

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

ANDRÉ BLANC-LAPIERRE

**Sur certaines fonctions aléatoires stationnaires. Application à l'étude des fluctuations dues à la structure électronique de l'électricité**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1945

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1945\\_\\_276\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1945__276__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

SÉRIE A, N° 2115

N° D'ORDRE :

2984

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**ANDRÉ BLANC-LAPIERRE**

Ancien Élève de l'École Normale Supérieure  
Ingénieur au Centre National d'Études des Télécommunications

---

**1<sup>re</sup> THÈSE.** — SUR CERTAINES FONCTIONS ALÉATOIRES STATION-  
NAIRES. APPLICATION À L'ÉTUDE DES FLUCTUA-  
TIONS DUES À LA STRUCTURE ÉLECTRONIQUE  
DE L'ÉLECTRICITÉ.

**2<sup>e</sup> THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

**Soutenues le 5 Novembre 1945 devant la Commission d'examen.**

MM. M. FRÉCHET... *Président.*

G. DARMOIS... }  
G. VALIRON... } *Examinateurs.*

---

**MASSON ET C<sup>IE</sup>, ÉDITEURS**

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS, VI<sup>e</sup>

1945

---

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... M. P. MONTEL.

## PROFESSEURS

<p>P. MONTEL..... † Théorie des fonctions.  L. BLARINGHEM .. † Botanique.  G. JULIA..... † Analyse supérieure et Algèbre supérieure.  C. MAUGUIN..... † Minéralogie.  A. MICHEL-LÉVY.. † Petrographie.  A. DENJOY..... † Géométrie supérieure.  L. LUTAUD..... † Géographie physique et Géologie dynamique.  E. DARMOIS..... † Enseignement de Physique.  A. DEBIERNE.... † Electronique et Radio-activité.  M. JAVILLIER.... † Chimie biologique.  Robert LÉVY .... † Physiologie comparée.  Henri VILLAT.... † Mécanique des fluides et applications.  Ch. JACOB..... † Géologie.  P. PASCAL..... † Chimie générale.  M. FRÉCHET..... † Calcul des probabilités et Physique mathématique.  E. ESCLANGON... † Astronomie.  Mme RAMART-  LUCAS. † Chimie organique.  H. BÉGHIN..... † Mécanique physique et expérimentale.  FOCH..... † Mécanique expérimentale des fluides.  PAUTHENIER.... † Electrotechnique générale.  De BROGLIE..... † Theories physiques.  CHRETIEN..... † Optique appliquée.  JOB..... † Chimie générale.  PRENANT..... † Anatomie et Histologie comparées.  VILLEY..... † Mécanique physique et expérimentale.  COMBES..... † Physiologie végétale.  GARNIER..... † Application de l'analyse à la géométrie.  PÉRES..... † Mécanique rationnelle.  HACKSPILL..... † Chimie minérale.  LAUGIER..... † Physiologie générale.  TOUSSAINT..... † Technique aéronautique.  M. CURIE..... † Physique (P. C. B.).  G. RIBAUD..... † Hautes températures.  CHAZY..... † Mécanique analytique.  GAULT..... † Chimie appliquée  CROZE..... † Physique théorique et Physique celeste.  DUPONT..... † Theories chimiques.</p>	<p>LANQUINE..... † Géologie structurale et géologie appliquée.  VALIRON..... † Calcul différentiel et intégral.  BARRABÉ..... † Géologie structurale et géologie appliquée.  F. PERRIN..... † Theories physiques.  VAVON..... † Analyse et mesures chimiques.  G. DARMOIS..... † Mathématiques générales.  CHATTON..... † Biologie maritime.  AUBEL..... † Chimie biologique.  Jacques BOURCART. † Géographie physique et Géologie dynamique.  Mme JOLIO-CURIE. † Physique générale et Radioactivité.  PLANTEFOL..... † Botanique.  CABANNES..... † Recherches physiques.  GRASSE..... † Zoologie. Évolution des êtres organisés.  PRÉVOST..... † Chimie organique.  BOULIGAND..... † Mathématiques.  CHAUDRON..... † Chimie.  WYART..... † Minéralogie.  TEISSIER..... † Zoologie.  MANGENOT..... † Biologie végétale (P.C.B.).  P. AUGER..... † Physique.  MONNIER..... † Physiologie générale.  PIVTEAU..... † Géologie.  ROCARD..... † Physique.  H. CARTAN..... † Calcul différentiel.  SCHAEFFER..... † Physiologie des fonctions.  LAFFITE..... † Chimie (P. C. B.).  LERAY..... † Mécanique théorique des fluides.  FAVART..... † Calcul des Probabilités et Physique Mathématique.  COULOMB..... † Physique du Globe.  Mlle COUSIN..... † Biologie animale (P. C. B.).  André CHRÉTIEN.. † Analyse et mesures chimiques.  P. DRACH..... † Evolution des êtres organisés.  CHATELET..... † Arithmétique et théorie des nombres.  EPHRUSI..... † Génétique.  WURMSER..... † Biologie physico-chimique.  KASTLER..... † Physique.</p>
--	---

Secrétaire..... CH. MONIER.

**A MA FEMME**

**A MES PARENTS**

## TABLE DES MATIÈRES

---

	Pages
<b>INTRODUCTION</b> . . . . .	1
I. — <i>Les hypothèses</i> . . . . .	2
II. — <i>Buts de l'Etude</i> . . . . .	5
<b>PREMIÈRE PARTIE. — PROBLÈME FONDAMENTAL. ÉTUDE DE LA TRANSMISSION DE L'EFFET DE GRENAILLE PUR PAR UN AMPLIFICATEUR LINÉAIRE</b> . . . . .	10
I. — <i>Etude de <math>x_{\Delta_0}(t)</math></i> . . . . .	10
II. — <i>Introduction d'une fonction aléatoire stationnaire</i> . . . . .	15
<b>DEUXIÈME PARTIE. — MOYENNES TEMPORELLES</b> . . . . .	20
I. — <i>Intérêt physique</i> . . . . .	20
II. — <i>Limite de <math>\frac{1}{T} \int_0^T y[x(t)]dt</math> pour <math>T = \infty</math></i> . . . . .	20
<b>TROISIÈME PARTIE. — ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA DENSITÉ. FORMULES ASYMPTOTIQUES. FLUCTUATIONS DANS LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES</b> . . . . .	47
I. — <i>Généralités</i> . . . . .	47
II. — <i>Etude de la forme limite</i> . . . . .	49
III. — <i>Calcul rigoureux des moyennes</i> . . . . .	53
IV. — <i>Application des résultats à l'étude des fluctuations dans les systèmes non linéaires</i> . . . . .	54
<b>QUATRIÈME PARTIE. — GÉNÉRALISATIONS DIVERSES</b> . . . . .	59
I. — <i>Liaison entre diverses fonctions aléatoires dépendant de la répartition des chocs dans le temps</i> . . . . .	53
II. — <i>Les fonctions aléatoires stationnaires laplaciennes</i> . . . . .	63
III. — <i>La fonction aléatoire <math>x(t)</math> et les processus de Markoff</i> . . . . .	68
IV. — <i>Systèmes fluctuants plus généraux. Application à l'effet de scintillation</i> . . . . .	73
<b>CONCLUSION</b> . . . . .	78

---

**SUR CERTAINES FONCTIONS  
ALÉATOIRES STATIONNAIRES.  
APPLICATION A L'ÉTUDE DES FLUCTUATIONS  
DUES A LA STRUCTURE ÉLECTRONIQUE  
DE L'ÉLECTRICITÉ.**

Par

ANDRÉ BLANC-LAPIERRE.

**INTRODUCTION**

Ce travail a son origine dans des problèmes posés par la physique. Je les expose brièvement.

Alors qu'aucun signal n'est appliqué à l'entrée d'un amplificateur électrique, la tension mesurée à la sortie de ce dernier subit des fluctuations.

Diverses causes en sont responsables : les deux principales sont l'agitation thermique des électrons dans les résistances (effet Johnson) et la structure corpusculaire des courants électroniques (effet de grenaille).

Cette étude est relative à l'effet de grenaille. On dit que cet effet est *pur* si les électrons constituant le courant électronique considéré agissent de façon *désordonnée et indépendamment les uns des autres*. C'est évidemment là un cadre assez restrictif ; l'effet de grenaille pur est rarement observé ; on sait, en particulier, que, dans les tubes, il est souvent perturbé par l'influence de la charge d'espace. Cependant, l'étude de l'effet de grenaille pur présente un grand intérêt : les hypothèses sont assez simples pour permettre une analyse très précise dont les résultats peuvent être facilement généralisés ; en définitive, l'étude de l'effet de grenaille pur conduit à des conclusions dont la plupart sont valables pour toutes les fluctuations d'origine électrique.

Réduit à sa forme la plus simple, le problème de l'effet de grenaille pur se pose de la façon suivante : ce que nous appelons un courant continu, doit être considéré comme une suite d'électrons et l'action de ce courant sur un circuit quelconque résulte de la somme des impulsions

respectivement dues à chacun de ces électrons. Les hypothèses vont porter sur les propriétés de ces suites d'impulsions et sur les propriétés des circuits électriques qui sont soumis à ces impulsions. Naturellement, pour étudier l'effet de grenaille d'un courant  $I$ , nous devons supposer que les circuits, sur lesquels  $I$  agit, n'apportent pas d'autres causes de fluctuations qui s'ajouteraient à cet effet de grenaille. Les inconnues du problème sont les propriétés de la tension fluctuante  $x(t)$  observée à la sortie d'un amplificateur, lorsque  $I$  est appliqué à l'entrée.

### 1° Les hypothèses.

#### a) LA SUITE DES CHOCS ÉLECTRONIQUES.

a) Un choc électronique à l'instant  $t = 0$  doit être considéré de la façon suivante : l'action d'un tel choc est celle d'un courant  $\mathcal{J}(t)$  (où  $t$  représente le temps) qui satisfait aux propriétés suivantes :  $\mathcal{J}(t)$  est partout nul, sauf dans l'intervalle  $-\varepsilon, +\varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est une durée extrêmement brève par rapport aux constantes de temps des appareils utilisés, de sorte que l'action de  $\mathcal{J}(t)$  ne dépend que de l'intégrale :

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(t) dt. \quad (1)$$

b) Si  $I$  est l'intensité à l'échelle macroscopique, le nombre moyen de chocs par seconde vaut  $\rho = \frac{1}{q}$  ;  $\rho$  sera appelée la densité des chocs dans le temps.

*Comment interpréter le mot désordonné ?* Pour définir la répartition dans le temps des chocs électroniques correspondant à une densité  $\rho$ , il faut se donner la suite indéfinie des instants ...  $s_j, s_{j+1}, s_{j+2}$  ... où interviennent les différents électrons ;  $\rho$  étant donné, il y a une infinité de répartitions possibles. Nous dirons que chacune constitue une épreuve  $\mathcal{E}$ . Une épreuve  $\mathcal{E}$  est donc définie si on connaît tous les  $s_j$  correspondants depuis  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ . Sur cet ensemble d'épreuves, nous allons définir une probabilité. On peut interpréter le caractère désordonné de la répartition des  $s_j$  de la façon suivante : considérons un intervalle de temps  $T$ , très grand, et attribuons-lui  $\rho T$  chocs ; pour les répartir sur  $T$ , nous imaginons qu'on jette successivement et indépendamment les  $\rho T$  points, de telle sorte que, pour chacun d'eux, il y ait équiprobabilité de tomber en un point quelconque du segment  $T$ .

Si on veut alors considérer une répartition désordonnée de densité  $\rho$ , s'étendant de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$  il est naturel de lui assigner les propriétés limites obtenues pour  $T \rightarrow \infty$ . On obtient alors les propriétés bien connues de la répartition de Poisson :

a) La probabilité pour qu'un intervalle quelconque  $\Delta t$  contienne  $n$  impulsions est donnée par la relation :

$$P(n, \Delta t) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!} \quad (2) \quad \text{avec } \bar{n} = \rho \Delta t. \quad (3)$$

b) Deux intervalles disjoints sont indépendants au point de vue probabilités.

*Remarque.* — Lorsque nous disons que l'intervalle  $T$  contient  $\rho T$  chocs,  $\rho$  nous apparaît comme une moyenne dans le temps. Au contraire, lorsque nous écrivons  $\bar{n} = \rho \Delta t$ ,  $\bar{n}$  est la valeur moyenne du nombre de chocs peuplant l'intervalle  $\Delta t$ , cette valeur moyenne étant prise sur l'ensemble des épreuves. Par suite,  $\rho$  a plutôt, ici, le sens d'une espérance mathématique. Si on ne veut pas lui faire jouer le rôle de moyenne dans le temps et si on veut lui donner tout de suite sa deuxième signification on peut traduire le mot désordonné par les hypothèses suivantes tout aussi naturelles que les précédentes :

- a)  $\Delta t$  étant un intervalle de temps très petit, la probabilité pour que cet intervalle renferme un choc est proportionnelle à  $\Delta t$ ; on peut l'écrire  $\rho \Delta t$ ;
- b) la probabilité pour que  $\Delta t$  renferme plus d'un choc est un infiniment petit du second ordre en  $\Delta t$ ;
- c) deux intervalles disjoints sont indépendants.

Ces trois hypothèses suffisent à établir la formule de Poisson.

#### b) LES CIRCUITS ÉLECTRIQUES.

1° **AMPLIFICATEURS.** — Un amplificateur transforme un courant (ou une tension d'entrée)  $E(t)$  appelé *signal* en une tension de sortie  $R(t)$ .  $R(t)$  est la *réponse* de l'amplificateur au signal  $E(t)$ . Nous supposons que la correspondance  $E, R$  est *linéaire*. Pour la définir, il suffit de se donner la réponse à certains signaux particulièrement simples, en lesquels on décomposera les signaux plus complexes.

Il est tout indiqué, ici, de se donner la *réponse*  $R_1(t)$  à une *impulsion très brève de valeur*  $q = 1$  reçue à l'instant  $t = 0$ . La réponse à une impulsion de valeur  $q$  reçue à l'instant  $t = s$ , sera  $qR_1(t - s)$ .

On peut aussi se donner la réponse à un signal sinusoïdal  $\sin 2\pi\nu t$ . On montre aisément que la réponse est aussi sinusoïdale et a même fréquence que le signal; on peut mettre la réponse sous la forme  $g(\nu) \sin \{2\pi\nu t + \varphi(\nu)\}$ . Il est toujours possible de prendre  $g(\nu)$  positif. Dans ces conditions,  $g(\nu)$  et  $\varphi(\nu)$  définissent le *gain* et le *déphasage* de l'amplificateur pour la fréquence  $\nu$ .

Les conditions de linéarité imposées permettent de choisir arbitrairement  $R_1(t)$  d'une part, ou  $g(\nu)$  et  $\varphi(\nu)$  d'autre part. En fait, les propriétés électriques des éléments constitutifs des amplificateurs sont telles que leur fonctionnement est régi par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cela impose des conditions à  $R_1(t)$  ou à  $g(\nu)$  et  $\varphi(\nu)$  (1). Je précise les propriétés de  $R_1(t)$ .

- 1)  $R_1(t)$  est identiquement nul pour  $t < 0$  (L'effet ne peut précéder la

(1) Voir par exemple BAYARD. *R. G. E.*, 37, n° 21, 659.

cause). Il en résulte que, dans les calculs, il ne sera pas nécessaire de distinguer entre les chocs passés et les chocs futurs.

$$2) \quad R_1(t) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} e^{\varphi_{\alpha} t} \quad (4) \quad \text{pour } t > 0.$$

Les  $A_{\alpha}$  et les  $\varphi_{\alpha}$  sont réels ou imaginaires ; si  $A_{\alpha}^*$  et  $\varphi_{\alpha}^*$  sont les imaginaires conjugués, on a simultanément deux termes conjugués dont la somme  $A_{\alpha} e^{\varphi_{\alpha} t} + A_{\alpha}^* e^{\varphi_{\alpha}^* t}$  est réelle. La sommation porte sur un nombre fini de termes. Les oscillations libres des amplificateurs étant nécessairement amorties, on doit supposer que les parties réelles des  $\varphi_{\alpha}$  sont toutes négatives.

3) Pour  $t = 0$ , on a  $R_1(-0) = 0$  et  $R_1(+0) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}$ . Il est possible qu'il y ait, en  $t = 0$ , une discontinuité d'amplitude finie.

On déduit des trois propriétés précédentes les conséquences suivantes :

*I.* — Il existe une borne  $M_R$  de  $R_1(t)$  valable quel que soit  $t$ .

*II.* — Il existe une borne  $M_{R'}$  de  $R_1'(t)$  dans tout domaine  $t < 0, t > \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est un nombre positif aussi petit qu'on veut mais restant différent de 0. La borne  $M_{R'}$  est indépendante de  $\varepsilon$ .  $R_1(t)$  est continu et dérivable sauf pour  $t = 0$ . La dérivée  $R_1'(t)$  est continue sauf en  $t = 0$ .

*III.* —  $\varepsilon$  étant un nombre positif, aussi petit qu'on veut, donné à l'avance, on peut toujours lui associer un nombre  $T$  tel que  $t > T$  entraîne :

$$| R_1(t) | < \varepsilon.$$

D'une façon plus précise, pour  $t$  assez grand, on aura :

$$| R_1(t) | < C e^{-\varphi t} \quad (5)$$

où  $\varphi$  est un nombre positif. Nous supposerons que  $R_1'(t)$  peut-être, pour  $t$  assez grand, majoré d'une façon analogue c'est-à-dire que l'on a :

$$| R_1'(t) | < C' e^{-\varphi' t}. \quad (6)$$

Ces trois dernières conditions sont moins restrictives que le fait d'astreindre  $R_1(t)$  à être une somme d'exponentielles. Elles suffisent à bien des démonstrations qui vont suivre (les exceptions seront signalées). En fait, pour les applications, les trois premières conditions sont toujours satisfaites.

Je dirai que des amplificateurs sont de même famille si leurs réponses  $R_1(t)$  se déduisent, les unes des autres, par une dilatation parallèle à l'axe des temps.

Si on pose :

$$R_1(t) = r_1\left(\frac{t}{\tau}\right) = r_1(\lambda) \quad \text{avec } \lambda = \frac{t}{\tau} \quad (7)$$

on a, en faisant varier  $\tau$  supposé positif, des amplificateurs d'une même famille.  $\tau$  est la constante de temps de chaque amplificateur de la famille ;  $\lambda$  sera appelé le temps réduit et  $r_1(\lambda)$  la réponse réduite à l'impulsion unité.

Il peut arriver qu'un amplificateur ait une réponse nulle si le signal a une valeur constante. On dira qu'un tel amplificateur est insensible à une composante continue. Il en est ainsi si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_1(t) dt = 0. \quad (8)$$

2° DÉTECTEURS. — Nous désignerons ainsi des appareils non linéaires, sans inertie, qui, à un signal  $x(t)$ , associent la réponse :

$$y(t) = \mathcal{O}[x(t)] \quad (9)$$

où  $y = \mathcal{O}(x)$  représente une certaine fonction qui décrit la « caractéristique » du détecteur.

*Exemples :*

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{O}(x) &= |x| \\ \mathcal{O}(x) &= \frac{x + |x|}{2} \\ \mathcal{O}(x) &= x^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{détecteurs appelés} \\ \text{improprement linéaires} \\ \text{détecteur quadratique.} \end{array}$$

### 2° Buts de l'étude.

Nous désignerons par  $x(t)$  la réponse, fournie par un amplificateur dont l'entrée est soumise à l'effet de grenaille d'un courant  $I$ .

Sur chaque épreuve  $\mathcal{E}$ ,  $x(t)$  est une fonction du temps au sens de l'analyse ; mais cette fonction varie d'une épreuve à une autre. On peut noter ce fait en écrivant  $x = x(t, \mathcal{E})$ . L'ensemble des fonctions  $x(t, \mathcal{E})$  associées à l'infinité des épreuves  $\mathcal{E}$  constitue une famille de *fonctions aléatoires*. L'étude mathématique de l'effet de grenaille est l'étude des fonctions aléatoires  $x(t, \mathcal{E})$ .

Pour rendre la lecture plus facile, nous rappelons, dès maintenant, quelques points classiques de l'étude des fonctions aléatoires. Un certain nombre de notions courantes de l'analyse ont besoin d'être adaptées à cause de l'intervention du caractère aléatoire ; il en est ainsi, par exemple, pour les notions de continuité, de dérivée, d'intégrale... Toutes ces notions reposent sur l'idée de limite qui doit être précisée dans le cas d'éléments aléatoires. Soit une fonction aléatoire  $F(t, \mathcal{E})$  définie sur une catégorie d'épreuves  $\mathcal{E}$  ; considérons une suite de variables aléatoires

$F(t, \mathcal{E})$  correspondant à des valeurs de  $t$  tendant vers  $t = a$  ; soit, d'autre part, une variable aléatoire  $A(\mathcal{E})$  définie sur la même catégorie d'épreuves. Il y a plusieurs façons de définir la convergence de  $F$  vers  $A$  lorsque  $t \rightarrow a$  <sup>(1)</sup>.

On dira que  $F$  converge en probabilité vers  $A$  — ou encore que  $A$  est la limite aléatoire de  $F$  — lorsque  $t \rightarrow a$ , si, à tout couple de nombres positifs  $\varepsilon, \eta$ , on peut faire correspondre un nombre positif  $\lambda(\varepsilon, \eta)$  tel que l'inégalité :

$$|t - a| < \lambda(\varepsilon, \eta)$$

entraîne :

$$\text{Prob} [ |F(t, \mathcal{E}) - A(\mathcal{E})| \geq \varepsilon ] < \eta.$$

On dira que  $F(t, \mathcal{E})$  converge vers  $A(\mathcal{E})$  en moyenne quadratique si le carré moyen  $[F(t, \mathcal{E}) - A(\mathcal{E})]^2$  tend vers zéro lorsque  $t \rightarrow a$ .

Enfin, on dira que  $F(t, \mathcal{E})$  converge vers  $A(\mathcal{E})$  de façon presque sûre si la convergence a lieu sur toute épreuve  $\mathcal{E}$  sauf, peut-être, sur un ensemble d'épreuves correspondant à une probabilité totale nulle.

La convergence en moyenne quadratique — ou la convergence presque sûre — entraînent la convergence en probabilité. La réciproque n'est pas vraie. Il importe de remarquer que, du point de vue du physicien, la convergence la plus intéressante est souvent la troisième. Une épreuve correspond à « une expérience » réalisable parmi tant d'autres et, ce qui intéresse le physicien, c'est de savoir s'il y a convergence au sens de l'analyse, pour les valeurs que lui fournit l'expérience effectivement réalisée. Aux différentes formes de convergence correspondent différentes définitions de la continuité, de la dérivation, de l'intégration. Les notions de continuité aléatoire, de continuité en moyenne quadratique et de continuité presque sûre se définissent d'elles-mêmes. De même pour la dérivation et l'intégration.

Une classe importante de fonctions aléatoires est constituée par celles dont les propriétés statistiques sont invariantes pour tout déplacement de l'origine des temps. On les appelle des *fonctions aléatoires stationnaires*. Elles interviennent dans l'étude des phénomènes statistiques qui possèdent certaines propriétés de permanence. C'est en particulier le cas des fonctions aléatoires  $x(t, \mathcal{E})$  qui nous intéressent ici.

On peut chercher à décrire le comportement de  $x(t, \mathcal{E})$  de façon globale et approximative au moyen de quelques valeurs typiques ; cela conduit tout naturellement à introduire des *valeurs moyennes*. Ce mot peut prêter à équivoque. Pour une certaine valeur de  $t$ , nous appellerons moyenne  $x(t)$  de la variable aléatoire  $x(t, \mathcal{E})$ , l'espérance mathématique associée à cette variable aléatoire ; d'ailleurs, à cause du caractère station-

<sup>(1)</sup> Voir M. FRÉCHET. *Recherches théoriques modernes sur la théorie des Probabilités*, 1. Divers modes de convergence d'une suite de variables aléatoires, 158.

naire de  $x(t, \mathcal{E})$ , cette moyenne sera indépendante de  $t$  et pourra être notée  $\bar{x}$ ; nous introduirons, par ailleurs, des expressions du type  $\frac{1}{T} \int_0^T x(t, \mathcal{E}) dt$  calculées, au cours du temps, sur une épreuve déterminée.

Si, lorsque  $T$  tend vers l'infini, cette expression converge (à un certain sens) vers une limite, nous dirons que cette limite est la *moyenne temporelle* de  $x$ . La plupart des auteurs qui se sont intéressés à l'effet de grenaille posent implicitement l'identité des moyennes et des moyennes temporelles; nous donnerons une démonstration rigoureuse de cette affirmation *a priori* et, dans le paragraphe actuel, nous admettrons cette identité pour exposer certains résultats élémentaires.

La plupart des travaux sur l'effet de grenaille portent sur l'étude des moyennes du second ordre. C'est ce que nous appellerons l'*étude du second ordre*. Les résultats essentiels de cette étude sont contenus dans des articles de MM. Courtines (1) et Bernamont (2). Ces auteurs se sont placés au point de vue physique. Certains de leurs résultats doivent être rapprochés de ceux établis par Khintchine (3) dans un travail purement mathématique. On peut résumer l'étude du second ordre de la façon suivante :

a) Toutes les propriétés du second ordre sont sous la dépendance de la *fonction de corrélation*; considérons, pour simplifier,  $X(t) = x(t) - \bar{x}$ ; la fonction de corrélation, souvent représentée par  $\overline{XX}_\theta$ , est la moyenne  $\overline{X(t)X(t + \theta)}$  (à cause du caractère stationnaire, cette moyenne ne dépend que de  $\theta$ ).

Si on fait  $\theta = 0$ , la valeur correspondante de la fonction de corrélation redonne le carré moyen  $\overline{X^2}$ ; de plus, si on connaît la fonction de corrélation  $\overline{XX}_\theta$  associée à  $x(t)$ , on peut calculer aisément la fonction de corrélation  $\overline{YY}_\varphi$  associée à  $Y(t)$  où  $Y(t)$  est la réponse fournie par un amplificateur linéaire à  $X(t)$ . Si cet amplificateur est caractérisé par une réponse  $R_2(t)$  à un choc unité, reçu à l'instant  $t = 0$ , on a, en effet, sous des conditions très générales :

$$\overline{YY}_\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{XX}_\theta R_2(\lambda) R_2(\lambda + \varphi - \theta) d\lambda d\theta. \quad (10)$$

D'ailleurs, la fonction de corrélation associée à  $X(t)$  est donnée par la relation :

$$\overline{XX}_\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 \rho R_1(\mu + \theta) R_1(\mu) d\mu. \quad (11)$$

Ce qui précède suffit pour calculer le carré moyen en un point quelconque d'un dispositif linéaire.

(1) COURTINES. *Congrès int. d'électricité*, 1 (1932), Paris, 545.

(2) BERNAMONT. *Ann. de Physique*, 7 (1937), 84.

(3) KHINTCHINE. Korrelationsstheorie des Stationären stochastischen Prozesse. *Math. Annalen*, 109 (1934), 604.

b) D'après un théorème de Khintchine (et aussi d'après un résultat établi par Bernamont), la fonction de corrélation  $\overline{XX_0}$  peut se mettre sous la forme :

$$\overline{XX_0} = \int_0^\infty \cos 2\pi\nu\theta d\mathcal{F}(\nu) \quad (12)$$

où  $\mathcal{F}(\nu)$  a toutes les propriétés d'une fonction de répartition à l'exception de  $\mathcal{F}(+\infty) = +1$  qui doit être remplacé par  $\mathcal{F}(+\infty) = \overline{X^2}$ . Les propriétés du second ordre de  $X(t)$  peuvent aussi bien être décrites par la fonction spectrale  $\mathcal{F}(\nu)$  que par la fonction de corrélation. Il est alors essentiel de remarquer que  $\nu$  n'est pas une simple variable d'intégration, mais a une signification physique essentielle :  $\nu$  est une fréquence <sup>(1)</sup>. Dans le cas de l'effet de grenaille,  $\mathcal{F}(\nu)$  possède une dérivée que l'on représente, en général, par  $\overline{X_\nu^2}$  et que l'on appelle la *composante spectrale d'intensité* associée à  $X(t)$ . La connaissance de  $\overline{X_\nu^2}$  redonne le carré moyen par la relation :

$$\overline{X^2} = \int_0^\infty \overline{X_\nu^2} d\nu. \quad (13)$$

Si  $X(t)$  est appliqué à un amplificateur de gain  $g_2(\nu)$  et si  $Y(t)$  est la réponse de cet amplificateur à  $X(t)$ , on a la formule de passage très simple :

$$\overline{Y_\nu^2} = g_2^2(\nu) \overline{X_\nu^2}. \quad (14)$$

Il suffit d'ajouter que  $X(t)$  (réponse d'un amplificateur de gain  $g(\nu)$  à l'effet de grenaille du courant I) a, pour composante spectrale d'intensité :

$$\overline{X_\nu^2} = 2q^2 \rho g^2(\nu). \quad (15)$$

Ce qui précède fournit deux voies parallèles pour l'étude du second ordre ; on emploiera l'une ou l'autre selon le procédé utilisé pour définir l'amplificateur.

L'étude du second ordre ne suffit pas aux problèmes posés par la pratique. En particulier, injectons  $x(t)$  dans un détecteur quadratique. On aura à considérer la tension :

$$y(t) = x^2(t) \quad (16)$$

et son étude du second ordre réclamera la connaissance de  $\overline{x^2(t) \cdot x^2(t+\theta)}$  qui est une moyenne du 4<sup>e</sup> ordre. Une étude des fluctuations dans les

(1) La nature physique de  $\nu$  est naturellement mise en lumière dans les travaux des physiciens, mais leurs raisonnements manquent souvent de rigueur. Par contre, les travaux purement mathématiques n'insistent pas assez, à notre avis, sur ce point capital. On peut conserver la signification physique et avoir des raisonnements rigoureux en opérant d'une façon analogue à ce qui sera indiqué aux pages 28 et suivantes.

détecteurs, a été faite par M. K. Fränz <sup>(1)</sup>, mais cet auteur, par l'emploi *a priori* de lois de répartitions de Laplace Gauss, a restreint la portée de son travail au cas où la densité est infiniment grande. D'autre part, M. S. O. Rice vient de publier une très intéressante analyse des fluctuations dans les circuits électriques qui contient un certain nombre de points communs avec le présent travail <sup>(2)</sup>.

Nous donnons ici une étude mathématique des propriétés des fonctions aléatoires  $x(t, \mathcal{E})$ ; elle fournit une solution à la plupart des problèmes posés par l'électrotechnique. Par ailleurs, elle comporte une illustration concrète des propriétés connues des fonctions aléatoires stationnaires; un certain nombre de théorèmes purement mathématiques concernant ces fonctions ont été précisés.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma profonde gratitude à MM. G. Darmois et M. Fréchet, Professeurs à la Faculté des Sciences de Paris, pour les précieux conseils qu'ils m'ont donnés et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. C'est pour moi un plaisir de remercier M. Valiron, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, de la bienveillance qu'il m'a témoignée. Je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance à M. R. Fortet, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Caen, pour l'aide efficace qu'il n'a cessé de m'apporter au cours de l'évolution de ces recherches.

<sup>(1)</sup> FRANZ. *Electrische Nachrichten Technik*, **17** (1940), 215; **19** (1942), 167.  
— *Hochfrequenz Technik*, **57** (1941), 146.

<sup>(2)</sup> S. O. RICE. *Bell System Technical Journal* (juillet 1944).

---

PREMIÈRE PARTIE

PROBLÈME FONDAMENTAL.  
ÉTUDE DE LA TRANSMISSION  
DE L'EFFET DE GRENAILLE PUR  
PAR UN AMPLIFICATEUR LINÉAIRE <sup>(1)</sup>

Il importe de préciser très nettement le genre « d'expérience » que l'on envisage.

J'adopte, pour l'instant, le point de vue suivant :

- 1) les chocs existent depuis  $t = -\infty$  ;
- 2) l'amplificateur n'est soumis aux chocs qu'à partir de l'instant  $t = t_0$ .

On peut dire, si l'on veut, que « l'expérience » commence en  $t_0$ .

Dans ces conditions, la tension est représentée par la fonction aléatoire :

$$x_{A_0}(t) = g \sum_{t_0}^{+\infty} R_1(t - s_j). \quad (17)$$

Les indices  $A_0$  et  $t_0$  concrétisent le fait que l'on ne fait intervenir que les chocs postérieurs à  $t_0$ . Naturellement, par suite des propriétés de  $R_1(t)$ , les chocs postérieurs à  $t$  s'éliminent du résultat ; en définitive, on ne tient compte que des chocs plantant l'intervalle fini  $t_0t$ .

I. — ÉTUDE DE  $x_{A_0}(t)$ .

On a vu que  $R_1(t)$  est continu et dérivable sauf, peut-être, pour  $t = 0$  ; il s'ensuit que, pour une épreuve bien déterminée, la fonction du temps  $x_{A_0}(t)$  est continue et dérivable partout, sauf pour les valeurs de  $t$  qui coïncident avec les instants où ont lieu les chocs. D'ailleurs, la probabilité pour qu'un choc ait lieu exactement à un instant précis  $t$  est nulle. D'où le théorème :

*THÉORÈME 1.* —  $t$ , étant un instant quelconque,  $x_{A_0}(t)$  est presque sûrement continu et dérivable en  $t$ .

On établit également :

(1) Voir A. BLANC-LAPIERRE. *Comptes rendus*, **217** (1943), 73 et **218** (1944), 924.

**THÉORÈME II.** —  $x_{A_0}(t)$  est presque sûrement intégrable sur tout intervalle fini  $t_1, t_2$  [ $t_0 < t_1 < t_2$ ].

Pour étudier la fonction aléatoire  $x_{A_0}(t)$ , je vais traiter le problème suivant :  $t_1, t_2, \dots, t_K$  étant un nombre quelconque, mais fini, d'instants postérieurs à  $t_0$ , quelle est la fonction de répartition associée aux  $k$  variables liées :  $x(t_1), x(t_2) \dots x(t_K)$  ?

Il sera commode de supposer le temps divisé en cellules égales, consécutives, d'amplitude commune  $\Omega$ . Ces cellules seront numérotées à partir de  $A_0$  (fig. 1).

La cellule  $\Omega_j$  aura, pour origine, l'instant  $\omega_j$  et, pour extrémité, l'instant  $\omega_{j+1}$  ; je désignerai par  $n_j$  le nombre de chocs peuplant la cellule  $\Omega_j$  ; ...  $n_j, n_{j+1}, \dots$  sont des variables aléatoires indépendantes ;  $s_j$  désignera maintenant l'abscisse d'un quelconque des  $n_j$  chocs peuplant  $\Omega_j$ .

Je définirai la fonction de répartition cherchée par la fonction caractéristique associée :

$$\Phi_{A_0}[u_1, u_2, \dots, u_K] = e^{i[u_1 x_{A_0}(t_1) + u_2 x_{A_0}(t_2) + \dots]}$$

Pour ne pas compliquer l'écriture, je me bornerai, parfois, à  $K = 2$  ; il suffit de savoir que les résultats sont valables pour  $K$  quelconque mais fini.

$A_0$  étant fixé et  $\Omega$  étant donné, on peut attribuer arbitrairement les  $n_j$  chocs de la case  $\Omega_i$  à l'instant  $\omega_i$ , origine de la case. Cela modifie évidemment les variables aléatoires  $x_{A_0}(t_1)$  et  $x_{A_0}(t_2)$  et leur substituera  $x_{A_0, \Omega}(t_1)$  et  $x_{A_0, \Omega}(t_2)$ .

Soit  $\Phi_{A_0, \Omega}$  la nouvelle fonction caractéristique.

**THÉORÈME III.** — Si  $\Omega$  tend vers 0, la convergence simultanée de  $x_{A_0, \Omega}(t_1)$  et de  $x_{A_0, \Omega}(t_2)$  vers  $x_{A_0}(t_1)$  et  $x_{A_0}(t_2)$  respectivement est presque sûre.

La démonstration du théorème III fait appel au lemme suivant :

**LEMME.** —  $t_1$  étant fixé, l'intervalle  $t_1 - \Omega, t_1 + \Omega$  contient un nombre de chocs qui, lorsque  $\Omega \rightarrow 0$ , converge vers zéro avec la probabilité 1.

Il suffit de faire la démonstration pour l'intervalle  $t_1, t_1 + \Omega$ . Soit une suite de valeurs décroissantes, tendant vers zéro :  $\Omega'_1, \Omega'_2, \dots, \Omega'_p \dots$ . Soit  $E_p$  l'événement consistant dans le fait que l'intervalle  $t_1, t_1 + \Omega'_p$  est vide et  $E$  l'événement consistant dans la réalisation d'un au moins des événements  $E_p$ . Pour que le nombre  $n$  de chocs considérés tende vers 0, il suffit que l'événement  $E$  se réalise. On a :

$$\text{Prob}[n \rightarrow 0] \geq \text{Prob } E.$$

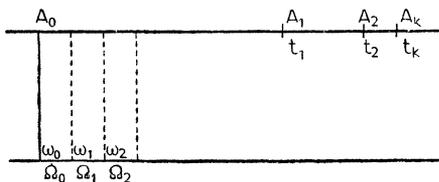


FIG. 1.

D'autre part, la suite des événements  $E_p$  formant une suite ascendante<sup>(1)</sup>, on a :

$$\text{Prob } E = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{Prob } E_p = \lim_{\Omega'_p = 0} e^{-\rho \Omega'_p} = 1 \quad (18)$$

ce qui démontre le lemme.

Soit maintenant la division en cellules  $\Omega$ ; en général,  $t_1$  ne coïncide pas avec un point  $\omega$ ; mais on étend immédiatement le résultat du lemme au nombre de chocs peuplant la cellule  $\Omega(t_1)$ , qui contient  $t$ , et qui est une cellule  $\Omega_j$ .

Cela étant, on distinguera dans  $x_{A_0}(t_1)$  et dans  $x_{A_0, \Omega}(t_1)$  deux parties :

a) la contribution des chocs peuplant  $\Omega(t_1)$ . Leur nombre  $\eta$  tend vers 0, pour  $\Omega \rightarrow 0$ , avec la probabilité 1 et chacun d'eux apporte une contribution bornée par  $qM_R$  ;

b) la contribution des chocs compris entre  $t_0$  et  $t_1$  et extérieurs à  $\Omega(t_1)$ . Leur nombre est borné sur chaque épreuve et chacun d'eux apporte à  $x_{A_0}(t_1) - x_{A_0, \Omega}(t_1)$  une contribution qui est, en module, inférieure à  $q\Omega M_R'$ . La conclusion du théorème III s'obtient alors immédiatement.

On déduit du théorème III les deux corollaires suivants :

*COROLLAIRE I.* — Si  $\Omega$  tend vers 0, les deux variables aléatoires  $x_{A_0, \Omega}(t_1)$  et  $x_{A_0, \Omega}(t_2)$  convergent en « probabilité » respectivement vers  $x_{A_0}(t_1)$  et  $x_{A_0}(t_2)$ .

*COROLLAIRE II.* — Si  $\Omega$  tend vers 0 ( $A_0$  étant fixé)  $\Phi_{A_0, \Omega}$  tend vers  $\Phi_{A_0}$  et cette convergence est uniforme dans tout domaine fini des  $u_1, u_2$  [  $|u_1| \leq U_0$  et  $|u_2| \leq U_0$  ].

Pour calculer  $\Phi_{A_0}$ , on peut donc commencer par calculer  $\Phi_{A_0, \Omega}$ , puis, faire tendre  $\Omega$  vers zéro :

$$\Phi_{A_0, \Omega}[u_1, u_2 \dots] = \overline{e^{i\{u_1 x_{A_0, \Omega}(t_1) + u_2 x_{A_0, \Omega}(t_2) + \dots\}}} \quad (19)$$

d'ailleurs :

$$x_{A_0, \Omega}(t_k) = \sum q n_j R_1(t_k - \omega_j) \quad (20)$$

la sommation étant étendue à toutes les cellules comprises entre  $A_0$  et  $A_k$  (en nombre fini).

Posons :

$$\Gamma = \sum_k i u_k x_{A_0, \Omega}(t_k)$$

<sup>(1)</sup> M. FRÉCHET. *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, p. 24.

on pourra écrire :

$$\Gamma = \sum_j \Gamma_j' \quad \text{avec} \quad \Gamma_j = \sum_k i u_k g R_1 (t_k - \omega_j) n_j = \gamma(\omega_j) n_j = \gamma_j n_j$$

En vertu de l'indépendance des  $n_j$ , on a :

$$\overline{e^\Gamma} = \dots \overline{e^{\Gamma_j}} \cdot \overline{e^{\Gamma_{j+1}}} \dots$$

d'où :

$$\Phi_{A_0, \Omega} = \Pi_{(j)} \Phi_{A_0, \Omega_j}$$

où :

$$\Phi_{A_0, \Omega_j} = \overline{e^{\Gamma_j}}$$

$\Pi_{(j)}$  représente le produit de tous les  $\Phi_{A_0, \Omega_j}$  qui, pour  $A_0$  et  $A_k$  fixés, comporte un nombre fini de termes.

Posons :

$$\Psi_{A_0, \Omega} = L \Phi_{A_0, \Omega} \quad \text{et} \quad \Psi_{A_0, \Omega_j} = L \Phi_{A_0, \Omega_j}$$

il vient :

$$\Psi_{A_0, \Omega} = \sum_j \Psi_{A_0, \Omega_j}$$

Calculons donc  $\Phi_{A_0, \Omega_j}$  et  $\Psi_{A_0, \Omega_j}$  :

$$\Phi_{A_0, \Omega_j} = \overline{e^{\gamma_j n_j}} = \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{e^{\gamma_j n_j} (\bar{n})^{n_j} e^{-\bar{n}}}{(n_j)!} = e^{-\bar{n}} e^{\gamma_j \bar{n}}$$

$$\Psi_{A_0, \Omega_j} = L \Phi_{A_0, \Omega_j} = -\bar{n} + e^{\gamma_j \bar{n}} = \bar{n} \left[ \gamma_j + \frac{1}{2!} \gamma_j^2 + \frac{1}{3!} \gamma_j^3 + \dots \right] \quad (21)$$

avec :

$$\bar{n} = \rho \Omega.$$

On a donc :

$$\Psi_{A_0, \Omega} = \rho \Omega \sum_j \left[ \gamma_j + \frac{\gamma_j^2}{2!} + \frac{\gamma_j^3}{3!} + \dots \right] \quad (22)$$

or, il existe une borne de  $|\gamma_j|$  indépendante de  $\omega_j$  et des  $u_k$  (dans le domaine  $|u| < U_0$ ) ; c'est  $|\gamma_j| < KM_{R_1} U_0 g$ .

La série sous le signe somme est donc uniformément convergente par rapport à  $\omega_j, u_1, u_2, \dots$  puisqu'elle est majorée par  $\sum \frac{(gKM_{R_1} U_0)^n}{n!}$

On peut donc écrire :

$$\Psi_{A_0, \Omega} = \rho \Omega \left\{ \sum_j \gamma_j + \frac{1}{2!} \sum_j \gamma_j^2 + \frac{1}{3!} \sum_j \gamma_j^3 + \dots \right\} \quad (23)$$

Les  $\Sigma$  portent sur l'intervalle  $A_0 A_k$  fini, chaque terme  $\rho \Omega \sum_j \frac{\gamma_j^n}{n!}$  est

majoré par  $\rho (t_k - t_0) \frac{(gKM_{R_1} U_0)^n}{n!}$  ; la nouvelle série est convergente et ne

dépend pas de  $\Omega$  ; on peut faire tendre  $\Omega$  vers zéro et remplacer les  $\Sigma$  par des intégrales ; on obtient :

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \Psi_{A_0, \Omega} = \rho \left[ \int_{t_0}^{t_K} \gamma(\omega_j) d\omega_j + \frac{1}{2!} \int_{t_0}^{t_K} \gamma^2 d\omega_j + \dots \right]$$

*THÉORÈME IV.* — La fonction caractéristique  $\bullet \Phi_{A_0}[u_1, u_2, \dots, u_K]$  est donnée par la série suivante :

$$\Psi_{A_0} = L\Phi_{A_0} = \rho \left[ \int_{t_0}^{+\infty} \gamma(\omega_j) d\omega_j + \frac{1}{2!} \int_{t_0}^{+\infty} \gamma^2 d\omega_j + \dots \right] \quad (24)$$

avec :

$$\gamma_j(\omega_j) = \sum_k i u_k q R_1(t_k - \omega_j). \quad (25)$$

La substitution de  $+\infty$  à  $t_k$  comme limite d'intégration est légitime parce que  $R_1(t) = 0$  pour  $t < 0$ . Cette série peut être considérée comme une série multiple en  $u_1, u_2, \dots, u_K$  ; elle est absolument convergente dans tout domaine fini des variables  $U$ , il en est de même de  $\Phi$ , on peut écrire :

$$\Phi_{A_0}[u_1, u_2, \dots, u_K] = 1 + \Sigma a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_K^{\alpha_K} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K \text{ entiers}]. \quad (26)$$

Si les moyennes  $\overline{x_{A_0}^{\alpha_1}(t_1)}, \overline{x_{A_0}^{\alpha_2}(t_2)} \dots \overline{x_{A_0}^{\alpha_K}(t_K)}$  existent, elles se relient de façon simple aux  $a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K}$ . Mais que peut-on dire de leur existence ?

Si on se borne à la loi  $\Phi_{A_0}(u_1)$  à une variable, on peut déduire immédiatement l'existence des moments du fait que la série  $\Phi_{A_0}(u_1)$  a un rayon de convergence positif <sup>(1)</sup>. Le cas où l'on considère une loi à plusieurs variables s'y ramène aisément. Considérons le moment  $\overline{x^{\alpha_1}(t_1) \cdot x^{\alpha_2}(t_2)}$  pour fixer les idées. Pour prouver son existence, il suffit de prouver celle de  $|\overline{x^{\alpha_1}(t_1)}| \cdot |\overline{x^{\alpha_2}(t_2)}|$ . Il est facile de montrer, en utilisant l'inégalité de Schwartz que celle-ci est assurée si les moments  $|\overline{x(t_1)}|^{2\alpha_1}$  et  $|\overline{x(t_2)}|^{2\alpha_2}$  existent ; cela résulte de ce qui a été dit relativement à la loi à une variable.

On peut d'ailleurs établir directement l'existence des moments.

En résumé, dans cette première partie, j'ai calculé la fonction caractéristique associée au groupe des variables liées  $x_{A_0}(t_1), x_{A_0}(t_2) \dots x_{A_0}(t_K)$ . J'ai, par ailleurs, montré que les moments relatifs à ce groupe de variables aléatoires existaient tous.

On voit immédiatement que l'expression de  $\Phi_{A_0}(u_1, u_2 \dots u_K)$  ne dépend pas uniquement des différences  $t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots$  mais dépend effectivement des valeurs  $t_1, t_2, \dots, t_K$ . Je dirai qu'une fonction aléatoire est *stationnaire au sens strict* si, quel que soit  $K$  supposé fini, la fonction de répartition  $F \{ x(t_1 + \theta), x(t_2 + \theta), \dots, x(t_K + \theta) \}$  relative aux  $K$  variables

<sup>(1)</sup> FORTET. *Bulletin des Sciences mathématiques* [2], 68 (juillet-août 1944).

aléatoires liées  $x(t_1 + \theta), \dots, x(t_K + \theta)$  est indépendante de  $\theta$ , quelles que soient les valeurs  $t_1, t_2, \dots, t_K$  fixées une fois pour toutes. Je dirai qu'une fonction aléatoire  $(f)t$  est *stationnaire d'ordre  $p$*  si tous les moments  $\overline{x^{\alpha_1}(t_1) \cdot x^{\alpha_2}(t_2) \dots x^{\alpha_e}(t_e)}$  d'ordre  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_e \leq p$  sont invariants si on substitue  $t_1 + \theta, t_2 + \theta, \dots$  à  $t_1, t_2, \dots$ .

La fonction aléatoire  $x_{A_0}(t)$  n'est donc pas une fonction aléatoire stationnaire.

II. — INTRODUCTION D'UNE FONCTION ALÉATOIRE STATIONNAIRE.

On a vu que la fonction aléatoire  $x_{A_0}(t)$  n'était pas stationnaire ; elle a l'inconvénient de dépendre de la valeur de  $t_0$ , ce qui l'empêche d'avoir une signification absolue. On peut chercher à s'affranchir de cela en faisant tendre  $t_0$  vers  $-\infty$ .

Dans ces conditions,  $x_{A_0}(t)$  converge-t-il vers une limite ?

a) THÉORÈME V

Si  $t_0$  tend vers  $-\infty$ ,  $x_{A_0}(t)$  converge presque sûrement vers une limite.

Démonstration : On a :

$$x_{A_0}(t) = q \sum_{t_0}^{+\infty} R_1(t - s_j).$$

Il suffit de montrer que  $q \sum_{t_0}^{t'_0} R_1(t - s_j)$  [où  $t'_0$  est une valeur aussi antérieure que l'on veut par rapport à  $t$  mais fixée une fois pour toutes]

converge, lorsque  $t_0$  tend vers moins l'infini. On peut choisir  $t - t'_0$  assez grand pour que, pour tout  $s_j < t'_0$ , on ait :

$$| R_1(t - s_j) | < C e^{-(t-s_j)\varphi}.$$

Supposons l'axe des temps divisé en cellules d'étendue  $\Omega$  (fig. 2).

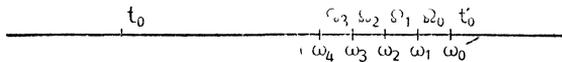


FIG. 2.

On a évidemment :

$$\left| q \sum_{t_0}^{t'_0} R_1(t - s_j) \right| < q \sum_{t_0}^{t'_0} | R_1(t - s_j) | < q \sum_{t_0}^{t'_0} C e^{-(t-s_j)\varphi}.$$

Soit  $n_p$  le nombre de chocs de la case  $\Omega_p(\omega_{p+1}, \omega_p)$  on majore encore par  $q \sum n_p C e^{-(t-\omega_p)}$ .

Posons :

$$X_m = q n_m C e^{-(t-\omega_m)}$$

et :

$$Y_p = X_0 + X_1 + \dots + X_p.$$

On a :

$$Y_p = q C e^{-(t-\omega_0)} [n_0 + n_1 e^{-\Omega} + \dots + n_p e^{-p\Omega}].$$

D'où :

$$\bar{Y}_p < q C e^{-(t-\omega_0)} \bar{n} \frac{1}{1 - e^{-\Omega}}$$

où  $\bar{n}$  est le nombre moyen de chocs contenus dans un intervalle  $\Omega$ . La probabilité pour que l'on ait  $Y_p > A$  est donc bornée par :

$$\text{Prob} \{ Y_p > A \} < \frac{1}{A} q C e^{-(t-\omega_0)} \frac{\bar{n}}{1 - e^{-\Omega}}. \quad (27)$$

Soit  $E_p$  l'événement consistant dans la réalisation de  $Y_p > A$ ; l'événement  $E_p$  implique  $E_{p+1}$ ; la probabilité de réaliser l'un au moins des événements  $E_p$ , c'est-à-dire la probabilité d'avoir, à partir d'un certain rang,  $Y_p > A$  est donnée par :

$$\text{Prob } E_A = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{Pr } E_p \quad (1).$$

On a donc :

$$\text{Prob } E_A < \frac{1}{A} q C e^{-(t-\omega_0)} \frac{\bar{n}}{1 - e^{-\Omega}}. \quad (28)$$

La probabilité de réaliser, quel que soit  $A$ , à partir d'un certain rang, la relation  $Y_p > A$  est inférieure à la probabilité de la réaliser pour « une » valeur quelconque de  $A$ ; elle est donc inférieure à toute valeur prise par l'expression  $\frac{1}{A} q C e^{-(t-\omega_0)} \frac{\bar{n}}{1 - e^{-\Omega}}$ ; elle est donc nulle. La probabilité de divergence de  $Y_p$  est nulle.

Ce raisonnement est valable pour une valeur de  $t$  quelconque. D'ailleurs l'existence, avec la probabilité 1, de la limite  $x(t)$  entraîne, avec la même probabilité, l'existence de la limite  $x(t')$  pour toutes les valeurs de  $t'$  supérieures à  $t$ . Sauf sur un ensemble d'épreuves, correspondant à une probabilité totale nulle, on définit donc ainsi une fonction aléatoire  $x(t)$ .

(1) M. FRÉCHET. *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 24.

b) CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ DE  $x(t)$ .

On peut toujours poser, si  $x(t)$  existe :

$$x(t) = x_{A_0}(t) + \delta x_{A_0}(t).$$

Supposons que  $t$  soit compris dans un intervalle  $t_1, t_2$  ( $t_0 < t_1 < t < t_2$ ). On peut choisir la majorante  $q \Sigma n_p C e^{-(t-\omega p)}$  de façon à ce qu'elle soit valable, quel que soit  $t$  pris dans  $t_1, t_2$  ; il suffira de prendre :

$$q \Sigma n_p C e^{-(t_1-\omega p)}.$$

Il s'ensuit que, pour une épreuve où  $x_{A_0}(t)$  tend vers une limite lorsque  $t_0 \rightarrow -\infty$ ,  $\delta x_{A_0}(t)$  converge vers 0 uniformément par rapport à  $t$ . D'ailleurs  $x_{A_0}(t)$  est une fonction continue dans tout intervalle ne contenant pas de choc. Si  $t_1, t_2$  est un tel intervalle, la continuité de  $x_{A_0}(t)$  et l'uniformité de la convergence entraînent la continuité de  $x(t)$  sur  $t_1 t_2$ .

La propriété de convergence uniforme s'applique aussi à  $q \sum \frac{dR_1}{dt} (t - s)$ , chaque terme  $q \frac{dR_1}{dt}$  est intégrable sur  $t_1, t_2$ . On peut donc intégrer terme à terme sur  $t_1, t_2$  ; il est facile de voir que le résultat de l'intégration sur l'intervalle  $t_1, t_2$  est  $x(t) - x(t_1)$ . Cela prouve que  $x(t)$  est dérivable sur  $t_1, t_2$ .

La fonction  $x(t)$  est donc presque partout continue et dérivable (cela n'est en défaut qu'aux instants de chocs).

On peut énoncer ce résultat sous la forme :

*THÉOREME VI. —  $t_1$  étant un instant quelconque,  $x(t)$  est presque sûrement continu et dérivable en  $t_1$ .*

La limite de  $x_{A_0}(t)$  est une fonction aléatoire  $x(t)$  (définie sur chaque épreuve sauf peut-être sur un ensemble de probabilité totale nulle). La convergence presque certaine de  $x_{A_0}(t)$  vers  $x(t)$  suffit à entraîner la convergence en probabilité de  $x_{A_0}(t)$  vers  $x(t)$  qui, elle-même, suffit à entraîner la convergence de  $\Phi_{A_0}(u_1, u_2, \dots, u_k)$  vers  $\Phi[u_1, u_2, \dots, u_k]$  où  $\Phi_{A_0}$  et  $\Phi$  sont les fonctions caractéristiques associées à  $x_{A_0}(t)$  et  $x(t)$ .

D'où le théorème suivant :

*THÉOREME VII. — La fonction caractéristique associée à la variable aléatoire  $x(t)$  est donnée par la relation :*

$$L\Phi = \Psi = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \Psi_{A_0} = \rho \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\omega_j) d\omega_j + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(\omega_j) d\omega_j + \dots \right\} \quad (29)$$

En raisonnant sur  $\Phi$  comme cela a été fait sur  $\Phi_{A_0}$ , on peut montrer que tous les moments correspondants existent ; ils sont, dès lors, reliés aux coefficients du développement de  $\Phi[u_1, u_2, \dots, u_k]$  en série entière en  $u_1, u_2, \dots, u_k$  par les relations habituelles.

Il est facile d'en déduire que les moments de  $x(t)$  sont les limites lorsque  $t_0$  tend vers  $-\infty$  des moments correspondants de  $x_{\Delta_0}(t)$ .

Si au lieu de considérer les instants  $t_1, t_2, \dots, t_K$ , on considère les instants  $t_1 + \theta, t_2 + \theta, \dots, t_K + \theta$ , les termes figurant dans l'équation (29) restent inchangés. Cela démontre le caractère stationnaire de  $x(t)$ .

**THÉORÈME VIII.** —  $x(t)$  est une fonction aléatoire stationnaire au sens strict.

**REMARQUES.** — 1° On a vu que  $x(t)$  est continu près d'une valeur  $t = t_1$ , avec la probabilité 1. On peut montrer directement qu'il y a continuité en moyenne quadratique. Cela résulte des relations suivantes qui se déduisent de façon évidente des résultats acquis :

$$\begin{aligned} \overline{\Delta x^2} &= \overline{[x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)]^2} = 2[\overline{x^2} - \overline{x(t) \cdot x(t + \Delta t)}] \\ &= 2q^2 \rho \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} R_1^2(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(t) R_1(t + \Delta t) dt \right]. \end{aligned}$$

2° *Continuité de la fonction de répartition  $F(x)$  de la variable aléatoire  $x(t)$  ( $t$  fixe).* — a) Considérons  $x_{\Delta_0}(t)$ ; supposons que l'intervalle  $t_0 t$  ne contienne aucun choc. On a alors sûrement  $x_{\Delta_0}(t) = 0$ . Si on se borne aux épreuves pour lesquelles  $t_0 t$  ne contiennent aucun choc et si on considère la fonction de répartition de  $x_{\Delta_0}(t)$  sur ce sous-ensemble d'épreuves, cette fonction de répartition a, en  $x = 0$ , une discontinuité de première espèce égale à l'unité [Voir fig. 3a].

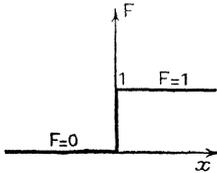


FIG. 3a.

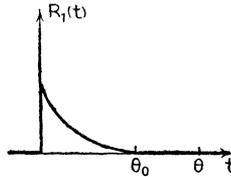


FIG. 3b.

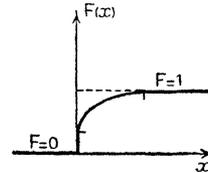


FIG. 3c.

Supposons que  $t_0 t$  contienne  $n$  chocs ( $n \neq 0$ ). On a :

$$x_{\Delta_0}(t) = \sum_{j=1}^n q R_1(t - s_j);$$

les variables  $s_j$  sont indépendantes et la probabilité pour que l'on ait :

$$t' \leq s_j \leq t' + \Delta t' \quad \text{est} \quad \frac{\Delta t'}{t - t_0}.$$

*Faisons l'hypothèse que, quel que soit  $t_0$  fixé, la fonction de répartition de la variable aléatoire  $R_1(t - s_j)$  est continue.* Cette hypothèse peut se trouver en défaut pour certaines fonctions  $R_1(t)$  satisfaisant aux conditions élargies; c'est, par exemple, le cas de la fonction  $R_1(t)$  représentée par la figure 3b et pour laquelle la fonction de répartition est schématisée par 3c.

Mais, cette hypothèse est satisfaite dans le cas d'une réponse exponentielle (1).  $x_{A_0}(t) = \sum_1^n q R_1(t - s_j)$  qui est une somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes et à fonction  $F$  continue a aussi une fonction de répartition continue.

b)  $A_0$  étant fixé de façon quelconque, si on suppose que  $t_0 t$  ne contient pas 0 chocs la fonction de répartition de  $x_{A_0}(t)$  est continue; en effet,  $\eta$  étant un nombre positif quelconque donné à l'avance on peut trouver  $\varepsilon$  tel que, pour une valeur de  $a$  donnée, on ait :

$$\text{Prob} [ | x_{A_0}(t) - a | < \varepsilon ] < \eta.$$

On choisira  $N$  tel que la probabilité pour que  $t_0 t$  contienne plus de  $N$  chocs soit inférieure à  $\eta/2$ . Dans chacune des  $N$  éventualités  $0 < n \leq N$ , on peut trouver  $\varepsilon_n > 0$  tel que la probabilité conditionnelle (liée à cette éventualité) d'avoir  $| x_{A_0}(t) - a | < \varepsilon_n$  soit  $\eta/2N$ ; pour  $\varepsilon$  on prendra le plus petit des  $\varepsilon_n$ .

c) Toujours dans l'éventualité  $n \neq 0$ ,  $x(t)$  a une fonction de répartition continue. C'est, en effet, la somme de deux variables aléatoires indépendantes  $\delta x_{A_0}(t)$  et  $x_{A_0}(t)$  dont l'une  $x_{A_0}(t)$  a une fonction de répartition continue.

d) Quel que soit  $\eta$  on peut,  $a$  étant donné, trouver  $\varepsilon$  tel que l'on ait :

$$\text{Prob} [ | x(t) - a | < \varepsilon ] < \eta.$$

On choisira, pour le démontrer,  $t_0$  assez négatif pour que la probabilité, pour que  $t_0 t$  contienne 0 choc, soit inférieure à  $\eta/2$  et  $\varepsilon$  sera déterminé par la condition :

$$\text{Prob} [ | x(t) - a | < \varepsilon ]_{\eta \neq 0} < \eta/2.$$

e) Dans le cas d'une fonction  $R_1(t)$  du type représenté par 3b, il était bien évident que  $F(x)$  n'était pas continu; il y a, en effet, concentrée en  $x = 0$ , une masse finie égale à  $e^{-\rho\theta_0}$  (probabilité pour que l'intervalle  $-\theta_0 \leq t \leq 0$  ne contienne pas de choc).

3° La fonction caractéristique associée à  $\delta x_{A_0}(t)$  est donnée par :

$$L\Phi \{ \delta x_{A_0}(t) \} = \rho \left[ \int_{-\infty}^{t_0} \gamma(\omega) d\omega + \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{t_0} \gamma^2(\omega) d\omega + \dots \right] \quad (30)$$

(1) En effet, dans un intervalle fini,  $t_1 - t_0$ ,  $\sum_{\alpha} A_{\alpha} e^{\varphi_{\alpha} t}$  se décompose en un nombre fini d'arcs continus sur chacun desquels la fonction est monotone; sinon, il y aurait un nombre infini de 0 pour  $\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} A_{\alpha} e^{\varphi_{\alpha} t}$  donc au moins un point d'accumulation et à cause de la continuité de  $R(t)$  et de toutes ses dérivées en ce point on aurait  $\frac{d^n R}{dt^n} = 0$  quel que soit  $n$ , ce qui entrainerait  $\frac{dR}{dt} \equiv 0$ .

## DEUXIÈME PARTIE

### MOYENNES TEMPORELLES.

#### I. — INTÉRÊT PHYSIQUE.

La détermination expérimentale d'une moyenne ne saurait être envisagée. Pour en avoir une valeur approchée, on devrait rassembler un très grand nombre d'appareils, macroscopiquement identiques, et les observer simultanément. Par contre, l'étude des moyennes temporelles peut se faire commodément sur un enregistrement au cours du temps, qui ne réclame qu'un seul appareil. Il est du plus haut intérêt physique de voir dans quelle mesure l'étude des moyennes temporelles conduit à la détermination des moyennes statistiques.

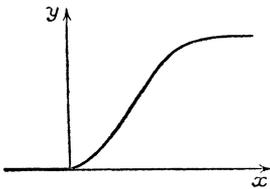


FIG. 4.

Cette question se pose pour la fonction aléatoire  $x(t)$  ou pour des fonctions du type  $f[x(t)]$  qui représentent la réponse du détecteur de caractéristique  $y = f(x)$  à  $x(t)$ . Lorsqu'on utilise un tube électronique comme détecteur, on fait intervenir les parties non linéaires de sa caractéristique. Qualitativement, la caractéristique  $y = y(x)$  a la forme représentée par

la figure 4. Nous supposons donc que  $y(x)$  satisfait aux hypothèses suivantes :  $y$  possède une dérivée, quel que soit  $x$ , et il existe une borne uniforme  $m_y$  de  $|y|$  et une borne uniforme  $m_y'$  de  $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ .

Nous étendrons d'ailleurs les résultats obtenus à des fonctions  $y = y(x)$  débordant ce cadre.

#### II. — LIMITE DE $\frac{1}{T} \int_0^T y[x(t)] dt$ POUR $T = \infty$ (1)

##### A. — PERMUTATION DES SYMBOLES DE MOYENNES ET D'INTÉGRATION.

Soit  $f_{\mathcal{G}}(t)$  une fonction aléatoire définie, pour toutes les valeurs réelles de  $t$ , sur chaque épreuve  $\underline{\mathcal{E}}$  de l'ensemble  $\underline{E}$ ; soit l'intervalle  $a, b$  [ $a < b$ ];

(1) A. BLANC-LAPIERRE. *Comptes rendus*, 218 (1944), 985.

$n$  étant un entier positif, posons  $\delta = \frac{b-a}{n}$  et désignons par  $\sum_{n, \mathcal{E}}$  la somme riemannienne :

$$\sum_{n, \mathcal{E}} = \sum_{p=0}^{p=n-1} \delta \cdot f_{\mathcal{E}}(a + p\delta). \tag{31}$$

$\sum_{n, \mathcal{E}}$  est une variable aléatoire. S'il existe une variable aléatoire  $S_{\mathcal{E}}$ , telle que  $\sum_{n, \mathcal{E}}$  converge, vers  $S_{\mathcal{E}}$ , en moyenne quadratique, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , nous dirons que  $S_{\mathcal{E}}$  est l'intégrale en moyenne quadratique de  $f_{\mathcal{E}}(t)$  sur  $ab$  et nous écrirons :

$$S_{\mathcal{E}} = \int_a^b f_{\mathcal{E}}(t) dt. \tag{32}$$

*THÉOREME IX.* — Si  $\overline{f^2(t)}$  existe et est borné uniformément sur  $ab$ , et si  $S_{\mathcal{E}}$  existe, alors :

$$\overline{S} = \int_a^b \overline{f(t)} dt \quad \text{et} \quad \overline{S^2} = \int_a^b \int_a^b \overline{f(t) \cdot f(t')} dt dt'. \tag{33}$$

*Démonstration :* L'existence de  $\overline{f^2(t)}$  borné uniformément entraîne celle de  $\overline{|f(t)|}$  et de  $\overline{|f(t)| \cdot |f(t')|}$  et leur assigne des bornes de sorte que les intégrales :

$$\int_a^b \overline{f(t)} dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \int_a^b \overline{f(t) \cdot f(t')} dt dt'$$

existent. L'existence de bornes uniformes pour  $\overline{|f(t)|}$  et  $\overline{|f(t)| \cdot |f(t')|}$  permet de démontrer que  $\overline{\sum_{n, \mathcal{E}}^2}$ ,  $\overline{|\sum_{n, \mathcal{E}}|}$  et  $\overline{\sum_{n, \mathcal{E}}}$  existent et sont bornés en module uniformément par rapport à  $n$ . On déduit de la relation :

$$S = \Sigma + (S - \Sigma_n)$$

$$\overline{S} = \overline{\Sigma} + \overline{S - \Sigma_n}$$

l'existence de  $\overline{S}$  et de  $\overline{S^2}$ ; naturellement, ces moyennes ne dépendent pas de  $n$ .

Si on considère maintenant le groupe des relations :

$$S = \Sigma_n + \{ S - \Sigma_n \} \quad \text{et} \quad S^2 = \Sigma_n^2 + (S - \Sigma_n)^2 + 2\Sigma_n \cdot (S - \Sigma_n)$$

on établit, sans peine, que :

$$\overline{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Sigma_n} = \int_a^b \overline{f(t)} dt \quad \text{et} \quad \overline{S^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Sigma_n^2} = \int_a^b \int_a^b \overline{f(t) \cdot f(t')} dt dt'.$$

Le théorème IX est applicable aux fonctions aléatoires  $y \{ x(t) \}$ ; je rappelle que nous supposons essentiellement que  $|y|$  a une borne uniforme  $m_y$  et que  $\left| \frac{dy}{dx} \right|$  a une borne uniforme  $m_{y'}$ .

Démonstration :  $y^2(t)$  est bien borné puisque  $|y(t)| < m_y$ . D'autre part,  $y(t)$  est continue sur  $ab$  sauf aux points où il y a des chocs; par suite, l'intégrale  $S = \int_a^b y(t) dt$  (au sens de l'analyse) existe presque sûrement. Il reste à montrer qu'elle satisfait à la condition :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{[S - \Sigma_n \mathcal{E}]^2} = 0. \quad (34)$$

$A_0$  étant un point de l'axe des temps, d'abscisse  $t_0$  très négative, posons :

$$x(t) = x_{A_0}(t) + \delta x_{A_0}(t) \quad (35)$$

où  $x_{A_0}(t)$  est la contribution à  $x(t)$  des chocs postérieurs à  $t_0$  et  $\delta x_{A_0}(t)$  celle des chocs antérieurs à  $t_0$ .

On a  $y(t) = y[x(t)]$ . Nous poserons :

$$y_{A_0}(t) = y[x_{A_0}(t)] \quad \text{et} \quad \delta y_{A_0}(t) = y(t) - y_{A_0}(t).$$

On voit immédiatement que  $|\delta y_{A_0}(t)| < m_{y'} |\delta x_{A_0}(t)|$ .

Posons :

$$S_{A_0} = \int_a^b y_{A_0}(t) dt \quad \text{et} \quad D_{A_0} = S_{A_0} - \sum_{p=0}^{n-1} \delta \times y_{A_0}(a + p\delta). \quad (36)$$

$D_{A_0}$  se décompose en  $n$  contributions apportées respectivement par les intervalles  $a + (p-1)\delta$ ,  $a + p\delta$ .

Soit  $K$  le nombre de chocs existant entre  $A_0$  et  $b$ ; on montre que l'on a :

$$|D_{A_0}| \leq 2m_y K \cdot \delta + (b-a)K \cdot \delta \cdot M_R' \cdot m_{y'} \quad (37)$$

où  $M_R'$  est la borne supérieure de  $\frac{dR_1}{dt}$  valable pour  $t \neq 0$ .

On a donc :

$$\overline{|D_{A_0}|^2} \leq [2m_y + (b-a)M_R' m_{y'}]^2 \overline{K^2} \cdot \delta^2. \quad (38)$$

La relation (34) est donc vraie pour  $D_{A_0}$  et cela quel que soit  $A_0$  fixé; on étend le résultat à  $S$ , en remarquant que  $\delta x_{A_0}(t)$  peut être majoré par une variable aléatoire  $\Delta x_{A_0}(t) = \sum_{s_j < t_0} C e^{-[a-s_j]}$ ; cette majoration valant pour tout  $t \geq a$  de sorte que l'on a :

$$\left| (S - \Sigma) - [S_{A_0} - \sum_{p=0}^{n-1} \delta \cdot y_{A_0}(a + p\delta)] \right| < 2m_{y'} [b-a] \Delta x_{A_0}(a) \quad (39)$$

d'où :

$$\overline{(S - \Sigma_n)^2} \leq \overline{D_{A_0}^2} + 4m_y^2 [b - a]^2 \overline{\Delta x_{A_0}^2}(a) + 2 | \overline{D_{A_0}} | \cdot | \overline{\Delta x_{A_0}} | (a) \cdot 2m_y(b - a).$$

Pour rendre  $\overline{(S - \Sigma_n)^2}$  inférieur à  $\epsilon$ , on peut prendre  $t_0$  assez négatif pour que le terme en  $\overline{\Delta^2 x_{A_0}(a)}$  soit inférieur à  $\epsilon/2$ ;  $A_0$  étant fixé,  $\overline{K}$  et  $\overline{K^2}$  sont connus et il suffit de prendre  $\delta$  assez petit pour que chacun des deux autres termes soit inférieur en module à  $\epsilon/4$ .

Les raisonnements qui précèdent nous permettront d'effectuer certaines permutations de symboles d'intégration et de moyenne qui seront utiles dans la suite. En faisant l'hypothèse que les fonctions  $y(t)$  sont mesurables dans l'espace produit abstrait  $t \times \mathcal{E}$ , ces permutations se légitiment par le théorème de Fubini (1). Les démonstrations précédentes montrent directement que la permutation est légitime pour les fonctions aléatoires qui nous intéressent.

On peut reprendre les démonstrations précédentes et les appliquer, par exemple à  $y = x$ ,  $y = x^p$  ou  $y = |x|^p$  où  $p$  est un entier positif.

B. — UN THÉORÈME ERGODIQUE (2)

1° Le théorème que je vais établir a une portée qui dépasse le cadre des fonctions aléatoires  $y(t)$  qui m'intéressent. Je l'établis en faisant abstraction de ce qui précède.

Soit  $U(t)$  une fonction aléatoire, stochastiquement continue, définie sur une catégorie d'épreuves  $\mathcal{E}$ . Je suppose que  $U(t)$  satisfait aux propriétés suivantes :

1°  $U(t)$  est mesurable sur l'espace produit abstrait  $t, \mathcal{E}[a \leq t \leq b]$  quels que soient  $a$  et  $b$ ; cette hypothèse est destinée à permettre l'application du théorème de Fubini pour légitimer certaines permutations des symboles de moyenne et d'intégration. Si cette permutation est légitimée directement, comme c'est le cas pour les fonctions  $y(t)$ , on peut ignorer l'hypothèse actuelle.

2°  $U(t)$  est stationnaire d'ordre 2. Nous désignerons par  $\overline{U(t)}$  sa valeur moyenne et par  $U_0^2$  le carré moyen  $\overline{(U - \overline{U})^2}$ ; soit  $\rho(\tau)$  le coefficient de corrélation :

$$\overline{[U(t) - \overline{U}][U(t + \tau) - \overline{U}]} = U_0^2 \rho(\tau).$$

(1) Voir par exemple St. SAKS. *Théorie de l'intégrale Warszawa* (1933). Institut Mathématique Université de Moscou, 262.

(2) Ce théorème a été aussi obtenu, indépendamment et simultanément, par M. BRARD. Il a fait l'objet d'une publication commune [*Comptes rendus*, 220 (1945), p. 134] dont l'élaboration a amené divers perfectionnements à chacun des travaux initiaux et, en particulier, m'a conduit à améliorer l'étude de la transformation définie par (50).

3° Enfin, le coefficient de corrélation  $\rho(\tau)$  est tel que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau) d\tau$  existe au sens de Césaro d'ordre 1 (1).

Dans ces conditions, on peut énoncer le résultat suivant :

*THÉOREME X. — Si les hypothèses 1°, 2° et 3° sont vérifiées, alors  $\frac{1}{T} \int_0^T U(t) dt$  converge vers  $\bar{U}$ , lorsque  $T \rightarrow \infty$ , avec la probabilité 1.*

Il suffit de faire la démonstration, dans l'hypothèse où  $\bar{U} = 0$ . Nous désignerons par  $S(T, \mathcal{E}')$  l'intégrale :

$$S(T, \mathcal{E}') = \int_0^T U(t, \mathcal{E}') dt \quad (40)$$

et par  $\mu(T, \mathcal{E}')$  le quotient  $\frac{S(T, \mathcal{E}')}{T}$ ; M. Kampé de Fériet (2) a établi le résultat suivant : « Pour que  $\overline{S^2(T, \mathcal{E}')}$  puisse se mettre sous la forme :

$$\overline{S^2(T, \mathcal{E}')} = U_0^2 T \chi(T) \quad (41)$$

la fonction  $\chi(T)$  tendant vers une limite finie lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$ , il faut et il suffit que  $\rho(\tau)$  soit sommable au sens de Césaro, d'ordre 1.

On peut donc écrire :

$$\overline{\mu^2(T, \mathcal{E}')} = \frac{U_0^2}{T} \chi(T) \quad (42)$$

où  $\chi(T)$  tend vers une constante finie positive ou nulle pour  $T = +\infty$ .

Cela suffit à établir la convergence de  $\mu(T, \mathcal{E}')$  vers 0, en moyenne quadratique, lorsque  $T$  tend vers l'infini. On sait, alors, qu'il existe des suites  $T_1, T_2, \dots, T_n$  croissant assez vite pour que cette convergence ait lieu avec la probabilité 1. Il en est ainsi en particulier pour la suite :

$$T_n = n^2 \quad (n \text{ entier positif}).$$

En effet, pour une telle suite, la convergence presque certaine annoncée résulte immédiatement du fait que la série :

$$\overline{\mu^2(n^2, \mathcal{E}')} = \frac{U_0^2}{n^2} \chi(n^2) \quad (43)$$

est convergente (3).

(1) Soit  $I_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ; si  $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{ I_1 + I_2 + \dots + I_n \}$  existe, nous

dirons que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  est sommable au sens de Césaro d'ordre 1 et que sa somme

(CI) est 1. La définition se transpose aisément d'une série à une intégrale : le coefficient de corrélation  $\rho(\tau)$  est sommable au sens de Césaro d'ordre 1 si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau) \left[ 1 - \frac{|\tau|}{s} \right] d\tau$  tend vers une limite finie lorsque  $s$  tend vers  $+\infty$ .

(2) KAMPÉ DE FÉRIET. Les fonctions aléatoires homogènes et la théorie de la turbulence homogène. *Annales de la Société de Bruxelles*, [1] 59, 2° fascicule (juillet 1939), 145.

(3) M. FRÉCHET. *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*, 1, livre 1er, 238.

Nous allons maintenant étendre le résultat au cas où  $T$  tend vers l'infini de façon quelconque. Désignons par  $\eta(T)$  le plus grand entier positif tel que :

$$\eta^2(T) \leq T,$$

on a :

$$S(T, \mathcal{E}') = \int_0^{\eta^2(T)} U(t, \mathcal{E}') dt + \int_{\eta^2(T)}^T U(t, \mathcal{E}') dt. \tag{44}$$

D'ailleurs, si  $S/\eta^2(T)$  tend vers 0, il en sera de même pour  $S/T$  ; il suffit donc de faire la démonstration pour  $S/\eta^2$ . On peut écrire :

$$\frac{1}{\eta^2(T)} \int_0^T U(t) dt = \frac{1}{\eta^2(T)} \int_0^{\eta^2(T)} U(t) dt + \frac{1}{\eta^2(T)} \int_{\eta^2(T)}^T U(t) dt. \tag{45}$$

Le second terme du deuxième membre est majoré, en module, par :

$$Y_\eta = \frac{1}{\eta^2} \int_{\eta^2}^{(\eta+1)^2} |U(t)| dt. \tag{46}$$

On a d'ailleurs :

$$\begin{aligned} \overline{Y_\eta^2} &= \frac{1}{\eta^4} \overline{\int_{\eta^2}^{(\eta+1)^2} \int_{\eta^2}^{(\eta+1)^2} |U(t)| |U(t')| dt dt'} \\ &= \frac{1}{\eta^4} \int_{\eta^2}^{(\eta+1)^2} \int_{\eta^2}^{(\eta+1)^2} \overline{|U(t)| |U(t')|} dt dt'. \end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Schwartz, donne immédiatement :

$$\overline{Y_\eta^2} \leq \frac{1}{\eta^4} [2\eta + 1]^2 U_0^2. \tag{47}$$

La série  $\sum \overline{Y_n^2}$  qui est équivalente à  $\sum \frac{1}{\eta^2}$  est convergente ce qui prouve que  $Y_\eta$  converge fortement vers zéro lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ .

Il découle des résultats précédents que, lorsque  $T$  tend vers l'infini, c'est-à-dire, lorsque  $\eta$  tend vers l'infini, on peut, sauf sur un ensemble d'épreuves correspondant à une probabilité totale nulle, affirmer que chacun des deux termes du second membre de (45) tend vers zéro, ce qui établit la convergence annoncée.

2° Il est intéressant de comparer les résultats apportés par ce théorème avec ceux qu'on pourrait déduire des théorèmes connus sur les fonctions aléatoires stationnaires.

Si  $U(t, \mathcal{E}')$  est stationnaire au sens strict, on peut lui appliquer le résultat suivant (1).

(1) KOLMOGOROFF Ein vereinfachter Beweis des Birkhoff Khintchineschen Ergodensatzes. Moscou. *Société Mathématique*, 44 (1937), 367.

« Si  $U_i$  [ $-\infty < i < +\infty$ ] est une suite de variables aléatoires stationnaires, pour laquelle on suppose que  $U_i$  est fini, la valeur :

$$h_{a,b} = \frac{U_a + U_{a+1} + \dots + U_{b-1}}{b-a} \quad (48)$$

converge, avec la probabilité 1, vers une limite déterminée, lorsque  $a$  est fixé et  $b \rightarrow \infty$ . »

Cet énoncé permet d'affirmer que les sommes du type  $\frac{1}{n\delta} \sum_{p=0}^{n-1} U(p\delta)$  convergent, avec la probabilité 1, vers une limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\delta$  étant fixé. Naturellement la limite dont il est question ici peut avoir un caractère aléatoire.

En supposant, en gros, que  $U(t)$  est stationnaire d'ordre 2, c'est-à-dire, en ignorant tout ce qui concerne autre chose que les moments d'ordres 1 et 2, il existe, d'après un résultat connu dû à Khintchine (1), une variable aléatoire  $X(\mathcal{E}')$  vers laquelle  $\frac{1}{T} \int_0^T U(t, \mathcal{E}') dt$  converge en moyenne quadratique pour  $T = +\infty$ . De plus, Slutsky (2) et Fortet (3) ont montré que si :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho(\tau) d\tau = 0,$$

on peut prendre, pour  $X(\mathcal{E}')$  le nombre certain  $\bar{U}$ .

Ces résultats connus permettent de conclure à la convergence presque sûre de  $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$  vers  $\overline{y(t)}$  pour les fonctions  $y$  qui nous intéressent ; en effet,  $y(t)$  est stationnaire au sens strict et il est facile de montrer que les fonctions aléatoires  $y$  satisfont à la condition de Slutsky. Nous nous sommes efforcés de conclure à la convergence forte en n'utilisant que les moyennes du second ordre et c'est, dans cette voie, que le théorème X est intéressant. Il a d'ailleurs un intérêt général indépendamment des fonctions  $y(t)$  auxquelles est consacrée cette étude.

3° EXTENSION A D'AUTRES MOYENNES TEMPORELLES. — Nous allons nous placer à un autre point de vue qui dérive directement de considérations physiques et qui, par certains côtés, généralise les résultats précédents. Nous supposons toujours que  $U(t, \mathcal{E}')$  satisfait aux hypothèses du théorème X (avec  $\bar{U} = 0$ ). La conclusion de ce théorème porte sur la variable aléatoire  $\frac{1}{T} \int_0^T U(t, \mathcal{E}') dt$  que l'on peut considérer comme la

(1) KHINTCHINE. Korrelations theorie der stationären stochastischen Prozesse. *Math. Annalen*, Bd 109 (1934), 604-615.

(2) SLUTSKY. *Colloque consacré à la théorie des probabilités*, Genève (1937). — V. Hermann. *Ac. Scient.*, n° 738, 35.

(3) FORTET. Sur une suite également répartie. *Studia Math.*, 9.

valeur, pour  $t = 0$ , de la fonction aléatoire  $V(t, \mathcal{E}')$  qui se déduit de  $U(t, \mathcal{E}')$  par l'opération :

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} U(\theta, \mathcal{E}') d\theta = V(t, \mathcal{E}'). \quad (50)$$

C'est un cas particulier de l'opération linéaire plus générale  $\mathfrak{N}$ , définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(\theta, \mathcal{E}') M(t - \theta) d\theta = V(t, \mathcal{E}'). \quad (51)$$

Nous serons amenés à faire sur  $M(\theta)$  les hypothèses suivantes :

a)  $M(\theta)$  est, sur l'intervalle  $-\infty, +\infty$ , continu, borné et absolument intégrable. L'intégrabilité absolue donne un sens à l'opération définie par (51) avec une probabilité 1 ;

b) l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(\theta) d\theta = 1 \quad (52)$$

ce qui entraîne  $\bar{V} = \bar{U}$  dans le cas général [ici nous supposons  $\bar{U} = \bar{V} = 0$  (53)] ;

c) enfin, nous supposons que  $M(\theta)$  est de la forme  $a(T)m(\theta/T)$  ce qui, à cause de (52), conduit à prendre, à un facteur constant près,

$$M(\theta) = \frac{1}{T} m\left(\frac{\theta}{T}\right) = \frac{1}{T} m(u). \quad (54)$$

La fonction  $m(u)$  définit une famille de transformations au sein de laquelle chaque transformation particulière est caractérisée par sa constante de temps  $T$ .

Les opérations  $\mathfrak{N}$  ont une signification physique évidente. Elles consistent à prendre des moyennes temporelles portant sur des durées plus ou moins bien limitées. A chaque instant, en principe, on a l'avantage dans l'élaboration de la moyenne les valeurs de  $U(t, \mathcal{E}')$  pour les instants voisins, l'influence des instants éloignés étant très faible.

On obtient l'opération définie par (50) en prenant  $m(u) = 1$  pour  $-1 \leq u \leq 0$  et  $m(u) = 0$  partout ailleurs. Si on prend, pour  $m(u)$ , la fonction  $r_1$  introduite à propos d'une famille d'amplificateurs [p. 5],  $V(t, \mathcal{E}')$  représente la tension de sortie lorsque  $U(t, \mathcal{E}')$  est appliqué à l'entrée.

L'opération  $\mathfrak{N}$  étant linéaire, on peut définir son gain  $g(\nu)$  et son déphasage  $\varphi(\nu)$  pour une fréquence  $\nu$  exactement comme cela se fait pour un amplificateur [v. p. 5], en considérant l'effet de  $\mathfrak{N}$  sur  $\sin 2\pi\nu t$ . A cause des hypothèses faites sur  $M(\theta)$ ,  $g^2(\nu)$  est une fonction continue de  $\nu$ .

Nous supposons encore que, pour les grandes valeurs de  $\nu$ ,  $g^2(\nu)$  décroît au moins comme  $1/\nu^2$ .

Introduisons la fonction spectrale  $\tilde{\mathcal{F}}(\nu)$  associée à  $U(t, \mathcal{E}')$ ; elle est liée à la fonction de corrélation  $\overline{UU}_\lambda$  par la relation :

$$\overline{UU}_\lambda = \int_0^\infty \cos 2\pi\nu\lambda d\tilde{\mathcal{F}}(\nu). \quad (55)$$

D'où, sous des conditions très générales :

$$\overline{V^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\mu)M(\mu - \lambda) \overline{UU}_\lambda d\mu d\lambda \left. \vphantom{\int_{-\infty}^{+\infty}} \right\} d\tilde{\mathcal{F}}(\nu) \quad (56)$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty M(\mu)M(\mu - \lambda) \cos 2\pi\nu\lambda d\mu d\lambda \right\} d\tilde{\mathcal{F}}(\nu)$$

d'où finalement :

$$\overline{V^2(t)} = \int_0^\infty g^2(\nu) d\tilde{\mathcal{F}}(\nu). \quad (57)$$

On avait, d'ailleurs :

$$\overline{U^2(t)} = \overline{UU}_0 = \int_0^\infty d\tilde{\mathcal{F}}(\nu). \quad (57 \text{ bis})$$

La formule (57 bis) montre que  $\overline{U^2(t)}$  est la somme de contributions  $d\tilde{\mathcal{F}}(\nu)$  relatives aux différentes fréquences; tout se passe comme si les fréquences agissaient indépendamment les unes des autres; l'opération  $\mathfrak{N}$  substitue à  $d\tilde{\mathcal{F}}(\nu)$ ,  $g^2(\nu)d\tilde{\mathcal{F}}(\nu)$  comme cela est naturel, d'après la définition du gain, et on obtient  $\overline{V^2(t)}$  en faisant la somme des contributions  $g^2(\nu)d\tilde{\mathcal{F}}(\nu)$ .

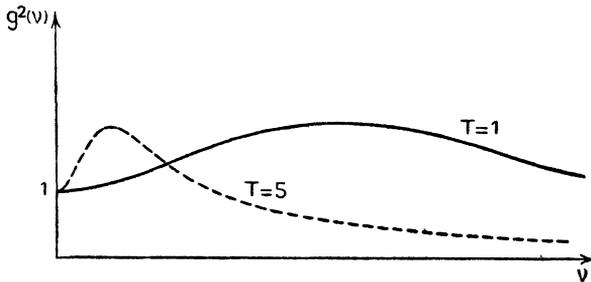


FIG. 5.

On saisit ainsi le sens physique de l'opération  $\mathfrak{N}$ , en ce qui concerne les fluctuations. Elle avantage certaines fréquences, au détriment d'autres, parmi les fréquences contribuant à donner le carré moyen  $\overline{U^2}$ ; on ne saurait mieux traduire cet effet qu'en employant le mot de *filtre* exactement dans le sens qu'il a en électrotechnique.

Examinons comment varie « l'effet de filtre » associé à chacune des transformations  $(\mathfrak{N})_m$  dérivant d'une même fonction  $m(u)$ , lorsque T

varie. Si on fait varier  $T$ , on transforme  $\mathfrak{M}$  par une affinité de rapport  $T$  parallèle à l'axe des  $t$  et par une affinité de rapport  $\frac{1}{T}$  parallèle à l'axe des  $M$ . On en déduit que la courbe  $g^2(\nu)$  voit, lorsqu'on passe de 1 à  $T$ , ses abscisses multipliées par  $1/T$ . La figure 5 montre comment on passe de  $g^2(\nu)$  pour  $T=1$  à  $g^2(\nu)$  pour  $T=5$ .

Le fait d'augmenter la constante de temps rend la transformation  $\mathfrak{M}$  de plus en plus insensible aux hautes fréquences. Le carré moyen  $\overline{V^2(o, \mathcal{E}')^2}$  décroît, lorsque  $T$  croît, parce que ce sont des fréquences de plus en plus limitées aux très basses fréquences qui concourent à sa formation.  $\overline{V^2}$  décroît parce qu'on ampute, en quelque sorte,  $\overline{U^2}$  de plus en plus, privant son spectre des hautes fréquences. Si on se rapporte à la démonstration du théorème X nous devons généraliser la relation (42) et montrer que, sous certaines conditions,  $\overline{V^2(o, \mathcal{E}')$ , décroît comme  $1/T$  lorsque  $T$  croît indéfiniment.

Nous remarquons tout de suite que la loi de décroissance de  $\overline{V^2(o, \mathcal{E}')$ , lorsque  $T$  croît, dépend uniquement des propriétés de  $\tilde{x}(\nu)$  aux très basses fréquences, c'est-à-dire près de  $\nu=0$ . *Les propriétés ergodiques de  $U(t, \mathcal{E}')$  dépendent du comportement de  $\tilde{x}(\nu)$  au voisinage de l'origine  $\nu=0$ .*

Avant d'étendre le théorème X, nous allons, pour bien fixer les idées, considérer quelques exemples. Nous désignerons par  $\gamma(\nu)$  le gain associé à  $m(u)$ .

$$a) \quad m(u) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -1 \leq u \leq 0 \\ 0 & \text{pour } u < -1 \text{ ou } u > 0 \end{cases} \quad \gamma^2(\nu) = \frac{\sin^2 \pi \nu}{\pi^2 \nu^2}$$

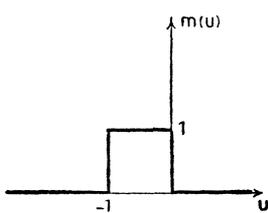


FIG. 6a.

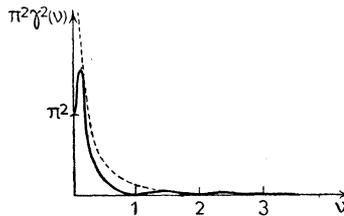


FIG. 6b.

$$b) \quad m(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u < 0 \\ e^{-u} & \text{pour } u > 0 \end{cases} \quad \gamma^2(\nu) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 \nu^2}$$

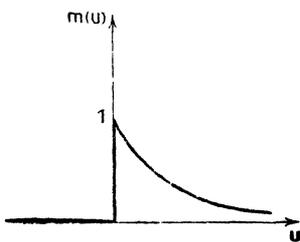


FIG. 7a.

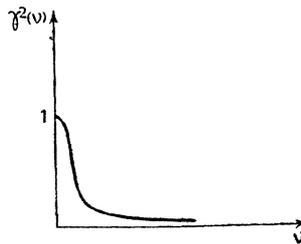


FIG. 7b.

La transformation ( $\mathcal{N}$ ) consiste alors à lier  $V$  à  $U$  par la relation différentielle :

$$\frac{dV}{dt} + V = U.$$

Au point de vue technique ce cas est celui d'une *cellule de filtrage par capacité résistance*, conformément au schéma ci-dessous [7c].

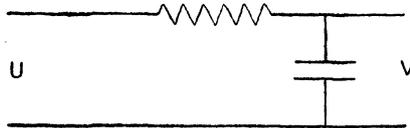


FIG. 7c.

$$c) \quad m(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u < 0 \\ 4\pi^2 u e^{-2\pi u} & \text{pour } u > 0 \end{cases} \quad \gamma^2(v) = \frac{1}{(1+v^2)^2}$$

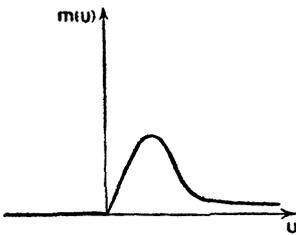


FIG. 8a.



FIG. 8b.

La transformation  $\mathcal{N}$  consiste alors à lier  $V$  et  $U$  par la relation différentielle :

$$\frac{1}{4\pi^2} \frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{\pi} \frac{dV}{dt} + V = U.$$

Au point de vue technique,  $V$  peut représenter l'*angle de déviation du miroir d'un galvanomètre à l'amortissement critique dont le cadre est parcouru par un courant  $U(t)$* .

$$d) \quad m(u) = \frac{2}{1+4\pi^2 u^2} \quad \gamma^2(v) = e^{-v}.$$

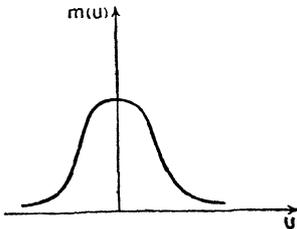


FIG. 9a.

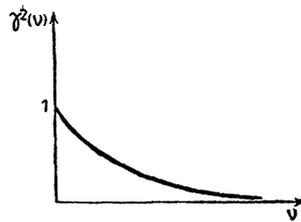


FIG. 9b.

THÉORÈME XI. — Si au voisinage de  $v = 0$ , il est possible de trouver un nombre  $H$  tel que l'on ait :

$$|\mathcal{F}(v_1) - \mathcal{F}(v_2)| \leq H |v_1 - v_2| \quad (1)$$

quels que soient  $v_1$  et  $v_2$  assez petits, on peut affirmer que, lorsque  $T$  tend vers l'infini,  $\overline{V^2(o, \mathcal{E}')}$  peut être majoré par une expression du type  $A/T$  où  $A$  est une constante positive.

Désignons en effet le gain correspondant à  $T = 1$  par  $\gamma(v)$ , on a :

$$\begin{aligned} \overline{V_T^2(o, \mathcal{E}')} &= \int_0^\infty g^2(v) d\mathcal{F}(v) = \int_0^\infty \gamma^2(vT) d\mathcal{F}(v) = \int_0^{v_1} \gamma^2(vT) d\mathcal{F}(v) \\ &+ \int_{v_1}^{+\infty} \gamma^2(vT) d\mathcal{F}(v). \end{aligned}$$

On peut, dans la première intégrale, majorer en utilisant l'inégalité (58).

$$\left| \int_0^{v_1} \gamma^2(vT) d\mathcal{F}(v) \right| < \int_0^{v_1} \gamma^2(v.T) H dv < H \int_0^\infty \gamma^2(vT) dv = \frac{H}{T} \int_0^\infty \gamma^2(u) du < \frac{A_1}{T}.$$

Cela est possible à condition de choisir  $v_1$  assez petit pour que (58) s'applique.  $v_1$  étant ainsi fixé, pour  $T$  assez grand, on pourra écrire :

$$\int_{v_1}^\infty \gamma^2(vT) d\mathcal{F}(v) \leq \frac{1}{v_1^2 T^2} \int_0^\infty d\mathcal{F}(v) < \frac{A_2}{v_1^2 T^2}.$$

D'où la conclusion (2).

Lorsque les conditions d'applications du théorème XI sont satisfaites, on peut dire que, pour la suite  $T = 1^2, 2^2, 3^2 \dots n^2 \dots$ , il y a convergence presque certaine de  $V(o, \mathcal{E}')$  vers 0. Ce résultat s'étend souvent, sans difficultés, au cas où  $T$  tend vers l'infini de façon continue.

Je fais, par exemple, la démonstration dans le cas où on prend :

$$m(u) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 u^2}.$$

On a :

$$V_T[o, \mathcal{E}'] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\theta, \mathcal{E}') m\left[\frac{-\theta}{T}\right] d\theta. \quad (59)$$

Soit  $\eta(T)$  le plus grand entier positif tel que  $\eta^2(T) \leq T$  il nous suffira de démontrer que  $\frac{1}{\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\theta, \mathcal{E}') m\left[\frac{-\theta}{T}\right] d\theta$  converge fortement vers 0 lorsque  $T$  tend vers l'infini.

(1) Condition de continuité de Lipschitz.

(2) Ce genre de raisonnement montre tout de suite que la condition pour que  $\overline{V^2}$  tende vers 0 lorsque  $T \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire pour que  $V$  tende vers 0 en moyenne quadratique, est qu'il n'y ait pas de masse concentrée à l'origine pour  $\mathcal{F}(v)$ , c'est-à-dire que l'on ait :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\tau) d\tau = 0.$$

On écrira :

$$\frac{1}{\eta^2(T)} \int_{-\infty}^{\infty} U(\theta, \mathcal{E}') m \left[ \frac{-\theta}{T} \right] d\theta = \frac{1}{\eta^2(T)} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\theta, \mathcal{E}') m \left\{ \frac{-\theta}{\eta^2(T)} \right\} d\theta \left. \vphantom{\int_{-\infty}^{+\infty}} \right\} \\ + \frac{1}{\eta^2(T)} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\theta, \mathcal{E}') \left\{ m \left( \frac{-\theta}{T} \right) - m \left[ \frac{-\theta}{\eta^2(T)} \right] \right\} d\theta \left. \vphantom{\int_{-\infty}^{+\infty}} \right\} \quad (60)$$

A cause de la décroissance de  $m(u)$  lorsque  $|u|$  croît, on a :

$$\left| m \left( \frac{-\theta}{T} \right) - m \left( \frac{-\theta}{\eta^2(T)} \right) \right| \leq m \left[ \frac{-\theta}{(\eta+1)^2} \right] - m \left[ \frac{-\theta}{\eta^2} \right]. \quad (61)$$

On majore le second terme du deuxième membre de 60 par :

$$Y_{\eta} = \frac{1}{\eta^2(T)} \int_{-\infty}^{+\infty} |U(\theta, \mathcal{E}')| \left\{ m \left[ \frac{-\theta}{(\eta+1)^2} \right] - m \left[ \frac{-\theta}{\eta^2} \right] \right\} d\theta \quad (62)$$

et en opérant comme cela a été fait pour le théorème X, on a :

$$\overline{Y_{\eta}^2} \leq \frac{1}{\eta^4} U_0^2 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ m \left( \frac{-\theta}{(\eta+1)^2} \right) - m \left( \frac{-\theta}{\eta^2} \right) \right\} d\theta \right]^2 \\ \leq \frac{A}{\eta^4} U_0^2 [(\eta+1)^2 - \eta^2]^2 \approx \frac{A U_0^2}{\eta^2}$$

où  $A$  est une constante.

On peut donc conclure exactement comme pour le théorème X.

Pour une fonction  $m(u)$  du type de l'exemple *c*) fourni page 30, ou du type  $\alpha e^{-u} \sin u$ , on ne pourrait pas écrire d'inégalité du type (61), mais on pourrait, tout de même, obtenir le résultat en utilisant la décroissance exponentielle et le fait que  $m(u)$  a une dérivée bornée uniformément.

*Remarque.* —  $\mu(T, \mathcal{E}')$  représentant toujours  $\frac{1}{T} \int_0^T U(t, \mathcal{E}') dt$  nous avons vu deux conditions suffisantes pour que  $\overline{\mu^2(T, \mathcal{E}')}$  puisse être borné par une expression du type  $A/T$  lorsque  $T \rightarrow \infty$  ; ces conditions sont :

a) le coefficient de corrélation est intégrable au sens de Césaro ;

b) la fonction spectrale satisfait à (58)  $\bullet$

Très souvent, dans les applications, le coefficient de corrélation est absolument intégrable. Les deux conditions sont alors simultanément remplies, on sait en effet que la fonction spectrale possède alors une dérivée continue.

4° EXTENSION A CERTAINES FONCTIONS NON STATIONNAIRES. — Considérons, maintenant, une fonction  $U(t, \mathcal{E}')$  satisfaisant aux hypothèses du théorème X à ceci près ; nous remplaçons la condition 3° par la suivante qui est plus restrictive :

Le coefficient de corrélation  $\rho(\tau)$  est tel que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\rho(\tau)| d\tau$  a une valeur finie. Nous supposons encore  $\bar{U} = 0$ .

Cela posé, considérons une fonction périodique de  $t$  : soit  $p_\theta(t)$ . Nous supposons que  $p_\theta(t)$  est continue et pourvue d'une dérivée continue. Nous désignerons par  $\theta$  la période et par  $M_p$  la borne supérieure du module  $|p_\theta(t)|$ .

Soit alors la fonction aléatoire :

$$\lambda(t, \mathcal{E}') = U(t, \mathcal{E}') \cdot p_\theta(t). \tag{63}$$

Ce n'est pas une fonction stationnaire. On peut, cependant, aboutir pour  $\lambda(t)$  à un énoncé très voisin de celui du théorème X. Posons en effet :

$$\mu(T, \mathcal{E}') = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda(t, \mathcal{E}') dt. \tag{64}$$

On a :

$$\overline{\mu^2} = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \overline{U(t, \mathcal{E}') U(t', \mathcal{E}')} p_\theta(t) p_\theta(t') dt dt'.$$

D'où :

$$\overline{\mu^2} \leq \frac{1}{T^2} U_0^2 \int_0^T \int_0^T |\rho(t-t')| M_p^2 dt dt'. \tag{65}$$

A l'aide de transformations simples, on obtient :

$$\overline{\mu^2} < 2 U_0^2 M_p^2 \int_0^1 |\rho(TV)| |1-V| dV. \tag{66}$$

$$\overline{\mu^2} < 2 M_p^2 U_0^2 \int_0^\varepsilon |\rho(TV)| |1-V| dV + 2 M_p^2 U_0^2 \int_\varepsilon^1 |\rho(TV)| |1-V| dV.$$

En prenant  $\varepsilon = T^{-\frac{1}{2}}$ , on montre, par des majorations évidentes, que l'on a, pour  $T$  assez grand :

$$\overline{\mu^2} < \frac{B}{T} \tag{67}$$

où  $B$  est une constante positive.

On en déduit que, lorsque  $T$  tend vers l'infini, par valeurs du type  $T = n^2$ , il y a une probabilité égale à l'unité pour que  $\mu(T, \mathcal{E}')$  converge vers 0.

On étend facilement le résultat au cas où  $T$  tend vers l'infini de façon continue.

Supposons maintenant que la condition  $\overline{U} = 0$  ne soit plus remplie ; nous poserons :

$$U(t, \mathcal{E}') = u(t, \mathcal{E}') + \overline{U}. \tag{68}$$

Nous mettrons, d'autre part,  $p_\theta(t)$  sous la forme  $a + p_{1,\theta}(t)$  où  $a$  est la constante définie par :

$$a = \int_0^\theta p_\theta(t) dt \tag{69}$$

de sorte que :

$$\int_0^\theta p_{1,\theta}(t) dt = 0. \tag{70}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\lambda(t, \mathcal{E}') &= \{u(t, \mathcal{E}') + \bar{U}\} \{a + p_{1,0}(t)\} \\ &= a\bar{U} + \bar{U}p_{1,0}(t) + u(t, \mathcal{E}') \cdot a + u(t, \mathcal{E}') \times p_{1,0}(t).\end{aligned}$$

D'où il découle, immédiatement, que  $\frac{1}{T} \int_0^T \lambda(t) dt$  converge fortement vers  $a\bar{U}$ .

*Remarque.* — Les résultats qui viennent d'être établis trouvent leur application dans les problèmes techniques toutes les fois qu'on étudie la transmission, dans un dispositif linéaire, d'un signal  $\sin 2\pi\nu t$  à côté du bruit  $x(t)$ .

#### C. — LES PROPRIÉTÉS ERGODIQUES DES FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES INTRODUITES PAR L'ÉTUDE DE L'EFFET DE GRENAILLE

1° L'application du théorème X aux fonctions aléatoires  $y(t) = y \{x(t)\}$  introduites par l'effet de grenaille se fait en montrant que le COEFFICIENT DE CORRÉLATION A, POUR CES FONCTIONS ALÉATOIRES, UNE DÉCROISSANCE EXPONENTIELLE.

On se trouve donc dans le cas où le *coefficient de corrélation est absolument intégrable*. La décroissance exponentielle découle des remarques suivantes :

Soient  $t$  et  $t'$  deux valeurs du temps ( $t' > t$ ) on peut poser, comme cela a déjà été fait plusieurs fois :

$$x(t') = x_t(t') + \delta x_t(t') \tag{71}$$

relation où  $x_t(t')$  représente la contribution à  $x(t')$  des chocs postérieurs à  $t$  et où  $\delta x_t(t')$  représente la contribution à  $x(t')$  des chocs antérieurs à  $t$ .

Il découle des hypothèses faites sur la répartition des chocs que  $x_t(t')$  et  $\delta x_t(t')$  sont indépendants, ainsi que  $x(t)$  et  $x_t(t')$ . On peut, par ailleurs, montrer que toute moyenne  $\overline{|\delta x_t(t')|^m}$  ( $m$  entier) décroît, lorsque  $|t - t'|$  croît, à la manière d'une exponentielle  $e^{-\varphi |t - t'|}$  [ $\varphi > 0$ ]. A partir de ces remarques, il est possible, au moins pour les fonctions  $y(x)$  que nous avons l'habitude de considérer, de conclure simplement à la décroissance exponentielle. *Je vais, par exemple, faire la démonstration, de façon explicite, dans l'hypothèse où  $y(x)$  a une borne uniforme  $m_y$  et possède une dérivée bornée uniformément par  $m_y$ .* On a alors :

$$\begin{aligned}y(t) \cdot y(t') &= y \{x(t)\} \cdot y \{x(t')\} = y \{x(t)\} \cdot y \{x_t(t') + \delta x_t(t')\} \\ &= y \{x(t)\} [y \{x_t(t')\} + \delta y_t(t')].\end{aligned}$$

On sait, d'ailleurs, que  $y \{ x(t) \}$  et  $y \{ x_i(t') \}$  sont indépendants; d'où :

$$\overline{y(t)y(t')} = \overline{y \{ x(t) \}} \cdot \overline{y \{ x_i(t') \}} + \overline{y \{ x(t) \}} \cdot \overline{\delta y_i(t')}.$$

D'autre part :

$$\overline{y \{ x_i(t') \}} = \overline{y \{ x(t') - \delta x_i(t') \}} = \overline{y \{ x(t') \}} - \overline{\delta y_i(t')}.$$

D'ailleurs :

$$| \delta y_i(t') | \leq m_y \cdot | \delta x_i(t') |.$$

D'où :

$$\begin{aligned} | \overline{y(t) \cdot y(t')} - \overline{y(t)} \cdot \overline{y(t')} | &< | \overline{y \{ x(t) \}} \overline{\delta y_i(t')} | + | \overline{y \{ x(t) \}} \cdot \overline{\delta y_i(t')} | \\ &< 2 \sqrt{\overline{\delta x_i^2(t')} \cdot \overline{y^2(t)}} m_y. \end{aligned}$$

D'où le résultat, en utilisant la décroissance exponentielle de  $\overline{\delta x_i^2(t')}$  et le fait que  $| y(t) |$  est borné.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

*THÉORÈME XII.* —  $x(t)$  étant la fonction aléatoire introduite dans la première partie et  $y(x)$  étant une fonction uniformément bornée pourvue d'une dérivée uniformément bornée,  $\frac{1}{T} \int_0^T y \{ x(t) \} dt$  converge fortement vers  $\bar{y}$  lorsque  $T \rightarrow \infty$ .

2° GÉNÉRALISATIONS DIVERSES DU THÉORÈME XII. — On étend très facilement le résultat du théorème XII à des fonctions  $y(x)$  ne satisfaisant pas aux hypothèses précédentes :

a) Les cas les plus utiles sont fournis par les fonctions :

$$y = x^p \quad \text{ou} \quad y = | x |^p.$$

qui servent dans les études des détecteurs.

On montre aisément la décroissance exponentielle du coefficient de corrélation.

b) Supposons maintenant que la fonction de répartition de  $x(t)$  soit continue. Nous avons vu qu'il en est ainsi, en particulier, lorsque  $R_1(t)$  est formé d'une combinaison d'exponentielles (v. p. 19).

Considérons alors la fonction  $y_a(x)$  définie par les relations :

$$y_a(x) = 1 \text{ si } x < a \quad \text{et} \quad y_a(x) = 0 \text{ si } x \geq a.$$

On peut encadrer en quelque sorte  $y_a(x)$  entre  $y'_a(x)$  et  $y''_a(x)$  définis de la façon suivante :

$$y''_a(x) \geq y_a(x) \geq y'_a(x)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{pour : } x < a - \varepsilon \quad y''_a(x) = y_a(x) = y'_a(x) = 1 \\
 \text{pour : } a - \varepsilon < x < a \quad y''_a(x) = 1 \text{ et } y'_a(x) = \frac{a-x}{\varepsilon} \\
 \text{pour : } a < x < a + \varepsilon \quad y''_a(x) = \frac{x-a-\varepsilon}{-\varepsilon} \text{ et } y'_a(x) = 0 \\
 \text{pour : } x > a + \varepsilon \quad y''_a(x) = y_a(x) = y'_a(x) = 0
 \end{array} \right\} \text{ voir fig. 10.}$$

Chacune des fonctions  $y'_a(x)$  et  $y''_a(x)$  est bornée. Elles ont des dérivées bornées uniformément (La présence des points anguleux ne crée pas de difficultés). Par suite, les résultats établis pour les fonctions  $y(x)$  bornées et à dérivées bornées s'appliquent à ces fonctions.

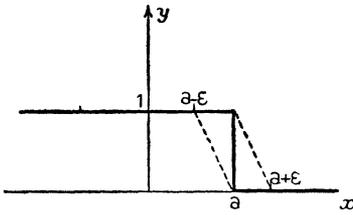


FIG. 10.

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on étend ces résultats à  $y_a(x)$ .

On étend tout d'abord la possibilité de permuter les symboles de moyenne et d'intégration.

Pour étendre la convergence forte, on procède comme suit.

On a :

$$\frac{1}{T} \int_0^T y'_a(t) dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T y_a(t) dt \leq \frac{1}{T} \int_0^T y''_a(t) dt.$$

Supposons que, sur une épreuve E,  $\frac{1}{T} \int_0^T y_a(t) dt$  ne converge pas vers  $\overline{y_a(t)}$  ; cela veut dire qu'il y a au moins une valeur positive  $\eta$  telle qu'il existe des valeurs de T, non bornées, pour lesquelles on a :

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T y_a(t) dt - \overline{y_a(t)} \right| > \eta,$$

cette inégalité ne peut avoir lieu que si l'une ou l'autre des inégalités suivantes est vérifiée :

- 1)  $\frac{1}{T} \int_0^T y_a(t) dt > \overline{y_a(t)} + \eta,$
- 2)  $\frac{1}{T} \int_0^T y_a(t) dt < \overline{y_a(t)} - \eta.$

Soient E' et E'' les éventualités dans lesquelles, pour des valeurs de T non bornées, 1) ou 2) sont satisfaites. Soit une épreuve E', on peut choisir  $y''_a(x)$  tel que  $\overline{y''_a(t)}$  soit aussi voisin que l'on veut de  $\overline{y_a(t)}$  puisque la fonction de répartition de  $x(t)$  est continue et que  $y''$  et  $y_a$  sont bornés ; en particulier, on peut choisir une fonction  $y''$  telle que :

$$\overline{y''_a} \leq y_a + \eta/3,$$

or, on a :

$$\frac{1}{T} \int_0^T y_a(t) dt < \frac{1}{T} \int_0^T y_a''(t) dt.$$

Sur toute épreuve  $E'$ , on a donc, pour des valeurs de  $T$  non bornées supérieurement :

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T y_a''(t) dt - \overline{y_a''(t)} \right| \geq 2 \eta/3.$$

Il s'ensuit que, sur  $E'$ ,  $\frac{1}{T} \int_0^T y_a''(t) dt$  ne converge pas vers  $\overline{y_a''}$ . On montrerait de même que, sur  $E''$ ,  $\frac{1}{T} \int_0^T y_a'(t) dt$  ne converge pas vers  $\overline{y_a'}$ .

Or, on a évidemment :

$$\text{Prob } E \leq \text{Prob } E' + \text{Prob } E''.$$

Les fonctions  $y_a'$  et  $y_a''$  donnant lieu à des convergences presque sûres, on a  $\text{Prob } E = 0$ .

Il y a une probabilité nulle pour que  $\frac{1}{T} \int_0^T y_a(t) dt$  ne converge pas vers  $\overline{y_a(t)}$ .

REMARQUES. — 1° *Sens physique du résultat précédent.* — La valeur moyenne  $\overline{y_a(t)}$  est égale à la probabilité pour qu'à un instant quelconque, on ait :

$$x(t) < a.$$

Pour obtenir expérimentalement une valeur approchée de cette probabilité, on doit observer simultanément un très grand nombre d'expériences identiques, ce qui n'est pas réalisable sans soulever de grosses difficultés. Le résultat précédent nous montre que cette valeur peut être déduite de l'observation, pendant une très longue durée, d'une expérience unique.

2° *La moyenne temporelle  $\frac{1}{T} \int_0^T y_a(t) dt$  et le problème de la diffusion.* — a) J'ai indiqué comment on pouvait calculer la fonction caractéristique  $\Phi[u_1, u_2, \dots, u_k]$  relative à l'ensemble des  $K$  variables liées  $x(t_1), x(t_2) \dots x(t_k)$ . On peut donc résoudre le problème suivant :

*Problème : Quelle est la probabilité pour que l'on ait simultanément :*

$$x(t_k) \leq a \quad k = 1, 2, \dots, K?$$

b) Il résulte, de ce qui précède, que  $t_1, t_2 \dots t_k$  étant des instants quelconques, on sait calculer  $\Phi_{t_1, \dots, t_k}[u_1, u_2, \dots, u_k]$  et, par suite, on sait, en principe, calculer la fonction de répartition  $F(t_1, t_2, \dots, t_k)$  des  $K$  variables liées  $x(t_1), x(t_2) \dots x(t_k)$ .

Faisons la transformation  $y = y(x)$ ; nous saurons calculer, en principe :

$$\overline{y\{x(t_1)\} \cdot y\{x(t_2)\} \dots y\{x(t_k)\}} = \int \int \dots \int y[x(t_1)] \dots y[x(t_k)] dF.$$

Considérons maintenant :

$$X = \frac{1}{T} \int_0^T y(x) dt$$

on a :

$$X^p = \frac{1}{T^p} \int_0^T \dots \int_0^T y\{x(t_1)\} \dots y\{x(t_p)\} dt_1 \dots dt_p.$$

Dans la mesure où on peut permuter les symboles de moyennes d'intégration, on a :

$$\overline{X^p} = \frac{1}{T^p} \int_0^T \dots \int_0^T \overline{y\{x(t_1)\} \dots y\{x(t_p)\}} dt_1 \dots dt_p.$$

D'après ce qui vient d'être dit, la fonction figurant sous le signe somme est une fonction connue de  $t_1, t_2, \dots, t_p$ , on connaît donc tous les moments :

$$\overline{X}, \overline{X^2}, \dots, \overline{X^p} \dots$$

Si  $\Phi(U)$  est la fonction caractéristique associée à  $X$ , au moins si la série des moments converge, on aura :

$$\Phi(U) = 1 + \frac{i\overline{X}U}{1!} + \frac{i^2\overline{X^2}U^2}{2!} + \frac{i^3\overline{X^3}U^3}{3!} + \dots \quad (72)$$

c) Proposons-nous alors de calculer la probabilité  $P$  pour que l'on ait  $x \leq a$  en tous les points  $t$  de l'intervalle  $0, T$ . Considérons pour cela  $y(x) = 1 - y_a(x)$ .

Les moyennes  $\overline{y[x(t_1)]}, \overline{y[x(t_2)]} \dots$  existent puisque  $y\{x(t)\}$  est borné. D'ailleurs  $0 \leq X \leq 1$ , par suite tous les moments  $\overline{X}, \overline{X^2}, \dots, \overline{X^p} \dots$  existent et sont au plus égaux à 1. La série :

$$\Phi(U) = 1 + \frac{i\overline{X}U}{1!} + \frac{i^2\overline{X^2}U^2}{2!} + \dots$$

est, pour  $|U| < U_0$ , majorée par :

$$|\Phi(U)| \leq 1 + \frac{U_0}{1!} + \frac{U_0^2}{2!} + \dots$$

elle converge donc dans tout domaine borné des  $U$ .

Faisons maintenant la remarque fondamentale suivante :

Dire que, sur une épreuve,  $x$  est, pour tout  $t$  ( $0 \leq t \leq T$ ) inférieur à  $a$ , c'est-à-dire que  $X = 0$  et réciproquement ; par suite, la probabilité pour que, pour tous les points de l'intervalle  $0, T$ , on ait  $x \leq a$  est égale à la masse de probabilité concentrée au point  $X = 0$ . Or, on sait qu'à partir

de la fonction caractéristique, cette masse se calcule aisément. En la désignant par P, on a :

$$P = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} \Phi(U) dU. \tag{73}$$

La série  $\Phi(U)$  est uniformément convergente, dans un domaine borné des U, si grand soit-il ; on peut donc intégrer terme à terme ; on trouve :

$$P = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left\{ 1 - \overline{X^2} \frac{\tau^2}{3!} + \overline{X^4} \frac{\tau^4}{5!} - \overline{X^6} \frac{\tau^6}{7!} + \dots \right\}. \tag{74}$$

étant donné, le terme général de la série figurant dans (74) finit par décroître de sorte qu'on peut appliquer le théorème sur les séries alternées pour évaluer la somme de la série.

D. — ETUDE DE LA LOI D'APPROCHE DE  $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$  VERS  $\overline{y(t)}$

1° On a vu, dans ce qui précède, que, à condition d'astreindre la fonction  $y(x)$  à certaines conditions assez générales, on avait, avec une probabilité égale à l'unité :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \overline{y(t)}$$

ou, ce qui revient au même :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{ y(t) - \overline{y(t)} \} dt = 0.$$

Nous allons, maintenant, étudier ce qu'on pourrait appeler la loi d'approche, c'est-à-dire étudier les propriétés des variables aléatoires précédentes, pour T grand, mais fini. Nous poserons :

$$Y(t) = y(t) - \overline{y} \tag{75}$$

$$\xi[y, T] = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \tag{76}; \quad \xi[Y, T] = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \tag{77}$$

Sous des conditions assez générales, nous allons montrer que la variable aléatoire  $\xi[Y, T]$  converge (après avoir été normée) vers une variable aléatoire laplacienne.

*Nous supposons que  $y(x)$  est bornée et possède une dérivée bornée.* Les résultats obtenus seront valables sous des hypothèses moins restrictives ; en particulier, ils seront valables si  $y(x)$  est un polynôme en  $x$ .

Nous désignerons par  $C(\tau)$  la fonction de corrélation :

$$C(\tau) = \overline{Y(t)Y(t + \tau)} \tag{78}$$

et nous poserons :

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) d\tau. \tag{79}$$

Nous supposons  $A \neq 0$  (1). On peut alors, grâce à un raisonnement qui se calque sur celui qui a déjà été fait page 33, montrer que, pour les grandes valeurs de  $T$ ,  $\overline{\xi^2[Y, T]}$  est un infiniment petit équivalent à  $A/T$  :

$$\overline{\xi^2[Y, T]} \sim \frac{A}{T}.$$

Ce résultat s'obtient d'ailleurs aisément en remarquant que  $2A$  est la pente à l'origine de la fonction spectrale  $\tilde{f}(\nu)$  associée à la fonction aléatoire  $Y(t)$  ( $\nu =$  fréquence).

Étudions l'ordre de grandeur de  $\overline{\xi^4[Y, T]}$  :

$$\overline{\xi^4[y, T]} = \frac{1}{T^4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \overline{Y(t) \cdot Y(t') Y(t'') Y(t''')} dt dt' dt'' dt''''.$$

a) Pour  $|t - t'| > \Delta$ ,  $|t - t''| > \Delta$ ,  $|t - t'''| > \Delta$  on a, si  $\Delta$  est assez grand :

$$|\overline{Y(t) \cdot Y(t') Y(t'') Y(t''')}| < e^{-f_1 \Delta} \quad f_1 > 0$$

b) Supposons maintenant que les quatre valeurs  $t, t', t'', t'''$  se scindent en deux groupes  $[t, t']$  et  $[t'', t''']$  pour fixer les idées] très éloignés l'un de l'autre. Soit  $\Delta$  la plus petite des distances  $|t - t''|$ ,  $|t' - t''|$ ,  $|t - t'''|$  et  $|t' - t'''|$  ; en négligeant un infiniment petit du type  $e^{-f_2 \Delta}$ , on peut écrire :

$$\overline{Y(t) Y(t') Y(t'') Y(t''')} = \overline{Y(t) \cdot Y(t')} \cdot \overline{Y(t'') Y(t''')}.$$

Dans ces conditions, on voit d'une façon assez intuitive, que, si  $T$  est grand, on aura l'ordre de grandeur de l'intégrale quadruple en considérant les groupes  $t, t', t'', t'''$  pour lesquels les valeurs sont réparties en deux sous-groupes comprenant chacun des valeurs très voisines. Ces deux sous-

(1) La signification de la condition  $A \neq 0$  est évidente ;  $A$  représente en effet la moitié de la dérivée à l'origine de la fonction spectrale  $\tilde{f}(\nu)$  associée à  $Y(t)$  ; en désignant par  $\overline{Y_{\nu=0}^2}$  la valeur pour  $\nu = 0$  de la composante spectrale, associée à  $Y(t)$ , on a :

$$A = \frac{\overline{Y_{\nu=0}^2}}{2}.$$

La condition  $A \neq 0$  est vérifiée lorsque le spectre de  $Y(t)$  possède des composantes à très basse fréquence. Il en est sûrement ainsi si on a  $y = x^{2p}$  ( $p$  entier) ; en particulier, pour  $p = 1$ , j'ai montré qu'on avait, avec les notations de la page 8 :

$$\overline{Y_{\nu=0}^2} = 8q^4 \rho^2 \int_0^\infty g^4(\nu) d\nu + 8q^4 \rho \left[ \int_0^\infty g^2(\nu) d\nu \right]^2 > 0.$$

(BLANC-LAPIERRE. *Comptes rendus*, 216 (1943), 40).

groupes peuvent être très éloignés l'un de l'autre. Il y a trois façons de grouper les quatre valeurs par groupes de deux ; on aura donc :

$$\left. \begin{aligned} \overline{\xi_4^2} &= \frac{3}{T^4} \left\{ \int_0^T \int_0^T \overline{Y(t)Y(t')} dt dt' \right\}^2 \\ \overline{\xi_4^2} &\sim \frac{3A^2}{T^2} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Ce raisonnement est purement intuitif ; mais il peut être mis sous une forme rigoureuse. Plus généralement, on a, de même :

$$\overline{\xi_{2n}^2} \sim \frac{1}{T^n} \frac{(2n)!}{n! 2^n} A^n. \quad (81)$$

Ce sont là les moments d'ordre pair associés à la fonction caractéristique laplacienne  $e^{-\frac{A}{T} \frac{u^2}{2}}$ . On est donc conduit à penser que  $\xi[Y.T]$  obéit, pour les très grandes valeurs de  $T$ , à une loi de Laplace. C'est ce que nous allons établir.

2° Nous allons d'abord donner une idée de la démonstration pour la rendre plus intuitive. — Soient les variables  $x(t_1)$  et  $x(t_2)$  ; si  $|t_2 - t_1|$  devient très grand, ces variables tendent à devenir indépendantes de sorte que, tout au moins de façon approximative, nous pourrions considérer que, pour  $|t_1 - t_2| \gg \tau$  (où  $\tau$  est une valeur positive très grande) tout se passe comme si  $x(t_1)$  et  $x(t_2)$  étaient indépendantes. Les valeurs prises par  $x(t)$  sur l'un ou l'autre des deux intervalles :

$$t_1 - \Delta, t_1 \quad \text{et} \quad t_2, t_2 + \Delta$$

où  $t_2 > t_1$  et  $\Delta > 0$  seront donc indépendantes si  $t_2 - t_1 > \tau$ .

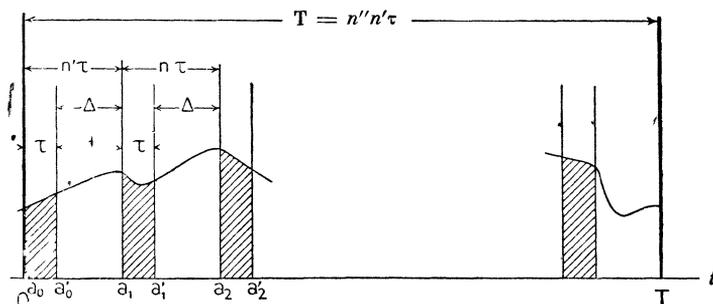


FIG. 11.

On peut alors supposer que l'intervalle  $OT$  se divise en un très grand nombre d'intervalles  $\Delta$  intercalés avec des intervalles  $\tau$  ; si  $\tau/\Delta$  est petit, on conçoit que l'apport des intervalles  $\tau$  à l'intégrale  $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$  est négligeable devant l'apport des intervalles  $\Delta$  ; mais alors  $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$  se présente

comme la somme d'un très grand nombre de variables indépendantes et la tendance vers la loi de Laplace devient un fait très naturel.

3° Reprétons le raisonnement précédent en lui donnant une forme rigoureuse. — a) La division de l'intervalle O.T en intervalles  $\tau$  et  $\Delta$  se fait conformément à la figure 11; on pose  $T = n'' \cdot n' \tau$  et  $\Delta = (n' - 1)\tau$  ( $n'$  et  $n''$  entiers positifs).

La fonction aléatoire  $x(t)$  ne dépend que de la répartition des chocs dans le temps et de la réponse  $R_1(t)$  à une impulsion de valeur 1.

Je vais substituer à  $x(t)$  une autre fonction aléatoire  $x_\alpha(t)$  très voisine sauf dans des cas très peu probables, mais telle que pour  $|t_1 - t_2| > \tau$ ,  $x_\alpha(t_1)$  et  $x_\alpha(t_2)$  soient rigoureusement indépendants. Il suffit de remplacer  $R_1(t)$  par  $R_\alpha(t)$  obtenu en tronquant  $R_1(t)$  pour  $t > \tau$  conformément à la figure 12. Nous poserons :

$$R_\beta(t) = R_1(t) - R_\alpha(t).$$

On a donc :

$$\begin{cases} R_1(t) = R_\alpha(t) + R_\beta(t) \\ x(t) = x_\alpha(t) + x_\beta(t) \end{cases} \quad (82)$$

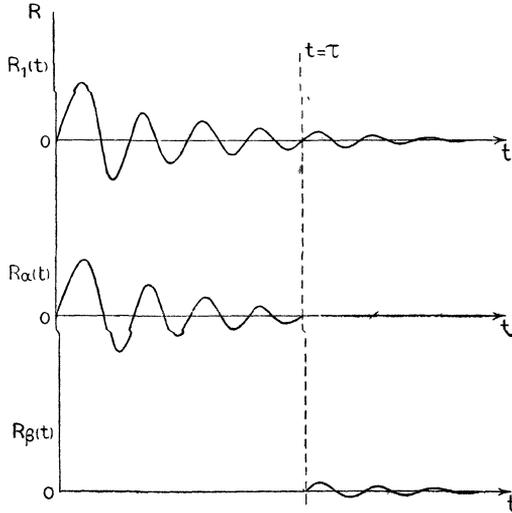


FIG. 12.

Rappelons les notations :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = y \{ x(t) \} = y \{ x_\alpha(t) + x_\beta(t) \} \\ \xi[y, T] = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \\ \xi[Y, T] = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t) dt \\ Y(t) = y(t) - \bar{y} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y_\alpha(t) = y \{ x_\alpha(t) \} \\ \xi[y_\alpha, T] = \frac{1}{T} \int_0^T y_\alpha(t) dt \\ \xi[Y_\alpha, T] = \frac{1}{T} \int_0^T Y_\alpha(t) dt \\ Y_\alpha(t) = y_\alpha - \bar{y}_\alpha \end{array} \right\} \quad (83)$$

J'introduis, en plus, la variable aléatoire :

$$\xi_{\gamma}[y_{\alpha}, T] = \frac{1}{T} \sum_i \int_{a'_i}^{a_{i+1}} y_{\alpha}(t) dt \quad (84)$$

et :

$$\xi_{\gamma}[Y_{\alpha}, T] = \frac{1}{T} \sum_i \int_{a'_i}^{a_{i+1}} [y_{\alpha}(t) - \overline{y_{\alpha}(t)}] dt. \quad (85)$$

On peut écrire :

$$\xi_{\gamma}[Y_{\alpha}, T] = \frac{(n' - 1)\tau}{T} \sum_i \frac{1}{\Delta} \int_{a'_i}^{a_{i+1}} \{y_{\alpha}(t) - \overline{y_{\alpha}(t)}\} dt. \quad (86)$$

Posons :

$$\mu_{\alpha,i} = \frac{1}{\Delta} \int_{a'_i}^{a_{i+1}} y_{\alpha}(t) dt \quad (86) \quad \text{et} \quad \overline{\mu_{\alpha,i}} = \frac{1}{\Delta} \int_{a'_i}^{a_{i+1}} \overline{y_{\alpha}(t)} dt \quad (87)$$

$$\frac{1}{\Delta} \int_{a'_i}^{a_{i+1}} \{y_{\alpha}(t) - \overline{y_{\alpha}(t)}\} dt = \mu_{\alpha,i} - \overline{\mu_{\alpha,i}} = \mu'_{\alpha,i}.$$

On sait que, pour  $\Delta$  assez grand, on a :

$$\overline{\mu_{\alpha,i}} \approx \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{Y_{\alpha}(0)Y_{\alpha}(\theta)} d\theta.$$

D'ailleurs, si  $n'$  et  $\tau$  sont assez grands, on aura :

$$\overline{\mu_{\alpha,i}} \approx \frac{A}{\Delta} = \frac{A}{(n' - 1)\tau}.$$

La variable aléatoire :

$$\mu''_{\alpha,i} = \mu'_{\alpha,i} \times \sqrt{\frac{(n' - 1)\tau}{A}}$$

a, pour  $\tau$  et  $n'$  grands, un écart type voisin de 1. Posons :

$$\mu'''_{\alpha,i} = \sqrt{\frac{(n' - 1)\tau}{A}} \frac{1}{\sqrt{n''}} \mu'_{\alpha,i}. \quad (89)$$

La variable aléatoire  $\zeta = \sum_i \mu'''_{\alpha,i}$  a aussi un écart type voisin de 1, car les variables  $\mu'_{\alpha,i}$  sont indépendantes. Reprenons, d'autre part, la variable aléatoire  $\xi[Y, T]$  et associons-lui la variable :

$$\textcircled{u} = \xi[Y, T] \sqrt{\frac{T}{A}} \quad (90)$$

elle a aussi, pour  $T$  assez grand, un écart type voisin de 1.

b) Je vais poursuivre la démonstration pour  $\tau = n$  ( $n$  entier),  $n' = n^2$  et  $n'' = n$  (en d'autres termes, je fais croître  $T$  vers l'infini par valeurs de

type  $n^5$ ). A chaque valeur de  $n$ , est associée une variable  $\textcircled{\Pi}_n$  et une variable  $\zeta_n$ .

LEMME I. — Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , la variable aléatoire  $\zeta_n$  converge vers une variable limite obéissant à une loi de Laplace.

Soit  $\varphi(u)$  la fonction caractéristique associée à une variable aléatoire réelle  $v$ , on a :

$$\varphi(u) = X + iY = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos uv dF(v) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin uv dF(v).$$

En prenant des développements limités pour  $X$  et  $Y$  et en supposant que  $\overline{v^4}$  existe, on peut écrire :

$$\left| \varphi(u) - 1 - \frac{i u \bar{v}}{1!} + \frac{u^2 \bar{v}^2}{2!} \right| < \frac{|\bar{v}|^3 |u|^3}{3!} + \frac{|\bar{v}|^4 |u|^4}{4!}.$$

Appliquons cela à :

$$\mu''_{\alpha,i} = \sqrt{\frac{(n'-1)\tau}{A}} \quad \mu'_{\alpha,i} = \sqrt{\frac{(n^3-1)n}{A}} \mu'_{\alpha,i}.$$

On a  $\overline{\mu''_{\alpha,i}} = 0$ . Posons  $m''_2 = \overline{\mu''_{\alpha,i}}$  et soit  $\varphi''(u)$  la fonction caractéristique associée à  $\mu''_{\alpha,i}$ .

On a :

$$\left| \varphi''(u) - 1 + \frac{u^2}{2!} m''_2 \right| < C[|u|^3 + |u|^4]. \quad (C \text{ constante} > 0)$$

Soit  $\varphi'''(u)$  la fonction caractéristique relative à  $\mu'''_{\alpha,i}$ .

On a  $\varphi'''(u) = \varphi'' \left[ \frac{u}{\sqrt{n''}} \right]$ ; en remplaçant  $u$  par  $\frac{u}{\sqrt{n''}}$  dans l'équation précédente, on a :

$$\left| \varphi'''(u) - 1 + \frac{u^2}{2!} \frac{m''_2}{n''} \right| < C \left[ \left| \frac{u}{\sqrt{n''}} \right|^3 + \left| \frac{u}{\sqrt{n''}} \right|^4 \right].$$

On peut donc écrire :

$$\varphi'''(u) = 1 - \frac{u^2}{2} \frac{m''_2}{n''} + \textcircled{\circ} \left[ \left| \frac{u}{\sqrt{n''}} \right|^2 \right] \quad (91)$$

où  $\textcircled{\circ} \left[ \left| \frac{u}{\sqrt{n''}} \right|^2 \right]$  est un infiniment petit en  $\frac{u}{\sqrt{n''}}$  d'ordre supérieur à 2.

Supposons  $u$  borné de façon quelconque :  $|u| < U$ ; on pourra prendre  $n[n'' = n]$  assez grand pour qu'il soit possible d'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \Psi'''(u) &= L\varphi'''(u) = L \left\{ 1 - \frac{u^2}{2} \frac{m''}{n} + \circ \left[ \left( \frac{u}{\sqrt{n}} \right)^2 \right] \right\} \\ &= L \left[ 1 - \frac{u^2 m''}{2n} \right] + L \left\{ 1 + \frac{\circ \left[ \left( \frac{u}{\sqrt{n}} \right)^2 \right]}{1 - \frac{m''}{2} \frac{u^2}{n}} \right\} \\ &= - \frac{m''}{2n} u^2 + \circ \left\{ \left| \frac{u}{\sqrt{n}} \right|^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

La fonction caractéristique  $\varphi_n(u)$  relative à  $\zeta_n$  est donnée par :

$$\Psi_n(u) = L\varphi_n(u) = nL\varphi'''(u) = - \frac{m'' u^2}{2} + n \circ \left[ \left| \frac{u}{\sqrt{n}} \right|^2 \right].$$

D'ailleurs si  $n \rightarrow \infty$ ,  $m''_2$  tend vers 1 et :

$$n \circ \left\{ \left| \frac{u}{\sqrt{n}} \right|^2 \right\} = u^2 \left| \frac{\sqrt{n}}{u} \right|^2 \circ \left[ \left( \frac{u}{\sqrt{n}} \right)^2 \right] < U^2 \left| \frac{\sqrt{n}}{u} \right|^2 \circ \left\{ \left| \frac{u}{\sqrt{n}} \right|^2 \right\}.$$

La dernière expression tend vers 0 d'après la définition de  $\circ \{ | | \}$ .

Par suite, dans tout domaine borné de  $u$ , il y a convergence uniforme de  $\Psi(u)$  vers  $-\frac{u^2}{2}$  ce qui établit le lemme I.

*LEMME II.* — Lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\zeta_n$  et  $\textcircled{\text{H}}_n$  sont asymptotes en probabilité c'est-à-dire que  $\eta_1$  et  $\eta_2$  étant deux nombres positifs quelconques donnés à l'avance, on peut trouver une valeur  $N$  telle que, pour  $n > N$ , on ait :

$$\text{Prob} \left\{ \left| \zeta_n - \textcircled{\text{H}}_n \right| > \eta_1 \right\} < \eta_2.$$

On a, en effet :

$$\zeta_n = \frac{\xi_\gamma[Y_\alpha, T] \cdot T}{\sqrt{\Delta n''(n' - 1)\tau}} = \frac{\xi_\gamma[Y_\alpha, T] n^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\Delta n(n^3 - 1)n}} = \frac{\xi_\gamma[Y_\alpha, T] n^4}{\sqrt{\Delta(n^3 - 1)}}.$$

On peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} \left| \zeta_n - \textcircled{\text{H}}_n \right| &< \left| \frac{\xi_\gamma[Y_\alpha, T] \cdot T}{\sqrt{\Delta n''(n' - 1)\tau}} - \frac{\xi[Y_\alpha, T] \cdot T}{\sqrt{\Delta n''(n' - 1)\tau}} \right| \\ &+ \left| \frac{\xi[Y_\alpha, T] \cdot T}{\sqrt{\Delta n''(n' - 1)\tau}} - \xi[Y_\alpha, T] \sqrt{\frac{T}{\Delta}} \right| + \left| \xi(Y_\alpha, T) \sqrt{\frac{T}{\Delta}} - \xi[Y, T] \sqrt{\frac{T}{\Delta}} \right| \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Désignons par  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , les valeurs des modules des trois termes contenus dans le second membre de l'inégalité précédente, il nous suffira de

montrer qu'on peut choisir  $N$  assez grand pour que, pour  $n > N$ , on ait :

$$\bar{\lambda}_1 < \varepsilon, \quad \bar{\lambda}_2 < \varepsilon, \quad \bar{\lambda}_3 < \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est une quantité finie, très petite, donnée à l'avance. Des majorations simples montrent que  $C_1, C_2, C_3$  étant des constantes, on peut écrire :

$$\bar{\lambda}_1 < \frac{C_1}{\sqrt{An}}; \quad \bar{\lambda}_2 < \frac{C_2}{\sqrt{An}}; \quad \bar{\lambda}_3 < \frac{C_3}{\sqrt{A}} n^{5/2} e^{-\varphi n} \quad (\varphi > 0)$$

ce qui démontre le résultat énoncé.

J'ai donc démontré que, lorsque  $T \rightarrow \infty$  par valeurs du type  $n^5$ ,  $\textcircled{H}$  a une fonction de répartition qui tend vers une loi de Laplace.

Le résultat s'étend au cas où  $T \rightarrow \infty$  de façon quelconque en utilisant une méthode assez voisine de celle qui a déjà servi pour la démonstration du théorème X ; une difficulté se présente qui tient au fait que  $(n+1)^5 - n^5$  est d'un ordre supérieur à  $\sqrt{n^5}$  ; on est amené à couper l'intervalle  $n^5, (n+1)^5$  en deux sous-intervalles  $n^5, n^5 + n^2$  et  $n^5 + n^2, (n+1)^5$ . Si  $T$  tombe dans le premier, on peut majorer en prenant  $|Y(t)|$  ; si  $T$  tombe dans le second, l'intervalle  $n^5, T$  est alors assez grand pour que le carré moyen de l'intégralé entre ces limites soit équivalent à  $(T - n^5)A$  c'est-à-dire majoré par  $10n^4A$  dont le quotient par  $(\sqrt{n^5})^2$  tend vers zéro. On peut donc énoncer le résultat suivant :

*THEORÈME XIII. — La variable aléatoire*

$$\textcircled{H} = \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{A}} \int_0^T Y(t) dt$$

*tend vers une variable laplacienne d'écart type 1 pour les grandes valeurs de T.*



### TROISIÈME PARTIE

## ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA DENSITÉ. FORMULES ASYMPTOTIQUES. FLUCTUATIONS DANS LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

### I. — GÉNÉRALITÉS.

Les formules fondamentales, qui aboutissent à la mise en évidence de la fonction  $\Phi$ , font toutes intervenir la densité  $\rho$ . Or, il est évident qu'il n'y a aucun lien physique entre les phénomènes qui servent à définir l'unité de temps (donc la densité  $\rho$ ) et ceux que j'étudie ; par suite  $\rho$  ne peut avoir une signification absolue. Ceci peut être rendu très intuitif par le raisonnement suivant : à une suite de chocs très brefs, l'amplificateur substitue une suite d'oscillations qui ne sont pas instantanément amorties et il est assez naturel de penser que les phénomènes observés différeront profondément suivant que ces oscillations seront plus ou moins enchevêtrées les unes dans les autres ; ce qui compte donc ce n'est pas tant la valeur de  $\rho$ , que celle du produit  $\rho\tau$ , où  $\tau$  est une constante difficile à définir de façon précise pour un amplificateur déterminé, mais dont on peut donner l'ordre de grandeur en disant qu'elle caractérise la durée d'amortissement de l'amplificateur.

Pour préciser ce point, je vais considérer des amplificateurs appartenant à une même famille et dont les réponses respectives dépendent du paramètre  $\tau$  d'après la relation :

$$R_1(t) = r_1\left(\frac{t}{\tau}\right) = r(\lambda).$$

Au temps réduit  $\lambda$ , sera associée la densité réduite  $\rho' = \rho\tau$  ; il est clair que, si  $\rho\tau$  tend vers l'infini, il en sera de même de  $x(t)$  ; je poserai :

$$x'(t) = \frac{x(t)}{\sqrt{\rho\tau}}. \tag{94}$$

En général,  $\overline{x'(t)}$  tendra encore vers l'infini avec  $\rho\tau$  mais je supposerai

ou bien que l'on ne s'intéresse qu'aux écarts à la valeur moyenne ou bien (ce qui a lieu très souvent dans la pratique) qu'il s'agit d'un amplificateur insensible au courant continu (en vertu de la relation 8, on a alors  $\overline{x(t)} = \overline{x'(t)} = 0$ ) ; c'est dans cette dernière hypothèse que je me place pour expliciter les calculs.

Les formules fondamentales deviennent alors :

$$\left. \begin{aligned} \Psi'_j &= \left[ \frac{\gamma_j'^2}{2!} + \frac{\gamma_j'^3}{3! \sqrt{\rho\tau}} + \frac{\gamma_j'^4}{4! \sqrt{(\rho\tau)^2}} + \dots \right] d\lambda_j \\ \psi'_j &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\gamma_j'^2}{2!} + \frac{\gamma_j'^3}{3! \sqrt{\rho\tau}} + \frac{\gamma_j'^4}{4! \sqrt{(\rho\tau)^2}} + \dots \right\} d\lambda_j \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

$$\Phi' = e^{\psi'} \quad (96)$$

$$\gamma'_j = \sum_k i u_k q r_1 [\lambda_k - \lambda_j] \quad (97)$$

Les symboles sont surmontés du signe  $\prime$  pour bien marquer que les fonctions sont relatives à  $x'(t)$  et non à  $x(t)$ .

La série de fonctions qui figure sous le signe somme dans l'expression de  $\Psi'$  converge uniformément en  $\lambda_j$  ; on peut donc l'intégrer terme à terme dans tout intervalle fini. La décroissance exponentielle de  $r_1(\lambda)$  permet d'étendre cette possibilité au cas où on intègre de  $-\infty$  à  $+\infty$  ; on a donc mis la deuxième fonction caractéristique sous la forme d'une série en  $\frac{1}{\sqrt{\rho\tau}}$  ;

$$\Psi' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_j'^2}{2!} d\lambda_j + \frac{1}{\sqrt{\rho\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_j'^3}{3!} d\lambda_j + \frac{1}{(\sqrt{\rho\tau})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_j'^4}{4!} d\lambda_j + \dots \quad (98)$$

lorsque  $\rho\tau$  tend vers l'infini,  $\Phi'$ ,  $\Psi'$  et  $\Psi'_j$  tendent vers les formes limites  $\underline{\Phi}'$ ,  $\underline{\Psi}'$  et  $\underline{\Psi}'_j$  données par :

$$\left. \begin{aligned} \underline{\Psi}'_j &= \frac{\gamma_j'^2}{2} d\lambda_j \\ \underline{\Psi}' &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_j'^2}{2!} d\lambda_j \\ \underline{\Phi}' &= e^{\underline{\Psi}'} \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

A ces expressions, correspondra une loi de probabilité dont la fonction de répartition sera représentée par  $\underline{P}'$  et on pourra affirmer que la loi de probabilité vraie  $P'$  a pour limite  $\underline{P}'$  si on montre que, dans tout domaine fini des variables  $u_k$ , la convergence de  $\Phi'$  vers  $\underline{\Phi}'$  (donc de  $\psi'$  vers  $\underline{\psi}'$ ) est uniforme. Il est aisé de vérifier qu'il en est bien ainsi dans le cas actuel. La loi de probabilité  $\underline{P}'$  associée à  $\underline{\Phi}'$  fournit donc une bonne approximation toutes les fois que  $\rho\tau$  est grand. Dans beaucoup de cas, on pourra s'en contenter. Pour le calcul rigoureux des valeurs moyennes, il faut

procéder de la façon suivante :  $\rho\tau$  étant donné,  $\Psi'$  s'exprime par une série entière des variables  $u_k$  ; en substituant cette série à  $\Psi'$  dans l'expression de  $\Phi'$ , on obtient également  $\Phi'$  sous la forme d'une série en  $u_k$  ; soit :

$$\Phi' = \Sigma a'_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_K} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_K^{\alpha_K}. \tag{100}$$

Cette série converge, pour toute valeur fixée de  $\rho\tau$ , dans un domaine non nul des variables  $u$  ; pour calculer les moments, il suffira de procéder par identification terme à terme avec la série :

$$\Phi' = e^{\overline{\Sigma i u_k x'_k}} = 1 + \frac{i}{1!} \left\{ \overline{x'_1 u_1} + \overline{x'_2 u_2} + \dots \right\} + \frac{i^2}{2!} \left\{ \overline{x'^2_1 u_1^2} + \overline{x'^2_2 u_2^2} + 2\overline{x'_1 x'_2 u_1 u_2} + \dots \right\} \dots \tag{101}$$

Ces généralités étant posées, je vais :

- 1° étudier la forme limite de  $P'$ ,
- 2° préciser la manière de calculer si l'on ne se contente plus de l'approximation  $P'$  et si l'on veut obtenir des résultats rigoureux valables pour une valeur quelconque de la densité.

## II. — ÉTUDE DE LA FORME LIMITE (1).

La fonction  $\Psi'$  correspondante est donnée par la relation :

$$\Psi' = - \frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} u_k u_{k'} \mathcal{C}'(\lambda_k - \lambda_{k'}) \tag{102}$$

avec :

$$\mathcal{C}'(\lambda_k - \lambda_{k'}) = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 r_1(\lambda_k - \lambda_j) r_1(\lambda_{k'} - \lambda_j) d\lambda_j. \tag{103}$$

Repassons tout de suite aux variables  $x$ , on établit aisément la relation :

$$\Psi = - \frac{1}{2} \Sigma \Sigma u_k u_{k'} \mathcal{C}(t_k - t_{k'}) \tag{104}$$

avec :

$$\mathcal{C}(t_k - t_{k'}) = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 \rho R_1(t_k - t_j) R_1(t_{k'} - t_j) dt_j. \tag{105}$$

D'après sa définition formelle,  $\mathcal{C}(t_k - t_{k'})$  nous apparaît immédiatement comme une fonction paire de la différence  $t_k - t_{k'}$  ; il est facile de montrer que  $\mathcal{C}$  est la *fonction de corrélation* introduite par M. Courtines dans les calculs relatifs au bruit de fond. La considération du développe-

(1) BLANC-LAPIERRE. *Comptes rendus.* 217, 73. Séance du 19 juillet 1943.

ment en série de la fonction caractéristique montre, en effet, que l'on a :

$$\mathcal{C}(t_k - t_{k'}) = \overline{x(t_k) \cdot x(t_{k'})}$$

La fonction  $\Psi$  étant connue, on a :

$$\Phi = e^\Psi = e^{-\frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} u_k u_{k'} \mathcal{C}(t_k - t_{k'})}$$

On déduit de cette relation la densité de probabilité  $P(x_1 x_2 \dots x_K)$  en inversant la relation de Fourier généralisée :

$$\Phi = \overline{e^{i[u_1 x_1 + \dots + u_K x_K]}} = \int \dots \int e^{i[u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_K x_K]} P dx_1 \dots dx_K$$

soit  $Q$  la forme quadratique des  $K$  variables  $u_1 \dots u_K$

$$\sum_k \sum_{k'} u_k u_{k'} \mathcal{C}(t_k - t_{k'}) ;$$

soit  $|\overline{Q}|$  la valeur de son déterminant principal ; la densité de probabilité cherchée est donnée par :

$$P \{ x_1, x_2, \dots, x_K \} = \frac{1}{(2\pi)^{K/2}} \frac{1}{\sqrt{|\overline{Q}|}} e^{-\frac{1}{2} Q'} \tag{106}$$

où  $Q'$  est la forme réciproque de  $Q$ .

CAS PARTICULIERS. — a)  $K = 1$

$$P(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{C}(0)}} e^{-\frac{x_1^2}{2\mathcal{C}(0)}} \tag{107}$$

C'est la loi de Laplace à une variable dont l'écart type est  $\sigma = \sqrt{\mathcal{C}(0)}$  ; la fonction caractéristique associée est :

$$\Phi(u) = e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} = 1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \frac{\sigma^4 u^4}{2^2} \frac{1}{2!} + \dots \quad \frac{(-1)^p}{p!} \frac{\sigma^{2p} \cdot u^{2p}}{2^p} + \dots$$

Ce développement donne, de façon évidente, la valeur des moments :

$$\overline{x^{2q}} = \sigma^{2q} \cdot 1 \cdot 3 \dots (2q - 1).$$

b)  $K = 2$ . On trouve la loi de Laplace à deux variables :

$$P(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{C}^2(0) - \mathcal{C}^2(\theta)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\mathcal{C}(0)[x_1^2 + x_2^2] - 2\mathcal{C}(\theta)x_1 x_2}{\mathcal{C}^2(0) - \mathcal{C}^2(\theta)}} \left. \right\} \tag{108}$$

avec  $\theta = t_1 - t_2$ .

Si on fixe la valeur de  $x_1$ , on déduit aisément de (108) la loi de probabilité liée de  $x_2$ ; on a :

$$dP_{x_1}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{C}(0) - \frac{\mathcal{C}^2(\theta)}{\mathcal{C}(0)}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left[x_2 - \frac{\mathcal{C}(\theta)}{\mathcal{C}(0)} x_1\right]^2}{\mathcal{C}(0) - \frac{\mathcal{C}^2(\theta)}{\mathcal{C}(0)}}} dx_2. \quad (109)$$

C'est encore une loi de Laplace ; la moyenne liée  $\bar{x}_2$  est donnée par :

$$x_2 = \frac{\mathcal{C}(\theta)}{\mathcal{C}(0)} x_1 = \beta x_1 \quad (110)$$

et l'écart type vaut :

$$\sqrt{\mathcal{C}(0) - \frac{\mathcal{C}^2(\theta)}{\mathcal{C}(0)}} = \sqrt{\mathcal{C}(0)} \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (111)$$

La figure 13 représente, lorsque  $\beta$  varie de 1 à 0 (c'est-à-dire, lorsque  $\theta$  varie de 0 à  $+\infty$ ), les courbes d'équations :

$$\begin{aligned} x_2 &= \beta x_1 ; \\ x_2' &= \beta x_1 + \sqrt{\mathcal{C}(0)} \sqrt{1 - \beta^2} ; \\ x_2'' &= \beta x_1 - \sqrt{\mathcal{C}(0)} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned}$$

Ce qui précède suffit à montrer le rôle considérable joué par la fonction de corrélation. Ce rôle apparaît encore plus clairement si on fait intervenir directement le temps dans les relations (110) et (111). Cela oblige à introduire explicitement la fonction  $\beta(t)$ . C'est ce que je vais faire sur un exemple. Supposons  $R_1(t)$  défini par :

$$R_1(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t \text{ pour } t > 0 \quad \text{et} \quad R_1(t) = 0 \text{ pour } t < 0.$$

On a alors :

$$\mathcal{C}(\theta) = q^2 \rho \frac{e^{-\lambda \theta}}{4\omega^2} \left\{ \frac{\cos \omega \theta}{\lambda} + \frac{\omega \sin \theta \omega}{\lambda^2 + \omega^2} - \frac{\lambda \cos \omega \theta}{\lambda^2 + \omega^2} \right\}.$$

Cette expression vaut pour  $\theta > 0$  et doit être complétée par symétrie pour  $\theta < 0$  [ $\mathcal{C}(\theta) = \mathcal{C}(-\theta)$ ]. Posons :

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} = \sin \Psi \quad \text{et} \quad \frac{\lambda}{\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} = \cos \Psi ;$$

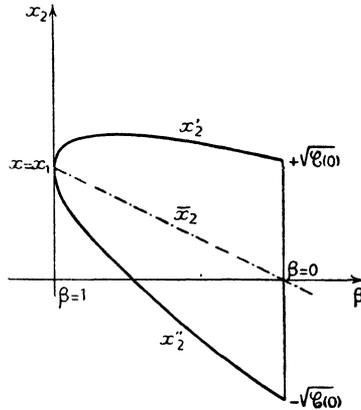


FIG. 13.

il vient :

$$\mathcal{C}(\theta) = \mathcal{C}(0) \frac{1}{\sin \Psi} \sin [\omega \theta + \Psi] e^{-\omega \cotg \Psi \theta}.$$

Fixons des valeurs numériques :  $\omega = 2\pi$  ;  $\Psi = 81^\circ$  d'où  $\lambda = 0,859$ . Sur la figure 14, on a porté en abscisses les valeurs de  $\theta = t_2 - t_1$  et en ordonnées les valeurs de  $x_2$  en prenant pour unité  $\sigma = \sqrt{\mathcal{C}(0)}$  [écart type de la loi marginale]. On a représenté, en fonction de  $\theta$ , la valeur moyenne liée de  $x_2$  lorsque  $x_1 = \sigma$ . La partie hachurée représente l'ensemble des valeurs de  $x_2$  pour lesquelles l'écart à la moyenne liée est inférieur à un écart type de la loi liée.

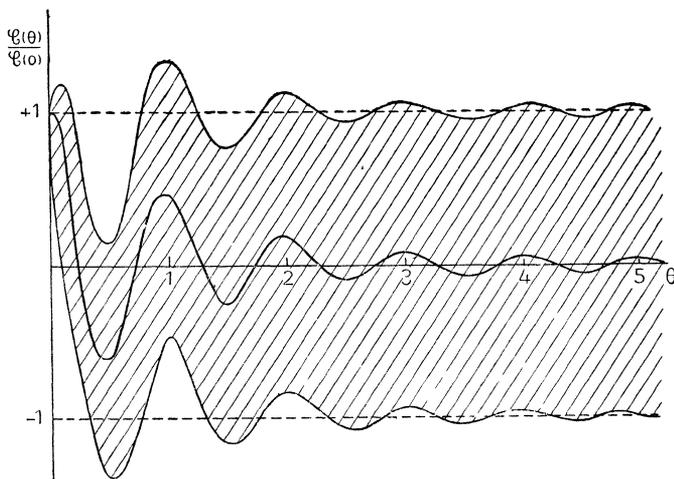


FIG. 14.

Cette figure donne une idée très précise de ce qu'il faut entendre par la continuité des phénomènes dans le temps. Près de l'instant  $t_1$ , la loi de répartition de  $x_2$  est très influencée par le fait que l'on avait  $x_1 = \sigma$  en  $t_1$  ; peu à peu, cette influence disparaît et, pratiquement, elle n'existe plus lorsque  $\theta$  est de l'ordre de 10. On a alors de nouveau un régime à valeur moyenne nulle et à écart type égal à  $\sigma$ , tout comme si le « souvenir » de ce qui se passait en  $t_1$  avait disparu. Un renseignement, relatif à l'instant  $t_1$ , n'apporte pratiquement plus rien pour  $t_1 + 10$ .

*Remarque.* — En se plaçant à des points de vue divers, plusieurs auteurs ont établi la relation (107) et parfois même (108). A ma connaissance, il faut citer Thiede <sup>(1)</sup>, Landon <sup>(2)</sup>, Fränz <sup>(3)</sup>, Surdin <sup>(4)</sup> et Rice <sup>(5)</sup>.

<sup>(1)</sup> THIEDE. *Elect. Nachr. Technik*, **13** (1936), 84.

<sup>(2)</sup> LANDON. *Proc. I. R. E.*, **29** (1941), 50.

<sup>(3)</sup> FRANZ. *Elect. Nachr. Technik*, **19** (1942), 167.

<sup>(4)</sup> SURDIN. *Philosophical Magazine*, **34** (1943), 716.

<sup>(5)</sup> RICE. *Bell System Technical Journal* (juillet 1944).

Dans le cas général (densité  $\rho$  quelconque) la fonction  $\Phi$  dépend d'une infinité de fonctions du type :

$$C_{p,r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho q^{p+r} R_1^p(t_k - \omega_j) R_1^r(t_{k'} - \omega_j) d\omega_j. \tag{112}$$

Au contraire, la forme limite est sous la dépendance d'une seule de ces fonctions qui est la fonction de corrélation. Bien plus, cette dernière traduit d'une façon très fidèle la liaison des phénomènes dans le temps. Si à l'instant  $t_1$ , la valeur de  $x(t)$  est  $x_1$ , la valeur la plus probable à l'instant  $t_2$  sera :

$$x_2 = \frac{C(t_2 - t_1)}{C(0)} x_1. \tag{113}$$

La tendance de  $C(t_2 - t_1)$  vers 0 lorsque  $t_2 - t_1$  tend vers l'infini, traduit fidèlement le fait que lorsque  $t_2$  s'éloigne de  $t_1$ , la connaissance d'un renseignement valable en  $t_1$  n'influe pratiquement pas sur les probabilités en  $t_2$ .

### III. — CALCUL RIGoureux DES MOYENNES.

J'ai établi la relation :

$$\Psi' = \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_j'^2 d\lambda_j + \frac{1}{3! \sqrt{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_j'^3 d\lambda_j + \dots \tag{114}$$

avec  $\delta = \rho\tau$ . En posant :

$$\Psi'_l = \frac{1}{l! (\sqrt{\delta})^{l-2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_j'^l d\lambda_j, \tag{115}$$

on a :

$$\Psi' = \Psi'_2 + \Psi'_3 + \Psi'_4 + \dots \tag{116}$$

$\Psi'_2$  est indépendant de  $\delta$ .

$\Psi'_3$  est proportionnel à  $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$ .

· · · · ·

$\Psi'_l$  est proportionnel à  $\frac{1}{(\sqrt{\delta})^{l-2}}$ .

Si on se place au point de vue des  $u_k$ ,  $\Psi'_l$  est une forme homogène de degré  $l$  ; or on a :

$$\begin{aligned} \Phi' = e^{\Psi'} &= e^{\Psi'_2 + \Psi'_3 + \Psi'_4 + \dots} \\ &= 1 + \{ \Psi'_2 + \Psi'_3 + \dots \} + \frac{1}{2!} \{ \Psi'_2 + \Psi'_3 + \dots \}^2 + \dots \end{aligned} \tag{117}$$

Pour faciliter l'identification qui permet le calcul des moyennes, groupons les termes en polynômes homogènes en  $u_K$  :

$$\Phi' = 1 + \Psi'_2 + \Psi'_3 + \left[ \frac{\Psi'^2_2}{2!} + \Psi'_4 \right] + \left[ \frac{2\Psi'_2\Psi'_3}{2!} + \Psi'_5 \right] + \dots \quad (118)$$

Pour bien montrer l'importance de chaque terme, je rappelle, entre parenthèses, son ordre de grandeur par rapport à  $1/\sqrt{\delta}$  :

$$\Phi' = 1 + \Psi'_2(0) + \Psi'_3(1) + \left[ \frac{\Psi'^2_2(0)}{2!} + \Psi'_4(2) \right] + \left[ \frac{2\Psi'_2\Psi'_3(1)}{2!} + \Psi'_5(3) \right] + \dots \quad (119)$$

Par contre, le développement de la forme limite se réduit à :

$$\underline{\Phi}' = 1 + \frac{\Psi'_2}{1!} + \frac{\Psi'^2_2}{2!} + \frac{\Psi'^3_2}{3!} + \dots \quad (120)$$

On voit immédiatement quelle est l'erreur que l'on commet lorsqu'on remplace  $\Phi'$  par  $\underline{\Phi}'$ . On déduit de la comparaison des relations (119 et 120) les résultats suivants :

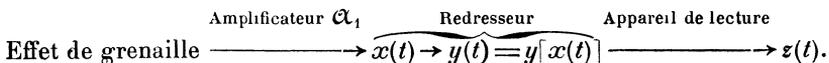
a) *Les moyennes quadratiques  $\overline{x^2_1}, \overline{x^2_2}, \dots, \overline{x_1x_2}, \dots$  sont données EXACTEMENT par  $\underline{\Phi}'$ .*

b) *Par contre, toute autre moyenne est donnée par  $\underline{\Phi}'$  d'une façon qui n'est QU'APPROXIMATIVE.*

S'il est possible de représenter avec une très bonne approximation les phénomènes par une loi de Laplace, il faut, sous peine d'incohérence, se borner à la forme  $\underline{\Phi}'$  pour le calcul des moyennes ; seules les moyennes quadratiques sont alors connues sans erreur. Si l'on désire connaître exactement les moyennes jusqu'à l'ordre  $p$  inclus, il faut respecter dans le développement de  $\Phi'$ , tous les termes de degré inférieur ou égal à  $p$ .

#### IV. — APPLICATION DES RÉSULTATS A L'ÉTUDE DES FLUCTUATIONS DANS LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES.

J'indique rapidement comment on peut, à partir des résultats établis, traiter les problèmes qui se posent en électrotechnique relativement aux fluctuations dans les détecteurs ; les montages utilisant des détecteurs comportent, en général, un amplificateur linéaire  $\mathcal{A}_1$ , un détecteur de caractéristique  $y = f(x)$  et un appareil de lecture qui est linéaire et, par suite, est équivalent à un amplificateur  $\mathcal{A}_2$  ; l'ensemble des notations peut être schématisé de la façon suivante :



Les quantités à calculer sont :

- a) la valeur moyenne de  $z(t)$  soit  $\overline{z(t)}$ ;
- b) l'écart type :

$$\sigma = \sqrt{\overline{[z(t) - \overline{z(t)}]^2}}$$

Supposons l'appareil de lecture caractérisé par sa réponse  $S_1(t)$  à un choc unité très bref. On a :

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\alpha) S_1(t - \alpha) d\alpha \tag{121}$$

d'où on déduit, en permutant les symboles de moyenne et d'intégration, ce qui se justifie sans peine pour toutes les fonctions  $y(x)$  utilisées dans la pratique (1) :

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{z(t)} &= \overline{y(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(t - \alpha) d\alpha & (122) \\ \text{et :} & \\ \overline{[z(t) - \overline{z(t)}]^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y(\alpha) - \overline{y(\alpha)}][y(\beta) - \overline{y(\beta)}] S_1[t - \alpha] S_1[t - \beta] d\alpha d\beta & (123) \end{aligned} \right.$$

d'où :

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{z(t)} &= \overline{y(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(t - \alpha) d\alpha & (124) \\ \text{et :} & \\ \overline{[z(t) - \overline{z(t)}]^2} &= \int \int \overline{y'(\alpha) y'(\beta)} S_1(t - \alpha) S_1(t - \beta) d\alpha d\beta & (126) \end{aligned} \right.$$

où  $y'(t)$  représente  $y(t) - \overline{y(t)}$ .

Le problème sera résolu, si on sait calculer  $\overline{y}$  et  $\overline{y(\alpha) \cdot y(\beta)}$ .

En général, les caractéristiques des détecteurs sont représentées avec une assez bonne approximation par un polynôme ; dans ces conditions, la solution du problème envisagé réclame le calcul des moyennes du type  $\overline{x^p(t)}$  ou  $\overline{x^p(t_1) \cdot x^q(t_2)}$  ; on les déduit immédiatement du développement en série de  $\Phi'$ .

A titre d'exemple, je vais traiter ici, sans faire aucune approximation, le cas du détecteur quadratique, c'est-à-dire du détecteur de caractéristique  $y = x^2$ .

Je dois calculer  $\overline{yy_0} = \overline{x_1^2 x_2^2}$  avec  $t_1 - t_2 = \theta$ . Je m'occupe tout de suite

(1) Pour justifier cette permutation, on peut montrer que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty}$  existe en moyenne quadratique lorsque ses limites tendent vers l'infini. Cela peut être démontré en prouvant qu'il y a convergence mutuelle en moyenne quadratique [Voir Paul LÉVY. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, 58].

des variables  $x_1$  et  $x_2$  et non des variables réduites  $x'_1$  et  $x'_2$ , qui ont servi à préciser l'ordre de grandeur des termes par rapport à  $\frac{1}{\sqrt{\rho\tau}}$ .

On a :

$$\overline{x_1^2 x_2^2} = \frac{4!}{C_4^2} \times \text{coeff. de } u_1^2 \times u_2^2 \text{ dans } \Phi(u_1, u_2).$$

Or, on a vu que les termes  $u_1^2 \times u_2^2$  de  $\Phi$  proviennent de  $\frac{\Psi_2^2}{2} + \Psi_4$ .

Je pose :

$$\mathcal{C}(\theta) = \rho q^2 \mu_1(\theta). \quad (127)$$

$$\mu_2(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_1^2(t_1 - \omega_j) R_1^2(t_2 - \omega_j) d\omega_j. \quad (128)$$

On déduit alors aisément les résultats suivants :

$$\overline{x_1^2 x_2^2} = \rho^2 q^4 \{ 2 \mu_1^2(\theta) + \mu_1^2(0) \} + \rho q^4 \mu_2(\theta), \quad (129)$$

on a d'ailleurs :

$$\overline{x^2} = \rho q^2 \mu_1(0) \quad (130)$$

d'où :

$$\overline{y' y'_0} = \overline{y y_0} - (\overline{y})^2 = 2\rho^2 q^4 \mu_1^2(\theta) + \rho q^4 \mu_2(\theta).$$

Si on introduit l'intensité du courant  $I = \rho q$ , il vient :

$$\left. \begin{aligned} \overline{y' y'_0} &= 2q^2 I^2 \mu_1^2(\theta) + q^3 I \mu_2(\theta) \\ &= 2\mathcal{C}^2(\theta) + q^3 I \mu_2(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

On retrouve ainsi le résultat que j'ai établi en utilisant des séries de Fourier <sup>(1)</sup>, à savoir que le spectre des fluctuations à la sortie du redresseur quadratique est composé de deux spectres ; le premier, prépondérant lorsque  $\rho\tau$  est grand, est proportionnel à  $q^2 I^2$ , il se calcule uniquement à partir de la fonction de corrélation ; le second, important si  $\rho\tau$  est petit, est proportionnel à  $q^3 I$  ; il ne se calcule pas à partir de la fonction de corrélation. La fonction de corrélation relative à  $x$  ne détermine pas, pour une valeur quelconque de la densité  $\rho$ , la fonction de corrélation relative à  $x^2$ . Mais si on admet que  $x(t)$  est bien représentable par une loi de Laplace (c'est-à-dire si l'on se contente de l'approximation fournie par la forme limite, alors la fonction de corrélation relative à  $x$  détermine complètement les propriétés statistiques de  $x^2$  et, par suite, suffit pour calculer la valeur de la moyenne  $\overline{x^2(t_1) \cdot x^2(t_2)}$ . C'est bien ce qui a lieu sur la formule (131) lorsque  $\rho\tau$  est assez grand ; on peut alors négliger le

<sup>(1)</sup> BLANC-LAPIERRE. *Comptes rendus*, 217 (1943), 73.

terme provenant de  $\Psi_4'$  devant celui provenant de  $\frac{\Psi_2'^2}{2}$ . On a, alors, une relation approchée valable seulement pour les très fortes densités :

$$\overline{y'y_0'} = 2\mathcal{C}^2(\theta). \tag{132}$$

REMARQUE. — La fonction de corrélation du détecteur improprement appelé « détecteur linéaire à double alternance », c'est-à-dire du détecteur de caractéristique  $y = |x|$  ne se déduit pas aisément des résultats acquis.

Cependant, dans le cas où la loi de Laplace tangente constitue une approximation suffisante, il est possible de donner pour  $\overline{yy_\tau}$  un développement en série fort utile pour la solution approchée de beaucoup de questions.

On a en effet :

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= x_1 x_2 \text{ si } x_1 x_2 > 0 \\ y_1 y_2 &= -x_1 x_2 \text{ si } x_1 x_2 < 0. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement :

$$\overline{yy_\tau} = 2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x_1 x_2 e^{-\alpha \frac{x_1^2 + x_2^2}{2A^2}} \left\{ e^{\frac{2\beta x_1 x_2}{2A^2}} + e^{-\frac{2\beta x_1 x_2}{2A^2}} \right\} dx_1 dx_2 \tag{133}$$

en posant :

$$\beta = \mathcal{C}(\tau) ; \alpha = \mathcal{C}(0) \quad \text{et} \quad A = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \tag{134}$$

Je poserai de plus :

$$\gamma = \beta/\alpha \tag{135}$$

on a nécessairement :

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \leq 1,$$

on peut chercher à décomposer le spectre des fluctuations représentées par  $\overline{yy_\tau}$  en spectres plus simples, par exemple en une série de spectres empruntés aux redresseurs  $y = x^p$  ; cela revient à avoir un développement en série de  $\overline{yy_\tau}$  suivant les puissances de  $\beta$  ; si on considère  $\overline{yy_\tau}$  comme une fonction de la variable complexe  $\beta$ , cette fonction n'a pas de singularités dans le cercle  $|\beta| < \alpha$  ; elle est donc développable en série de Mac Laurin dans ce cercle ; pour  $\beta = \alpha$ , c'est-à-dire pour  $\tau = 0$ , on ne peut affirmer *a priori* la convergence de la série ; cependant on peut obtenir assez facilement le terme général de cette série et vérifier qu'elle converge encore pour  $\beta = \alpha$  ; on peut montrer de plus que l'intégrale :

$$\int_0^\infty \overline{(y - \bar{y})(y - \bar{y})_\tau} \cos 2\pi\nu\tau d\tau$$

qui permet de calculer  $\overline{y^2}$ , peut être calculée en opérant terme à terme sur la série. On peut donc dire qu'on a décomposé le spectre étudié en spectres élémentaires du type  $\mathcal{C}^n(\tau)$  c'est-à-dire en spectres empruntés à l'étude des détecteurs  $y = x^p$ .

Le développement en série est donné par l'une ou l'autre des formules suivantes :

$$\overline{yy}_\tau = \frac{4\alpha}{2\pi} \left\{ 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{1.1}{2.1} + \frac{\beta^4}{\alpha^4} \frac{1}{2.4} \frac{1}{3} + \frac{\beta^6}{\alpha^6} \frac{1.3}{2.4.6} \cdot \frac{1}{5} + \dots \right\} \quad (136)$$

$$\overline{(y - \bar{y})(y - \bar{y})}_\tau = \frac{4\alpha}{2\pi} \left\{ \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{\beta^4}{\alpha^4} \frac{1}{2.4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\beta^6}{\alpha^6} \frac{1.3}{2.4.6} \frac{1}{5} + \dots \right\} \quad (137)$$



*QUATRIÈME PARTIE.*

**GÉNÉRALISATIONS DIVERSES.**

**I. — LIAISON ENTRE DIVERSES FONCTIONS ALÉATOIRES  
DÉPENDANT DE LA RÉPARTITION DES CHOCS DANS LE TEMPS.**

A. — Considérons la suite des chocs dans le temps de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$  ; à chaque configuration de cette suite nous avons, par l'intermédiaire de  $R_1(t)$ , associé une fonction du temps :

$$x(t) = \Sigma q R_1(t - s_j). \tag{138}$$

Mais nous pouvons considérer plusieurs fonctions  $x^{(\alpha)}(t)$ ,  $x^{(\beta)}(t)$  ... associées simultanément à la suite des chocs.

Il suffit de se donner des fonctions  $R_1^{(\alpha)}(t)$ ,  $R_1^{(\beta)}(t)$  ... satisfaisant aux conditions que nous avons imposées à  $R_1(t)$ .

Nous pouvons donc considérer les fonctions aléatoires :

$$x^{(\alpha)}(t) = \Sigma q R_1^{(\alpha)}(t - s_j) \tag{139}$$

$$x^{(\beta)}(t) = \Sigma q R_1^{(\beta)}(t - s_j) \tag{140}$$

. . . . .

Ces fonctions aléatoires sont définies sur la même catégorie d'épreuves et il peut être utile de les étudier dans leur ensemble. Le problème fondamental à résoudre est alors le suivant :

Soit  $t_1^{(\alpha)}$ ,  $t_2^{(\alpha)}$ , . . . . .  $t_{K^{(\alpha)}}^{(\alpha)}$  une suite de  $K^{(\alpha)}$  instants quelconques mais en nombre fini ; soit  $t_1^{(\beta)}$ ,  $t_2^{(\beta)}$ , . . . . .  $t_{K^{(\beta)}}^{(\beta)}$  une autre suite analogue... Quelle est la fonction de répartition relative à l'ensemble des variables aléatoires liées :

$$\begin{aligned} &x^{(\alpha)} \{ t_1^{(\alpha)} \}, x^{(\alpha)} \{ t_2^{(\alpha)} \}, \dots \dots \dots x^{(\alpha)} \{ t_{K^{(\alpha)}}^{(\alpha)} \} \\ &x^{(\beta)} \{ t_1^{(\beta)} \}, x^{(\beta)} \{ t_2^{(\beta)} \}, \dots \dots \dots x^{(\beta)} \{ t_{K^{(\beta)}}^{(\beta)} \} \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ? \end{aligned}$$

La méthode de calcul indiquée s'applique sans modifications à ce pro-

blème et permet de déterminer la fonction caractéristique associée :

$$\Phi \left\{ u_1^{(\alpha)}, u_2^{(\alpha)}, \dots, u_{\mathbf{k}(\alpha)}^{(\alpha)}; u_1^{(\beta)}, u_2^{(\beta)}, \dots, u_{\mathbf{k}(\beta)}^{(\beta)}; \dots \right\}$$

il suffit de poser :

$$\gamma(\omega_j) = \sum_{k=1}^{k=\mathbf{k}(\alpha)} i u_k^{(\alpha)} q R_1^{(\alpha)} [t_k^{(\alpha)} - \omega_j] + \sum_{k=1}^{k=\mathbf{k}(\beta)} i u_k^{(\beta)} q R_1^{(\beta)} [t_k^{(\beta)} - \omega_j] + \dots \quad (141)$$

B. — Je vais appliquer cette méthode à l'étude de l'ensemble d'un nombre fini de fonctions aléatoires prélevées parmi les fonctions  $x(t)$ ,  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , ...

Je supposerai, pour simplifier, qu'il s'agit toujours de réponses exponentielles ; l'extension à des réponses ne satisfaisant qu'aux hypothèses plus larges que j'ai formulées (voir page 4) doit être étudiée dans chaque cas particulier, ce qui d'ailleurs se fait sans difficulté. Si, à une impulsion unité très brève, est associée la réponse  $R_1(t)$  (lorsqu'il s'agit de  $x(t)$ ), on peut dire que, lorsqu'il s'agit de  $\frac{dx}{dt}$ , à une impulsion unité très brève est associée la réponse  $\frac{dR_1}{dt}$ . Il faut préciser ce point ; pour  $t < 0$  nous avons vu qu'on avait  $R_1(t) \equiv 0$  ; par suite, on a  $\frac{dR_1}{dt} = 0$  pour  $t < 0$ . Pour  $t > 0$ , on a :

$$R_1(t) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} e^{\varphi_{\alpha} t},$$

par suite  $\frac{dR_1}{dt}$  est défini sans ambiguïté pour  $t > 0$  ; *mais quelle valeur doit-on donner pour  $t = 0$  ?* pour  $t = 0$ , on doit donner une valeur qui réponde à la notion de dérivée, c'est-à-dire limite du quotient de l'accroissement de la fonction par l'accroissement de la variable, en d'autres termes, si  $R_1(t)$  a, en  $t = 0$ , une discontinuité de première espèce, on doit considérer que, pour  $t = 0$ , on a :

$$\left| \frac{dR_1}{dt} \right| = \infty,$$

il s'ensuit que  $\left| \frac{dR_1}{dt} \right|$  n'est pas borné uniformément dans ce cas-là. Par suite,  $\frac{dR_1}{dt}$  ne satisfait pas aux conditions imposées à  $R_1(t)$  puisque nous avons toujours supposé l'existence d'une borne valable quel que soit  $t$ . Pour introduire les fonctions  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^3x}{dt^3}$ , ... , nous serons amenés à considérer les réponses  $\frac{dR_1}{dt}$ ,  $\frac{d^2R_1}{dt^2}$ ,  $\frac{d^3R_1}{dt^3}$ , ... ; il est bien entendu que nous nous arrêterons assez tôt de façon à ne jamais arriver à l'ordre de dérivation pour lequel l'accident signalé se produirait.

D'une façon plus précise :

α) Nous éliminons le cas d'une réponse ayant à l'origine une discontinuité de première espèce.

β) Si  $R_1(t)$  est continu à l'origine mais si sa dérivée a une discontinuité de première espèce nous ne considérerons que  $x(t)$  et  $\frac{dx}{dt}$ .

γ) Si  $R_1(t)$  et  $\frac{dR_1}{dt}$  sont continus à l'origine et si  $\frac{d^2R_1}{dt^2}$  y a une discontinuité de première espèce, nous ne considérerons que  $x(t)$ ,  $\frac{dx(t)}{dt}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,

On peut déterminer sans peine les moyennes :

$$\frac{d^p x(t_1)}{dt^p} \cdot \frac{d^q x(t_2)}{dt^q}$$

on trouve :

$$\frac{d^p x(t_1)}{dt^p} \cdot \frac{d^q x(t_2)}{dt^q} = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 \rho \frac{d^p R_1}{dt^p} \{t_1 - t_j\} \frac{d^q R_1}{dt^q} \{t_2 - t_j\} dt_j. \quad (142)$$

D'une façon plus précise, considérons le cas où les deux dérivées dont on étudie la corrélation sont prises au même instant et étudions les moyennes que, pour simplifier l'écriture, nous noterons :

$$\frac{d^p x(t)}{dt^p} \cdot \frac{d^q x(t)}{dt^q} = \overline{x^{(p)}(t) \cdot x^{(q)}(t)}. \quad (143)$$

On a :

$$\overline{x^{(p)}(t) \cdot x^{(q)}(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 \rho R_1^{(p)}(t) \cdot R_1^{(q)}(t) dt. \quad (144)$$

Posons  $p + q = n$  et distinguons deux cas suivant la parité de  $n$ .

a)  $n$  impair... on peut alors poser  $n = 2\lambda + 1$  où  $\lambda$  est un nombre entier.

On a alors (si  $p < q$ ) :

$$R_1^{(p)} R_1^{(q)} = \frac{d}{dt} \{ R_1^{(p)} R_1^{(q-1)} \} - R_1^{(p+1)} R_1^{(q-1)} \quad (145)$$

$$= \frac{d}{dt} \{ R_1^{(p)} R_1^{(q-1)} \} - \frac{d}{dt} \{ R_1^{(p+1)} R_1^{(q-2)} \} \dots \pm [ R_1^{(\lambda)} R_1^{(\lambda+1)} ]. \quad (146)$$

D'ailleurs, l'intégrale contenue dans (144) peut être limitée à l'intervalle  $0, +\infty$  ; or, d'après une remarque précédente, nous supposons que  $R_1^{(q)}$  est borné à l'origine, c'est-à-dire, que toutes les expressions dont les dérivées  $R_1^{(p)}$  figurent dans le second membre de 146 sont nulles à l'origine ; elles sont évidemment nulles pour  $t = \infty$  de sorte que l'on a :

$$\overline{x^{(p)}(t) x^{(q)}(t)} = 0 \quad \text{si} \quad p + q = 2\lambda + 1. \quad (147)$$

b) Si  $n$  est pair, on posera  $n = 2\lambda$  où  $\lambda$  est toujours un entier.

On a évidemment :

$$\int_0^{\infty} R_1^{(p)} R_1^{(q)} dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \{ R_1^{(p-1)}(t) \cdot R_1^{(q)}(t) \} dt - \int_0^{\infty} R_1^{(p-1)}(t) \cdot R_1^{(q+1)}(t) dt$$

d'où :

$$\int_0^{\infty} R_1^{(p)} R_1^{(q)} dt = R_1^{(p-1)}(0) R_1^{(q)}(0) - \int_0^{+\infty} R_1^{(p-1)}(t) \cdot R_1^{(q+1)}(t) dt \quad (148)$$

posons :

$$p = \lambda + r; \quad q = \lambda - r$$

on a immédiatement :

$$\int_0^{\infty} R_1^{(p)}(t) R_1^{(q)}(t) dt = (-1)^\lambda \int_0^{\infty} R_1^{(\lambda)}(t) R_1^{(\lambda)}(t) dt$$

d'ailleurs on a :

$$\overline{[x^{(\lambda)}]^2} = q^2 \rho \int_0^{+\infty} R_1^{(\lambda)}(t) R_1^{(\lambda)}(t) dt \quad (150)$$

d'où la relation :

$$\overline{x^{(\lambda+r)}(t) \cdot x^{(\lambda-r)}(t)} = (-1)^r \overline{[x^{(\lambda)}]^2}. \quad (151)$$

J'ai donc établi les deux relations fondamentales suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{x^{(p)} x^{(q)}} = 0 \quad \text{si } p + q \text{ est impair} \end{array} \right. \quad (147)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{x^{(\lambda+r)} x^{(\lambda-r)}} = (-1)^r \overline{[x^{(\lambda)}]^2}. \end{array} \right. \quad (151)$$

REMARQUES. — 1° En particulier, on a  $\overline{x(t) \frac{dx}{dt}} = 0$ ; cette relation est une nécessité physique; en effet la puissance instantanée dépensée dans une self parcourue par le courant  $i(t)$  est  $\overline{Li(t) \frac{di}{dt}}$ ; si la moyenne  $\overline{Li \frac{di}{dt}}$  n'était pas nulle, il faudrait admettre que la self absorbe ou fournit de la puissance ce qui serait en contradiction avec toutes les propriétés des selfs auxquelles nous sommes habitués l'étude des courants usuels.

2° Si on considère les moyennes temporelles, on peut interpréter aisément les relations (147) et (151).

Par exemple on a :

$$x(t)x'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ x^2(t) \}$$

d'où :

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)x'(t) dt = \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^2(T) - x^2(0)}{T} \right\} \quad (152)$$

il est alors naturel que lorsque  $T \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{T} \int_0^T x(t)x'(t) dt$  tende vers 0.

C) Pour les grandes densités la fonction caractéristique  $\Phi \{ u^{(\alpha)} \dots u^{(\beta)} \dots \}$  tend vers une forme laplacienne.

Précisons ses propriétés lorsque les variables aléatoires considérées sont  $x(t), x'(t), x''(t) \dots$ ; on a alors :

$$L\Phi \{ u, u', u'' \dots \} = -\frac{1}{2} Q[u, u', u'' \dots] \quad (153)$$

où  $Q$  est une forme quadratique homogène des variables  $u, u', u''$  associées à  $x, x', x'' \dots$  on peut poser :

$$Q = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} u^{(\alpha)} u^{(\beta)} \quad (154)$$

le tableau des coefficients  $A_{\alpha\beta}$  est le suivant :

$\beta \backslash \alpha$	0	1	2	3	4	5
0	$\overline{x^2}$	0	$-\overline{x'^2}$	0	$\overline{x''^2}$	0
1	0	$\overline{x'^2}$	0	$-\overline{x''^2}$	0	$\overline{x'''^2}$
2	$-\overline{x'^2}$	0	$\overline{x''^2}$	0	$-\overline{x'''^2}$	0
3	0	$-\overline{x''^2}$	0	$\overline{x'''^2}$	0	$-\overline{x^{(4)2}}$
4	$+\overline{x''^2}$	0	$-\overline{x'''^2}$	0	$\overline{x^{(4)2}}$	0
5	0	$\overline{x'''^2}$	0	$-\overline{x^{(4)2}}$	0	$\overline{x^{(5)2}}$

(155)

## II. — LES FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES LAPLAGIENNES (1)

L'étude de la fonction aléatoire  $x(t)$ , pour les très grandes valeurs de la densité  $\rho$ , nous a conduits à considérer un processus aléatoire caractérisé par la propriété suivante : « étant donné un nombre quelconque, mais fini,  $K$ , de valeurs déterminées  $t_1, t_2, \dots, t_K$  du temps  $t$ , le logarithme de la fonction caractéristique  $\Phi \{ u_1, u_2, \dots, u_K \}$  associée à l'ensemble des variables aléatoires liées  $x(t_1), x(t_2) \dots x(t_K)$  est égal à :

$$\text{Log } \Phi = -\frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} u_k u_{k'} \mathcal{C}(t_k - t_{k'}). \quad (156)$$

Un tel processus est sous la dépendance de la seule fonction :

$$\mathcal{C}(\theta) \{ \theta = t_k - t_{k'} \}.$$

Cette fonction s'obtenait elle-même à partir de  $R_1(t)$  par la relation :

$$\mathcal{C}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 \rho R_1(-t) R_1(\theta - t) dt. \quad (157)$$

$\mathcal{C}(\theta)$  est la fonction de corrélation associée au processus aléatoire stationnaire considéré. La valeur de  $\mathcal{C}(\theta)$  est égale au produit du carré moyen  $\overline{x^2}$  par la valeur du coefficient de corrélation. Cette remarque

(1) A. BLANC-LAPIERRE. *C. R.*, séance du 19 mars 1945.

permet de fixer les propriétés essentielles de  $\mathcal{C}(\theta)$ . On déduit du théorème de Khintchine que  $\mathcal{C}(\theta)$  peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{C}(\theta) = \int_0^\infty \cos 2\pi\nu\theta d\mathcal{F}(\nu)$$

où  $\mathcal{F}(\nu)$  a toutes les propriétés d'une fonction de répartition, à l'exception de  $\mathcal{F}(+\infty) = 1$ , qui doit être remplacé par  $\mathcal{F}(+\infty) = \bar{x}^2$ . Le processus aléatoire considéré est totalement défini par la donnée de  $\mathcal{C}(\theta)$  ou de  $\mathcal{F}(\nu)$  (fonction de corrélation ou fonction spectrale).

Notons encore les propriétés suivantes qu'on déduit de façon évidente.

a)  $\mathcal{C}(\theta)$  est une fonction paire de  $\theta$  :  $\mathcal{C}(\theta) = \mathcal{C}(-\theta)$ .

b)  $\mathcal{C}(\theta)$  satisfait, quel que soit  $\theta$ , à l'inégalité  $|\mathcal{C}(\theta)| \leq \mathcal{C}(0)$ .

Dans le problème actuel, à cause des propriétés de  $R_1(t)$ ,  $\mathcal{C}(\theta)$  s'exprime au moyen d'exponentielles du type  $e^{\lambda|\theta|}$  (partie réelle de  $\lambda < 0$ ) ; en particulier, pour les très grandes valeurs de  $|\theta|$ ,  $\mathcal{C}(\theta)$  a une décroissance exponentielle.  $\mathcal{C}(\theta)$  possède, à cause de son expression même, des dérivées de tous ordres en tout point sauf peut-être pour  $\theta = 0$ . En  $\theta = 0$ , les dérivées à droite et les dérivées à gauche existent pour tous les ordres. A cause de la parité de  $\mathcal{C}(\theta)$ , les dérivées à droite et à gauche coïncident pour les ordres pairs ; les dérivées paires existent donc. Pour les ordres impairs, les valeurs à droite et à gauche sont opposées. En général, il n'y a donc pas de dérivées d'ordre impair pour  $\theta = 0$ . Si une dérivée d'ordre impair existe, elle est nécessairement nulle.

*Remarque.* — Il est intéressant de constater que les propriétés que nous allons rencontrer s'expriment de façon beaucoup plus simple au moyen de la fonction de corrélation qu'au moyen du coefficient de corrélation <sup>(1)</sup>.

Nous allons maintenant faire abstraction du problème physique qui nous a intéressés ; considérons, *a priori*, des processus aléatoires stationnaires qui, quels que soient le nombre des instants  $t_k$ , satisfont à la relation :

$$L\Phi = -\frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} u_k u_{k'} \mathcal{C}(t_k - t_{k'}) \quad (156)$$

$\mathcal{C}(t_k - t_{k'})$  est la fonction de corrélation associée.

Naturellement, nous devons supposer que  $\mathcal{C}(t_k - t_{k'})$  satisfait à toutes les propriétés caractéristiques des fonctions de corrélation associées à un processus stationnaire. Nous appellerons les processus que nous venons de définir des *processus aléatoires stationnaires laplaciens* <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> Voir une note de M. LOËVE [C. R., 5 mars 1945] qui étend l'emploi de la fonction de corrélation à des fonctions aléatoires non stationnaires.

<sup>(2)</sup> Un article dont je viens d'avoir connaissance [Doob, *Annals of Mathematical Statistics*, septembre 1944, 229] est consacré à ce processus ; il s'intéresse plus spécialement aux processus de Markoff.

<sup>(3)</sup> M. le Professeur Fréchet a bien voulu me signaler qu'un ouvrage de M. Ville sur la théorie de la corrélation était à l'impression. Il est possible que certains résultats contenus dans ce chapitre aient des points communs avec ceux qu'indique cet auteur.

Nous allons maintenant les considérer, *a priori*, sans nous préoccuper de savoir s'ils dérivent, par passage à la limite d'un processus  $x(t)$  du type déjà introduit. Naturellement,  $\mathcal{C}(\theta)$  pourra présenter, pour  $\theta = 0$ , les singularités dont il a été question. Pour  $\theta > 0$  (et aussi pour  $\theta < 0$ ) nous supposons que  $\mathcal{C}(\theta)$  peut être considéré comme un arc d'une fonction analytique ou, tout au moins, que les dérivées dont nous aurons besoin existent.

Considérons deux instants  $t_1$  et  $t_2$ ; on a, pour l'ensemble des deux variables  $x_1 = x(t_1)$  et  $x_2 = x(t_2)$  la fonction caractéristique  $\Phi(u_1, u_2)$  définie par :

$$L\Phi = -\frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(0)[u_1^2 + u_2^2] + 2\mathcal{C}(\theta)u_1u_2 \} \quad \text{avec } \theta = t_2 - t_1.$$

On passe, alors aisément, à la fonction caractéristique relative à la variable  $x_1 - x_2$ ; il suffit de faire la substitution :

$$u_1 = v \quad \text{et} \quad u_2 = -v.$$

Il vient :

$$L\Phi \left[ v \right]_{\{x_1 - x_2\}} = -\frac{1}{2} v^2 \{ 2\mathcal{C}(0) - 2\mathcal{C}(\theta) \}. \quad (157)$$

Le carré moyen  $\overline{(x_1 - x_2)^2}$  est donc égal à  $2 \{ \mathcal{C}(0) - \mathcal{C}(\theta) \}$ . On retrouve ainsi le résultat connu : *La condition nécessaire et suffisante pour que le processus soit continu en moyenne quadratique est que  $\mathcal{C}(\theta)$  soit continu à l'origine.* On sait d'ailleurs que, s'il en est ainsi,  $\mathcal{C}(\theta)$  est continu partout <sup>(1)</sup>.

La fonction caractéristique associée à  $\frac{x_2 - x_1}{\Delta t}$  s'obtient, elle aussi, très facilement; on a :

$$L\Phi \left( v \right)_{\left\{ \frac{x_1 - x_2}{\Delta t} \right\}} = -\frac{1}{2} v^2 \left\{ \frac{2[\mathcal{C}(0) - 2\mathcal{C}(\theta)]}{\Delta t^2} \right\}. \quad (158)$$

La dérivée aléatoire  $\frac{dx}{dt}$  ne peut donc exister que si  $\frac{d\mathcal{C}}{d\theta} (\theta = 0)$  est nul et si  $\frac{d^2\mathcal{C}}{d\theta^2} (\theta = 0)$  est fini. En supposant que  $\frac{d\mathcal{C}}{d\theta}$  et  $\frac{d^2\mathcal{C}}{d\theta^2}$  existent partout et sont continus, on établit facilement que la dérivée  $\frac{dx}{dt}$  existe en moyenne quadratique et que la fonction de corrélation associée à  $\frac{dx}{dt}$  est égale à  $\frac{d^2\mathcal{C}}{d\theta^2} (\theta = 0)$  <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Voir par exemple KAMPÉ DE FÉRIET. *Annales de la Société de Bruxelles* [1], 2<sup>e</sup> fasc., 59 (juillet 1939), 145.

<sup>(2)</sup> Voir DEDEBANT et WEHRLÉ [*C. R.*, 208 (1939), p. 625], VILLE [*C. R.*, 217 (1943), 101] et LOÈVE [*C. R.*, 5 mars 1945].

Ces résultats ne font intervenir que les propriétés du second ordre de  $x(t)$  et ne sont pas strictement liés au caractère laplacien. Ce qui est essentiel, c'est que, lorsqu'on effectue, sur le logarithme des fonctions caractéristiques, les passages à la limite associés aux opérations de dérivation, la forme  $L\Phi$  n'est pas altérée ; on est toujours en présence d'une forme quadratique. Par suite, dans la mesure où les dérivées aléatoires existent, on peut énoncer le résultat suivant :

*THÉOREME XIV. — Le caractère laplacien se conserve par dérivation.* — Ce résultat est d'ailleurs susceptible de larges généralisations. Il tient essentiellement au caractère linéaire de l'opération de dérivation.

On peut l'étendre à d'autres opérations linéaires ; on peut, par exemple, envisager ici la transformation suivante dont il a déjà été question.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)R(t - \tau)d\tau. \quad (159)$$

Pour passer du processus aléatoire stationnaire laplacien  $x(t)$  au processus aléatoire stationnaire laplacien  $y(t)$ , il suffit de passer de la fonction de corrélation  $\overline{x(t)x(t + \varphi)}$  à la fonction de corrélation  $\overline{y(t)y(t + \theta)}$  (ou encore, de la fonction spectrale  $\mathcal{F}_x(\nu)$  relative à  $x(t)$  à la fonction spectrale  $\mathcal{F}_y(\nu)$  relative à  $y(t)$ ). Sous des conditions très générales, on peut utiliser les formules de passages suivantes :

$$\overline{y(t)y(t + \theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)x(t + \varphi)} \cdot R(\tau)R(\tau + \theta - \varphi) d\tau d\varphi \quad (160)$$

ou :

$$\mathcal{F}_y(\nu) = \int_0^\nu g^2(\lambda) d\mathcal{F}_x(\lambda) \quad (161)$$

$g(\lambda)$  étant le gain associé à l'opération linéaire définie par la relation (159).

Reprenons maintenant la considération de la dérivée  $\frac{dx}{dt}$  ; on peut faire, sur  $\frac{dx}{dt}$ , ce qui a été fait sur  $x(t)$ . On trouve ainsi que, pour que  $\frac{d^2x}{dt^2}$  existe en moyenne quadratique il faut que  $\frac{d^2\mathcal{C}}{d\theta^2}$  soit nul... La fonction de corrélation relative à  $\frac{d^2x}{dt^2}$  sera  $\frac{d^4\mathcal{C}}{d\theta^4}$  ..., etc...

**REMARQUE.** — Dans le paragraphe B) de la première partie de ce chapitre, pour pouvoir introduire  $\frac{dx}{dt}$ , nous avons imposé la condition  $R_1(+0) = 0$  ; il est facile de voir que cette condition entraînait bien  $\frac{d\mathcal{C}}{d\theta}(\theta = 0) = 0$ .

On a en effet :

$$\frac{d\mathcal{C}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left\{ \int_{+0}^{+\infty} q^2 \rho R_1(t) R_1(t + \theta) dt \right\}_{\theta > 0} = \int_{+0}^{+\infty} q^2 \rho R_1(t) \frac{dR_1}{dt}(t + \theta) dt$$

$$\frac{d\mathcal{C}}{d\theta} [\theta = 0] = \int_{+0}^{+\infty} q^2 \rho R_1(t) \frac{dR_1}{dt}(t) dt = \frac{1}{2} q^2 \rho R_1^2(+0) = 0.$$

De même, pour pouvoir introduire  $\frac{d^2x}{dt^2}$ , nous avons supposé que  $R_1(t)$  satisfaisait à :

$$R_1(+0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dR_1}{dt}(+0) = 0.$$

On a alors :

$$\frac{d^3\mathcal{C}}{d\theta^3} [\theta = 0] = \int_{+0}^{+\infty} q^2 \rho R_1(t) \frac{d^3R_1(t)}{dt^3} dt = q^2 \rho \left[ R_1 \frac{d^2R_1}{dt^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{dR_1}{dt} \right)^2 \right]_{+0}^{+\infty} = 0.$$

Les notions précédentes peuvent être généralisées. Soient  $g_1(t), g_2(t) \dots g_p(t) \dots$  un système de  $p$  fonctions aléatoires stationnaires toutes définies sur une même catégorie d'épreuves. Soient, d'autre part,  $t_1, t_2, \dots, t_n \dots$  un nombre quelconque, mais fini, de valeurs du paramètre  $t$ . Nous dirons que  $g_1(t), g_2(t) \dots g_p(t)$  constituent un *système aléatoire stationnaire laplacien* si la fonction caractéristique  $\Phi \{ \dots; u'_j, \dots \}$  relative à l'ensemble des  $n.p$  variables liées :

$$X_j = g_i(t_j)$$

s'exprime par une relation de la forme :

$$L\Phi[\dots; u'_j, \dots] = -\frac{1}{2} \Sigma \mathcal{C}_{i,i'}[t_j - t_{j'}] u'_j u'_{j'}. \quad (162)$$

Un système laplacien est sous la dépendance de  $p^2$  fonctions  $\mathcal{C}_{i,i'}$ ; ces fonctions ne sont d'ailleurs ni indépendantes, ni arbitraires (1). Pour  $i = i'$ , les fonctions  $\mathcal{C}_{i,i}$  sont des fonctions de corrélation. Pour  $i \neq i'$  on a en particulier les relations évidentes :

$$\mathcal{C}_{i,i'}(\theta) = \overline{g_i(t) \cdot g_{i'}(t + \theta)} = \overline{g_i(t - \theta) g_{i'}(t)} = \overline{g_{i'}(t) g_i(t - \theta)} = \mathcal{C}_{i',i}[-\theta]. \quad (163)$$

$\mathcal{C}_{i,i'}(\theta)$  n'est pas une fonction paire de  $\theta$ ; mais  $\{ \mathcal{C}_{i,i'}(\theta) + \mathcal{C}_{i,i'}(-\theta) \}$  est une fonction paire; elle s'exprime par une combinaison linéaire de fonctions de corrélation :

$$\mathcal{C}_{i,i'}(\theta) + \mathcal{C}_{i,i'}(-\theta) = \left. \begin{aligned} & \overline{[g_i(t) + g_{i'}(t) \quad g_i(t + \theta) + g_{i'}(t + \theta)]} \\ & - \overline{[g_i(t) g_{i'}(t + \theta) - g_{i'}(t) g_i(t + \theta)]} \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

Si  $y(t)$  est une fonction aléatoire stationnaire laplacienne, il résulte, de ce qui a été dit, que, si la fonction de corrélation associée  $\mathcal{C}(\theta)$  possède en

(1) Voir CRAMER. *Ann. of Math.*, 41 (1940), 215.

tout point des dérivées jusqu'à l'ordre  $2p$  inclus, on peut considérer les dérivées aléatoires :

$$y'(t), y''(t), \dots, y^{(p-1)}(t), y^{(p)}(t).$$

Il est alors intéressant d'introduire le système des  $p + 1$  fonctions aléatoires liées :

$$g_0(t) = y(t); g_1(t) = y'(t); g_2(t) = y''(t); \dots g_p(t) = y^{(p)}(t). \quad (165)$$

On montre que le caractère laplacien de  $y(t)$  entraîne celui du système  $g$ .

*THÉORÈME XV.* — *Le système formé par une fonction aléatoire stationnaire laplacienne et par un certain nombre de ses dérivées aléatoires est un système aléatoire stationnaire laplacien.*

Ce système sera totalement défini si on connaît l'ensemble des fonctions,  $\mathcal{C}_{i'}$  qui lui sont associées. En faisant les passages à la limite sur les secondes fonctions caractéristiques on établit les relations :

$$\mathcal{C}_{i',i'+1} = \frac{d}{dt} \mathcal{C}_{i',i'} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{i'+1,i'} = -\frac{d}{dt} \mathcal{C}_{i',i'} \quad (166)$$

qui permettent de calculer, de proche en proche, l'ensemble des  $\mathcal{C}_{i'}$  <sup>(1)</sup>.

On obtient, en particulier, une fonction caractéristique remarquablement simple si on envisage les  $p + 1$  variables liées constituées par les valeurs prises par  $y(t), y'(t) \dots y^{(p)}(t)$  à un même instant  $t$ . On retrouve alors les résultats indiqués dans le paragraphe C) de la première partie de ce chapitre. Les fonctions aléatoires stationnaires laplaciennes et les systèmes aléatoires stationnaires laplaciens paraissent susceptibles de s'appliquer à de nombreux phénomènes physiques [voir page 73].

### III. — LA FONCTION ALÉATOIRE $x(t)$ ET LES PROCESSUS DE MARKOFF

Nous avons dit que les propriétés d'un amplificateur étaient régies par une équation différentielle linéaire à coefficients constants ; nous avons traduit ce fait en utilisant la fonction  $R_1(t)$ .

Nous nous sommes placés au point de vue suivant :  $x(t)$  est, pour chaque valeur de  $t$ , la somme de toutes les contributions individuelles de tous les chocs depuis  $t = -\infty$  jusqu'à  $t = t$ .

On peut se représenter les choses d'une autre façon. C'est ce que je vais

(1) Les relations (166) ont été établies par BERNAMONT d'une façon qui n'est pas parfaitement rigoureuse [*Ann. de Phys.*, 7 (1937), 84] et, pour des fonctions aléatoires non supposées stationnaires, par MM. DEDLBANI et WEHRLI [*Portugalia Physica*, 1, fasc. 3, 1944, p. 95], LØLVE [*C. R.*, 5 mars 1945] et BASS, *Les méthodes modernes du calcul des probabilités et leur application au problème de la turbulence* (en cours de publication).

préciser sur un exemple. Considérons un amplificateur dont le fonctionnement est régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \beta \frac{dv}{dt} + \gamma v = w(t) \quad (167)$$

qui relie la réponse  $v(t)$  au signal  $w(t)$ .

Supposons qu'à l'instant  $t_1$ , on ait  $x(t) = x_1$ . Dans cette hypothèse, on peut considérer la probabilité liée pour que  $x(t_2)$  ( $t_2 > t_1$ ) prenne une certaine valeur. Nous dirons que  $x(t)$  est un processus de Markoff si cette probabilité n'est pas affectée par la donnée d'un renseignement supplémentaire portant sur un instant antérieur à  $t_1$ . S'il en est ainsi, on peut dire que l'influence du passé relatif à  $t_1$ , sur le futur relatif à  $t_1$ , est tout entière contenue dans la donnée de  $x_1$ .

Si l'appareil amplificateur considéré était régi par une équation différentielle du premier ordre, on aurait bien affaire à un processus de Markoff ; mais, cela n'est plus vrai pour une équation du second ordre. Cependant, supposons qu'au lieu de considérer uniquement la fonction aléatoire  $x(t)$ , nous considérions l'ensemble des deux fonctions aléatoires liées  $x(t)$  et  $\frac{dx}{dt}$ . Soient  $x(t_1)$  et  $\frac{dx}{dt}(t_1)$  les valeurs prises à l'instant  $t_1$  par ces deux fonctions ; les valeurs  $x(t_2)$  et  $\frac{dx}{dt}(t_2)$  résulteront de l'addition de l'effet des chocs postérieurs à  $t_1$  et du résultat de l'évolution de l'amplificateur supposé soustrait à l'action des chocs, à partir des conditions initiales fixées par l'état en  $t_1$  ; l'équation différentielle étant du second ordre, la donnée de  $x(t_1)$  et  $\frac{dx}{dt}(t_1)$  définit parfaitement cette évolution ; on peut donc dire que l'ensemble des deux fonctions aléatoires liées  $x(t)$  et  $\frac{dx}{dt}$  constitue un processus de Markoff à deux fonctions.

Si l'équation différentielle considérée était d'ordre  $k$ , il faudrait, pour introduire un processus de Markoff, considérer simultanément :

$$x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}}.$$

Ce nouveau point de vue suggère une autre solution du problème que nous étudions. Supposons qu'à l'instant  $t = 0$ , on ait :

$$\dot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = 0.$$

On fait agir les chocs à partir de  $t = 0$ .

Soient  $X$ ,  $X'$ , et  $X_1$ ,  $X'_1$ , les valeurs prises respectivement par  $x(t)$  et  $\frac{dx}{dt}$  en  $t$ , et en  $t_1$  ( $t_1 > t$ ) ; soit  $\Phi U, U', t_1$  la fonction caractéristique relative à  $X(t)$  et  $X'(t)$ . Cherchons à passer de  $\Phi U, U', t_1$  à  $\Phi' U, U', t_1$ . Nous supposons, d'ailleurs, que  $t_1 - t = \Delta t$  est petit.  $X_1$ , et  $X'_1$ , se composent de deux parties :

- a) l'effet des chocs intervenant entre  $t$  et  $t_1$ ,  
 b) le résultat de l'évolution du système supposé libre à partir de son état initial en  $t$  défini par  $X$  et  $X'$ .

Soient  $\delta X$  et  $\delta X'$  les contributions dues à la première cause et  $\underline{X}$  et  $\underline{X}'$  le résultat de l'évolution libre.

On a évidemment :

$$\underline{X}_1 = \underline{X} + \delta X; \quad \underline{X}'_1 = \underline{X}' + \delta X'.$$

Il y a indépendance entre  $\{\underline{X}, \underline{X}'\}$  et  $\{\delta X, \delta X'\}$ . Désignons par  $\underline{\Phi} \{U, U', t, \Delta t\}$  et  $\Phi_\delta [U, U', t, \Delta t]$  les fonctions caractéristiques respectivement associées à ces deux groupes de variables ; on aura :

$$L\Phi[U, U', t_1] = L\underline{\Phi}[U, U', t, \Delta t] + L\Phi_\delta[U, U', t, \Delta t]. \quad (168)$$

D'où la relation :

$$\frac{\partial L\Phi[U, U', t]}{\partial t} = \frac{\partial L\underline{\Phi}[U, U', t, \Delta t]}{\partial(\Delta t)} + \frac{\partial L\Phi_\delta[U, U', t, \Delta t]}{\partial(\Delta t)}. \quad (169)$$

Calculons les deux dérivées partielles figurant au second membre.

On a :

$$\underline{X} = X + \frac{dX}{d(\Delta t)} \Delta t \quad \text{et} \quad \underline{X}' = X' + \frac{d^2X}{d(\Delta t)^2} \Delta t \quad (170)$$

les dérivées correspondant à l'évolution libre à partir d'un état pour lequel on a  $\underline{X} = X$  et  $\underline{X}' = X'$  ; on a donc :

$$\frac{dX}{d(\Delta t)} = X' \quad \text{et} \quad \frac{d^2X}{d(\Delta t)^2} = -\beta X' - \gamma X.$$

D'où, finalement :

$$\underline{X} = X + X' \Delta t \quad \text{et} \quad \underline{X}' = X' + \Delta t \{-\beta X' - \gamma X\}. \quad (171)$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}[U, U', t, \Delta t] &= \overline{e^{i[U\underline{X} + U'\underline{X}']}} = \overline{e^{i\{U[X + \Delta t X'] + U'[X' + \Delta t\{-\beta X' - \gamma X\}]\}}} \\ &= \overline{e^{i\{X[U - \gamma U' \Delta t] + X'[U' + [U - \beta U'] \Delta t]\}}} \end{aligned}$$

D'où la formule de passage de  $\Phi$  à  $\underline{\Phi}$  :

$$\underline{\Phi}[U, U', t, \Delta t] = \Phi \{U - \gamma U' \Delta t, U' + \Delta t(U - \beta U'), t\}.$$

D'où :

$$\frac{\partial L\underline{\Phi}}{\partial(\Delta t)} = \frac{\partial L\Phi}{\partial U} \{-\gamma U'\} + \frac{\partial L\Phi}{\partial U'} \{U - \beta U'\}. \quad (172)$$

Quelle est d'autre part la contribution due aux chocs intervenant entre  $t$  et  $t + \Delta t$ ? Pour simplifier les calculs, nous nous plaçons, tout de

suite, dans le cas où des intervalles de temps  $\Delta t$ , faibles par rapport aux constantes de temps de l'amplificateur, contiennent déjà beaucoup de chocs. Dans ces conditions l'intervalle  $\Delta t$  contient en moyenne  $\rho \Delta t$  chocs et, si on s'intéresse uniquement aux écarts, on doit faire intervenir la fonction caractéristique  $e^{-\frac{\rho \Delta t}{2} \theta^2}$ ; d'ailleurs, étant donnée l'équation différentielle à laquelle obéit l'amplificateur un choc unité n'altère pas  $X$  et provoque un accroissement de  $X'$  égal à 1.

On a donc :

$$\Phi_{\delta}[U, U', t, \Delta t] = e^{-\frac{\rho \Delta t}{2} U'^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L \Phi_{\delta}}{\partial (\Delta t)} = -\frac{\rho}{2} U'^2. \quad (173)$$

Les relations (169) (172) et (173) conduisent alors à l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire  $\Phi[U, U', t]$  :

$$\frac{\partial L \Phi \{U, U', t\}}{\partial t} = \frac{\partial L \Phi [U, U', t]}{\partial U} (-\gamma U') + \frac{\partial L \Phi [U, U', t]}{\partial U'} [U - \beta U'] - \frac{\rho}{2} U'^2. \quad (174)$$

Le système différentiel des caractéristiques est, en posant  $Z = L \Phi$  :

$$\frac{dt}{1} = \frac{dU}{\gamma U'} = \frac{dU'}{\beta U' - U} = \frac{dZ}{-\frac{\rho}{2} U'^2}. \quad (175)$$

On tire, des équations précédentes :

$$\frac{dU}{dt} = \gamma U' \quad \text{et} \quad \frac{dU'}{dt} = \beta U' - U.$$

D'où :

$$\frac{d^2 U}{dt^2} - \beta \frac{dU}{dt} + \gamma U = 0.$$

D'où la solution générale :

$$U = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \quad \text{et} \quad U' = \frac{1}{\gamma} \{ A \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \} \quad (176)$$

où  $-\lambda_1$  et  $-\lambda_2$  sont les racines de  $\lambda^2 + \beta \lambda + \gamma = 0$ ; étant donné que l'on doit supposer l'amplificateur amorti, il faut admettre que  $\beta$  est positif, c'est-à-dire que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ont des parties réelles positives.

Cela posé, on a :

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{\rho}{2} U'^2 = -\frac{\rho}{2\gamma^2} \{ A^2 \lambda_1^2 e^{2\lambda_1 t} + B^2 \lambda_2^2 e^{2\lambda_2 t} + 2AB \lambda_1 \lambda_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \} \quad (177)$$

et enfin :

$$Z - Z_0 = -\frac{\rho}{2\gamma^2} \left\{ A^2 \frac{\lambda_1}{2} e^{2\lambda_1 t} + B^2 \frac{\lambda_2}{2} e^{2\lambda_2 t} + 2A \cdot B \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \right\} \quad (178)$$

on tire, d'ailleurs, des relations (176) :

$$A e^{\lambda_1 t} = \frac{\gamma U' - \lambda_2 U}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{et} \quad B e^{\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1 U - \gamma U'}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (179)$$

On peut alors introduire  $U$  et  $U'$  dans (178); en définitive, on a, pour définir les caractéristiques, le système des trois équations entre  $U$ ,  $U'$ ,  $t$ ,  $Z$  dépendant des constantes arbitraires  $A$ ,  $B$ ,  $Z_0$  :

$$A = e^{-\lambda_1 t} \frac{\gamma U' - \lambda_2 U}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad B = -e^{-\lambda_2 t} \frac{\gamma U' - \lambda_1 U}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$Z_0 = Z$$

$$+ \frac{\rho}{2\gamma^2} \left\{ \frac{\lambda_1}{2} \left[ \frac{\gamma U' - \lambda_2 U}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 + \frac{\lambda_2}{2} \left[ \frac{\gamma U' - \lambda_1 U}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 - \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{[\gamma U' - \lambda_1 U][\gamma U' - \lambda_2 U]}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right\}.$$

Les surfaces intégrales s'obtiennent en liant les constantes d'intégration par une certaine relation :

$$Z_0 = \mu(A, B)$$

où, en explicitant :

$$\left. \begin{aligned} Z + \frac{\rho}{2\gamma^2} \left\{ \frac{\lambda_1}{2} \left[ \frac{\gamma U' - \lambda_2 U}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 + \frac{\lambda_2}{2} \left[ \frac{\gamma U' - \lambda_1 U}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 - 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{(\gamma U' - \lambda_1 U)(\gamma U' - \lambda_2 U)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right\} \\ = \mu \left\{ e^{-\lambda_1 t} \frac{\gamma U' - \lambda_2 U}{\lambda_1 - \lambda_2}, -e^{-\lambda_2 t} \frac{\gamma U' - \lambda_1 U}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

D'ailleurs à l'instant  $t=0$ , on a  $X=0$  et  $X'=0$ ; d'où :

$$L\Phi[U, U', 0] \equiv 0.$$

Pour  $t=0$ , on a donc  $Z \equiv 0$ ; cela définit la fonction  $\mu$ ; en définitive, la solution du problème est donnée par la relation :

$$\left. \begin{aligned} Z[U, U', t] + \frac{\rho}{2\gamma^2} \left\{ \frac{\lambda_1}{2} \left[ \frac{\gamma U' - \lambda_2 U}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 \right. \\ \left. + \frac{\lambda_2}{2} \left[ \frac{\gamma U' - \lambda_1 U}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 - \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{(\gamma U' - \lambda_1 U)(\gamma U' - \lambda_2 U)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right\} = \frac{\rho}{2\gamma^2} \left\{ \frac{\lambda_1}{2} \left[ \frac{\gamma U' - \lambda_2 U}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 e^{-2\lambda_1 t} \right. \\ \left. + \frac{\lambda_2}{2} \left[ \frac{\gamma U' - \lambda_1 U}{\lambda_1 - \lambda_2} \right]^2 e^{-2\lambda_2 t} - \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{(\gamma U' - \lambda_1 U)(\gamma U' - \lambda_2 U)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

Des calculs simples montrent que, en désignant par  $R_1(t)$  la réponse de l'amplificateur à une impulsion unité reçue à l'instant  $t=0$ . l'équation précédente est équivalente à :

$$\left. \begin{aligned} L\Phi[U, U', t] = -\frac{\rho}{2} \left\{ U_2 \int_0^t R_1^2(t) dt + 2UU' \int_0^t R_1(t) \frac{dR_1}{dt} dt \right. \\ \left. + U'^2 \int_0^t \left( \frac{dR_1}{dt} \right)^2 dt \right\} \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

On reconnaît là, immédiatement, l'expression de  $L\Phi[U, U', t]$  que l'on aurait déduite des résultats de la méthode de calcul indiquée au début de cette étude. La méthode actuelle peut paraître plus compliquée. Elle est intéressante en ce qu'elle nous fait considérer les fluctuations du système comme le résultat des effets antagonistes de la tendance du système vers son équilibre et les effets statistiques des chocs qui perturbent constamment le retour à l'équilibre. Nous reviendrons sur cette idée dans ce qui va suivre.

IV. — SYSTÈMES FLUCTUANTS PLUS GÉNÉRAUX.  
APPLICATION A L'EFFET DE SCINTILLATION.

Schématisons le point de vue que nous avons adopté dans ce qui précède.

Nous avons considéré un système S dont l'état, à l'instant  $t$ , était représenté par une ou plusieurs grandeurs, fonctions du temps (exemple :  $x(t)$  et  $\frac{dx}{dt}$ ).

D'une façon générale, nous désignerons par  $g_1, g_2 \dots$  ces grandeurs.

Supposons qu'à l'instant  $t_1$ , bien précisé, ces diverses grandeurs aient les valeurs  $g_1(t_1), g_2(t_1) \dots$ ; si, à partir de  $t_1$ , rien n'agit sur le système, celui-ci va évoluer suivant ses lois propres. En l'absence de toute action extérieure, l'évolution libre du système ne dépend que de son état initial qui est défini par  $g_1(t_1), g_2(t_1) \dots$ . Nous supposerons que cette évolution conduit toujours à un équilibre asymptotique indépendant de l'état initial. Il sera toujours possible de supposer que cet état d'équilibre correspond à  $g_1 = g_2 = \dots = 0$ . Nous considérons, par ailleurs, un *mécanisme perturbateur* qui entretient les fluctuations de S. Ce mécanisme M procède de la façon suivante : pendant chaque intervalle très court  $t, t + \Delta t$ , il provoque des accroissements  $\Delta g_1, \Delta g_2, \dots$  des valeurs de  $g_1, g_2, \dots$  ( $\Delta t$  est supposé très petit par rapport aux constantes de temps de l'évolution libre). Ces accroissements  $\Delta g_1, \Delta g_2, \dots$  sont des variables aléatoires qui, *a priori*, dépendent de  $t$  et de  $\Delta t$ .

Les fluctuations de S sont le résultat des efforts antagonistes des impulsions perturbatrices  $\Delta g_1, \Delta g_2, \dots$  et de la tendance de S vers l'équilibre. Je dirai qu'un mécanisme M est *totalemt désordonné et sans couplage avec le système S* lorsque les apports  $\Delta g_1, \Delta g_2, \dots$  relatifs à un intervalle  $t, t + \Delta t$  sont indépendants de l'état de S en  $t$  et lorsque les apports aléatoires relatifs à deux intervalles disjoints sont indépendants les uns des autres. Je dirai qu'un mécanisme M est *stationnaire* si l'effet aléatoire d'un intervalle  $t, t + \Delta t$  ne dépend pas de  $t$ .

J'appellerai d'autre part *système linéaire* tout système S pour lequel l'évolution libre est définie par un système différentiel linéaire à coefficients constants en  $g_1, g_2, \dots$ ; naturellement on supposera le *système amorti*, c'est-à-dire pourvu de solutions tendant vers zéro pour  $t = \infty$ .

En adoptant la terminologie qui vient d'être définie, il est possible d'obtenir un énoncé de forme très générale.

*THÉORÈME XVI. — Soit un système linéaire amorti dont l'état à chaque instant est défini par la donnée des K fonctions  $(g_1(t), g_2(t), \dots, g_K(t))$  et un mécanisme d'entretien stationnaire totalement désordonné et sans couplage avec le système. Supposons qu'il soit possible de définir une grandeur  $\Delta t$  petite devant les constantes de temps du système et telle que l'ensemble des variables aléatoires  $\Delta g_1, \Delta g_2, \dots$  relatives à  $\Delta t$  obéisse à une loi de Laplace. Alors on peut affirmer que*

$g_1(t), g_2(t), \dots, g_k(t)$  forment un système aléatoire stationnaire laplacien.

La démonstration se fait simplement en introduisant les réponses  $R_{i,j}(t)$  qui représentent les évolutions respectives de chacun des paramètres  $g_i(t)$  lorsque le système supposé au préalable en équilibre reçoit à l'instant  $t = 0$  les impulsions :

$$\Delta g_1 = 0, \dots \quad \Delta g_j = 1; \dots \quad \Delta g_k = 0.$$

Les systèmes envisagés jusqu'ici étaient sans couplage avec le mécanisme d'entretien et, d'autre part, nous avons admis que les conditions initiales déterminaient toute l'évolution libre du système S. En d'autres termes, nous supposons le mécanisme d'entretien indépendant du système et nous attribuons un caractère aléatoire uniquement au mécanisme, le fonctionnement du système étant déterministe.

Les méthodes indiquées peuvent s'appliquer dans certains cas à la résolution des problèmes plus complexes :

a) on peut imaginer des systèmes dont l'évolution, en l'absence d'effets extérieurs, est aléatoire ;

b) on peut enfin faire intervenir un certain couplage entre le système et le mécanisme.

Naturellement les résultats obtenus ne doivent pas être étendus sans examen de chaque cas particulier. Mais les méthodes indiquées permettent de résoudre des problèmes très généraux. Je vais donner un exemple :

*Exemple.* — Soit une surface métallique  $\Sigma$  située dans un gaz raréfié ; on se propose d'étudier les fluctuations du nombre de molécules du gaz résiduel adsorbées par  $\Sigma$ . Les molécules du gaz résiduel heurtent la surface ; chaque molécule heurtant la surface  $\Sigma$  a une probabilité d'être adsorbée par la surface ; si les molécules adsorbées par la surface sont très loin de la recouvrir entièrement, on peut dire que cette probabilité est la même pour chaque molécule incidente et qu'il y a indépendance réciproque entre diverses molécules incidentes. On peut admettre, pour des raisons analogues à celles qui ont déjà été exposées au début de ce travail, que le nombre de molécules fixées pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  est une variable aléatoire obéissant à la loi de Poisson. Les nombres de molécules fixées pendant deux intervalles disjoints  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  sont indépendants. On peut dire que ce qui précède définit le mécanisme perturbateur.

*Quelle est l'évolution libre du système en l'absence de molécules incidentes ?* Cette évolution est aléatoire. On peut admettre que, si on considère une molécule fixée à l'instant  $t = 0$ , la probabilité, pour qu'elle quitte la surface entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + \Delta t$  est proportionnelle à  $e^{-t/\tau} \Delta t$  ; elle est donc égale à  $\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \Delta t$  (1) puisqu'on doit admettre que

(1) Voir W. SCHOTTKY. Small-shot effect and flicker effect. *Physical Review* (1926), 74.

toute molécule adsorbée finit par quitter la surface au bout d'un temps plus ou moins long.

Je vais montrer comment on peut calculer simplement la loi de probabilité à laquelle obéit l'ensemble des deux variables aléatoires  $a(t_1)$  et  $a(t_2)$  qui représentent respectivement le nombre de molécules adsorbées présentes sur la surface aux instants  $t_1$  et  $t_2$ .

Supposons le temps divisé en cases très petites d'amplitude  $\Delta t$ ; on a, en définitive, à calculer :

$$\Phi(u_1, u_2) = \overline{\mathbf{e}^{\{u_1 a(t_1) + u_2 a(t_2)\}}} \quad (183)$$

Les molécules respectivement présentes sur la surface aux instants  $t_1$  et  $t_2$  — et dont les nombres sont  $a(t_1)$  et  $a(t_2)$  — peuvent être classées d'après la case de temps durant laquelle elles ont été fixées.

Soient  $\Delta t_j$  une case de temps,  $n_{1,j}$  le nombre de molécules fixées pendant l'intervalle  $\Delta t_j$  et encore présentes en  $t_1$ , et  $n_{2,j}$  le nombre de molécules fixées pendant l'intervalle  $\Delta t_j$  et encore présentes en  $t_2$ . On a évidemment :

$$\left. \begin{aligned} a(t_1) &= \Sigma n_{1,j} \\ a(t_2) &= \Sigma n_{2,j} \end{aligned} \right\} \quad (184)$$

D'où :

$$\Phi[u_1, u_2] = \overline{\mathbf{e}^{\{u_1 \Sigma n_{1,j} + u_2 \Sigma n_{2,j}\}}} = \Pi_j \{ \overline{\mathbf{e}^{u_1 n_{1,j} + u_2 n_{2,j}}} \}$$

où  $\Pi_j$  désigne un produit infini; d'ailleurs, à cause de l'indépendance des contributions des cases  $\Delta t_j$ , on peut écrire :

$$L\Phi[u_1, u_2] = \sum_j L \overline{\mathbf{e}^{u_1 n_{1,j} + u_2 n_{2,j}}} = \sum_j L\Phi_j. \quad (185)$$

Il reste à calculer  $\Phi_j$ , sa valeur dépend de la position de  $t_j$  par rapport à  $t_1$  et  $t_2$  | on suppose  $t_1 < t_2$ !. D'autre part, si  $\Delta t_j$  est très petit,  $\Phi_j$  est très voisin de 1;  $L\Phi_j$  est donc un infiniment petit avec  $\Delta t$  et il nous suffira de connaître sa partie principale; nous pourrons donc négliger les infiniment petits du second ordre. Dans ces conditions, on peut dire que les seules possibilités relatives à la fixation ou à la non-fixation de molécules durant l'intervalle  $\Delta t_j$  sont les suivantes :

a) aucune molécule n'a été adsorbée :

$$\text{probabilité : } 1 - \rho \Delta t;$$

b) une molécule a été fixée :

$$\text{probabilité : } \rho \Delta t.$$

Le calcul de  $L\Phi$  est résumé dans le tableau A où  $\varphi_j$  représente  $\mathbf{e}^{u_1 n_{1,j} + u_2 n_{2,j}}$  de sorte que l'on a  $\Phi_j = \overline{\varphi_j}$ . Il résulte, de ce tableau, que l'on a :

$$L\Phi[u_1, u_2] = \rho \tau \left\{ [\mathbf{e}^{u_1} - 1] + [\mathbf{e}^{u_2} - 1] + [\mathbf{e}^{u_1} - 1][\mathbf{e}^{u_2} - 1] \mathbf{e}^{-\frac{|t_2 - t_1|}{\tau}} \right\} \quad (186)$$

TABLEAU A

1°  $t_j < t_1 < t_2$ :

a)  $\Delta t_j$  ne contient pas de chocs donnant fixation de molécule :

$$n_{1,j} = n_{2,j} = 0 \quad \varphi_j = 1 \quad \text{Prob} = 1 - \rho \Delta t$$

b) Durant  $\Delta t_j$ , il y a une fixation :

$$\left\{ \begin{array}{llll} n_{1,j} = 0 & n_{2,j} = 0 & \varphi_j = 1 & \text{Prob} = \rho \Delta t \left\{ 1 - e^{-\frac{(t_1-t_j)}{\tau}} \right\} \\ n_{1,j} = 1 & n_{2,j} = 0 & \varphi_j = e^{u_1} & \text{Prob} = \rho \Delta t \left\{ e^{-\frac{(t_1-t_j)}{\tau}} - e^{-\frac{(t_2-t_j)}{\tau}} \right\} \\ n_{1,j} = 0 & n_{2,j} = 1 & \varphi_j = e^{u_2} & \text{Prob} = 0 \\ n_{1,j} = 1 & n_{2,j} = 1 & \varphi_j = e^{u_1+u_2} & \text{Prob} = \rho \Delta t e^{-\frac{(t_2-t_j)}{\tau}} \end{array} \right.$$

La contribution à  $L\Phi$  de tous les  $\Delta t_j$  pour lesquels on a  $t_j < t_1 < t_2$  est :

$$\rho \tau \left\{ (e^{u_1} - 1) + e^{u_1}(e^{u_2} - 1) e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} \right\}$$

2°  $t_1 < t_j < t_2$ :

a) Aucune fixation durant  $\Delta t_j$  :

$$n_{1,j} = 0 \quad n_{2,j} = 0 \quad \varphi_j = 1 \quad \text{Prob} = 1 - \rho \Delta t$$

b) Une fixation durant  $\Delta t_j$  :

$$\begin{array}{llll} n_{1,j} = 0 & n_{2,j} = 0 & \varphi_j = 1 & \text{Prob} = \rho \Delta t \left[ 1 - e^{-\frac{t_2-t_j}{\tau}} \right] \\ n_{1,j} = 0 & n_{2,j} = 1 & \varphi_j = e^{u_2} & \text{Prob} = \rho \Delta t e^{-\frac{t_2-t_j}{\tau}} \end{array}$$

La contribution à  $L\Phi$  de tous les  $\Delta t_j$  pour lesquels on a  $t_1 < t_j < t_2$  est :

$$\rho \tau \left[ 1 - e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} \right] [e^{u_2} - 1].$$

3°  $t_1 < t_2 < t_j$ :

On a toujours :

$$n_{1,j} = n_{2,j} = 0 \quad \text{d'où} \quad \Delta L\Phi_j \equiv 0.$$

En définitive on a :

$$L\Phi = \rho \tau \left\{ (e^{u_1} - 1) + (e^{u_2} - 1) + (e^{u_1} - 1)(e^{u_2} - 1) e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} \right\}$$

Si on rapporte les variables à leur valeur moyenne, c'est-à-dire si on prend pour nouvelles variables  $a'(t_1)$  et  $a'(t_2)$  définies par :

$$a'(t_1) = a(t_1) - \overline{a(t)} \quad \text{et} \quad a'(t_2) = a(t_2) - \overline{a(t)}$$

et si, d'autre part, on utilise, comme cela a été fait, le quotient de ces variables par  $\sqrt{\rho\tau}$ , conformément aux relations :

$$a''(t_1) = \frac{a(t_1) - \overline{a(t)}}{\sqrt{\rho\tau}} \quad a''(t_2) = \frac{a(t_2) - \overline{a(t)}}{\sqrt{\rho\tau}} \quad (187)$$

on obtient, pour les grandes valeurs de  $\rho\tau$ , une loi de Laplace tangente dont la fonction caractéristique est donnée par :

$$L\Phi''(U_1 U_2) = -\frac{1}{2} \left\{ U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 U_2 e^{-\frac{|t_2 - t_1|}{\tau}} \right\} \quad (188)$$

REMARQUE. — Le problème que je viens d'étudier présente de l'intérêt en physique.

Les fluctuations du nombre d'atomes adsorbés par la surface d'une cathode incandescente provoquent des fluctuations dans le courant émis. On admet que l'écart de l'intensité  $\overline{I(t)}$  à sa valeur moyenne  $I(t)$  est proportionnel à l'écart du nombre de molécules adsorbées à l'instant  $t$  (soit  $a(t)$ ) à sa valeur moyenne (soit  $\overline{a(t)}$ ). Tous les résultats précédents sont donc applicables à  $I(t)$ . Ces fluctuations d'intensité sont connues sous le nom d'*effet de scintillation*.

Schottky <sup>(1)</sup> en a ébauché la théorie mais ses raisonnements sont très imparfaits ainsi qu'il le fait d'ailleurs remarquer lui-même. L'utilisation qu'il fait de séries de Fourier, si elle donne certaines vues intuitives, ne se prête pas à une solution rigoureuse. D'ailleurs il se limite à l'étude des propriétés du second ordre <sup>(2)</sup>.

Il importe de bien situer l'effet de scintillation par rapport à l'effet de grenaille. En l'absence d'effet de scintillation l'effet de grenaille correspond à la distribution des chocs électroniques de façon purement désordonnée, et conformément à une loi de Poisson de densité constante et bien définie  $\rho$ .

La cause de l'effet de grenaille se situe donc à l'échelle microscopique:

Au contraire, les fluctuations qui causent l'effet de scintillation sont des fluctuations des propriétés moyennes des cathodes, ces moyennes étant prises pendant des durées petites vis-à-vis des constantes de temps de nos appareils et grandes en général par rapport à l'intervalle moyen entre deux chocs consécutifs. L'étude générale de la superposition de l'effet de grenaille et de l'effet de scintillation est l'étude d'une suite de chocs répartis conformément à une loi de Poisson dont la densité  $\rho$  n'est plus une constante, mais une fonction aléatoire du type  $a(t)$ .

<sup>(1)</sup> W. SCHOTTKY. Small-shot effect and flicker effect. *Physical Review* (1926), 74.

<sup>(2)</sup> M. SURDIN a montré que l'effet de scintillation pouvait aussi être imputé à des fluctuations du nombre d'électrons libres (*Journal de Physique* avril 1939, p. 188). L'analyse statistique qui est donnée ici se transpose immédiatement.

## CONCLUSION

Le travail présenté a pour but essentiel l'étude des fluctuations de la tension de sortie d'un amplificateur linéaire soumis à une suite indéfinie de chocs électriques *égaux, très brefs et répartis au hasard*.

Après avoir posé le problème sous forme mathématique précise (répartition des chocs obéissant à la loi de Poisson et amplificateur commodément caractérisé par la réponse  $R_1(t)$  à un choc unité), j'ai montré que l'étude des fluctuations envisagées se ramenait à celle d'une certaine fonction aléatoire  $x(t)$ . J'ai indiqué comment on pouvait déterminer la fonction caractéristique relative aux  $K$  variables ( $K$  quelconque, mais fini)  $x(t_1), x(t_2) \dots x(t_k)$ . La fonction aléatoire  $x(t)$  est *presque sûrement continue* intégrable et dérivable. Tous les moments  $\overline{x(t_1)^{n_1} x(t_2)^{n_2} \dots}$  (où  $n_1, n_2 \dots$  sont des entiers positifs) existent. Au moins pour les réponses  $R_1(t)$  exponentielles, la fonction de répartition  $F(x)$  relative à  $x(t)$ , est continue. Enfin, la propriété essentielle de  $x(t)$  est d'être une *fonction aléatoire stationnaire au sens strict*.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'étude *des propriétés ergodiques de  $x(t)$* . Cette étude m'a conduit à étudier une classe importante de fonctions aléatoires : les fonctions stationnaires d'ordre 2, dont le coefficient de corrélation est intégrable au sens de Césaro d'ordre 1.

Sous des conditions très générales (existence d'intégrales aléatoires), on peut montrer que, si  $z(t)$  est une telle fonction,

$$\frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt$$

converge de façon presque sûre vers  $\overline{z(t)}$ . Ce résultat complète ceux apportés par les théorèmes de Khintchine et de Birkhoff. Cette propriété ergodique est d'ailleurs en relation étroite avec le comportement, aux très basses fréquences, de la fonction spectrale associée à  $z(t)$ .

Pour des fonctions  $y(x)$  assez générales, les résultats précédents relatifs au comportement de  $\frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt$  s'appliquent à  $z(t) = y[x(t)]$ , où  $x(t)$  est la fonction aléatoire introduite au début.

La tendance de  $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$  vers  $\overline{y(t)}$  peut être précisée.

Il est en effet possible de démontrer que la variable aléatoire :

$$\frac{1}{T} \int^T \{y(t) - \overline{y(1)}\} dt,$$

convenablement normée, a une fonction de répartition qui, pour les très grandes valeurs de  $T$ , tend vers une loi de Laplace.

Enfin, j'ai indiqué la *liaison très étroite existant entre l'étude de certaines moyennes temporelles et le problème de la détermination de la probabilité d'avoir, pour toutes les valeurs  $t$  d'un intervalle  $OT$ ,  $a \leq x(t) \leq b$ .*

De ce rapprochement dérive une solution de principe pour ce problème.

La troisième partie de ce travail est consacrée à l'étude des *propriétés asymptotiques du processus aléatoire  $x(t)$  pour les très grandes valeurs de la densité  $\rho$  des chocs dans le temps*. Dans ce cas,  $t_1, t_2, \dots, t_k$  étant des instants quelconques, en nombre fini, la fonction caractéristique relative à  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)$  est celle d'une loi de Laplace qui est totalement définie par la donnée, pour toutes les valeurs de  $t$ , du coefficient de corrélation. La considération du développement en série de  $\Phi$ , pour une valeur quelconque de la densité  $\rho$ , montre immédiatement l'ordre de grandeur des erreurs commises lorsqu'on substitue à la loi de probabilité rigoureuse l'approximation laplacienne tangente.

La quatrième partie comporte diverses généralisations. Elle étend les méthodes de calcul indiquées à l'étude des *processus aléatoires à plusieurs fonctions* ; une étude particulière est faite pour l'ensemble des fonctions liées  $x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2} \dots$  Pour les grandes valeurs de la densité  $\rho$ , ces fonctions sont soumises à une loi de Laplace qui présente des propriétés intéressantes ; réciproquement, faisant abstraction des problèmes étudiés, j'ai montré comment on pouvait ébaucher une étude directe de tels processus laplaciens.

En adjoignant à  $x(t)$  un nombre suffisant de dérivées on peut parvenir à un *processus de Markoff*, et cette considération suggère un point de vue différent de celui auquel je me suis placé dans la première partie pour étudier les fluctuations envisagées. Elle permet de considérer l'état stationnaire d'un système comme le résultat de la lutte de *forces de rappel* tendant à le ramener vers une configuration stable et d'un *mécanisme perturbateur* qui, à chaque instant, l'éloigne de cette configuration.

Des généralisations diverses sont envisagées (systèmes à évolution libre aléatoire-couplage entre l'évolution du système et le mécanisme perturbateur qui entretient les fluctuations) et une application est faite à l'étude des fluctuations connues sous le nom d'*effet de scintillation*.

Pour terminer, je signale que les considérations mathématiques contenues dans ce travail présentent un gros intérêt en physique. Elles constituent une étude générale des fluctuations connues sous le nom d'*effet de*

grenaille — elles fournissent l'outil mathématique nécessaire pour l'étude des fluctuations dans les dispositifs linéaires et dans de nombreux dispositifs non linéaires. Elles justifient le droit de substituer aux moyennes statistiques des moyennes temporelles et précisent dans quelles conditions on peut faire appel à des lois de Laplace pour représenter les phénomènes expérimentaux.

Les méthodes de calculs indiquées semblent d'ailleurs être assez générales pour qu'on puisse espérer les appliquer à d'autres fluctuations ; elles ont en particulier permis une étude fort simple de l'effet de scintillation.

---