

# SÉMINAIRE DE THÉORIE SPECTRALE ET GÉOMÉTRIE

SYLVESTRE GALLOT

## **Bornes universelles pour des invariants géométriques**

*Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, tome 1 (1982-1983), exp. n° 2, p. 1-20

[http://www.numdam.org/item?id=TSG\\_1982-1983\\_\\_1\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=TSG_1982-1983__1__A2_0)

© Séminaire de Théorie spectrale et géométrie (Chambéry-Grenoble), 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Séminaire de Théorie spectrale et géométrie » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

1982-1983

# BORNES UNIVERSELLES POUR DES INVARIANTS GEOMETRIQUES

par Sylvestre GALLOT

## I. Préliminaires

Qu'est ce que la courbure de Ricci et comment intervient-elle?

① Définition géométrique: Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne (v.r.) supposée compacte dans toute la suite.

La courbure de Ricci est un 2-tenseur symétrique  $r$  (i.e. une section  $r$  du fibré  $T^*M \otimes T^*M$  vérifiant  $r(x, y) = r(y, x)$ ) défini de la manière suivante.

Soit  $v$  un vecteur de  $T_m M$  tel que  $\|v\| = 1$ .

L'application exponentielle est l'application  $\exp_m$  définie par  $\exp_m(t.v) = c(t)$  où  $c$  est la géodésique (unique) telle que  $c'(0) = v$ .

Considérons la carte

$$\varphi \begin{cases} S^{n-1} \times [0, +\infty[ \longrightarrow M \\ (v, t) \longmapsto \exp_m(t.v) \end{cases}$$

L'espace de départ est muni de la mesure produit  $d\theta \cdot dt$ , l'espace d'arrivée est muni de la mesure canonique  $dv_g$  associée à la métrique riemannienne  $g$ .

Il existe une fonction  $J(v, t)$  telle que

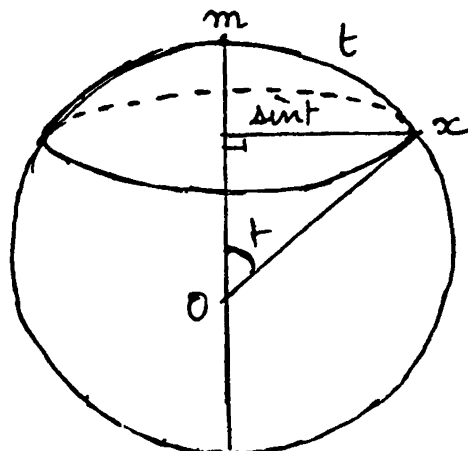
$$\varphi^*(dv_g) = J(v, t)^{n-1} \cdot d\theta \cdot dt$$

Exemple: 1 - Si  $M$  est l'espace euclidien  $R^n$ ,  $\varphi$  donne simplement le passage en coordonnées polaires et  $dv_g$  est la mesure de Lebesgue  $dv_g = t^{n-1} \cdot d\theta \cdot dt$ , par conséquent  $J(v, t) = t$

2 - Si  $M = S^n$

La mesure  $(n-1)$ -dimensionnelle de la sphère géodésique  $S_t = \{x \mid d(m, x) = t\}$  est donnée, d'après la définition de  $J$ , par  $\int_{v \in S} J(v, t)^{n-1} d\theta$

Comme la mesure  $dv_g$  est invariante par les isométries qui laissent  $m$  fixe,



$J(v, t)$  est égale à une fonction  $\bar{J}(t)$  indépendante de  $v$ . On a donc  $\text{Vol}_{n-1}(S_t) = \text{Vol}(S^{n-1}) \cdot \bar{J}(t)^{n-1}$ .

Par ailleurs  $S_t$  est aussi le petit cercle horizontal de  $S^n$  égal à  $\{x \mid (\vec{Om}, \vec{Ox}) = t\}$ . Son rayon euclidien est donc  $\text{sint}$  et son volume  $(\text{sint})^{n-1} \cdot \text{Vol}(S^{n-1})$ . D'où  $J(v, t) = \text{sint}$ .

3 - Si  $M$  est l'espace hyperbolique  $H^n$ .

Cet espace peut se voir comme l'ensemble des points  $(x_0, \vec{x})$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  qui vérifient  $\|\vec{x}\|^2 - x_0^2 = -1$ . L'espace tangent au point  $(x_0, \vec{x})$  est l'hyperplan parallèle à l'hyperplan  $T(x_0, \vec{x}) = \{(\xi_0, \vec{\xi}) \mid \xi_0 \cdot x_0 - \langle \vec{x}, \vec{\xi} \rangle = 0\}$

On vérifie aisément que la

forme bilinéaire symétrique

associée à la forme quadratique

$$(\xi_0, \vec{\xi}) \longmapsto \|\vec{\xi}\|^2 - \xi_0^2$$

est définie positive sur

$T(x_0, \vec{x})$ . C'est cette métrique

qu'on appelle métrique hyper-

bolique. Pour cette métrique

la courbe  $c(t) = \text{cht} \cdot \vec{e}_0 + \text{sht} \cdot \vec{v}$

est une géodésique issue du

point  $m = (1, 0, \dots, 0)$  et telle que  $c'(0) = \vec{v}$  (le vecteur  $\vec{v}$  étant un vecteur tangent, donc horizontal, de norme 1). Notons  $S_t = \{x \mid d(m, x) = t\}$  par le

même raisonnement que précédemment on a  $J(\vec{v}, t) = \bar{J}(t)$  (indépendant de  $\vec{v}$ )

et  $\text{Vol}_{n-1}(S_t) = \text{Vol}(S^{n-1}) \cdot \bar{J}(t)^{n-1}$ . Remarquons que  $S_t$  est un cercle horizontal

de rayon (euclidien)  $\text{sht}$ . Mais comme, dans un plan horizontal, la métrique

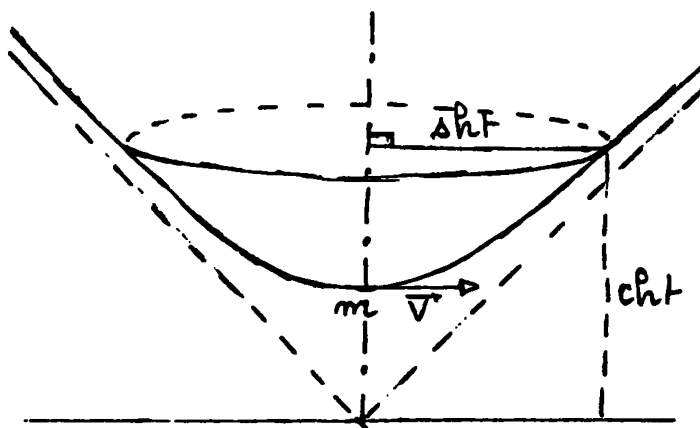
coïncide avec la métrique euclidienne, le volume riemannien de  $S_t$  est

égal au volume euclidien, i.e.  $\text{Vol}(S^{n-1}) \cdot (\text{sht})^{n-1}$ . D'où  $J(\vec{v}, t) = \text{sht}$ .

Dans une variété riemannienne  $(M, g)$  quelconque on observe que le développement limité de  $J(v, t)$  par rapport à  $t$  au voisinage de zéro donne

$$J(\vec{v}, t) = t - q(v) \cdot \frac{t^3}{3!} + O(t^4)$$

Le premier terme  $t$  est le même que dans le cas euclidien. Sa seule signification est de dire que, lorsqu'on se rapproche de  $m$ , la mesure  $v_g$  est



asymptotiquement équivalente à la mesure euclidienne de l'espace tangent  $T_m M$ , ce qui est trivial. Le 1<sup>er</sup> terme dont la signification géométrique est non-triviale est donc le terme de degré 3.

Définition: La courbure de Ricci  $r$  est le 2-tenseur symétrique tel que  $r(v, v) = (n-1) q(v)$ .

Reprenant les exemples précédents, on voit que la courbure de Ricci de l'espace euclidien est nulle. Sur  $S^n$ ,  $J(v, t) = \sin t - t - \frac{t^3}{3!} + O(t^4)$ . Donc  $r(v, v) = (n-1)$ . Plus généralement, sur la sphère euclidienne  $S^n(r)$  de rayon  $r$ , on a  $J(v, t) = r \sin(t/r)$ , d'où  $r(v, v) = (n-1) \cdot \frac{1}{r^2}$ . Sur  $H^n$ ,  $J(v, t) = \sinh t - t + \frac{t^3}{3!} + O(t^4)$ . D'où  $r(v, v) = -(n-1)$ . Plus généralement, si on remplace la métrique  $g$  de  $H^n$  par  $\frac{1}{-K} \cdot \bar{g}$  (où  $K < 0$ ), on obtient  $J(v, t) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \text{sh}(\sqrt{-K} \cdot t)$  d'où  $r(v, v) = (n-1)K$ . Remarquons que, sur  $H^n$ , nous avons calculé la courbure au seul point  $m = (1, 0, \dots, 0)$ . Comme le groupe des isométries de  $H^n$  agit transitivement sur  $H^n$ , la courbure est la même en tout autre point.

Remarque importante: Nous venons d'exhiber les 3 espaces modèles de courbure de Ricci constante  $(n-1)K$  (avec  $K > 0, K = 0$  ou  $K < 0$  suivant le cas). Dans la suite nous noterons  $\bar{M}$  l'espace modèle de courbure constante  $(n-1)$ . Sur cet espace nous noterons  $\bar{J}(t)$  la valeur particulière de  $J(v, t)$ .

Remarquons que

$$(1) \quad \bar{J}''(t) + K \cdot \bar{J}(t) = 0.$$

## ② Théorème de Bishop (of [B-C] et [H-K])

Dans la suite nous poserons

$$r_{\min} = \inf_{\substack{v \in TM \\ \|v\|=1}} r(v, v)$$

Un calcul donne

$$(2) \quad \frac{d^2}{dt^2} J(v, t) + \frac{r_{\min}}{n-1} J(v, t) \leq 0$$

Posons  $f^+(t) = \sup(f(t), 0)$ .

En comparant (1) et (2) on obtient le

Théorème: Si  $r_{\min} \geq (n-1)K$ , si  $J(0) = \bar{J}(0)$  et si  $J'(0) \leq \bar{J}'(0)$ , alors  $\frac{J^+}{\bar{J}^+}$  est une fonction décroissante de  $t$ . En particulier  $\frac{J^+}{\bar{J}^+}(t) \leq \frac{\bar{J}^+}{\bar{J}^+}(t)$ .

Dans le cas qui nous intéresse ici on a toujours  $J(0) = 0 = \bar{J}(0)$  et  $J'(0) = 1 = \bar{J}'(0)$ .

Preuve: On travaille sur l'intervalle  $[0, t_0]$  où les fonctions  $J$  et  $\bar{J}$  sont toutes deux positives.

En multipliant (1) par  $J$  et (2) par  $\bar{J}$  et en retranchant on obtient

$$J''\bar{J} - \bar{J}''J \leq 0$$

d'où  $\frac{d}{dt}(J'\bar{J} - \bar{J}'J) \leq 0$ .

Comme  $(J'\bar{J} - \bar{J}'J)(0) = 0$  (conditions initiales), on a  $(J'\bar{J} - \bar{J}'J)(t) \leq 0$ ,

d'où  $\frac{d}{dt}\left(\frac{J}{\bar{J}}\right) \leq 0$ .

Par conséquent  $\bar{J}(t_0) \geq J(t_0)$ , d'où  $J(t_0) = 0$ .

Donc  $\frac{J(t)}{\bar{J}(t)}$  décroît de 1 à zéro sur  $[0, t_0[$ ,  $\frac{J^+(t)}{\bar{J}^+(t)} = 0$  sur  $[t_0, +\infty[$ . Q.E.D.

Corollaire 1 : Notons  $B(m, \rho)$  la boule géodésique de centre  $m$  et de rayon  $\rho$  sur  $M$ . Notons  $\bar{B}(\rho)$  la même boule sur  $\bar{M}$ . Si  $r_{\min} \geq (n-1)k$  et si  $0 < \rho < R$ , on a

$$\frac{\text{Vol } B(m, R)}{\text{Vol } B(m, \rho)} \leq \frac{\text{Vol } \bar{B}(R)}{\text{Vol } \bar{B}(\rho)}$$

Preuve:

$$\text{Vol } B(m, \rho) = \int_{S^{n-1}} \left( \int_0^\rho J^+(v, t)^{n-1} dt \right) d\theta$$

$$\text{Vol } \bar{B}(\rho) = \int_{S^{n-1}} \left( \int_0^\rho \bar{J}^+(t)^{n-1} dt \right) d\theta$$

Le corollaire dérive alors de l'inégalité

$$\frac{\int_0^R J^+(v, t)^{n-1} dt}{\int_0^R \bar{J}^+(t)^{n-1} dt} \leq \frac{J^+(v, \rho)^{n-1}}{\bar{J}^+(\rho)^{n-1}} \leq \frac{\int_0^\rho J^+(v, t)^{n-1} dt}{\int_0^\rho \bar{J}^+(t)^{n-1} dt}$$

Q.E.D.

N.B. Ce résultat reste vrai si  $\rho$  et  $R$  dépassent le rayon d'injectivité (i.e. même si les boules sont des boules dégénérées non homéomorphes à des boules de  $\mathbb{R}^n$ ). Exemple



Corollaire 2 : Notons  $N(\varepsilon, R, M)$  le nombre maximal de boules disjointes de rayon  $\varepsilon$  que l'on peut mettre dans une boule géodésique de rayon  $R$  sur  $M$ .

Notons  $\bar{N}(\varepsilon, R, M)$  le rapport  $\text{Vol } \bar{B}(R) / \text{Vol } \bar{B}(\varepsilon)$  sur  $\bar{M}$ .

Si  $r_{\min} \geq (n-1)K$ , alors  $N(\varepsilon, R, M) \leq \bar{N}(\varepsilon, 2R, K)$

Preuve:  $N(\varepsilon, R, M)$  est borné par le maximum du rapport entre les volumes d'une boule de rayon  $R$  et d'une boule de rayon  $\varepsilon$  de centres  $m$  et  $m'$  sur  $M$ , telles que  $m' \in B(m, R)$ . Comme  $B(m, R) \subset B(m', 2R)$ ,

$$N(\varepsilon, R, M) \leq \frac{\text{Vol } B(m', 2R)}{\text{Vol } B(m', \varepsilon)} \leq \frac{\text{Vol } \bar{B}(2R)}{\text{Vol } \bar{B}(\varepsilon)} = \bar{N}(\varepsilon, 2R, K)$$

Notons que  $\bar{N}(\varepsilon, R, K) = \frac{\int_0^R \bar{J}(t)^{n-1} dt}{\int_0^\varepsilon \bar{J}(t)^{n-1} dt}$  s'estime uniquement en fonction de  $K$ ,  $\varepsilon$  et  $R$ . Q.E.D.

### ③ Théorème de précompacité ([GR 1] p. 63)

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques plongés dans  $Z$ . On définit l'écart

$$d_Z(X, Y) = \inf \{ \varepsilon / \varepsilon > 0, X \text{ inclus dans le } \varepsilon\text{-voisinage de } Y \text{ et réciproquement} \}$$

La "distance" de Hausdorff est définie, pour deux espaces métriques  $X$  et  $Y$ , par

$$d_H(X, Y) = \inf \{ d_Z(i(X), j(Y)) \text{ pour tous les espaces métriques } Z \text{ et}$$

tous les plongements isométriques  $i$  et  $j$  de  $X$  et  $Y$  dans  $Z$  }

Définition: Nous noterons  $\mathcal{H}_{K, D}$  l'ensemble des variétés riemanniennes  $(M, g)$  qui vérifient  $r_{\min} \geq (n-1)K$  et  $\text{diam}(M) \leq D$ .

Théorème: Pour toutes les valeurs réelles de  $K$  et toutes les valeurs positives de  $D$ ,  $\mathcal{H}_{K, D}$  est précompact pour  $d_H$ .

Idée de la preuve: Une suite  $(M_i)_i$  de v.r. admet une sous-suite convergente pour  $d_H$  si et seulement si  $\forall \varepsilon \exists \bar{N}(\varepsilon)$  telle que  $\forall i N(\varepsilon, M_i) \leq \bar{N}(\varepsilon)$ , où  $N(\varepsilon, M_i)$  est le nombre maximum de boules disjointes de rayon  $\varepsilon$  qu'on peut mettre dans  $M_i$ .

(La raison fondamentale est que, pour assurer que  $d_H(M, M_i) < \varepsilon$ , il suffit de montrer qu'il existe un  $\frac{\varepsilon}{2}$ -réseau de  $M$  et un  $\frac{\varepsilon}{2}$ -réseau de  $M_i$  tels que la distance entre leurs points respectifs soit inférieure à  $\varepsilon/2$ . La borne uniforme  $\bar{N}(\varepsilon)$  permet de borner uniformément le nombre de points

l'un tel réseau et d'extraire, point après point, des sous-suites convergentes).

Or ici, d'après le corollaire 2 ci-dessus, on a  $N(\mathcal{E}, M_1) \leq \bar{N}(\mathcal{E}, D, \mathcal{K})$  car, sur  $M_1$ , la boule de rayon  $D$  contient  $M_1$  tout entier.

d) Questions naturelles: Au vu du théorème de précompacité, et en vue de chercher des invariants géométriques ou topologiques, il apparaît naturel de se poser les questions suivantes.

a) Quand on a un invariant  $\mathcal{S}$ , la fonction  $M \mapsto \mathcal{S}(M)$  est-elle continue ou semi continue pour la distance de Hausdorff, i.e. si une suite  $M_n$  de v.s. converge vers un v.r.  $M$  pour  $d_H$ , a-t-on  $\mathcal{S}(M) = \lim \mathcal{S}(M_n)$  ?  
 $\mathcal{S}(M) \geq \liminf \mathcal{S}(M_n)$  ?  
 $\mathcal{S}(M) \leq \limsup \mathcal{S}(M_n)$  ?

La question est ouverte dans presque tous les cas. Remarquons seulement que le diamètre est continu (et même uniformément continu) pour  $d_H$  car

$$|\text{diam}(X) - \text{diam}(Y)| \leq 2 d_H(X, Y).$$

Par contre les nombres de Betti  $b_p$  ne sont pas continus: considérons en effet le tore  $\mathcal{E} \cdot T^{n-1}$  obtenu en faisant une homothétie de rapport  $\mathcal{E}$  sur la métrique de  $T^{n-1}$ . Comme  $\text{diam}(\mathcal{E} \cdot T^{n-1})$  tend vers zéro avec  $\mathcal{E}$ , il est clair que  $T \times \mathcal{E} \cdot T^{n-1}$  tend vers  $T$  pour la distance de Hausdorff. Or

$b_p(T \times \mathcal{E} T^{n-1}) = \binom{n}{p}$ , alors que  $b_p(T) = 0$  si  $p > 1$  et  $b_1(T) = 1$ . On peut se demander si les  $b_p$  sont semi-continus dans l'autre sens. La question

reste ouverte pour  $b_1$ . Pour  $b_p$  ( $p > 1, p$  pair) la réponse est non. En effet

considérons un point  $x_0$  du projectif complexe  $\mathbb{C}P^{n+1}$  et notons  $S_r = \{x/d(x_0, x) = r\}$ .  
 On a  $S_r \rightarrow \mathbb{C}P^n = \{x/d(x_0, x) = \pi\}$  quand  $r \rightarrow \pi$ .

or  $b_{2p}(S^r) = 0$  et  $b_{2p}(\mathbb{C}P^n) = 1$ .

b) Une question plus accessible est la suivante. Etant donnés  $K$  et  $D$  ( $D > 0$ ) et un invariant  $\mathcal{S}$ , existe-t-il une borne uniforme  $C(K, D)$  telle que, pour toute  $(M, g)$  appartenant à l'ensemble précompact  $\mathcal{K}_{K, D}$ , on ait  $\mathcal{S}(M, g) \leq C(K, D)$  ou  $\mathcal{S}(M, g) \geq C(K, D)$ .

Il existe dores et déjà un certain nombre d'invariants pour lesquels la réponse est affirmative, à savoir: le 1<sup>er</sup> nombre de Betti  $b_1$ , les valeurs

propres  $\lambda_i$  du spectre du laplacien et leurs inverses, les constantes isopérimétriques  $h$  et  $C$  de la variété définies par

$$h = \inf_{\Omega \in \mathcal{W}} \frac{\text{Vol}(\partial\Omega)}{\text{Vol}(\Omega)}, \quad C = \inf_{\Omega \in \mathcal{W}} \frac{\text{Vol}(\partial\Omega)}{\text{Vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}}$$

où  $\mathcal{W}$  est l'ensemble des domaines  $\Omega \subset M$  tels que  $\text{Vol}(\Omega) \leq \frac{1}{2} \text{Vol}(M)$ , et enfin le  $\hat{A}$  genre de la variété. Le but de cet exposé est de donner une méthode générale pour trouver des estimées de ce type (voir p.18-19-20). Par contre le problème reste ouvert dans tous les autres cas. Remarquons cependant qu'en renforçant l'hypothèse faite sur la courbure (i.e. en remplaçant la borne inférieure de la courbure de Ricci par une borne inférieure de la courbure sectionnelle), on sait calculer une borne supérieure de chacun des nombres de Betti  $b_p$ . Sous la même hypothèse renforcée, on sait borner la dimension du module des déformations d'Einstein d'une variété d'Einstein (voir [GA1], [GR2] et [GA3]).

## II Méthode géométrique

En utilisant le théorème de Bishop, on obtient des estimées sur le  $\pi_1$  et le  $b_1$ .

### 1 Théorème de Myers:

Théorème: Si  $r_{\min} \geq (n-1)K > 0$ , alors  $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ ,  $M$  est compacte, son  $\pi_1$  est fini et  $b_1(M) = 0$ .

Preuve: Le fait que  $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$  vient simplement du fait que, le long

d'une géodésique minimisante de longueur  $d = \text{diam}(M)$ , on a  $J(t) > 0$  sur  $[0, d[$ , par conséquent  $\bar{J}(t) > J(t) > 0$  sur  $[0, d[$  comme  $\bar{J}(t) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}t)$ , on a  $d \leq \pi/\sqrt{K}$ . Soit  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  le revêtement universel de  $M$ . On a également  $\text{diam}(\tilde{M}) \leq \pi/\sqrt{K}$ . Pour un point  $m$  donné, il existe  $\varepsilon > 0$  telle que la boule  $B(m, \varepsilon)$  soit homéomorphe à une boule de  $\mathbb{R}^n$  (donc simplement connexe).

Par conséquent  $p^{-1}[B(m, \varepsilon)]$  est une réunion de boules de rayon  $\varepsilon$  dans  $\tilde{M}$  en nombre égal au nombre d'éléments du  $\pi_1$ . On a donc, par le corollaire 2,



$$\#(\pi_1(M)) \leq N(\varepsilon, \frac{\pi}{\sqrt{k}}, \tilde{M}) \leq \bar{N}(\varepsilon, \frac{\pi}{\sqrt{k}}, K).$$

② Théorème de Milnor:

Soit  $\Gamma$  un groupe discret et  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$  un système générateur. On note  $\|\gamma\|$  la plus petite valeur de l'entier  $k$  tel que  $\gamma$  s'écrit comme produit de  $k$  générateurs ou de leurs inverses. On pose  $N(R) = \#\{\gamma / \|\gamma\| < R\}$ . On dit que  $\Gamma$  est à croissance polynômiale lorsqu'il existe des constantes  $c$  et  $k$  telles que  $N(R) \leq c \cdot R^k$ . Cette notion ne dépend pas du système générateur choisi.

Exemple:  $Z^p$  est à croissance polynômiale en  $R^p$ . En effet,  $N(R)$  est le nombre de points de  $Z^p$  situés à l'intérieur du pavé d'équation

$|x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_p| \leq R$ . Ce nombre est équivalent au volume du pavé, donc à  $R^p$ .

Théorème: Si  $r_{\min} \geq 0$ , alors le  $\pi_1(M)$  est à croissance polynômiale.

Exemple: le tore  $T^n$  est tel que  $\pi_1(T^n) = Z^n$ , croissance en  $R^n$ .

Preuve: Soit  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$  un système générateur du  $\pi_1$ .

Posons  $c = \sup(\text{longueur des } \gamma_i)$ . Si  $\gamma = \gamma_{i_1} \cdot \dots \cdot \gamma_{i_k}$ , il

est clair que sa longueur  $L(\gamma)$  est plus petite que la somme des longueurs des  $\gamma_i$ . D'où  $L(\gamma) \leq c \cdot \|\gamma\|$ . Si  $\tilde{m} \in p^{-1}(m)$ , où  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  est le revêtement universel de  $M$ , on a  $d(\tilde{m}, \gamma(\tilde{m})) \leq c \|\gamma\|$ . Donc

$$N(R) \leq \#\left\{ \gamma \in \pi_1(M) \mid \gamma(\tilde{m}) \in B(\tilde{m}, c \cdot R) \right\}.$$

Comme précédemment, il existe  $\varepsilon > 0$  telles que les boules de centres  $\gamma(\tilde{m})$  et de rayon  $\varepsilon$  soient disjointes. Donc  $N(R) \leq N(\varepsilon, c \cdot R, \tilde{M}) \leq \bar{N}(\varepsilon, 2c \cdot R, 0)$ .  $\bar{N}(\varepsilon, 2c \cdot R, 0)$  étant le rapport des volumes de 2 boules euclidiennes de rayon  $2c \cdot R$  et  $\varepsilon$ , il est égal à  $\left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)^n \cdot R^n$ . Donc la croissance du  $\pi_1$  est polynômiale d'ordre  $n$ . Q.E.D.

Par le théorème de Hurewicz, ce théorème implique que, dans ce cas,

$b_1(M) \leq n$ . En effet soient  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$  tels que leurs images dans  $H_1(M, R)$  engendrent  $H_1(M, R)$ . La croissance du sous groupe distingué engendré est supérieure à celle de  $Z^p$  (donc à  $R^p$ ), mais inférieure à celle du  $\pi_1$  (donc à  $R^n$ ). D'où  $p \leq n$ .

③ Majoration de  $b_1(M)$ , version Gromov (cf [GR1] p.72 à 75)

**Théorème:** Pour tout  $K$  et tout  $D$  ( $D > 0$ ), il existe  $C(K, D)$  telle que toute variété  $(M, g)$  de  $\mathcal{M}_g(K, D)$  vérifie

$$b_1(M) \leq C(K, D)$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

la première étape (non triviale) consiste à fixer un point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{M}$  et à montrer qu'il existe un système  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$  qui engendre un sous-groupe distingué d'indice fini dans  $\pi_1(X)$  et tel que  $d(\tilde{x}, \gamma_1(\tilde{x})) \leq 2D + \varepsilon$   
 $d(\gamma_i(\tilde{x}), \gamma_j(\tilde{x})) \geq \varepsilon$ .

Par le théorème d'Hurewicz, les images de  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$  dans  $H_1(M, \mathbb{R})$  engendrent  $H_1(M, \mathbb{R})$ , i.e.  $b_1(M) \leq p$ . Les boules  $B(\gamma_i(x), \frac{\varepsilon}{2})$  sont disjointes et sont contenues dans la boule  $B(\tilde{x}, 2D + \frac{3}{2}\varepsilon)$ . D'où

$p \leq N(\frac{\varepsilon}{2}, 2D + \frac{3}{2}\varepsilon, \tilde{M}) \leq \bar{N}(\frac{D}{2}, 7D, K)$  par (Bishop). Donc  $b_1(M)$  est borné par une fonction ne dépendant que de  $K$  et de  $D$ .

### III La Méthode Analytique

#### 1 Définition analytique de la courbure de Ricci

Soit  $\alpha$  une 1-forme et  $\alpha^\#$  le champ de vecteur dual (pour la dualité associée au produit scalaire). Une définition de  $r$  équivalente à la précédente est donnée par

$$r(\alpha^\#, X) = \sum_{i=1}^n D_{X_i} D_X \alpha(X_i) - D_X D_{X_i} \alpha(X_i)$$

où  $\{X_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est un repère orthonormé.

#### 2 Pourquoi le Laplacien intervient-il dans le calcul d'invariants?

Beaucoup d'invariants topologiques ou géométriques  $S(M)$  se représentent comme la dimension de l'espace  $\mathcal{E}$  des sections  $T$  d'un fibré  $E \rightarrow M$  qui sont solutions d'une équation du type

$$D^*DT + \mathcal{R}(T) = 0$$

où  $D$  est la dérivation covariante

$D^*$  est l'adjoint de  $D$  pour le produit scalaire intégral  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M = \int_M \langle \cdot, \cdot \rangle$

$\mathcal{R}$  est un opérateur linéaire symétrique de la fibre  $E_m$  dans elle même dont les coefficients se calculent à l'aide de la courbure.

Exemple: Notons  $\Delta_H = \delta d + d\delta$  le Laplacien de Hodge de Rham sur les formes différentielles. On a

$$\text{(Hodge-de Rham)} \quad b_p = \dim \{ \alpha : \Delta_H \alpha = 0 \}$$

Or  $\Delta \alpha = D^* D \alpha + r(\alpha^{\#}, .)$  (d'après la définition analytique de  $r$ ) lorsque  $\alpha$  est une 1-forme. Par conséquent (cf. [E-G-M] p. 131-32 )

$$b_1(M) = \{ \alpha : D^* D \alpha + r(\alpha^{\#}, .) = 0 \}.$$

De même (cf. [G-M] p. 262 ) on a

$$b_p(M) = \{ \alpha : D^* D \alpha + \mathcal{R}_p(\alpha, .) = 0 \}$$

où  $\mathcal{R}$  se calcule à l'aide de la courbure sectionnelle.

Pour tout  $T \in \mathcal{E}$ , on a donc

$$\langle D^* D T, T \rangle \leq -\mathcal{R}_{\min} |T|^2$$

où  $\mathcal{R}_{\min}$  est la plus petite valeur propre de  $\mathcal{R}$ .

En intégrant, on obtient immédiatement

$$\int |DT|^2 = \langle\langle D^* D T, T \rangle\rangle \leq -\mathcal{R}_{\min} \int |T|^2$$

Si  $\mathcal{R}_{\min} > 0$ , on a donc  $\mathcal{S}(M) = 0$  (en particulier  $b_1(M) = 0$  si la courbure de Ricci est strictement positive).

Si  $\mathcal{R}_{\min} = 0$  on a  $\mathcal{S}(M) \leq \dim(\text{fibre de } E)$ , car alors  $DT = 0$  et l'appli-

$$\text{cation } \begin{cases} \mathcal{E} \longrightarrow E_m \\ T \longmapsto T(m) \end{cases}$$

est injective, d'où  $\dim \mathcal{E} \leq \dim(E_m)$ .

En particulier, si  $r_{\min} \geq 0$ , on a  $b_1 \leq n = b_1(T^n)$  car la dimension de la fibre du fibré  $T^*M \rightarrow M$  est égale à  $n$ .

But de l'exposé : Trouver une constante universelle  $C(\mathcal{R}_{\min}, K, D)$  telle que, pour toute v.r.  $M$  de  $\mathcal{H}_{K,D}$ , on ait  $\mathcal{S}(M) \leq C(\mathcal{R}_{\min}, K, D)$ . Ceci sera donné par le théorème suivant

③ Enoncé du théorème et applications (cf. [GA1], [GA2] et [GA3])

Nous allons trouver deux fonctions  $\Gamma$  et  $\mathcal{J}$ , positives et croissantes, de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant

.  $\Gamma$  continue et  $\Gamma(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow -\infty$

$$f(x) = \begin{cases} = 0 & \text{si } x < 0 \\ = 1 & \text{si } x = 0 \\ \leq C(n) \cdot x^{n/2} & \text{quand } x \geq 1 \end{cases}, \quad f(x) \text{ continue sur } [0, +\infty[$$

Ces deux fonctions sont explicitites: plus précisément nous verrons par la suite que  $f(x) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + \frac{\beta^i}{\sqrt{2^{\beta^i}-1}} \sqrt{x})^{2/\beta^i}$  pour  $x \geq 0$ , où  $\begin{cases} \beta = n/(n-2) & \text{si } n \geq 3 \\ \beta = 2 & \text{si } n=2 \end{cases}$

Une expression de  $\Gamma$  est donné dans [GA2], elle est améliorée dans [GA3].

Voir aussi plus loin, page 17. Avec ces deux fonctions, on a le

Théorème : Soient  $K, D, \lambda$  des nombres réels donnés ( $D > 0$ ). Soit  $M \in \mathcal{H}_{K,D}$  et soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel muni d'une métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et d'une connexion  $D$  compatible avec la métrique. Notons  $\ell$  la dimension de la fibre. Soit  $\mathcal{E}$  un sous espace vectoriel de l'espace des sections  $C^\infty$  du fibré. Si  $\langle D^*DT, T \rangle \leq \lambda |T|^2$  pour tout  $T \in \mathcal{E}$ , alors

$$\dim \mathcal{E} \leq \ell \cdot f\left(\frac{\lambda \cdot D^2}{\Gamma^2(KD^2)}\right)$$

Corollaire: Si l'invariant  $S(M)$  s'écrit  $S(M) = \dim \mathcal{E}$

où  $\mathcal{E} = \{T / D^*DT + \mathcal{R}_b(T) = 0\}$ , alors

$$S(M) \leq \ell \cdot f\left(\frac{-\mathcal{R}_{\min} D^2}{\Gamma^2(KD^2)}\right).$$

Exemple 1 :  $b_1(M) \leq n \cdot f\left(\frac{-KD^2(n-1)}{\Gamma^2(K \cdot D^2)}\right)$  pour toute v.r. (M,g) dans  $\mathcal{H}_{K,D}$ .

Le fibré est ici  $T^*M \rightarrow M$ . Ses sections sont les 1-formes différentiables. La dimension de la fibre est  $n$ . Le s.e.v.  $\mathcal{E}$  est l'espace des 1 formes harmoniques  $\alpha$  qui vérifient (voir ci-dessus)  $D^*D\alpha + r(\alpha^\#, \cdot) = 0$ . Par conséquent, on a  $-\mathcal{R}_{\min} = -r_{\min} \leq -(n-1)K$ , on applique alors le corollaire ci-dessus.

Remarquons que cet estimé est optimal puisque

Remarque Il existe  $\mathcal{E}(n) > 0$  tel que

si  $K \cdot D^2 > -\mathcal{E}(n)$ , alors pour toute  $(M, g) \in \mathcal{H}_{K,D}$

on a  $b_1(M) \leq n = b_1(T^n)$ .

Ceci vient du fait que  $f(x) \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow 0$ .

Exemple 2 : Pour estimer  $b_p(M)$ , on considère le fibré

$$\wedge^p(T^*M) \rightarrow M \text{ dont la fibre est de dimension } \binom{n}{p}.$$

L'espace  $\mathcal{E}$  est l'espace des  $p$ -formes harmoniques  $\alpha$  qui vérifient donc  $D^*D\alpha + \mathcal{R}_b(\alpha) = 0$ .

D'après [G-M]  $R_{\min} \geq p(n-p) \rho_{\min}$ , où  $\rho_{\min}$  est la plus petite valeur propre de l'opérateur de courbure de  $(M, g)$ . D'après [KA], on a

$$\rho_{\min} \geq (\sigma_{\sup} + \sigma_{\inf}) - \frac{2}{3} [n(n-1)(n + \frac{1}{4})]^{1/2} (\sigma_{\sup} - \sigma_{\inf})$$

où  $\sigma_{\sup}$  et  $\sigma_{\inf}$  sont les valeurs maxima et minima de la courbure sectionnelle.

Le théorème donne

$$b_p(M) \leq \binom{n}{p} \cdot \zeta \left[ \frac{-\rho_{\min} D^2 \cdot p(n-p)}{\Gamma^2(K \cdot D^2)} \right],$$

ce qui donne une majoration de  $b_p$  à l'aide de  $D$ ,  $\sigma_{\sup}$  et  $\sigma_{\min}$ . Reste à savoir si on peut remplacer la donnée de  $\sigma_{\min}$  et  $\sigma_{\sup}$  par celle de  $r_{\min}$  seulement. Remarquons, toujours parce que  $\zeta(x) \rightarrow 1$  quand  $x \rightarrow 0_+$  et que  $b_p(M) < \binom{n}{p} + 1 \implies b_p(M) \leq \binom{n}{p}$ , que

Proposition: Si la courbure sectionnelle  $\sigma$  vérifie  $\mathcal{E}(n) \geq \sigma \cdot D^2 \geq -\mathcal{E}(n)$  pour  $\mathcal{E}(n)$  assez petit, alors  $b_p(M) \leq \binom{n}{p} = b_p(T^n)$ .

Exemple 3: Notons  $0 = \lambda_0(M) < \lambda_1(M) \leq \lambda_2(M) \leq \dots \leq \lambda_1(M) \leq \dots$

le spectre de  $(M, g)$ . L'invariant considéré est, pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$N_\lambda(M, g) = \# \{ \lambda_i / \lambda_1 < \lambda \}$$

Le fibré considéré est  $M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  (trivial). Les sections sont les fonctions  $M \rightarrow \mathbb{R}$ , la dimension de la fibre est 1. L'espace  $\mathcal{E}$  est l'espace engendré par les fonctions propres  $f_i$  telles que  $\Delta f_i = \lambda_i \cdot f_i$  et  $\lambda_i \leq \lambda$ . Dans ce cas,  $D^*D = \Delta$  et  $D^*Df_i \leq \lambda f_i$  (attention, il y a une difficulté car ceci n'est plus vrai pour les combinaisons linéaires des  $f_i$ ). On obtient, par le théorème fondamental p. 11,

$$N_\lambda(M, g) \leq \zeta \left[ \frac{\lambda D^2}{\Gamma^2(KD^2)} \right] \leq C(K \cdot D^2) \lambda^{n/2} \cdot D^n$$

Remarquons que cet estimé est bon car on sait par ailleurs que

$N_\lambda(M, g) \sim C(n) \lambda^{n/2} \cdot v$  quand  $\lambda \rightarrow +\infty$  (c'est donc la bonne puissance de  $\lambda$ ).

Par ailleurs, il existe  $\mathcal{E}(n)$  tel que, si

$$\lambda < \frac{\Gamma^2(KD^2)}{D^2} \mathcal{E}(n), \quad \text{alors } N_\lambda(M, g) = 1,$$

ce qui correspond bien au fait que la 1<sup>ère</sup> valeur propre  $\lambda_0 = 0$  est de multiplicité 1 et qu'on peut borner  $\lambda_1$  inférieurement par  $\mathcal{E}(n) \cdot \frac{\Gamma^2(K \cdot D^2)}{D^2}$

Remarquons que  $N(\lambda_1) = 1$  et que, par conséquent,

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{C(K.D)^{2/n}} \cdot \frac{1^{2/n}}{D^2}$$

#### 4 Technique de démonstration du théorème fondamental ([GA1], [GA2] et [GA3])

a) 1<sup>o</sup> Etape :  $S_1 \|T\|_{L^\infty} / \|T\|_{L^2}$  est borné pour tout  $T \in \mathcal{E}$ , alors on sait borner  $\dim(\mathcal{E})$ .

Lemme: Soit  $E \rightarrow M$  un fibré muni d'une métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$  sur chaque fibre  $E_m$ . Soit  $\mathcal{E}$  un sous espace vectoriel de dimension finie de l'espace des sections  $C^\infty$  du fibré. Alors il existe un  $T \in \mathcal{E}$  tel que

$$\dim \mathcal{E} \cdot \|T\|_{L^2}^2 \leq v \cdot \|T\|_{L^\infty}^2 \cdot \dim(\text{fibre}) .$$

où  $v$  est le volume de  $M$ .

Preuve: Posons  $N = \dim \mathcal{E}$  et notons  $\{T_1, \dots, T_N\}$  une base orthonormée de pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle = \int_M \langle \cdot, \cdot \rangle_m \cdot dm$ . Par le théorème de la moyenne, il existe un point  $m$  de  $M$  tel que

$$N = \int_M \sum_{i=1}^N \|T_i(x)\|^2 \leq v \cdot \sum_{i=1}^N \|T_i(m)\|^2 .$$

L'application  $P_m : \begin{cases} \mathcal{E} & \longrightarrow E_m \\ T & \longrightarrow T(m) \end{cases}$  est de rang  $\ell$  inférieur ou égal à la

dimension de la fibre. Considérons une base orthonormée  $\{S_1, \dots, S_\ell\}$  de  $\text{Ker}(P_m)^\perp$  (sous espace de  $\mathcal{E}$  orthogonal à  $\text{Ker}(P_m)$ ) et une base orthonormée  $\{S_{\ell+1}, \dots, S_N\}$  de  $\text{Ker} P$ . Comme on passe de  $\{T_1, \dots, T_N\}$  à  $\{S_1, \dots, S_N\}$  par une matrice orthogonale et comme  $S_i(m) = 0$  pour  $i > \ell$ , on a

$$\sum_{i=1}^N \|T_i(m)\|^2 = \sum_{i=1}^N \|S_i(m)\|^2 = \sum_{i=1}^{\ell} \|S_i(m)\|^2 \leq \ell \cdot \sup_1 \|S_i\|_{L^\infty}^2$$

Comme  $\|S_i\|_{L^2}^2 = 1$ , on a donc montré l'existence d'un  $i$  tel que

$$\dim \mathcal{E} \cdot \|S_i\|_{L^2}^2 \leq \ell \cdot v \cdot \|S_i\|_{L^\infty}^2$$

Q.E.D.

b) 2<sup>o</sup> Etape: Comment borner  $\|T\|_{L^\infty} / \|T\|_{L^2}$ .

Un calcul relativement simple donne, si on désigne par  $|T|$  la fonction  $x \longrightarrow \|T(x)\| = \langle T(x), T(x) \rangle^{1/2}$ ,

$$(1) \quad |T| \cdot \Delta(|T|) \leq \langle D^*DT, T \rangle \leq \lambda |T|^2 .$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta(|T|^2) &= -\frac{1}{2} \sum_i D_i D_i (\langle T, T \rangle) = -\sum_i \langle D_i T, D_i T \rangle - \sum_i \langle D_i D_i T, T \rangle \\ &= -|DT|^2 + \langle D^*DT, T \rangle . \end{aligned}$$

Un calcul identique donne

$$\frac{1}{2} \Delta(|T|^2) = -|d(|T|)|^2 + |T| \cdot \Delta(|T|) .$$

En posant  $T = |T| \cdot \frac{T}{|T|}$ , on obtient  $|DT|^2 \geq |d(|T|)|^2$

ce qui donne (1). La démonstration du théorème sera donc achevée si on démontre le théorème suivant (le fait qu'ici la fonction  $|T|$  ne soit pas différentiable partout ne pose pas de problème).

Théorème: Soit  $f$  une fonction positive ou nulle vérifiant  $\Delta f \leq \lambda f$ , alors

$$v. \|f\|_{L^\infty}^2 \leq \left( \frac{\lambda D^2}{\Gamma^2(KD^2)} \right) \|f\|_{L^2}^2$$

Preuve: Notons  $\|f\|_{H_1^2} = \|f\|_{L^2} + \|df\|_{L^2}$ . Les analystes savent

démontrer que la norme  $H_1^2$  est plus fine que la norme  $L^p$  si et seulement si  $p \leq \frac{2n}{n-2}$  ( $p = +\infty$  si  $n = 2$ ). Ceci assure l'existence de deux nombre

$A, B < +\infty$  tels qu'on ait l'inégalité (dite de Sobolev)

$$(S) \quad \|f\|_{L^{2\beta}} \leq A \cdot \|df\|_{L^2} + B \cdot \|f\|_{L^2} ,$$

où  $\beta = \frac{n}{n-2}$  si  $n > 2$  et  $\beta = 4$  si  $n = 2$ .

L'hypothèse  $\Delta f \leq \lambda f$  permet d'écrire (calcul)

$$\int_M |d(f^p)|^2 = \int_M f^p \cdot \Delta(f^p) = \frac{p^2}{2p-1} \int_M f^{2p-1} \cdot \Delta f \leq \frac{\lambda p^2}{2p-1} \|f\|_{L^{2p}}^{2p}$$

L'inégalité (S), appliqué à  $f^p$ , donne donc

$$\|f\|_{L^{2\beta p}} \leq \left( B + A \cdot \frac{p\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\beta^p-1}} \right)^{1/p} \|f\|_{L^{2p}} .$$

Par itérations successives on a

$$\|f\|_{L^{2\beta^{q+1}}}^2 \leq \prod_{i=0}^q \left( B + A \cdot \frac{\beta^i \sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\beta^i-1}} \right)^{2/\beta^i} \|f\|_{L^2}^2 .$$

ce qui donne  $\|f\|_{L^\infty}^2 \leq \int \cdot v^{-1} \cdot \|f\|_{L^2}^2$ , où

$$v^{-1} \cdot \int = \prod_{i=0}^{\infty} \left( B + A \cdot \frac{\beta^i \sqrt{\lambda}}{2\beta^i - 1} \right)^{2/\beta^i} \quad \text{Q.E.D.}$$

c) 3<sup>e</sup> Etape: Etablissement de l'inégalité de Sobolev (S)

Les analystes savent seulement démontrer qu'il existe des constantes  $A(M, g)$  et  $B(M, g)$  finies, dépendant de  $M, g$  et du système de cartes choisi telles que (S) soit vraie. En effet leur technique est locale et consiste, via une partition de l'unité, à utiliser les inégalités de Sobolev dans  $R^n$ . Ceci est très insuffisant pour le but que nous nous proposons puisque cela reviendrait à borner un invariant  $S(M)$  par une constante non explicite, dont la seule chose que l'on connaisse est qu'elle dépend de  $M, g$  et de la partition de l'unité! Pour trouver des estimées explicites de  $A$  et  $B$  nous devons donc utiliser des méthodes géométriques globales.

Théorème ([GA2] et [GA3]) L'inégalité (S) est vérifiée lorsque

$$\begin{array}{l} B = 1 \cdot v^{-1/n} \\ A = \frac{D}{\Gamma(K \cdot D^2)} \cdot v^{-1/n} \end{array}$$

Un contre exemple (voir [GA1], [GA2] et [GA3]) montre que ces estimées sont les meilleures qu'on puisse espérer en ce qui concerne l'information  $(K, D)$  nécessaire à leur calcul (i.e.  $A$  doit tendre vers l'infini si  $K \rightarrow -\infty$  ou si  $D \rightarrow +\infty$ ). Le volume  $n$  intervient que pour rendre les 2 membres de l'inégalité homogènes. Remarquons que  $B$  est la meilleure valeur que nous puissions espérer puisque, pour  $f \equiv 1$ , l'inégalité (S) devient

$$\|1\|_{L^{2\beta}} \leq B \|1\|_{L^2}$$

comme  $\|1\|_{L^{2\beta}} = v^{1/2\beta}$  et  $\|1\|_{L^2} = v^{1/2}$ , il vient

$$B \geq v^{1/2\beta - 1/2} = v^{-1/n} \quad \text{On ne peut donc espérer mieux que } B = v^{-1}$$

La constante  $A$  s'estime à l'aide de la constante isopérique  $C$  définie page 7. Le théorème de Bishop (version  $\mathbb{E}-\square$ ) intervient dans l'estimation de  $C$ ,



ce qui est la partie la plus difficile de la démonstration (nous renvoyons à [GA2] et [GA3]). Plus précisément, si

$$A^* = 2[n(n-2)]^{-1/2} \text{Vol}(S^n)^{-1/n},$$

$$C^* = \frac{\text{Vol } S^{n-1}}{(\text{Vol } B^n)^{1-1/n}}$$

on démontre que  $A^*$  et  $C^*$  sont les valeurs de  $A$  et  $C$  lorsque la variété est une boule euclidienne. Alors, si  $h$  et  $C$  sont les constantes isopérimétriques définies page 7., on a

Proposition:  $A = \left(\frac{C^*}{C} \cdot A^* \cdot V^{1/n} + \frac{2}{h}\right)V^{-1/n}$

Idée de preuve: Soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\begin{cases} \text{Vol}\{f > a\} \leq V/2 \\ \text{Vol}\{f < a\} \leq V/2 \end{cases}$

En changeant au besoin  $f$  en  $-f$ , on suppose  $a \geq 0$ .

il est clair que, si  $\int f = 0$ , alors

$$V^{1/2} \|f\|_{L^2} \geq \int_M |f| = 2 \int_{\{f > 0\}} f > 2 \int_{\{f > a\}} f > a \cdot V$$

D'où

$$\|f\|_{L^{2\beta}} \leq \|f - a\|_{L^{2\beta}} + a \cdot V^{1/2\beta} \leq \|f - a\|_{L^{2\beta}} + V^{-1/n} \cdot \|f\|_{L^2}$$

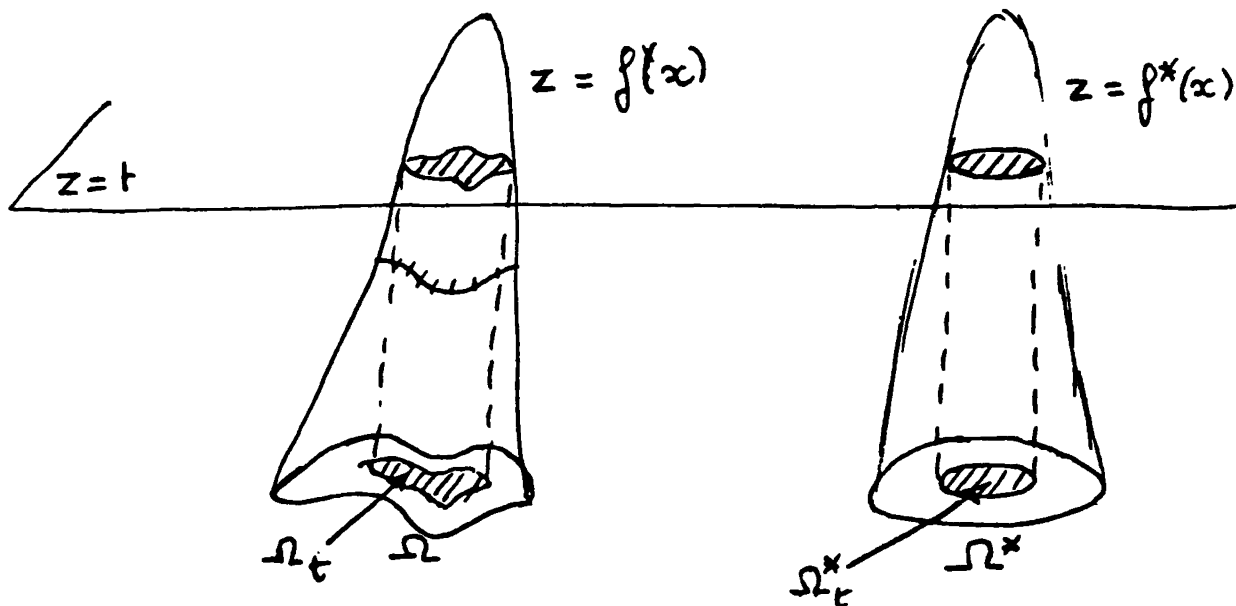
L'inégalité de Cheeger ([BGM] p 196) donne  $\|f\|_{L^2} \leq \frac{2}{h} \|df\|_{L^2}$ .

Pour établir (S), il suffit donc de montrer que

$$\|f - a\|_{L^{2\beta}} \leq \frac{A^* C^*}{C} \|df\|_{L^2}.$$

Notons  $\Omega = \{x/f(x) > a\}$ , il suffit donc de montrer que, pour toute fonction  $f$  positive telle que  $f = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on a  $\|f\|_{L^{2\beta}} \leq \frac{A^* C^*}{C} \|df\|_{L^2}$ .

Lorsque  $\Omega$  est un domaine à bord de  $\mathbb{R}^n$ , notons  $\Omega^*$  la boule de centre l'origine et de même volume. Pour tout  $t$ , notons  $\Omega_t = \{x/f(x) > t\}$  et  $\Omega_t^*$  la boule centrée à l'origine de même volume que  $\Omega_t$ . On définit la fonction  $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$  en posant  $f^*(x) = t$  pour tout point  $x$  de  $\partial\Omega_t^*$  (voir dessin).



L'inégalité isopérimétrique classique donne, à partir de

$$\text{Vol}(\Omega_t) = \text{Vol}(\Omega_t^*), \quad \text{Vol}_{n-1}(\partial\Omega_t) \geq \text{Vol}_{n-1}(\partial\Omega_t^*)$$

ce qui implique (changement de variables dans l'intégrale)

$$\int_{\Omega} r^p = \int_{\Omega^*} r^{*p} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |\nabla r|^2 \geq \int_{\Omega^*} |\nabla r^*|^2$$

On montre ensuite, en passant en coordonnées polaires que

$$\int_{\Omega^*} r^{*2\beta} \leq \Lambda^* \int_{\Omega^*} |\nabla r^*|^2$$

ce qui donne

$$\int_{\Omega} r^{2\beta} \leq \Lambda^* \int_{\Omega} |\nabla r|^2$$

Revenons dans le cas général où  $\Omega$  est un domaine de  $M$  tel que

$\text{Vol} \Omega \leq 1/2.V$ , alors on peut faire la même construction. Dans ce cas,

$\text{Vol} \Omega_t = \text{Vol} \Omega_t^*$  impliquera  $\text{Vol} \partial\Omega_t \geq \frac{c}{c^*} \text{Vol} \partial\Omega_t^*$ , ce qui donne

$$\int_{\Omega} r^{2\beta} = \int_{\Omega^*} r^{*2\beta} \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |\nabla r|^2 \geq \left(\frac{c}{c^*}\right)^2 \int_{\Omega^*} |\nabla r^*|^2$$

D'où

$$\int_{\Omega} r^{2\beta} \leq \frac{c^*}{c} \Lambda^* \int_{\Omega} |\nabla r|^2$$

Q.E.D.

d) Expression explicite de  $\Gamma$ .

D'après ce qui précède on a (cf. p. 15 et 16)

$$\Gamma = \left( \frac{c^*}{c} \Lambda^* \frac{V^{1/n}}{D} + \frac{2}{nD} \right)^{-1}$$

comme  $C.D.V^{-1/n}$  et  $h.D$  admette des bornes inférieures ne dépendant que de  $K.D^2$  (voir leur formulation explicite en [GA2] ou [GA3],  $\Gamma$  est bien du type recherché.

### 5 Problèmes ouverts par cette méthode :

a) Utiliser cette méthode pour estimer d'autres invariants

Conjecture : tout invariant peut être borné à l'aide de  $K$  et de  $D$ .

b) Adapter cette méthode au cas des fibrés hermitiens (dans ce cas l'estimation des valeurs propres de l'opérateur  $T \rightarrow D^*DT$  semble avoir un intérêt en elle-même), voir aussi [H-S-U].

c) Essayer d'améliorer les estimations connues de  $R_{\min}$ . En particulier est-il possible d'estimer le  $p$ -ième nombre de Betti uniquement en fonction de  $K$  et de  $D$  pour toute v.r. de  $\mathcal{H}_{K,D}$  (problème important).

d) Dans le théorème fondamental (pages 17-18) peut-on remplacer l'hypothèse ponctuelle  $\langle D^*DT, T \rangle \leq \lambda |T|^2$  par une condition intégrale  $\ll D^*DT, T \gg \leq \lambda \int |T|^2$ , i.e.  $\int |DT|^2 \leq \lambda \int |T|^2$ . Ceci permettrait d'estimer directement les valeurs propres du spectre de  $D^*D$ . De plus, ceci permettrait de faire le même raisonnement lorsque  $M$  est non compacte et de se poser des questions telles que: sous quelles hypothèses le spectre de  $D^*D$  est-il discret? peut-on estimer ses valeurs propres (voir [H-S-U] pour des références pour ce problème).

e) Plus précisément, estimer le nombre  $\bar{N}(\lambda)$  de valeurs propres plus petites que  $\lambda$  de l'opérateur  $D^*D$  (défini sur les sections de  $E \rightarrow M$ ) à l'aide du nombre  $N(\lambda)$  de valeurs propres du laplacien  $\Delta$  (sur les fonctions). Notons  $\bar{\lambda}_i$  les valeurs propres de  $D^*D$  et  $\lambda_i$  celles de  $\Delta$ . On sait déjà, si  $\ell$  désigne la dimension de la fibre de  $E \rightarrow M$ , (voir [H-S-U]) que

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\bar{\lambda}_i t} \leq \ell \cdot \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t}$$

Exemple: Soit  $E \rightarrow T^n$  un fibré trivial sur  $T^n$  muni d'une métrique plate (exemple: n'importe quel fibré  $\otimes^p(T^*(T^n))$  ou  $\wedge^p(T^*(T^n))$ ).

Soient  $T_1, \dots, T_\ell$  des sections parallèles et orthogonales. Alors

$$D^*D(f.T_i) = \Delta f.T_i.$$

En particulier, si  $f$  est une fonction propre de  $\Delta$  correspondant à la valeur propre  $\lambda_1$  (i.e.  $\Delta f = \lambda_1 \cdot f$ ), il lui correspond  $\ell$  sections propres  $f \cdot T_1, \dots, f \cdot T_\ell$  correspondant à la même valeur propre

d'où 
$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_1 t} = \ell \cdot \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_1 t}$$

L'inégalité (2) est donc optimale. Notons aussi que

$$\bar{N}(\lambda) = \ell \cdot N(\lambda)$$

d'où la conjecture

Conjecture: Pour tout fibré vectoriel riemannien ou hermitien sur une variété riemannienne, on a

$$\bar{N}(\lambda) \leq \ell \cdot N(\lambda)$$


---

## R E F E R E N C E S

- [GR 1] M. GROMOV, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, Textes Mathématiques, Cedric/Nathan (1981).
- [GR 2] M. GROMOV, Curvature and Betti numbers, Commentari Math. Helv. (1981).
- [GA 1] S. GALLOT, Estimées de Sobolev quantitatives sur les variétés riemanniennes, C.R. Acad. Sc. Paris, t.292, série I (1981), p.375.
- [GA 2] S. GALLOT, A Sobolev inequality and some geometric applications, Actes du séminaire Franco-Japonais de Kyoto (preprint, 1981).
- [GA 3] S. GALLOT, Inégalités isopérimétriques sur les variétés riemanniennes compactes sans bord, preprint.
- [B-C] R.L. BISHOP, R.J. CRITTENDEN, Geometry of Manifolds, Academic Press (1964).
- [H-K] E. HEINTZE, H.KARCHER, A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds, Ann.Sc.Éc.Norm.Sup. Paris 11 (1978), p.451-470.
- [GA 4] S. GALLOT, Minorations sur le  $\lambda_1$ , Séminaire Bourbaki 1980/81, exposé N° 569, Lecture Notes in Maths, Springer.
- [B-G-M] M. BERGER, P.GAUDUCHON, E. MAZET, le Spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Maths 194, Springer.
- [H-S-U] H. HESS, R. SCHRADER, D.A. UHLENBROCK, Kato's inequality and the spectral distribution of Laplacians on compact riemannian manifolds, J. Diff. Geometry, 15 (1980), p. 27-37.
- [G-M] S. GALLOT, D. MEYER, Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne, J. Math. pures et appliquées 54 (1975), p. 259-284.
- [KA] H. KARCHER, Pinching implies strong pinching, Comm. Math. Helv., 46 (1971), p.124.