve. — D'après le théorème 0.1, l'hamiltonien $H(S^a)$ a pour spectre essentiel $[\tilde{\mu}_l, +\infty[$, vu que $\tilde{\mu}_1(S^a) = \tilde{\mu}_l(S)$ par construction. Ainsi la résolvante $\big(H(S^a) - \tilde{\lambda}(\Lambda_l)\big)^{-1}$ est méromorphe sur Σ_l^P. On en déduit le prolongement méromorphe de $E^a(\lambda)$ (et par suite des coefficients $t_\mu^a(\lambda)$) en une fonction méromorphe notée $E^a(\Lambda_l)$ (resp. $t_\mu^a(\Lambda_l)$) sur Σ_l^P .

Soit $\big(a(k)\big)_{k\in K}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}_l$ comme dans le lemme précédent. Soit $\big(\beta_k(\Lambda_l)\big)_{k\in K}$ une suite de fonctions sur Σ_l^P telle que

$$(3.1) \qquad \sum_{k\in K} \beta_k(\Lambda_l) t_\nu^{a(k)}(\Lambda_l) e^{i\sqrt{\Lambda_l - \tilde{\mu}(\nu)}\, a(k)_\nu} = 0 \,,\ \nu \in K \setminus \{\mu_1\} \,.$$

Un tel système (β_k) non trivial de fonctions définies sur Σ_l^P (qu'on peut supposer méromorphes) existe, vu que le système linéaire (3.1) a une inconnue de plus que d'équations. Pour λ dans FP, la somme précédente représente le coefficient de l'exponentielle non L_2 de la composante dans $\mathcal{H}(\nu)_{\mathrm{loc}}$ ($\nu \in K \setminus \{\mu_1\}$) de $\sum_{k\in K} \beta_k(\lambda) E^{a(k)}(\lambda)$. Ainsi par construction, les composantes de $\sum_{k\in K} \beta_k(\lambda) E^{a(k)}(\lambda)$ dans $\mathcal{H}(\nu)_{\mathrm{loc}}$ sont toutes de carré intégrable pour $\nu \neq \mu_1$.

D'autre part, le coefficient $t_1(\lambda)$ de l'exponentielle non L_2 de la composante dans $\mathcal{H}(\mu_1)_{\mathrm{loc}}$ de $\sum_{k\in K}\beta_k(\lambda)E^{a(k)}(\lambda)$ est

$$t_1(\lambda) = \sum_{k\in K}\beta_k(\lambda)\big(1 + t^{a(k)}_{\mu_1}(\lambda)e^{i\sqrt{\lambda-\tilde{\mu}_1}a(k)_{\mu_1}}/2\big)$$

et n'est pas indentiquement nul pour λ dans U. Sinon $\sum_{k\in K}\beta_k(\lambda)E^{a(k)}(\lambda)$ serait un élément de $\mathcal{H}$, solution de $(H-\lambda)u = 0$ avec un λ non réel éventuellement et donc serait nul, puisque $H(S)$ est un opérateur auto-adjoint : d'après le lemme 3.2, on aurait alors tous les $\beta_k(\lambda)$ identiquement nuls, ce qui n'est pas.

On en déduit, grâce à la caractérisation de la proposition 2.3, que

$$E_{\tilde{\mu}_1}(\lambda)\Phi_{\mu_1} = t_1(\lambda)^{-1}\sum_{k\in K}\beta_k(\lambda)E^{a(k)}(\lambda)$$

et le prolongement méromorphe de $E_{\tilde{\mu}_1}(\lambda)\Phi_{\mu_1}$ $(\lambda \in FP)$ à Σ_l^P. □

4. Monodromie et équations fonctionnelles

Sur $\mathbf{C}\setminus\sigma_p$, considérons le faisceau $\mathcal{E}^H_{\mathrm{loc}}$ défini de la manière suivante : Si U est un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}\setminus\sigma_p$, $\mathcal{E}^H_{\mathrm{loc}}(U)$ est l'espace des solutions $f(\varsigma)$ $(\varsigma\in U)$ dans $\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}$, avec dépendance méromorphe en ς, de $(H_{\mathrm{loc}}-\varsigma)f(\varsigma) = 0$ telles que $f(\varsigma)$ ait au plus un nombre fini de composantes dans $\oplus_{\mu\in\mathcal{M}}\mathcal{H}_{\mathrm{loc}}(\mu)$ non de carré intégrable.

D'après ce qui précède, $\mathcal{E}^H_{\mathrm{loc}}$ est engendré localement par les sections $E_{\tilde{\mu}}(Z(\varsigma))\Phi$ $(\Phi \in \mathbf{C}^{m(\tilde{\mu})})$, où $\varsigma \to Z(\varsigma)$ est une section locale du revêtement $(\tilde{\Sigma}, \mathbf{C}\setminus\sigma_p, \tilde{\lambda})$ avec $\tilde{\Sigma} = \Sigma\setminus\tilde{\lambda}^{-1}(\sigma_p)$. Le prolongement analytique définit un transport parallèle le long de tout arc de $\mathbf{C}\setminus\sigma_p$ et la monodromie en chaque point ς se réduit à une représentation de G dans la fibre $(\mathcal{E}^H_{\mathrm{loc}})_\varsigma$. D'après le théorème 3.1, le faisceau $\tilde{\lambda}^*\mathcal{E}^H_{\mathrm{loc}}$, image réciproque de $\mathcal{E}^H_{\mathrm{loc}}$ via $\tilde{\lambda}$ sur $\tilde{\Sigma}$, est isomorphe au faisceau constant de fibre $\mathbf{C}^{\mathcal{M}}$. La monodromie s'exprime alors par des isomorphismes entre les fibres $(\tilde{\lambda}^*\mathcal{E}^H_{\mathrm{loc}})_Z$ et $(\tilde{\lambda}^*\mathcal{E}^H_{\mathrm{loc}})_{gZ}$ (Z au dessus du complexe ς donné, g dans G). Les équations fonctionnelles, données par les théorèmes suivants, déterminent explicitement ces isomorphismes.

THÉORÈME 4.1. — *On a les équations fonctionnelles sur* Σ :

$$E_{\tilde{\mu}}(\gamma_{\tilde{\mu}}\Lambda) = E_{\tilde{\mu}}(\Lambda)T^{-1}_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\Lambda) \tag{4.1}$$

$$E_{\tilde{\mu}'}(\gamma_{\tilde{\mu}}\Lambda) = E_{\tilde{\mu}'}(\Lambda) - E_{\tilde{\mu}}(\Lambda)T^{-1}_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}}(\Lambda)T_{\tilde{\mu}\tilde{\mu}'}(\Lambda) \quad , \quad \tilde{\mu}\neq\tilde{\mu}' . \tag{4.2}$$

Preuve. — Il suffit d'établir les équations pour Λ dans le feuillet physique. Les systèmes $E_{\tilde{\mu}}(\lambda)$ $(\lambda\in FP)$ sont caractérisés par l'équation différentielle de la proposition 2.3 et l'intégrabilité ou non de leurs composantes dans $\oplus_{\mu\notin\mathcal{M}}\mathcal{H}(\mu)$. L'automorphisme $\gamma_{\tilde{\mu}'}$ a une action sur celles-ci déterminée par son action sur les fonctions racine carrée $\sqrt{\Lambda-\tilde{\nu}}$ $(\tilde{\nu}\in\sigma_p)$.

On a
$$E_{\tilde\mu}(\lambda) \sim \mathcal{V}_{\tilde\mu}^{-}(\lambda) + \sum_{\tilde\mu'} \mathcal{V}_{\tilde\mu'}^{+}(\lambda) T_{\tilde\mu'\tilde\mu}(\lambda) .$$
Vu les relations $\mathcal{V}_{\tilde\mu}^{\pm}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) = \mathcal{V}_{\tilde\mu}^{\mp}(\lambda)$, $\mathcal{V}_{\tilde\mu'}^{\pm}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) = \mathcal{V}_{\tilde\mu'}^{\pm}(\lambda)$ $(\tilde\mu \neq \tilde\mu')$, on obtient
$$E_{\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) \sim \mathcal{V}_{\tilde\mu}^{+}(\lambda) + \mathcal{V}_{\tilde\mu}^{-}(\lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) + \sum_{\tilde\mu' \neq \tilde\mu} \mathcal{V}_{\tilde\mu'}^{+}(\lambda) T_{\tilde\mu'\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda)$$
$$E_{\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) \sim \mathcal{V}_{\tilde\mu'}^{-}(\lambda) + \mathcal{V}_{\tilde\mu}^{-}(\lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) + \sum_{\tilde\nu \neq \tilde\mu} \mathcal{V}_{\tilde\nu}^{+}(\lambda) T_{\tilde\nu\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda)$$
et par suite
$$\begin{aligned} E_{\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) - E_{\tilde\mu}(\lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) \sim & \mathcal{V}_{\tilde\mu'}^{-}(\lambda) + \mathcal{V}_{\tilde\mu'}^{+}(\lambda)\big(T_{\tilde\mu'\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) - T_{\tilde\mu'\tilde\mu}(\lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda)\big) \\ & + \sum_{\tilde\nu \neq \tilde\mu', \tilde\mu} \mathcal{V}_{\tilde\nu}^{+}(\lambda)\big(T_{\tilde\nu\tilde\mu'}(\lambda) - T_{\tilde\nu\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda)\big) \\ & - \mathcal{V}_{\tilde\mu}^{+}(\lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu}(\lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) . \end{aligned}$$
Grâce à la caractérisation des systèmes d'ondes donnée par la proposition 2.3, on obtient
$$E_{\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) = E_{\tilde\mu}(\lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda)$$
$$E_{\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) - E_{\tilde\mu}(\lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\lambda) = E_{\tilde\mu'}(\lambda) .$$
En utilisant $\gamma_{\tilde\mu}^2 = 1$ et l'inversibilité des coefficients $T_{\tilde\mu\tilde\mu}$, on termine la démonstration du théorème 4.1. □

Les équations fonctionnelles (4.1) et (4.2) donnent des relations entre les coefficients de transfert, qu'on résume dans le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. — *On a les relations fonctionnelles :*

(i) $$T_{\tilde\mu\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\Lambda) = T_{\tilde\mu\tilde\mu}^{-1}(\Lambda)$$
$$T_{\tilde\mu'\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\Lambda) = T_{\tilde\mu'\tilde\mu}(\Lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu}^{-1}(\Lambda) \quad , \quad \tilde\mu' \neq \tilde\mu ;$$

(ii) *pour* $\tilde\mu' \neq \tilde\mu$
$$T_{\tilde\mu\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\Lambda) = -T_{\tilde\mu\tilde\mu}^{-1}(\Lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu'}(\Lambda)$$
$$T_{\tilde\nu\tilde\mu'}(\gamma_{\tilde\mu}\Lambda) = T_{\tilde\nu\tilde\mu'}(\Lambda) - T_{\tilde\nu\tilde\mu}(\Lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu}^{-1}(\Lambda) T_{\tilde\mu\tilde\mu'}(\Lambda) \quad , \quad \tilde\nu \neq \tilde\mu .$$

Remarque 4.3. — Il se peut que les coefficients de transfert non diagonaux soient tous nuls (ou partiellement). Ce phénomène survient trivialement dans le cas où il n'y a pas d'interaction entre les systèmes S_μ (par exemple pour le système S_0). On l'observe aussi dans le cas des espaces localements symétriques avec leurs séries d'Eisenstein.

Remarque 4.4. — Supposons tous les coefficients de transfert non diagonaux nuls. Alors les équations fonctionnelles pour les systèmes d'ondes et les coefficients de transfert diagonaux (nécessairement non nuls puisque inversibles) s'écrivent:
$$E_{\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\Lambda) = E_{\tilde\mu}(\Lambda) C_{\tilde\mu}^{-1}(\Lambda) \qquad C_{\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu}\Lambda) = C_{\tilde\mu}^{-1}(\Lambda)$$
$$E_{\tilde\mu}(\gamma_{\tilde\mu'}\Lambda) = E_{\tilde\mu}(\Lambda) \qquad C_{\tilde\mu}(\gamma_{\mu'}\Lambda) = C_{\tilde\mu}(\Lambda) \qquad \tilde\mu' \neq \tilde\mu .$$

On en déduit que $E_{\tilde{\mu}}$ et $C_{\tilde{\mu}}$ sont définis sur la surface de Riemann $\Sigma_{\tilde{\mu}}$ (revêtement ramifié d'ordre 2 de C) de la fonction $\varsigma \to \sqrt{\varsigma - \tilde{\mu}}$ ($\Sigma_{\tilde{\mu}}$, est le quotient de Σ par le groupe $G\backslash\{\gamma_{\tilde{\mu}}\}$). Si on identifie $(\Sigma_{\tilde{\mu}}, \mathbf{C})$ avec le revêtement $(\mathbf{C}_{\tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}}}, \mathbf{C}, \pi_{\tilde{\mu}})$ (où la projection de revêtement est définie par $\pi_{\tilde{\mu}}(\sigma_{\tilde{\mu}}) = (a\tilde{\sigma}_{\tilde{\mu}} + b)^2 + \tilde{\mu}$), les équations fonctionnelles de $E_{\tilde{\mu}}$ et $C_{\tilde{\mu}}$ prennent la forme habituelle :

$$E_{\tilde{\mu}}(-\sigma_{\tilde{\mu}} - 2b/a) = E_{\tilde{\mu}}(\sigma_{\tilde{\mu}})C_{\tilde{\mu}}^{-1}(\sigma_{\tilde{\mu}})$$
$$C_{\tilde{\mu}}(-\sigma_{\tilde{\mu}} - 2b/a) = C_{\tilde{\mu}}(\sigma_{\tilde{\mu}})^{-1} .$$

5. Opérateurs d'ondes et matrices de diffusion

Une représentation spectrale de H_0, opérant sur $\oplus_{\mu\in\mathcal{M}}\mathcal{H}(\mu)$, est donnée par l'isométrie $\mathcal{T}$ de $\oplus_{\mu\in\mathcal{M}}\mathcal{H}(\mu)$ sur $\oplus_{\mu\in\mathcal{M}}L^2([\tilde{\mu}(\mu), +\infty[, d\sigma_{\tilde{\mu}}(\tau_\mu))$ (où $d\sigma_{\tilde{\mu}}(\tau)$ est la mesure définie sur $]\tilde{\mu}, +\infty[$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de densité $\left(\pi(\tau - \tilde{\mu})\right)^{-1/2}$,)

telle que, si $\varphi = (\varphi_\mu)$, on ait $\mathcal{T}(\varphi) = (\hat{\varphi}_\mu)$ où

$$\hat{\varphi}_\mu(\tau_\mu) = \int_0^{+\infty} \cos\sqrt{\tau_\mu - \tilde{\mu}(\mu)}\, x_\mu\, \varphi_\mu(x_\mu)dx_\mu \quad , \tau_\mu \geq \tilde{\mu}(\mu) .$$

On a la formule d'inversion

$$\varphi_\mu(x_\mu) = \int_{\tilde{\mu}(\mu)}^{+\infty} \cos\sqrt{\tau_\mu - \tilde{\mu}(\mu)}\, x_\mu\, \hat{\varphi}_\mu(\tau_\mu)d\sigma_{\tilde{\mu}}(\tau_\mu) \quad , x_\mu \geq 0 \tag{5.1}$$

et l'action du groupe unitaire e^{-itH_0} est donnée par

$$\left(e^{-itH_0}\varphi\right)_\mu(x_\mu) = \int_{\tilde{\mu}(\mu)}^{+\infty} e^{-it\tau_\mu} \cos\sqrt{\tau_\mu - \tilde{\mu}(\mu)}\, x_\mu\, \hat{\varphi}_\mu(\tau_\mu)d\sigma_{\tilde{\mu}}(\tau_\mu) .$$

THÉORÈME 5.1. — *Pour φ dans $\oplus_{\mu\in\mathcal{M}}\mathcal{H}(\mu)$, on a*

$$W_+\varphi = \sum_{\mu\in\mathcal{M}} \int_{\tilde{\mu}(\mu)}^{+\infty} E_{\tilde{\mu}(\mu)}\big(\gamma(\tilde{\mu}(\mu))\tau_\mu\big)\Phi_\mu\hat{\varphi}_\mu(\tau_\mu)d\sigma_{\tilde{\mu}}(\tau_\mu)$$
$$W_-\varphi = \sum_{\mu\in\mathcal{M}} \int_{\tilde{\mu}(\mu)}^{+\infty} E_{\tilde{\mu}(\mu)}(\tau_\mu)\Phi_\mu\hat{\varphi}_\mu(\tau_\mu)d\sigma_{\tilde{\mu}}(\tau_\mu) .$$

La représentation spectrale introduite ci-dessus donne la structure spectrale absolument continue de H_0 : le H_0-espace des vecteurs absolument continus de densité à support dans $]\tilde{\mu}, \tilde{\mu}^+[$ est isomorphe à $\mathcal{H}^{\tilde{\mu}} = \oplus_{\tilde{\nu}\leq\tilde{\mu}}L^2(]\tilde{\mu}, \tilde{\mu}^+[, \mathbf{C}^{m(\tilde{\nu})}, d\sigma_{\tilde{\nu}})$ avec l'opérateur de multiplication par τ. Par opérateur de diffusion S, on entend la classe d'équivalence unitaire de $W_-^*W_+$. Lu dans l'espace $\oplus_{\tilde{\mu}\in\sigma_p}\mathcal{H}^{\tilde{\mu}}$, S se diagonalise : sa restriction à $\mathcal{H}^{\tilde{\mu}}$ est de la forme $\int_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}^+} S^{\tilde{\mu}}(\tau)d\tau$ où $S^{\tilde{\mu}}(\tau)$ (la matrice de diffusion) est un opérateur unitaire de $\mathbf{C}^{M(\tilde{\mu})} = \oplus_{\tilde{\mu}(\mu)\leq\tilde{\mu}}\mathbf{C}^{m(\tilde{\mu})}$, avec la métrique hermitienne convenable.

THÉORÈME 5.2. — *La matrice de diffusion $S^{\tilde{\mu}}$ (dépendant du paramètre τ dans l'intervalle d'énergie $]\tilde{\mu},\tilde{\mu}^{+}[$) est un endomorphisme de $\mathbf{C}^{M(\tilde{\mu})}$, de matrice décomposée par blocs suivant $S^{\tilde{\mu}} = \left(S^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu},\tilde{\pi}}\right)$, où les matrices $S^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu},\tilde{\pi}}$ $(\tilde{\nu},\tilde{\pi}\leq\tilde{\mu})$, d'ordre $\left(m(\tilde{\pi}),m(\tilde{\nu})\right)$, représentent les homomorphismes $S^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu},\tilde{\pi}}$ des équations fonctionnelles*

$$E_{\tilde{\pi}}(\gamma(\tilde{\mu})\Lambda) = \sum_{\tilde{\nu}\leq\tilde{\mu}} E_{\tilde{\nu}}(\Lambda) S^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}\tilde{\pi}}(\Lambda)\ .$$

6. Opérateurs de Schrödinger unidimensionnels

Il s'agit d'étudier le système S d'espace d'états $L^2(\mathbf{R})$ et d'hamiltonien $H = -d^2/dx^2 + q(x)$ où q est un potentiel, constant en dehors d'un compact et supposé suffisamment régulier. On distingue deux cas, suivant que les valeurs q_+ et q_- de q aux infinis sont identiques ou non.

12.1. $q_+ = q_-$. — Dans ce cas, le spectre absolument continu est de multiplicité uniforme 2 et on a un unique coefficient de transfert, une matrice d'ordre 2, $T(\Lambda)$, dont le paramètre est usuellement noté k : nous le ferons donc nous aussi. En terme des coefficients habituels de réflexion (r_g , r_d) et de transmission (t), on a

$$T(k) = \begin{pmatrix} r_d(k) & t(k) \\ t(k) & r_g(k) \end{pmatrix}.$$

On notera que d'ordinaire la matrice de diffusion est prise égale à $\begin{pmatrix} t(k) & r_g(k) \\ r_d(k) & t(k) \end{pmatrix}$. Cela provient du choix de bases pour exprimer la monodromie du faisceau $\mathcal{E}^H_{\mathrm{loc}}$.

Pour de tels potentiels, les coefficients de réflexion ne sont jamais nuls, à moins que q ne le soit. Rappelons, pour mémoire, que la matrice de diffusion est définie pour des potentiels à courte portée (*i.e.* à décroissance assez rapide à l'infini, par exemple dans la classe de Schwartz) et que c'est dans ce cadre, pareillement à la tranformation de Fourier, qu'on étudie le problème spectral inverse : on montre qu'il existe des potentiels (les solitons de l'équation de Korteveg de Vries), non triviaux, à coefficients de réflexion nul *i.e.* dont la matrice de diffusion est antidiagonale ([4]).

12.2. $q_+ \neq q_-$. — On suppose $q_- < q_+$. l'hamiltonien H a un spectre de multiplicité 1 (resp. 2) sur $]q_-,q_+[$ (resp. $]q_+,+\infty[$).

On a deux séries de quatre équations fonctionnelles (dont trois non triviales). La série donnée par E_{q_-} (notée E_-) est :

$$E_-\circ\gamma_- = E_-T_{--}^{-1}$$
$$E_-\circ\gamma_+ = E_- - E_+T_{++}^{-1}T_{+-}$$
$$E_-\circ\gamma_-\gamma_+ = (E_- - E_+T_{++}^{-1}T_{+-})(T_{--} - T_{-+}T_{++}^{-1}T_{+-})^{-1}\ .$$

On en déduit les matrices de diffusion :

$$S^{q_-} = T_{--}^{-1}$$

$$S^{q+} = \begin{pmatrix} r_{+-} & t_{+-} \\ t_{-+} & r_{-+} \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} r_{\pm\mp} & = (T_{\pm\pm} - T_{\pm\mp}T_{\mp\mp}^{-1}T_{\mp\pm})^{-1} \\ t_{\pm\mp} & = -T_{\pm\pm}^{-1}T_{\pm\mp}(T_{\mp\mp} - T_{\mp\pm}T_{\pm\pm}^{-1}T_{\pm\mp})^{-1} \end{cases} .$$

Bibliographie

[1] Yves COLIN DE VERDIÈRE. — *Une nouvelle démonstration du prolongement méromorphe des séries d'Eisenstein*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **293** (1981), 361–363.

[2] Harold DONNELLY. — *Eigenvalues estimates for certain noncompact manifolds*, Michigan Math. J., **31** (1984), 349–357.

[3] HARISH-CHANDRA. — *Automorphic forms and semi-simple Lie groups*, Lecture Notes in Math. 62 Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1968.

[4] R. MIURA. — *The KdV–equation : a survey of results*, SIAM Rev., **18** (1976), 412–457.

[5] Werner MÜLLER. — *Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula*, Math. Nachr. , **11** (1981), 197–288.

[6] Werner MÜLLER. — *Signature defects of cusps of Hilbert modular varieties and values of L–series at $s = 1$* , J. Differential Geometry, **20** (1984), 55–119.

[7] Werner MÜLLER. — *L^2-index of elliptic operators on manifold with cusps of rank one.* Preprint. Berlin, 1985.

[8] Peter A. PERRY. — *Mellin transforms and scattering theory I. Short range potentials*, Duke Math. J., **47** (1980), 187–193.