Séminaire de Théorie spectrale et géométrie

ALAIN DUFRESNOY

Moyenne de formes quadratiques positives et champs magnétiques

Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, tome 3 (1984-1985), exp. n° 5, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=TSG_1984-1985__3__A5_0>

Séminaire de Théorie spectrale et Géométrie
CHAMBERY - GRENOBLE
1984-1985

MOYENNE DE FORMES QUADRATIQUES POSITIVES ET CHAMPS MAGNETIQUES

par Alain DUFRESNOY

§ 1. INTRODUCTION.

Dans $\mathbb{R}^2$, l'opérateur de Schrödinger associé à un champ magnétique $B(x,y)dx\wedge dy$ peut se mettre sous la forme (très disymétrique)

$$H(a) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial}{\partial y} - ia(x,y)\right)^2 \quad \text{où} \quad \frac{\partial a}{\partial x} = B .$$

Cet opérateur est associé naturellement à la forme quadratique (non partout définie) sur $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$

$$q_{\mathbb{R}^2}(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y} - iaf\right|^2 dxdy$$

soit encore, si on désigne par Φ une fonction telle que $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = a(x,y)$,

$$q_{\mathbb{R}^2}(f) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial y}(fe^{-i\Phi})\right|^2 dxdy .$$

Dans la suite, nous supposerons que Φ est continûment différentiable sur $[0,1]\times[0,1]$ (ceci est possible dès que B est continu) et considérons

$$q(f) = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial y}(fe^{-i\Phi})\right|^2 dxdy .$$

Si on définit, pour chaque $x \in [0,1]$, Q_x sur L^2y par

$$Q_x(g) = \int_{[0,1]} \left|\frac{\partial}{\partial y}(g(y)e^{-i\Phi(x,y)})\right|^2 dy ,$$

et en désignant par f_x l'application $y \mapsto f(x,y)$, on a :

$$q(f) = \int_0^1 \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2 + Q_x(f_x)dx .$$

Les formes quadratiques Q_x ont même domaine de définition, $H^1([0,1])$, et de plus ces formes quadratiques sont égales à une transformation unitaire près de $L^2[0,1]$, qui n'est autre que la multiplication par $e^{-i\Phi}$.

Le but de ce qui suit est d'étudier le bas du spectre de (l'opérateur auto-adjoint associé à) la forme quadratique q ; en fait, nous n'obtiendrons d'informations que sur les deux premières valeurs propres.

La motivation était d'obtenir des informations sur le comportement asymptotique des valeurs propres de H(a) dans le cas où $B(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to\infty]{} \infty$. {A l'heure actuelle, cette préoccupation est sans objet, Colin de Verdière ayant résolu le problème}.

Pour cela, on suivait l'article de C. Feffermann [2], le seul intérêt (s'il en a un) étant de donner une démonstration très simple d'un succédané du lemme fondamental de [2] dans le cas particulier du champ magnétique. Inutile de préciser que la plupart des idées sont extraites de [2].

Dans la suite, on utilisera sans références des résultats classiques qu'on peut trouver dans [3].

§ 2. MOYENNE DE FORMES QUADRATIQUES.

Ceci amène à dégager la situation suivante : dans ce paragraphe, H désigne un espace de Hilbert et pour $x \in [0,1]$, U_x une famille continue de transformations unitaires de H conservant le domaine d'une forme quadratique Q fermée positive. On désigne par q la forme quadratique (non partout définie) sur $L^2([0,1],H)$ par

$$q(f) = \int_0^1 \left\|\frac{df}{dx}\right\|^2 + Q_x(f_x)dx \qquad \text{où} \quad Q(U_x g) = Q_x(g) \ .$$

Pour une forme quadratique q semi bornée, on notera

$$\lambda_1(q) = \inf_{\substack{g\in\mathcal{D}(q) \\ \|g\|=1}} q(g) \ .$$

<u>Remarque</u>. - Il n'est pas difficile de voir que même si $\lambda_1(Q) = 0$, on peut avoir $\lambda_1(q) > 0$; pour s'en convaincre, on peut par exemple considérer $H = \mathbb{R}^2$, Q une forme quadratique dont les valeurs propres sont 0 et 1 et $U_x = \begin{pmatrix}\cos\theta x & -\sin\theta x \\ \sin\theta x & \cos\theta x\end{pmatrix}$ où $\theta\in\mathbb{R}$.

On vérifie aisément que l'application de $\mathcal{D}(Q)$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\bar{Q}(\varphi) = \int_0^1 Q_x(\varphi)dx$ est une forme quadratique sur $\mathcal{D}(Q)$, que nous appellerons <u>moyenne de la famille</u> Q_x <u>sur</u> $[0,1]$.

Il est immédiat, grâce au principe du minimax, que $\lambda_1(q) \le \lambda_1(\bar{Q})$: il suffit de tester la forme quadratique q sur les applications de $L^2([0,1],H)$ constantes.

On se propose de voir que, dans une certaine mesure, l'inégalité opposée est vraie. Mais avant d'énoncer le résultat précis, il nous faut encore introduire une notation : si Q est une forme quadratique fermée, on peut lui associer une représentation spectrale $H \simeq \oplus L^2(d\mu_n)$ telle que $Q(f,g) = \sum_n \int x f_n \bar{g}_n d\mu_n$ et si $a\in\mathbb{R}$, on désigne par $Q^a(f,g) = \sum_n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Inf}(x,a) f_n \bar{g}_n d\mu_n$.

On a

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> H <u>un espace de Hilbert et pour</u> $x\in[0,1]$ <u>une famille</u> U_x <u>continue de transformations unitaires de</u> H <u>conservant le domaine d'une forme quadratique</u>

Q <u>fermée positive, et</u> $q(f) = \int_0^1 \|\frac{\partial f}{\partial x}\|^2 + Q(U_x(f_x))dx$; <u>il existe</u> $k > 0$ <u>telle que</u> :

$k\lambda_1\left(\overline{Q^{\pi^2}}\right) \le \lambda_1(q) \le \lambda_1(\bar{Q})$.

Pour cela, on démontre tout d'abord :

LEMME 1. - <u>Soit</u> $f \in \mathcal{D}(q)$ <u>et désignons par</u> $\bar{f} \in H$ <u>la moyenne de</u> f <u>sur</u> $[0,1]$. <u>Alors</u> $q(f) \ge \frac{1}{2}\overline{Q^{\pi^2}}(\bar{f})$.

<u>Démonstration</u>. - On a tout d'abord

$$q(f) = \int_0^1 \|\frac{df}{dx}\|^2 + Q_x(f(x))dx \ge \int_0^1 \pi^2\|f(x)-\bar{f}\|^2 + Q_x(f(x))dx .$$

Notons $g \mapsto \hat{g}$ la représentation spectrale associée à la forme quadratique Q .

$$q(f) \ge \int_0^1 \left(\pi^2\|\widehat{U_x(f(x)-\bar{f})}\|^2 + \int \xi\,|\widehat{U_x f(x)}|^2 d\mu\right) dx$$

ou encore

$$q(f) \ge \int_0^1 \left(\int \mathrm{Inf}(\xi,\pi^2)\left[|\widehat{U_x(f)} - \widehat{U_x\bar{f}}|^2 + |\widehat{U_x f(x)}|^2\right]d\mu\right)dx$$

d'où

$$q(f) \ge \int_0^1 \left(\int \mathrm{Inf}(\xi,\pi^2) \times \frac{1}{2}|\widehat{U_x\bar{f}}|^2 d\mu\right)dx .$$

Mais le terme de droite est exactement $\frac{1}{2}\overline{Q^{\pi^2}}(\bar{f})$.

<u>Démonstration de la proposition 1</u>. - Soit $0 \le \lambda < 1$ fixé, et soit $f \in \mathcal{D}(q)$; alors, soit $q(f) \le \lambda\|f\|^2$, soit $q(f) > \lambda\|f\|^2$ dans le premier cas, on a a fortiori

$$\int_0^1 |\frac{df}{dx}|^2 dx \le \lambda\|f\|^2 .$$

Un calcul facile montre qu'alors $\|\bar{f}\| \ge (1-\sqrt{\lambda})\|f\|$, et grâce au lemme 1, on a :

$$q(f) \ge \frac{1}{2} \times \lambda_1\left(\overline{Q^{\pi^2}}\right) \times (1-\sqrt{\lambda})^2\|f\|^2 .$$

Pour chaque λ , on a donc démontré :

$$\lambda_1(q) \geq \operatorname{Inf}\left(\lambda, \frac{1}{2}(1-\sqrt{\lambda})^2 \lambda_1\left(\overline{Q^{\pi^2}}\right)\right) .$$

Si on utilise alors que $\lambda_1\left(\overline{Q^{\pi^2}}\right) \leq \pi^2$, on montre aisément que la valeur de λ pour laquelle cette borne inférieure est maximum, est inférieure ou égale à λ_0.

Ceci entraîne, en posant $k = \frac{1}{2}(1-\sqrt{\lambda_0})^2$ l'inégalité annoncée.

On se propose maintenant d'obtenir une information sur la deuxième valeur propre de (l'opérateur auto-adjoint associé à) la forme quadratique q.

PROPOSITION 2. - <u>Si la forme</u> Q^{π^2} <u>admet comme seule valeur propre différente de</u> π^2 <u>la valeur propre</u> 0 <u>(avec multiplicité</u> 1 <u>), alors il existe</u> μ <u>(ne dépendant pas de la forme</u> Q <u>) tel que le nombre des valeurs propres de la forme quadratique</u> q <u>inférieures à</u> μ <u>est au plus égal à</u> 1.

<u>Démonstration</u>. - Soit V un sous-espace vectoriel de dimension 2 de H ; alors Q^{π^2}/V est une forme quadratique positive qui a une valeur propre supérieure ou égale à π^2, donc $\operatorname{Tr}\left(Q^{\pi^2}/V\right) \geq \pi^2$. On en déduit que $\operatorname{Tr}\left(\overline{Q^{\pi^2}}/V\right) \geq \pi^2$; donc, d'après le principe du minimax, si λ_1 et λ_2 désignent les deux premières valeurs propres de $\overline{Q^{\pi^2}}$, on a $\lambda_1+\lambda_2 \geq \pi^2$.

Considérons maintenant W un espace de dimension 2 de $L^2([0,1],H)$ tel que dans W, on ait $q(f) \leq \nu\|f\|^2$ où $\nu < 1$.

L'application $f \in W \to \bar{f} \in H$ qui, à une fonction de $L^2([0,1],H)$, associe sa moyenne est linéaire et injective $(\|\bar{f}\| \geq (1-\sqrt{\nu})\|f\|)$.

Désignons par V l'image de W : c'est un espace vectoriel de dimension 2 de H. Grâce au lemme 1, on sait que :

$$q(f) \geq \frac{1}{2}\overline{Q^{\pi^2}}(\bar{f})$$

donc sur l'espace vectoriel V , on a :

$$\frac{1}{2}\,\overline{Q^{\pi^2}}(\bar{f}) \leq \nu\|f\|^2 \leq \frac{\nu}{(1-\sqrt{\nu})^2}\,\|\bar{f}\| .$$

D'après le principe du minimax, on en déduit que $\lambda_2 \leq \frac{\nu}{(1-\sqrt{\nu})^2}$ et donc $\frac{\nu}{(1-\sqrt{\nu})^2} \geq \frac{\pi^2}{2}$; cette condition fournit la condition sur ν ; on a $\nu \geq \mu$, où $\frac{\mu}{(1-\sqrt{\mu})^2} = \frac{\pi^2}{2}$.

Remarques. - Les résultats énoncés précédemment l'ont été sans aucun souci de généralité. On peut remplacer $\int_0^1 \left|\frac{df}{dx}\right|^2 + Q_x(f(x))$ par une forme quadratique $\int_X |\nabla f|^2 + Q_x(f(x))$ où X est une variété riemannienne, π^2 étant remplacé alors par la première valeur propre non nulle du Laplacien avec condition de Neumann.

D'autre part, la condition sur la famille de formes quadratiques peut être beaucoup assouplie : il n'est pas vraiment nécessaire que toutes les formes quadratiques se correspondent par une transformation unitaire.

En particulier, si on considère la forme quadratique

$$q(f) = \iint_{[0,1]\times[0,1]} |\nabla f|^2 + V(g)f\,dydy$$

où le potentiel V est positif, la proposition 1, convenablement adaptée, montre que

$$q(f) \geq \left(\overline{V^{\pi^2}}\right)\|f\|^2$$

où $\overline{V^{\pi^2}}$ est la moyenne sur $[0,1]\times[0,1]$ de $\mathrm{Inf}(V,\pi^2)$.

§ 3. RETOUR AUX CHAMPS MAGNETIQUES.

Afin de minorer $\lambda_1(q)$ pour la forme quadratique

$$q(f) = \int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-i\Phi(x,y)}f\right)\right|^2 dxdy \ ,$$

nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'il suffisait d'obtenir une minoration de la forme quadratique $\overline{Q^{\pi^2}}$ où $Q(f) = \int_0^1 \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|^2 dy$.

On remarque tout d'abord que $Q^{\pi^2}(f) = \pi^2 \|g - \bar{g}^y\|^2$ où $\bar{g}^y$ désigne la moyenne de la fonction $g \in L^2_y$ sur l'intervalle $[0,1]$.
On a donc :

$$Q_x^{\pi^2}(g) = \pi^2 \| g e^{-i\Phi(x,y)} - \overline{\left(e^{-i\Phi(x,y)}g\right)} \|^2$$

et donc

$$\overline{Q_x^{\pi^2}}(g) = \pi^2 \int_0^1 \| g(y) - e^{i\Phi(x,y)}\overline{\left(e^{-i\Phi(x,y)}g(y)\right)}^y \|^2 dx \ .$$

En appliquant Fubini, puis l'inégalité de Schwarz, on obtient :

$$\overline{Q_x^{\pi^2}}(g) \geq \pi^2 \int_0^1 \left| f(y) - \int_0^1 e^{i\Phi(x,y)}\overline{\left(e^{-i\Phi(x,y)}f(y)\right)}^y dx \right|^2 dy \ .$$

En exprimant alors la moyenne en y à l'aide d'une intégrale, on obtient

$$\overline{Q_x^{\pi^2}}(g) \geq \pi^2 \|g-h\|^2 \quad \text{où} \quad h(y) = \int_0^1 g(z)\left(\int_0^1 e^{i\{\Phi(x,y)-\Phi(x,z)\}}dx\right)dz \ .$$

On a évidemment :

$$\|h\|^2 \leq \|g\|^2 \times \int_0^1\int_0^1 \left|\int_0^1 e^{i\Phi(x,y)-\Phi(x,z)}dx\right|^2 dydz \ .$$

Ceci nous permet d'énoncer :

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> B <u>un champ magnétique sur</u> $[0,1]\times[0,1]$ <u>et</u> Φ <u>une fonction qui lui est associée ; alors si</u> q <u>désigne la forme quadratique</u>

$$q(f) = \int_{[0,1]\times[0,1]} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial y}(f e^{-i\Phi})\right|^2 \ ,$$

<u>on a</u> :

$$\lambda_1(q) \geq \pi^2\left[1-\int_0^1\int_0^1\left|\int_0^1 e^{i\{\Phi(x,y)-\Phi(x,z)\}}dx\right|^2 dy\,dz\right] .$$

Remarques. -

1) En utilisant la définition de la fonction Φ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\Phi(x,y)-\Phi(x,z)\} = \int_z^y B(x,t)dt ,$$

ce qui montre que le choix de Φ dans l'expression précédente n'a aucune influence sur le résultat.

2) Dans le cas où B est un champ magnétique constant, on obtient :

$$\lambda_1(q) \geq \pi^2\left[1-\int_0^1\int_0^1\left(\frac{2}{B(y-z)}\left|\sin\frac{B(y-z)}{2}\right|\right)^2 dy\,dz\right] .$$

Cette inégalité étant très médiocre pour les grandes valeurs de B , on remédie à cette situation en découpant le carré $[0,1]\times[0,1]$ en carrés de côté ℓ et en remarquant que la forme quadratique sur ce carré de côté ℓ pour le champ magnétique $q_\ell(B(x,y))$ s'identifie à $\frac{1}{\ell^2}\times q_1(\ell^2 B(\frac{x}{\ell},\frac{y}{\ell}))$ où q_1 désigne la forme quadratique associée à un champ magnétique sur un carré de côté 1 .

3) Il n'est pas difficile d'obtenir quelques minorations de $\lambda_1(q)$ dans le cas où le rapport entre $\operatorname{Inf} B(x,y)$ et $\operatorname{Sup} B(x,y)$ est borné, ou dans le cas où la dérivée par rapport à x de B est bornée par rapport à B . Ceci permet par exemple d'obtenir l'ordre de grandeur du comportement asymptotique du nombre de valeurs propres inférieures à λ de $H(a)$, mais ce résultat est sans intérêt depuis [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. COLIN DE VERDIERE, L'asymptotique de Weyl pour des bouteilles magnétiques bidimensionnelles.
Preprint de l'Institut Fourier (1985).

[2] C. FEFFERMANN, The uncertainty principle.
Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 9, 2 septembre 1983.

[3] REED - SIMON, Methods of Modern Mathematical Physics I, II, IV.
