

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

MARCEL MAYOT

Sur la stabilité des amas d'étoiles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1945

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1945__275__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNIVERSITÉ DE PARIS
FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen. Paul MONTEL

PROFESSEURS

P. MONTEL	T	Théorie des Fonctions.	LANQUINE	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
L. BLARINGHEM	T	Botanique.	VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	BARRABÉ		Géologie structurale et Géologie appliquée.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.	F. PERRIN		Théories physiques.
A. MICHEL-LÉVY	T	Pétrographie.	VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.
A. DENJOY	T	Géométrie supérieure.	G. DARMOIS	T	Mathématiques générales
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	CHATTON	T	Biologie maritime.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	AUBEL		Chimie biologique.
A. DEBIERNE	T	Électronique et Radioactivité.	Jacques BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
M. JAVILLIER	T	Chimie biologique.	M ^{me} JOLIOT CURIE		Physique générale et Radioactivité.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	PLANTEFOL	T	Botanique.
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.	CABANNES	T	Recherches physiques.
Ch. JACOB	T	Géologie.	GRASSE	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
P. PASCAL	T	Chimie générale.	PRÉVOST		Chimie organique.
M. FRÉCHET	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	BOULIGAND		Mathématiques.
E. ESCLANGON	T	Astronomie.	CHAUDRON		Chimie.
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	WYART		Minéralogie.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.	TEISSIER		Zoologie.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.	MANGENOT	T	Biologie végétale
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.	P. AUGER	T	Physique.
LOUIS DE BROGLIE	T	Théories physiques.	MONNIER		Physiologie générale.
Henri CHRÉTIEN		Optique appliquée.	PIVETEAU		Géologie.
JOB	T	Chimie générale	ROCARD		Physique.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	H. CARTAN		Calcul différentiel
VILLEY	T	Mécanique physique et expérimentale.	SCHAEFFER	T	Physiologie générale.
COMBES	T	Physiologie végétale.	LAFFITE		Chimie (P. C. B.).
GARNIER	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	LERAY		Mécanique théorique des fluides.
Joseph PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.	FAVART		Calcul des probabilités et Physique mathématique.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.	COULOMB	T	Physique du globe.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	M ^{lle} COUSIN		Biologie animale (P. C. B.).
TOUSSAINT		Technique aéronautique.	CHRÉTIEN		Analyse et mesures chimiques.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).	DRACH		Évolution des êtres organisés.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres
CHAZY	T	Mécanique analytique.	EPHRUSSI	T	Génétique.
GAULT	T	Chimie (P. C. B.).	WURMSER	T	Biologie physico chimique.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.	KASTLER		Physique
DUPONT	T	Théories chimiques.	RIVIÈRE		Géologie
			BAUER	T	Chimie-Physique

Secrétaire. Ch. MONIER.

A MES PARENTS

A MES MAITRES

SUR LA STABILITÉ DES AMAS D'ÉTOILES

par MARCEL MAYOT

SOMMAIRE. — Dans la première partie de ce travail, j'ai étudié la stabilité séculaire des amas d'étoiles de forme ellipsoïdale obtenus par M^r MINEUR, dans le cas où le centre de gravité de l'amas décrit un cercle :

a) Les ellipsoïdes stables sont ceux pour lesquels le rapport de l'axe moyen au grand axe est supérieur à une valeur bien déterminée, voisine de 0,5 et indépendante du champ de gravitation extérieur.

b) La condition limite qui définit les ellipsoïdes stables est équivalente à celle qui exprime le minimum de densité de l'amas pour tous les rapports d'axes compatibles avec la théorie. (L'amas est supposé homogène en première approximation.)

Dans la deuxième partie, j'ai établi les équations générales qui permettent d'étudier le mouvement d'un amas dont le centre de gravité décrit une trajectoire quelconque en présence d'un champ de gravitation extérieur. L'amas peut prendre une forme ellipsoïdale animée de mouvements internes.

Les demi-axes a , b , c de l'amas vérifient, entre autres, les relations :

$$(A + \alpha)a^2 = (B + \beta)b^2 = (C + \gamma)c^2 ;$$

A , B , C sont les coefficients du potentiel intérieur de l'ellipsoïdale ; α , β , γ sont en général des fonctions du temps, dépendant du mouvement du centre de gravité et des mouvements internes.

INTRODUCTION

On peut observer dans le ciel des condensations stellaires appelées « amas d'étoiles ». Ils ont été rangés en deux catégories principales :

1^o Les *amas globulaires* de forme sphérique, qui présentent une forte condensation centrale ; ils contiennent un nombre considérable d'étoiles (on en a compté jusqu'à plusieurs dizaines de milliers dans certains amas) ; ils sont répartis sur toute la sphère céleste : on en observe très peu au voisinage de la Voie Lactée, mais on peut penser que ce n'est là qu'une apparence, due à la position particulière du Soleil.

2^o Les *amas ouverts*, de formes plus variées ; ils sont beaucoup moins denses et contiennent à peine quelques centaines d'étoiles ; ils sont par contre à peu près tous situés dans le voisinage de la Voie Lactée ; on les appelle aussi, pour cette raison, *amas galactiques*.

Il existe encore d'autres particularités, notamment sur les étoiles constitutives de ces différents amas.

Dans l'étude du mouvement des amas, il ne saurait être question de considérer chaque étoile individuellement.

Les premières études effectuées par EDDINGTON et JEANS (*Monthly Notices*, t. **74-75**) supposent les amas isolés, le plus souvent à symétrie sphérique. Les amas sont assimilés à des masses gazeuses en équilibre statistique.

Depuis, Henri MINEUR a étudié les conditions d'équilibre dynamique et statistique des amas décrivant dans le plan galactique une trajectoire circulaire ; il tenait compte ainsi du champ de gravitation extérieur (*Annales d'Astrophysique*, t. **1** (1939), n° 1). On sait que dans la condition d'équilibre statistique la loi de distribution des vitesses est celle de Maxwell. Alors les résultats obtenus sont les mêmes que ceux déduits des équations de l'hydrodynamique sous leur forme habituelle [ROCARD : L'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz (thèse)]. Mentionnons également les recherches récentes de CHANDRASEKHAR sur la dynamique des systèmes stellaires (*Astrophysical Journal*, t. **93, 95, 96**).

Le champ de gravitation extérieur (celui de la Voie Lactée) est connu avec une approximation suffisante dans le voisinage du Soleil, par l'étude de la rotation différentielle des étoiles voisines ; en dehors de cette région, on peut faire des hypothèses vraisemblables et considérer la Voie Lactée comme superposition de plusieurs ellipsoïdes très aplatis, de densités différentes ; c'est ce qu'a fait LINDBLAD.

Dans ce travail, j'ai assimilé l'amas à une masse gazeuse homogène, dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton. J'ai supposé connu le champ de gravitation de la Voie Lactée. Enfin, les dimensions de l'amas sont supposées négligeables par rapport à celles de la Galaxie. J'ai donc été amené à étudier le mouvement et la forme d'une masse gazeuse homogène dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton dans un champ de gravitation donné (le problème peut être considéré comme résolu pour une masse isolée, c'est à-dire en l'absence de forces extérieures de forme ellipsoïdale ; il a été traité par H. POINCARÉ, etc.).

Le travail se compose de deux parties distinctes.

Dans la première partie, j'ai étudié la stabilité séculaire des figures d'équilibre ellipsoïdales obtenues par Henri MINEUR dans le cas d'une trajectoire circulaire. J'ai obtenu deux résultats principaux :

a) *Parmi ces ellipsoïdes, ceux pour lesquels le rapport de l'axe moyen au grand axe est supérieur à une valeur bien déterminée voisine de 0,5 sont stables ; le rapport de l'axe moyen au petit axe peut prendre toutes les valeurs possibles, mais le rapport précédent reste compris en effet entre 0,510 et 0,515.*

Ce résultat est indépendant du champ de gravitation extérieur ; lorsque celui-ci est connu, on peut calculer les valeurs des rapports des axes pour lesquels les ellipsoïdes obtenus sont stables : il en existe donc une simple infinité, dont la forme varie de la

sphère à un ellipsoïde dont le rapport de l'axe moyen au grand axe a une valeur voisine de 0,5.

La condition de stabilité séculaire utilisée est celle de LEJEUNE-DIRICHLET : l'énergie potentielle de l'amas doit être minimum. J'ai calculé la variation d'énergie potentielle qu'éprouve l'amas lorsqu'il se déforme à partir de la position d'équilibre, de façon que son volume reste constant, le centre de gravité décrivant toujours la même trajectoire circulaire. J'ai défini la surface déformée de l'amas par une longueur infiniment petite ζ comptée sur la normale à l'ellipsoïde et exprimée par un développement en série de fonctions de Lamé de la forme :

$$\zeta = \sum A_i M_i(\mu) N_i(\nu),$$

μ et ν étant les deux coordonnées elliptiques sur l'ellipsoïde d'équilibre, M_i N_i deux fonctions de Lamé associées. Les notations utilisées sont celles de POINCARÉ : n est l'ordre (ou degré) de la fonction de Lamé, i est un indice caractérisant chaque fonction.

Les axes de l'ellipsoïde sont $\rho^2 - a^2$, $\rho^2 - b^2$, $\rho^2 - c^2$.

La variation d'énergie potentielle ainsi obtenue est :

$$\delta W = -2\pi \sum A_i^2 \int \int \left(\frac{R_i S_i}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right) M_i^2 N_i^2 d\sigma.$$

Par un choix convenable des A_i , la série ζ est convergente ; il en est de même de la série définissant δW .

Il y aura stabilité séculaire si tous les coefficients de stabilité :

$$F_i = \frac{R_i S_i}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1}$$

sont positifs.

$R_i(\rho)$ est une fonction de Lamé de première espèce.

$S_i(\rho)$ est une fonction de Lamé de deuxième espèce.

Les seuls coefficients pouvant devenir négatifs sont ceux pour lesquels R_i est de l'une des deux formes :

$$\begin{aligned} R_i &= (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \dots (\rho^2 - \alpha_k) \\ R_i &= \sqrt{\rho^2 - a^2} (\rho^2 - \alpha_1) \dots (\rho^2 - \alpha_k), \end{aligned}$$

les racines α étant toutes comprises entre a^2 et b^2 .

Le radical $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ est compté comme une expression de degré 1.

Pour chacune de ces valeurs, l'équation de stabilité :

$$\frac{R_i S_i}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0$$

peut être vérifiée.

La méthode suivie est celle déjà employée par H. POINCARÉ dans l'étude d'une masse fluide en rotation autour d'un axe fixe, mais les résultats sont très différents :

ici les fonctions R_2 et S_2 se rapportent à l'axe moyen de l'ellipsoïde, tandis que pour l'équilibre d'une masse fluide les fonctions correspondantes R_1 et S_1 se rapportaient au petit axe.

Par un changement de variables, j'ai mis l'équation de stabilité sous une forme qui permet de montrer que si le premier coefficient de stabilité correspondant à la fonction de Lamé :

$$R_n = \rho^2 - \alpha \quad (n = 2)$$

est positif, tous les autres coefficients le sont aussi.

b) *La condition qui définit l'ellipsoïde limitant les ellipsoïdes stables est la même que celle qui exprime le minimum de densité de l'amas pour tous les rapports d'axes compatibles avec la théorie.*

J'ai montré que le minimum de densité de l'amas pour tous les rapports d'axes compatibles avec la théorie s'exprime par la relation

$$(1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

où s est le carré du rapport de l'axe moyen au grand axe ; t est le carré du rapport de l'axe moyen au petit axe ;

$\psi(s, t)$ et $\varphi(s, t)$ sont deux fonctions qui peuvent s'exprimer linéairement en fonction des intégrales elliptiques de Legendre.

La condition qui définit les ellipsoïdes stables limites est la première équation de stabilité :

$$(2) \quad \frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_1 S_1}{5} = 0.$$

Le premier membre est une fonction linéaire de ces mêmes intégrales elliptiques. Les équations (1) et (2) sont bien équivalentes.

Ces résultats diffèrent de ceux de POINCARÉ, qui n'a d'ailleurs pas considéré de relations semblables.

On pourrait chercher, comme dans le cas d'une masse fluide homogène isolée, les figures de bifurcation voisines de l'ellipsoïde et étudier aussi la stabilité ordinaire des ellipsoïdes en s'inspirant de la méthode de Mr CARTAN. J'ai calculé seulement les éléments de la première figure de bifurcation ; contrairement à la première figure obtenue par H. POINCARÉ, elle n'est pas ovoïde et présente trois plans de symétrie rectangulaires.

Les résultats obtenus sont en première approximation applicables aux amas galactiques.

Les rapports des axes observés pour les amas voisins du plan galactique sont de l'ordre de 0,8 (un seul est voisin de 0,6).

Dans la *deuxième partie*, j'ai établi les équations générales qui permettent d'étu-

dier le mouvement d'une masse fluide homogène qui est soumise à un champ extérieur et dont le centre décrit une trajectoire quelconque. On sait qu'il est en général impossible d'obtenir des figures d'équilibre relatif de forme ellipsoïdale en l'absence de champ extérieur [APPELL : *Traité de Mécanique Rationnelle*, t. 4, fasc. 1]. Cela est possible par contre si on suppose la masse fluide animée de mouvements internes.

J'ai supposé en première approximation que les mouvements internes sont définis par des composantes de vitesse relative de la forme suivante, du premier degré en x, y, z (cette forme reste la même si on choisit la vitesse absolue au lieu de la vitesse relative) :

$$\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{aligned}$$

Le champ de gravitation de la Voie Lactée est supposé en première approximation de la forme :

$$U = F(r) + G(z),$$

r et z étant respectivement les distances à l'axe et au plan galactique. On connaît U d'après les données expérimentales.

Les axes a, b, c de l'amas doivent vérifier entre autres les relations :

$$(A + \alpha)a^2 = (B + \beta)b^2 = (C + \gamma)c^2,$$

qui généralisent les cas particuliers obtenus pour une masse fluide isolée : $\gamma = 0$, masse fluide isolée en rotation (H. POINCARÉ) ; $\beta = 0$, amas dont le centre de gravité décrit une trajectoire circulaire (H. MINEUR).

A, B, C sont les coefficients du potentiel intérieur de l'ellipsoïde :

$$V = -\frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2).$$

Les quantités α, β, γ sont en général des fonctions du temps liées par certaines équations différentielles dépendant du mouvement du centre de gravité, du champ de gravitation extérieur et des mouvements internes.

J'ai formé les 15 équations vérifiées par les 15 inconnues du problème (9 paramètres définissant les vitesses, 3 composantes de la rotation du trièdre mobile, 3 axes de l'ellipsoïde ; ces équations ont été étudiées en l'absence de seconds membres dépendant du champ extérieur de gravitation par RIEMANN, SKETLOFF, etc.

J'ai obtenu ces équations en prenant le trièdre formé par les trois axes de symétrie de l'amas comme système de référence ; elles comprennent :

a) l'équation de continuité, équivalente au fait que le volume de l'amas doit rester constant ;

b) les 6 conditions exprimant que les surfaces d'égale pression, qui sont des ellipsoïdes, admettent les axes mobiles comme axes de symétrie ;

c) les 2 conditions obtenues en écrivant que l'ellipsoïde formant la surface libre est une surface à pression constante ;

d) les 6 conditions exprimant que la pression sur la surface libre reste constante au cours du mouvement.

J'ai étudié différents cas voisins du mouvement circulaire : j'ai cherché en particulier les ellipsoïdes de révolution vérifiant les conditions du problème. Il en existe une infinité, dont les axes vérifient les relations :

$$\begin{aligned}(A + \alpha) a^2 &= (C + \gamma) c^2, \\ a &= b,\end{aligned}$$

lorsqu'on suppose en première approximation :

$$F(r) = \frac{Kr^2}{2},$$

ce qui revient à assimiler le potentiel de la Voie Lactée à celui d'un ellipsoïde de révolution homogène.

Enfin, l'étude directe dans le cas général des relations :

$$(A + \alpha) a^2 = (B + \beta) b^2 = (C + \gamma) c^2$$

montre que les valeurs de α , β , γ ne peuvent être choisies arbitrairement, pour que les rapports des axes puissent être effectivement calculés. Si on considère l'espace $O\alpha\beta\gamma$, le point représentatif α , β , γ doit être situé dans une région déterminée pour que les équations précédentes soient résolubles.

Dans le chapitre I, j'ai cru bon de rappeler quelques résultats concernant le champ de gravitation de la Voie Lactée et les fonctions de Lamé.

Le chapitre II contient les résultats obtenus sur la stabilité des figures ellipsoïdales dont le centre de gravité décrit un cercle.

Le chapitre III est relatif à l'étude du mouvement d'une masse fluide homogène dont le centre de gravité décrit une trajectoire quelconque.

J'ai exécuté ce travail à l'Institut d'Astrophysique du Centre National de la Recherche Scientifique. Mr MINEUR, qui m'avait conseillé ce travail, n'a cessé de m'encourager de sa bienveillante compréhension ; qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je remercie M^{mes} RIGAUX et SINGELIN, calculatrices à l'Institut d'Astrophysique, qui ont effectué les calculs souvent laborieux exigés par ce travail.

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS. — FONCTIONS DE LAMÉ.

1. COORDONNÉES ELLIPTIQUES. — ÉQUATION DE LAPLACE. — Avant d'aborder l'étude de la stabilité des figures d'équilibre obtenues par Mr MINEUR, rappelons quelques propriétés des fonctions de Lamé qui nous seront utiles.

Soient les quadriques homofocales :

$$(1) \quad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0 \quad (c^2 > b^2 > a^2).$$

Par un point de l'espace passent trois de ces surfaces ; x, y, z étant donnés ; on a pour déterminer $\lambda^2 = u$ une équation du troisième degré dont les trois racines réelles ρ^2, μ^2, ν^2 sont séparées par les nombres a^2, b^2, c^2 . On a :

$$\rho^2 > c^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > a^2.$$

ρ^2 correspond à un ellipsoïde ;

μ^2 correspond à un hyperboloïde à une nappe ;

ν^2 correspond à un hyperboloïde à deux nappes.

Réciproquement, ρ^2, μ^2, ν^2 étant donnés, on a trois surfaces se coupant orthogonalement en huit points symétriques par rapport aux plans de coordonnées. Si on ne considère qu'un seul trièdre trirectangle, $Oxyz$ par exemple, ρ, μ, ν déterminent un seul point x, y, z .

On définit ainsi un système de *coordonnées elliptiques* ρ, μ, ν .

L'équation de Laplace $\Delta V = 0$ s'écrit dans ce système de coordonnées :

$$(2) \quad \sum_{\rho, \mu, \nu} \left[A^2 \frac{d^2 V}{d\rho^2} + A \frac{dA}{d\rho} \cdot \frac{dV}{d\rho} \right] (\mu^2 - \nu^2) = 0,$$

en posant :

$$\rho^2 A^2 = (\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2).$$

La somme se compose des trois expressions obtenues par permutation circulaire de ρ, μ, ν, A, B, C ; B et C étant définies de la même façon que A .

Si on remarque les identités :

$$\sum_{\rho, \mu, \nu} (\mu^2 - \nu^2) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\rho, \mu, \nu} \rho^2 (\mu^2 - \nu^2) = 0,$$

on peut compléter l'équation précédente et écrire :

$$(3) \quad \sum_{\rho, \mu, \nu} \left[A^2 \frac{d^2 V}{d\rho^2} + A \frac{dA}{d\rho} \frac{dV}{d\rho} + (H\rho^2 + K)V \right] (\mu^2 - \nu^2) = 0,$$

H et K étant deux constantes.

L'introduction de ces constantes permet de trouver des solutions de l'équation de Laplace sous la forme des polynômes :

$$V = R(\rho)M(\mu)N(\nu).$$

2. POLYNÔMES DE LAMÉ. — Les polynômes $R(\rho)$ vérifient l'équation de Lamé :

$$(4) \quad A^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + A \frac{dA}{d\rho} \frac{dR}{d\rho} + (H\rho^2 + K)R = 0.$$

Les polynômes $M(\mu)$ et $N(\nu)$ vérifient des équations analogues.

Tous ces polynômes sont appelés polynômes de Lamé.

$R(\rho)$ peut être un polynôme en ρ^2 ou le produit d'un tel polynôme par l'un des facteurs :

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} \quad \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - a^2)}} \quad \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}} \\ \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}.$$

Ces facteurs sont respectivement de degrés 1, 2 et 3 en ρ . On obtient ainsi huit classes de polynômes de Lamé. Ces polynômes n'existent que pour des valeurs particulières de H et K .

La considération des termes de plus haut degré dans l'équation (4) montre que

$$H = -n(n + 1),$$

n étant le degré du polynôme de Lamé.

La constante K vérifie une équation algébrique dont le degré varie avec celui du polynôme.

On peut écrire l'équation de Lamé sous la forme :

$$(5) \quad A^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + A \frac{dA}{d\rho} \frac{dR}{d\rho} = [n(n + 1)\rho^2 + h]R.$$

Remarque. — Par le changement de variable :

$$du = \frac{d\rho}{A} = \frac{\rho d\rho}{D} \quad (D = (\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2))$$

ou :

$$\rho^2 = \wp(u) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

$\wp(u)$ étant la fonction de Weierstrass, on peut encore écrire l'équation (5) :

$$(6) \quad \frac{d^2 R}{du^2} = [n(n + 1)\wp(u) + h]R.$$

3. CALCUL DES POLYNÔMES DE LAMÉ. — Deux méthodes peuvent être utilisées pour calculer les polynômes de Lamé :

a) On peut chercher à déterminer les coefficients de proche en proche par substitution dans l'équation différentielle (5). Cette méthode, utilisée par LAMÉ, est la plus rapide si on veut écrire effectivement les polynômes de Lamé. Elle ne nous sera pas utile.

b) On peut former directement les équations vérifiées par les racines des polynômes de Lamé ; si on écrit ces polynômes sous les formes :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & R = (\rho^2 - \alpha_1) (\rho^2 - \alpha_2) \dots (\rho^2 - \alpha_k), \\ \text{(II)} \quad & R = \sqrt{\rho^2 - a^2} (\rho^2 - \alpha_1) \dots (\rho^2 - \alpha_k), \\ \text{(III)} \quad & R = \sqrt{(\rho^2 - a^2) (\rho^2 - b^2)} (\rho^2 - c^2) (\rho^2 - \alpha_1) \dots (\rho^2 - \alpha_k), \\ \text{(IV)} \quad & R = \sqrt{(\rho^2 - a^2) (\rho^2 - b^2) (\rho^2 - c^2)} (\rho^2 - \alpha_1) \dots (\rho^2 - \alpha_k), \end{aligned}$$

on obtient respectivement les systèmes d'équations :

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{\alpha_1 - a^2} + \frac{1}{\alpha_1 - b^2} + \frac{1}{\alpha_1 - c^2} + 4 \left(\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_3} + \dots + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_k} \right) = 0$$

et $(k - 1)$ autres équations analogues.

En particulier :

pour $R = \rho^2 - \alpha$, on aura :

$$\frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0 ;$$

pour $R = (\rho^2 - \alpha_1) (\rho^2 - \alpha_2)$, on aura :

$$\frac{1}{\alpha_1 - a^2} + \frac{1}{\alpha_1 - b^2} + \frac{1}{\alpha_1 - c^2} + 4 \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha_2 - a^2} + \frac{1}{\alpha_2 - b^2} + \frac{1}{\alpha_2 - c^2} + 4 \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} = 0.$$

$$\text{(II)} \quad \frac{3}{\alpha_1 - a^2} + \frac{1}{\alpha_1 - b^2} + \frac{1}{\alpha_1 - c^2} + 4 \left(\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_3} + \dots + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_k} \right) = 0$$

et $(k - 1)$ autres équations analogues.

En particulier pour :

$$R = \sqrt{\rho^2 - a^2} (\rho^2 - \alpha),$$

$$\frac{3}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0.$$

$$\text{(III)} \quad \frac{3}{\alpha_1 - a^2} + \frac{3}{\alpha_1 - b^2} + \frac{1}{\alpha_1 - c^2} + 4 \left(\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_3} + \dots + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_k} \right) = 0$$

et $(k - 1)$ autres équations analogues.

$$\text{(IV)} \quad \frac{3}{\alpha_1 - a^2} + \frac{3}{\alpha_1 - b^2} + \frac{3}{\alpha_1 - c^2} + 4 \left(\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_3} + \dots + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_k} \right) = 0$$

et $(k - 1)$ autres équations analogues.

Il existe d'autres formes, qu'on déduit facilement des précédentes par permutation de a, b, c .

Nous n'aurons besoin dans la suite que des polynômes des deux premières formes.

Les auteurs (LAMÉ, DARWIN, LIAPOUNOFF, POINCARÉ, etc.) qui ont étudié ces polynômes ont employé des notations assez différentes, appropriées aux problèmes qu'ils ont traités.

Nous les noterons de la façon suivante, qui est celle de POINCARÉ et qui nous suffira :

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \sqrt{\rho^2 - a^2} \\
 R_2 &= \sqrt{\rho^2 - b^2} && \text{degré ou ordre } n = 1 \\
 R_3 &= \sqrt{\rho^2 - c^2} \\
 R_4 &= \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \\
 R_5 &= \sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - a^2)} && \text{degré ou ordre } n = 2 \\
 R_6 &= \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)} \\
 R_7 &= \rho^2 - \alpha \\
 R_8 &= \sqrt{\rho^2 - a^2} \sqrt{\rho^2 - b^2} \sqrt{\rho^2 - c^2} \\
 R_9 &= \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - \alpha)} && \text{degré ou ordre } n = 3 \\
 R_{10} &= \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - \beta)} \\
 R_{11} &= \sqrt{\rho^2 - c^2} \sqrt{\rho^2 - \gamma} \\
 R_{12} &= \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - \alpha)} \\
 R_{13} &= \sqrt{(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - \beta)} \\
 R_{14} &= \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - \gamma)} \\
 R_{15} &= (\rho^2 - \alpha)(\rho^2 - \beta). && \text{degré ou ordre } n = 4
 \end{aligned}$$

En réalité il existe deux polynômes R_7 distincts, puisque α est donné par une équation du second degré, etc.

4. PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DES POLYNÔMES DE LAMÉ. — Il existe huit classes de polynômes de Lamé :

1° Le polynôme $f(\rho^2)$, qui figure dans les huit classes de polynômes de Lamé, a toutes ses racines réelles et distinctes.

2° Le polynôme $f(\rho^2)$ a toutes ses racines comprises entre a^2 et c^2 .

3° Parmi les polynômes $f(\rho^2)$, il en existe un et un seul dont les racines sont comprises entre a^2 et b^2 .

4° Les racines α de ces polynômes sont des fonctions croissantes de l'un des paramètres a^2 par exemple, quand les deux autres b^2 et c^2 restent fixes.

5. FONCTIONS DE LAMÉ DE DEUXIÈME ESPÈCE. — Considérons l'équation différentielle qui définit R :

$$\frac{d^2R}{du^2} = [n(n+1)\rho(u) + h]R.$$

Soit S une deuxième solution de cette même équation, nous aurons :

$$\frac{d^2S}{du^2} = [n(n+1)\rho(u) + h]S.$$

On en déduit :

$$-R \cdot \frac{d^2S}{du^2} - S \frac{d^2R}{du^2} = 0,$$

ou

$$R \frac{dS}{du} - S \frac{dR}{du} = C^{te}.$$

On appelle fonction de Lamé de deuxième espèce celle qui satisfait à la condition :

$$R \frac{dS}{du} - S \frac{dR}{du} = 2n + 1.$$

On en déduit :

$$S = R \int_0^u \frac{2n+1}{R^2} du,$$

ou encore, en revenant à la variable ρ :

$$S = R \int_{\rho}^{\infty} \frac{2n+1}{R^2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

On voit facilement que :

$$S \sim \frac{1}{\rho^{n+1}}$$

pour $\rho = \pm \infty$.

Remarques. — I. L'équation caractéristique de l'équation différentielle de Lamé est, en effet :

$$\alpha(\alpha+1) = n(n+1).$$

On a les deux solutions :

$$\begin{array}{ll} \alpha = n & \text{qui correspond à } R, \\ \alpha = -(n+1) & \text{» } S. \end{array}$$

II. Les fonctions de seconde espèce S s'expriment en fonction des intégrales elliptiques, par exemple sous la forme de Legendre.

6. DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES EN SÉRIE DE FONCTIONS

DE LAMÉ. — En coordonnées elliptiques, un ellipsoïde E_0 est défini par la valeur $\rho = \rho_0$; l'expression

$$l = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}},$$

qui est utile dans la suite prend la valeur :

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)}},$$

L'intégrale :

$$\int \int_{E_0} l_0 M N M_1 N_1 d\sigma = 0.$$

M et M_1 sont deux fonctions de Lamé d'ordre différent de μ .

N et N_1 sont les fonctions correspondantes de ν .

$d\sigma$ est l'élément d'aire de l'ellipsoïde.

L'intégrale est étendue à l'aire de cet ellipsoïde.

Cette propriété permet de calculer les coefficients A_k du développement, en série de fonctions de Lamé, d'une fonction :

$$\Phi(\mu, \nu) = \sum_0^{\infty} A_k M_k N_k.$$

En calculant $d\sigma$, on trouve :

$$d\sigma = \frac{\mu^2 - \nu^2}{\sqrt{-B^2 C^2}} \frac{d\mu d\nu}{l_0},$$

$$A_k \int \int_{E_0} M_k^2 N_k^2 \frac{\mu^2 - \nu^2}{\sqrt{-B^2 C^2}} d\mu d\nu = \int \int_{E_0} \Phi(\mu, \nu) M_k N_k \frac{\mu^2 - \nu^2}{\sqrt{-B^2 C^2}} d\mu d\nu.$$

Nous supposons la convergence réalisée.

7. PROBLÈME DE DIRICHLET POUR L'ELLIPSOÏDE.

Soit E_0 un ellipsoïde ($\rho = \rho_0$).

Soit $V_0(\mu, \nu)$ une fonction donnée sur E_0 .

On peut écrire :

$$V_0 = \sum_0^{\infty} A_k M_k N_k,$$

en supposant la convergence réalisée, et poser :

$$A_k = \alpha R_k^0 S_k^0,$$

R_k, S_k étant les fonctions correspondant à M_k, N_k ,

R_k^0, S_k^0 leurs valeurs constantes sur l'ellipsoïde $\rho = \rho_0$.

Pour le *potentiel intérieur*, il suffit de prendre :

$$V_i = \sum_0^{\infty} \alpha_k S_k^0 R_k M_k N_k :$$

c'est bien une fonction harmonique, qui se réduit à V_0 sur l'ellipsoïde.

La série V_i est convergente puisque :

$$V_i < V_0 \quad R_k < R_k^0 \quad \rho > \rho_0.$$

Pour le *potentiel extérieur*, on prendra :

$$V_e = \sum_0^{\infty} \alpha_k R_k^0 S_k M_k N_k ;$$

c'est encore une fonction harmonique, qui se réduit à V_0 sur l'ellipsoïde.

La série V_e est convergente, puisque :

$$\rho > \rho_0, \quad S_k < S_k^0.$$

La fonction V est bien continue quand on traverse l'ellipsoïde.

8. POTENTIEL DE L'ELLIPSOÏDE HOMOGENÈNE. — Les coordonnées x, y, z s'expriment en fonction de ρ, μ, ν par les formules :

$$x = h_1 R_1 M_1 N_1, \quad y = h_2 R_2 M_2 N_2, \quad z = h_3 R_3 M_3 N_3,$$

avec :

$$h_1^2 = \frac{1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \quad h_2^2 = \frac{1}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}, \quad h_3^2 = \frac{1}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

On a d'autre part les expressions de Lamé :

$$\begin{array}{lll} R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2} & R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2} & R_3 = \sqrt{\rho^2 - c^2} \\ M_1 = \sqrt{\mu^2 - a^2} & M_2 = \sqrt{\mu^2 - b^2} & M_3 = \sqrt{\mu^2 - c^2} \\ N_1 = \sqrt{\nu^2 - a^2} & N_2 = \sqrt{\nu^2 - b^2} & N_3 = \sqrt{\nu^2 - c^2} \\ R_4 = R_2 R_3 & M_4 = M_2 M_3 & N_4 = N_2 N_3. \end{array}$$

Le volume de cet ellipsoïde est :

$$T = \frac{4\pi}{3} R_1 R_2 R_3.$$

Pour la normale à cet ellipsoïde, on a :

$$\cos(n, x) = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ud\rho} ;$$

or :

$$dx = \frac{h_1 \rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} M_1 N_1 d\rho,$$

d'où :

$$\cos(n, x) = h_1 M_1 N_1 R_4.$$

Déplaçons l'ellipsoïde de ε suivant l'axe des x ; le potentiel de la couche intermédiaire sera :

$$V' = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}.$$

L'épaisseur de la couche sera :

$$\zeta = \varepsilon \cos(n, x) = \varepsilon \cdot h_1 R_4^0 l_0 M_1 N_1.$$

Son potentiel est à la surface :

$$V'_0 = \alpha R_1^0 S_1^0 M_1 N_1 = \frac{4\pi}{3} \varepsilon \cdot h_1 R_4^0 R_1^0 S_1^0 M_1 N_1.$$

Donc les potentiels intérieur et extérieur sont :

$$V_i' = \frac{4\pi}{3} \varepsilon h_1 R_4^0 S_1^0 R_1 M_1 N_1,$$

$$V_e' = \frac{4\pi}{3} \varepsilon h_1 R_4^0 R_1^0 S_1 M_1 N_1.$$

On a donc à l'intérieur de l'ellipsoïde :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V_i'}{\varepsilon} = -\frac{4\pi}{3} \cdot R_4^0 S_1^0 x = -T \cdot \frac{S_1^0}{R_1^0} x.$$

A l'extérieur :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V_e'}{\varepsilon} = -\frac{4\pi}{3} \cdot R_4^0 R_1^0 \cdot \frac{S_1}{R_1} x = -T \cdot \frac{S_1}{R_1} \cdot x.$$

Le potentiel intérieur de l'ellipsoïde est donc :

$$V_i = -\left(\frac{T}{2} \frac{S_1^0}{R_1^0} x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0} y^2 + \frac{S_3^0}{R_1^0} z^2 \right).$$

Pour le potentiel extérieur on a de même :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -T \frac{S_1}{R_1} x \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -T \frac{S_2}{R_2} \cdot y \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -T \frac{S_2}{R_2} z;$$

mais $R_1, S_1, R_2, S_2, R_3, S_3$ dépendent de x, y, z .

9. PESANTEUR A LA SURFACE DE L'ELLIPSOÏDE. — Considérons un ellipsoïde en équilibre, la fonction de forces étant :

$$U = V + V_1 = V + \frac{1}{2}(\alpha_1 x^2 + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 z^2),$$

V étant le potentiel propre de l'ellipsoïde,

V_1 étant le potentiel des forces extérieures.

Puisqu'il y a équilibre, la force résultante est normale à la surface de l'ellipsoïde, qui est une surface de niveau ; son intensité est :

$$g = -\frac{dU}{dn_e}.$$

Puisque l'équilibre existe :

$$U = K \left(\frac{x^2}{\rho_0^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - c^2} - 1 \right) + C,$$

d'où :

$$g = -K \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = -2K \frac{1}{A_0 l_0 \rho_0} = -K' \frac{1}{l_0}.$$

Seule la quantité :

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)}}$$

dépend de μ et ν .

Le produit gl est donc constant à la surface de l'ellipsoïde.

On peut trouver facilement la valeur de cette constante si le coefficient α_2 est nul : alors au point $x = z = 0$, $y = R_2^0$, $\mu = a$, $\nu = c$ et l'on a :

$$U \equiv V,$$

d'où :

$$g = -\frac{\partial V}{\partial y} = T \frac{S_2^0}{R_2^0} R_2^0 = TS_2^0.$$

D'autre part l a pour valeur :

$$l_0(a, c) = \frac{1}{\sqrt{(\rho_0^2 - a^2)(\rho_0^2 - c^2)}} = \frac{1}{R_2^0 R_3^0}.$$

Finalement :

$$gl = \frac{TS_2^0}{R_1^0 R_3^0} = \frac{4\pi}{3} R_2^0 S_2^0.$$

10. FORMULES RELATIVES AU POTENTIEL DE L'ELLIPSOÏDE. — Le potentiel intérieur de l'ellipsoïde homogène de densité δ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

est :

$$V = -\frac{1}{2} (\beta_1 x^2 + \beta_2 y^2 + \beta_3 z^2),$$

avec :

$$\beta_1 = 2\pi f abc \delta \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{\Delta'}},$$

$$\beta_2 = 2\pi f abc \delta \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda) \sqrt{\Delta'}},$$

$$\beta_3 = 2\pi abc \delta \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda) \sqrt{\Delta'}},$$

avec

$$\Delta' = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda).$$

En posant :

$$s = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad t = \left(\frac{b}{c}\right)^2, \quad \lambda = b^2x,$$

ces formules deviennent :

$$\beta_1 = 2\pi f\delta \int_0^\infty \frac{sdx}{(1+sx)\sqrt{\Delta}},$$

$$\beta_2 = 2\pi f\delta \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}},$$

$$\beta_3 = 2\pi f\delta \int_0^\infty \frac{tdx}{(1+tx)\sqrt{\Delta}},$$

avec :

$$\Delta = (1+x)(1+sx)(1+tx).$$

On vérifie ces résultats sur les formules de Lamé avec :

$$R_1^2 = \rho^2 - a^2, \quad R_2^2 = \rho^2 - b^2, \quad R_3^2 = \rho^2 - c^2,$$

$$\beta_1 = fT \frac{S_1}{R_1} = \frac{4\pi}{3} f\delta R_1 R_2 R_3 \frac{S_1}{R_1} = \frac{4\pi}{3} f\delta \frac{S_1}{3} R_2 R_3$$

$$= 4\pi f\delta \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \int_0^\infty \frac{rdr}{(r^2 - a^2)\sqrt{D}},$$

avec :

$$D = (r^2 - a^2)(r^2 - b^2)(r^2 - c^2).$$

En posant :

$$s = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - a^2} = \frac{B^2}{A^2}, \quad t = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - c^2} = \frac{B^2}{C^2},$$

$$r^2 - b^2 = (\rho^2 - b^2)(1+x),$$

$$r^2 - a^2 = (\rho^2 - a^2)(1+sx),$$

$$r^2 - c^2 = (\rho^2 - c^2)(1+tx),$$

il vient :

$$\frac{\rho^2 - b^2}{r^2 - a^2} = \frac{s}{1+sx};$$

on retrouve :

$$\beta_1 = 2\pi f\delta \int_0^\infty \frac{sdx}{(1+sx)\sqrt{\Delta}}.$$

De même pour β_2 et β_3 .

11. CHAMP DE GRAVITATION DE LA VOIE LACTÉE. — Nous admettrons en première

approximation que le champ de gravitation de la Voie Lactée correspond à une fonction de forces de la forme :

$$U = F(\rho) + G(Z),$$

avec

$$\rho^2 = X^2 + Y^2.$$

O est le centre galactique, Ox et Oy sont des axes fixes du plan galactique (fig. 1).

Considérons un système d'axes mobiles Gx, Gy, Gz ainsi défini :

Gx passe par O ;

Gy est perpendiculaire à Gx ;

Gz est parallèle à OZ.

La trajectoire de G est supposée connue : $\overline{OG} = r$.

On peut écrire :

$$\rho^2 = (x + r)^2 + y^2, \quad z = Z.$$

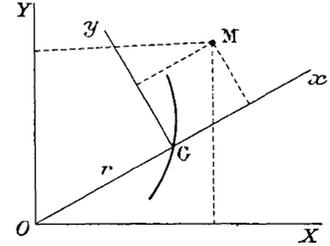


FIG. 1.

Les premiers termes du développement en série de U seront :

$$U = U_0 + x \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_0 + z \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right)_0 + \frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right)_0 + \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 + \text{etc.}$$

Par raison de symétrie on admet :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = 0.$$

L'étude de la rotation différentielle des étoiles voisines du Soleil permet de déterminer les valeurs numériques suivantes, relatives à une trajectoire circulaire du centre de gravité :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= -\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} = 0,942 \cdot 10^{-15}, \\ \alpha &= \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{d^2U}{dr^2} = -1,95 \cdot 10^{-15}, \\ \alpha' &= -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 5,65 \cdot 10^{-15}. \end{aligned}$$

Dans ces formules les unités sont :

pour la vitesse : le kilomètre /seconde,

pour la distance : le parsec.

12. FIGURES D'ÉQUILIBRE ELLIPSOÏDALES DE MR MINEUR. — Mr Mineur, utilisant les conditions de l'équilibre statistique de la théorie cinétique des gaz, a montré l'existence de figures d'équilibre ellipsoïdales, en supposant que leur centre de gravité décrit une trajectoire circulaire dans le plan de la Voie Lactée.

Ainsi que Mr ROCARD l'a montré, ces conditions sont équivalentes aux équations de l'hydrodynamique en première approximation.

Ces équations s'écrivent ici :

$$\begin{aligned} -\omega^2 x &= x \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \beta_1 x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ -\omega^2 y &= y \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} - \beta_2 y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= z \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \beta_3 z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

ρ est la densité de l'ellipsoïde,

p la pression et r est constant.

ω est la vitesse angulaire de rotation de l'ellipsoïde autour de O.

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sont les coefficients du potentiel de l'ellipsoïde.

En tenant compte de :

$$\omega^2 = -\frac{1}{r} \frac{dU}{dr},$$

il reste finalement :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta_1)x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \beta_2 y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ (\alpha' + \beta_3)z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Pour qu'une surface équipotentielle :

$$(\alpha + \beta_1)x^2 + \beta_2 y^2 + (\alpha' + \beta_3)z^2 = C^{te}$$

puisse être identifiée avec la surface libre :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

il faut :

$$(\alpha + \beta_1)a^2 = \beta_2 b^2 = (\alpha' + \beta_3)c^2.$$

Mr MINEUR a obtenu ainsi une infinité de figures d'équilibre dont les rapports des axes :

$$s = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \quad t = \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

vérifient la relation :

$$\psi(s, t) - \lambda \varphi(s, t) = 0,$$

avec :

$$\lambda = -\frac{\alpha'}{\alpha} \# 2,897.$$

Cette relation est représentée graphiquement par la courbe C (fig. 2).

En posant :

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{s dx}{(1 + sx) \sqrt{\Delta}}, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x) \sqrt{\Delta}}, \quad I_3 = \int_0^\infty \frac{t dx}{(1 + tx) \sqrt{\Delta}},$$

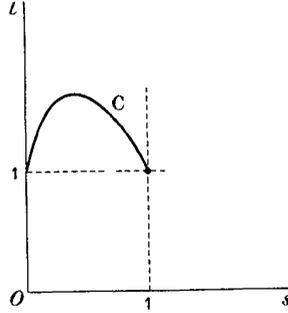


FIG. 2.

on trouve :

$$\psi = tI_2 - I_3, \quad \varphi = I_1 - sI_2.$$

Nous verrons au cours de l'étude de la stabilité que le choix des rapports des axes est limité.

Remarque. — On trouve toujours :

$$s \leq 1 \quad \text{et} \quad t \geq 1.$$

La densité ρ vérifie l'une ou l'autre des deux formules :

$$\rho = - \frac{\alpha}{\pi f} \frac{1}{\varphi(s, t)} = \frac{\alpha'}{\pi f} \frac{1}{\psi(s, t)}.$$

Elle présente un minimum pour s voisin de 0,25.

CHAPITRE II

ÉTUDE DE LA STABILITÉ SÉCULAIRE

1. ÉNERGIE POTENTIELLE DE LA MASSE FLUIDE. -- Considérons une masse fluide dont le centre de gravité est animé d'un mouvement circulaire uniforme ; nous avons vu que cette masse fluide pouvait prendre la forme d'un ellipsoïde invariable par rapport à un système d'axes $Gxyz$ animé du même mouvement de rotation que le centre de gravité G , l'axe Gx passant constamment par le centre O du cercle et l'axe Gz étant

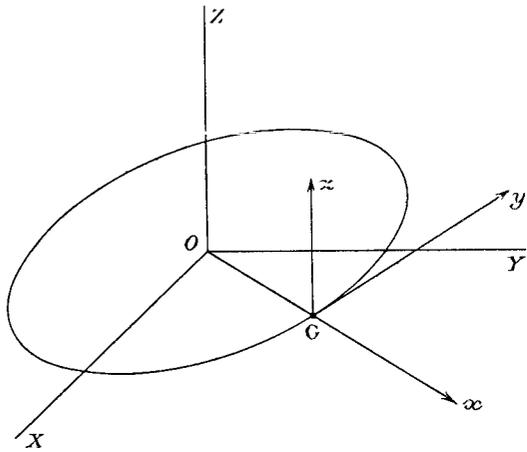


FIG. 3.

perpendiculaire au plan du cercle. Nous avons appelé cet ellipsoïde *figure d'équilibre relatif* (fig. 3).

Nous avons vu que la résultante des forces agissant sur un élément dm de la masse fluide dérivait du potentiel :

$$V = \int \frac{dm'}{\Delta} + \Phi ;$$

dm' est un autre élément de la masse fluide ;

Δ est la distance des deux éléments dm et dm' ;

l'intégrale $\int \frac{dm'}{\Delta}$ étendue à l'ellipsoïde représente le potentiel dû à l'attraction newtonienne des particules ; en première approximation :

$$\Phi = \frac{1}{2} (\alpha x^2 + \gamma z^2)$$

représente le potentiel des forces extérieures.

L'énergie potentielle totale de la masse fluide sera :

$$W = \frac{1}{2} \int \int \frac{dm dm'}{\Delta} + \int \Phi dm,$$

dm et dm' étant deux éléments quelconques de la masse fluide (le coefficient $1/2$ provient du fait que chaque élément $\frac{1}{\Delta}$ est compté deux fois dans le calcul de la première intégrale).

Cette formule reste valable lorsque la masse fluide se déforme et ne reste plus ellipsoïdale.

2. CONDITION DE STABILITÉ SÉCULAIRE (LEJEUNE-DIRICHLET). — La condition

nécessaire et suffisante pour la stabilité séculaire de l'équilibre est que l'énergie potentielle W soit maximum (pour une figure d'équilibre elle est maximum ou minimum).

La stabilité considérée est appelée *séculaire*, car elle demeure assurée même en présence de forces dissipatives (frottement dû aux forces de viscosité par exemple).

Soit W_0 l'énergie potentielle de la masse fluide dans l'état d'équilibre (ellipsoïde) ; soit W l'énergie potentielle de la masse fluide lorsque l'ellipsoïde primitif a subi des déformations petites par rapport à ses dimensions, le volume de la masse fluide restant constant et le centre de gravité décrivant toujours un cercle.

La variation éprouvée par l'énergie potentielle :

$$\delta W = W - W_0$$

lorsque la masse fluide passe de l'état d'équilibre ellipsoïdal à une configuration voisine, doit être négative pour que la stabilité séculaire soit assurée.

En effet, l'énergie potentielle W_0 est maximum par hypothèse ; pour toute configuration voisine, l'énergie potentielle W doit être inférieure à W_0 , donc la différence $W - W_0$ est négative.

3. CALCUL DE LA VARIATION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE. — Soit :

$$\frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde d'équilibre.

Soient μ, ν les coordonnées elliptiques qui définissent un point sur la surface de cet ellipsoïde.

Soit ζ la distance d'un point M de l'ellipsoïde à un point M' de la surface déformée situé sur la normale à l'ellipsoïde en M : cette distance sera comptée positivement suivant la normale extérieure à l'ellipsoïde et supposée représentée par un développement en série de fonctions de Lamé $M_i(\mu)$ et $N_i(\nu)$.

$$\zeta = \sum A_i l M_i N_i.$$

Dans cette formule, les A_i sont des coefficients constants et l une fonction de ρ, μ, ν déjà rencontrée.

Sois g la résultante de l'attraction et des autres forces agissantes en un point de la surface de l'ellipsoïde à l'état d'équilibre (cette valeur est constante sur l'ellipsoïde).

On a trouvé précédemment :

$$gl = \frac{4\pi}{3} R_2 S_2,$$

R_2 et S_2 étant deux fonctions de Lamé.

Soit V_0 la valeur de l'expression :

$$V = \int \frac{m'}{\Delta} + \Phi$$

en un point de la surface de l'ellipsoïde.

En un point de la surface déformée infiniment voisine, on aura :

$$V = V_0 - \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \lambda = V_0 - g\lambda,$$

λ est l'élément de longueur Δn compté sur la normale à la surface de l'ellipsoïde.

4. ÉNERGIE POTENTIELLE TOTALE DE LA MASSE FLUIDE. — Cette énergie sera :

$$2W = \iint \frac{dm dm'}{\Delta} + 2 \int \Phi dm,$$

dm et dm' étant deux termes quelconques de la masse fluide, Δ leur distance.

Soit $2W_0$ sa valeur à l'état d'équilibre (quand la figure se réduit à l'ellipsoïde) Désignons par dm, dm' les éléments de l'ellipsoïde ; $d\mu, d\mu'$ les éléments du bourrelet.

Alors :

$$2W = \iint \frac{dm dm'}{\Delta} + 2 \iint \frac{dm' d\mu}{\Delta} + \iint \frac{d\mu d\mu'}{\Delta} + 2 \int \Phi dm + 2 \int \Phi d\mu,$$

avec :

$$2W_0 = \iint \frac{dm dm'}{\Delta} + 2 \int \Phi dm,$$

ou puisque

$$V = \int \frac{dm'}{\Delta} + \Phi :$$

$$2W = 2W_0 + 2 \int V d\mu + \iint \frac{d\mu d\mu'}{\Delta}.$$

Si dw est l'élément de surface de l'ellipsoïde :

$$d\mu = d\lambda dw, \quad d\mu' = d\lambda' dw' ;$$

λ étant très petit (déformation infiniment petite) :

$$\int V d\lambda dw = \int V_0 d\mu - \int g\lambda d\lambda dw.$$

$\int V_0 d\mu$ est nul puisque $\int d\mu = 0$.

Il reste :

$$\int V d\mu = - \int g dw \int_0^\zeta \lambda d\lambda = - \int g \frac{\zeta^2}{2} dw.$$

De même Δ est indépendant de μ et μ' au premier ordre près :

$$\iint \frac{d\mu d\mu'}{\Delta} = \iint \frac{dw dw'}{\Delta} \int_0^\zeta d\lambda \int_0^{\zeta'} d\lambda' = \iint \frac{dw dw'}{\Delta} \zeta \zeta'.$$

Il vient donc finalement :

$$W = W_0 - \frac{1}{2} \int g \zeta^2 dw + \frac{1}{2} \iint \frac{dw dw'}{\Delta} \zeta \zeta'.$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\zeta^2}{2} &= \sum \frac{A_i^2}{2} l^2 M_i^2 N_i^2 + \sum A_i A_k l^2 M_i N_i M_k N_k, \\ \int g \frac{\zeta^2}{2} dw &= \sum \frac{A_i^2}{2} \int g^2 dw M_i^2 N_i^2 + \sum A_i A_k \int g l^2 dw M_i N_i M_k N_k \\ &= \sum \frac{4\pi}{6} A_i^2 R_2 S_2 \int l M_i^2 N_i^2 \zeta dw + A_i A_k \frac{4\pi}{3} R_2 S_2 \int l M_i N_i M_k N_k dw; \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} \int l M_i N_i M_k N_k dw &= 0 \\ \int g \frac{\zeta^2}{2} dw &= \frac{4\pi}{6} R_2 S_2 \sum A_i^2 \int M_i^2 N_i^2 dw. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\int \int \zeta \zeta' \frac{dw dw'}{\Delta} = \sum A_i A_k \int \frac{l' M_i N_i M_k' N_k' dw'}{\Delta};$$

or :

$$\begin{aligned} \int \frac{l' M_k' N_k'}{\Delta} dw &= \frac{4\pi R_k S_k M_k N_k}{(2n+1)}, \\ \int \int \zeta \zeta' \frac{dw dw'}{\Delta} &= \sum A_i A_k \int l M_i N_i M_k N_k dw \frac{4\pi R_k S_k}{2n+1}. \end{aligned}$$

Si

$$i \neq k, \quad \int l M_i N_i M_k N_k dw = 0.$$

Il reste donc :

$$\int \int \zeta \zeta' \frac{dw dw'}{3} = \sum A^2 \int l M_i^2 N_i^2 dw \frac{4\pi R_i S_i}{2n+1}.$$

On obtient finalement l'expression :

$$W - W_0 = -\frac{4\pi}{2} \sum A_i^2 \int \left(\frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right) M_i^2 N_i^2 dw,$$

n étant le degré de la fonction de Lamé R_i .

La variation cherchée est $\delta W = W - W_0$:

$$W - W_0 = -2\pi \sum A_i^2 \int \left(\frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right) M_i^2 N_i^2 dw.$$

Condition de stabilité séculaire. — Pour que la variation de l'énergie potentielle $W - W_0$ soit négative, il faut donc que les coefficients :

$$\frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1}$$

soient tous positifs.

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité.

Lorsque certains de ces coefficients, que nous appellerons *coefficients de stabilité*, sont négatifs, il peut se produire une déformation croissante de la surface : il y a instabilité.

5. FIGURES DE BIFURCATION. — Lorsque l'un des coefficients de stabilité s'annule :

$$\frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1}$$

par exemple, si on choisit pour ζ l'expression :

$$\zeta = A/M_i N_i,$$

on définit une surface voisine de l'ellipsoïde pour laquelle la variation d'énergie potentielle $W - W_0$ est nulle et qui est aussi une surface limitant une nouvelle figure d'équilibre, appelée *figure de bifurcation*.

Équation de stabilité. — Nous appellerons ainsi toute équation de la forme :

$$\frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1} = 0,$$

R_i, S_i étant des fonctions de Lamé d'ordre n .

Nous allons voir que cette équation ne peut avoir de solutions que pour deux séries particulières de fonctions de Lamé.

Comparaison avec les résultats de H. POINCARÉ. — Les coefficients de stabilité ont été calculés par H. POINCARÉ, LIAPOUNOFF, DARWIN, en étudiant les figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation ; mais les résultats obtenus sont différents. En effet, la fonction

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}$$

et par suite la fonction S_2 se rapportent ici à l'axe moyen de l'ellipsoïde. Dans l'étude de la rotation d'une masse fluide autour d'un axe fixe, les coefficients obtenus étaient :

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1}.$$

La fonction $R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}$ et par suite aussi la fonction S_1 se rapportaient au petit axe de l'ellipsoïde.

Nous allons établir quelques théorèmes relatifs aux racines de l'équation de stabilité.

(L'ordre d'une fonction de Lamé est égal à son degré en convenant que $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ est de degré 1.)

6. RACINES DE L'ÉQUATION DE STABILITÉ. — Cette équation est de la forme :

$$F = \frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1},$$

dans laquelle :

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2} \quad a^2 < b^2 < c^2 < \rho^2 < +\infty.$$

I. Dans le cas général, l'équation

$$F = \frac{R_k S_k}{2m+1} - \frac{R_i S_i}{2n+1} \quad m \neq n$$

ne peut avoir que deux racines au plus entre c^2 et $+\infty$ (la valeur $\rho = +\infty$ étant écartée).

Introduisons la variable u définie par :

$$\rho \frac{d\rho}{du} = \pm \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)},$$

alors :

$$\frac{S}{R} = \int_0^u \frac{2n+1}{R^2} du.$$

Pour $\rho = \infty$, u est équivalent à $\frac{1}{\rho}$ et le produit RS est équivalent à $\frac{1}{\rho}$.

Les racines des polynômes de Lamé R sont comprises entre a^2 et c^2 .

L'équation

$$F_1 = \frac{F}{R_k^2} = \frac{S_k}{(2m+1)R_k} - \frac{S_i}{(2n+1)R_i} \frac{R_i^2}{R_k^2}$$

a les mêmes racines que $F = 0$ dans l'intervalle $(c^2, +\infty)$.

La dérivée

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{du} &= \frac{1}{2m+1} \frac{dS_k}{du R_k} - \frac{1}{(2n+1)} \frac{R_i^2}{R_k^2} \frac{dS_i}{du R_i} \\ &\quad - \frac{1}{2n+1} \frac{S_i}{R_i} \frac{d}{du} \left(\frac{R_i^2}{R_k^2} \right) \\ &= - \frac{2S_i}{2n+1} \frac{R'_i R_k - R_i R'_k}{R_k^3}. \end{aligned}$$

Puisque S_i ne s'annule pas, les racines de $\frac{dF_1}{du}$ sont celles de

$$\Phi = R'_i R_k - R_i R'_k.$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\frac{d\Phi}{du} = R''_i R_k - R_i R''_k.$$

D'après la définition de R_i et R_k :

$$R''_i = (H\rho^2 + K_i)R_i$$

et

$$\frac{d\Phi}{du} = R_i R_k [(n(n+1) - m(m+1)\rho^2 + K_i - K_k)].$$

Le dernier facteur peut s'annuler une fois seulement lorsque ρ^2 varie de c^2 à $+\infty$. $\frac{dF_1}{du}$ ne peut avoir plus de deux racines et F_1 ou F ne peuvent avoir plus de trois racines dans cet intervalle.

Or, $\rho = +\infty$ est racine puisque

$$F(+\infty) \sim \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow 0.$$

Dans le cas où

$$F = \frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1},$$

$$F(+\infty) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} \right) \rightarrow 0 \quad (\text{positif}).$$

On aura en résumé pour variations et signes de Φ , F_1 et F (tableau 1) :

TABLEAU I

ρ^2	c^2	$+\infty$	
$\frac{d\Phi}{du}$	+	0	-
$\frac{dF_1}{du}$ ou Φ	- ↗ 0 ↘ + ↘ 0 ↘ -		
F ou F_1	↘ ↗ ↗ ↘	0	

$\frac{d\Phi}{du}$ est négatif pour $\rho^2 \sim +\infty$.

Si $F(c^2)$ est négatif, l'équation $F = 0$ n'a qu'une racine comprise entre c^2 et $+\infty$.

Si $F(c^2)$ est positif, l'équation $F = 0$ a 0 ou deux racines comprises entre c^2 et $+\infty$.

C'est ce que montre le graphique de la figure 4.

II. Si la fonction $f = \frac{R_i}{R_k}$ est constamment croissante ou décroissante dans l'intervalle $(c^2, +\infty)$, l'équation $F = 0$ n'a pas de racines dans le même intervalle.

En effet :

$$\frac{df}{du} = \frac{R'_i R_k - R_i R'_k}{R_k^2} = \frac{df}{d\rho} \frac{d\rho}{du}$$

ne s'annule pas d'après l'hypothèse ; il en est de

même de Φ ou $\frac{dF_1}{du}$; et F ou F_1 sont constamment croissantes ou décroissantes.

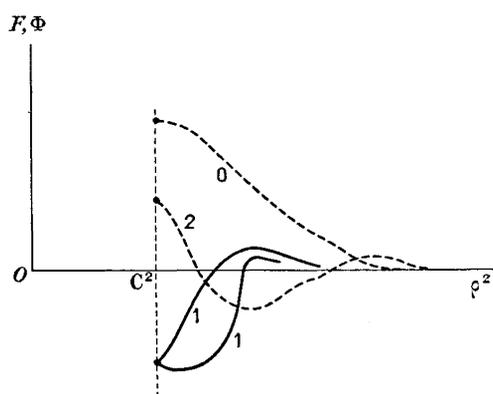


FIG. 4.

III. Application au cas :

$$F = \frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1}.$$

1° La fonction R_i contient $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ en facteur.

Soient :

$$R_i = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \Pi(\rho^2 - \alpha_i),$$

$$R_i = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)} \Pi(\rho^2 - \alpha_i),$$

$$R_i = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \Pi(\rho^2 - \alpha_i),$$

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - b^2} \Pi(\rho^2 - \alpha_i).$$

La fonction $f = \frac{R_i}{R_2}$ est toujours croissante
puisque

$$a^2 < \alpha_i < c^2$$

et l'équation $F = 0$ n'a pas de racines.

2° La fonction R_i contient $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en facteur :

$$R_i = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - c^2)} \Pi(\rho^2 - \alpha_i)$$

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - c^2} \Pi(\rho^2 - \alpha_i)$$

La fonction

$$f = \frac{R_i}{R_2} = \sqrt{\frac{\rho^2 - c^2}{\rho^2 - b^2}} \sqrt{\rho^2 - a^2} \Pi(\rho^2 - \alpha_i)$$

est croissante en même temps que

$$\frac{\rho^2 - c^2}{\rho^2 - b^2} = 1 + \frac{b^2 - c^2}{\rho^2 - b^2}$$

et l'équation $F = 0$ n'a pas de racines.

3° La fonction R_i est de la forme :

$$R_i = \Pi(\rho^2 - \alpha_i)$$

ou

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - a^2} \Pi(\rho^2 - \alpha_i).$$

Soit A la plus grande racine de R_i .

Considérons la fonction :

$$f = \frac{R_i}{R_2} \sqrt{\frac{\rho^2 - A}{\rho^2 - b^2}} \sqrt{\rho^2 - A} \sqrt{\rho^2 - a^2} \Pi(\rho^2 - \alpha_{i-1}).$$

Elle est toujours croissante si $A > b^2$ et dans ce cas f n'a pas de racines.

7. CONCLUSIONS. — Les seules fonctions de Lamé pour lesquelles le coefficient de stabilité :

$$F = \frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1}$$

peut s'annuler sont :

$$\begin{aligned} R_i &= (\rho^2 - \alpha_1) (\rho^2 - \alpha_2) \dots (\rho^2 - \alpha_k), \\ R_i &= \sqrt{\rho^2 - a^2} (\rho^2 - \alpha_1) (\rho^2 - \alpha_2) \dots (\rho^2 - \alpha_k), \end{aligned}$$

les racines α étant toutes comprises entre a^2 et b^2 .

On sait que parmi les polynômes de Lamé de degré $n = 2k$ (première forme), il y en a un et un seul dont toutes les racines α sont comprises entre a^2 et b^2 (STIELJES : *Acta Mathematica*, t. 6).

De même, parmi les polynômes de Lamé de degré $n = 2k + 1$ (deuxième forme), il y en a un et un seul dont toutes les racines α sont comprises entre a^2 et b^2 .

On sait de plus que les racines α de ces polynômes sont des fonctions croissantes de l'un des paramètres a^2 par exemple, lorsque les deux autres b^2 et c^2 restent fixes.

Pour la première expression R_i les nombres α_i sont racines des k équations :

$$\frac{1}{\alpha_i - a^2} + \frac{1}{\alpha_i - b^2} + \frac{1}{\alpha_i - c^2} + 4 \sum_{j \neq i} \frac{1}{\alpha_i - \alpha_j} = 0,$$

la sommation étant effectuée pour toutes les valeurs de j différentes de i (i de 1 à k).

En particulier pour $R_i = \rho^2 - \alpha$, on a :

$$\frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0.$$

Pour la deuxième expression R_i les nombres α_i sont racines des k équations :

$$\frac{3}{\alpha_i - a^2} + \frac{1}{\alpha_i - b^2} + \frac{1}{\alpha_i - c^2} + 4 \sum'_{i \neq j} \frac{1}{\alpha_i - \alpha_j} = 0.$$

En particulier pour

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - a^2} (\rho^2 - \alpha),$$

on a :

$$\frac{3}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0.$$

Nombre de racines. — L'étude précédente a montré la possibilité de trois cas :

- 1° $F(c^2) < 0$: une seule racine en ρ^2 ,
- 2° $F(c^2) > 0$: deux racines en ρ^2 ,
- 3° $F(c^2) > 0$: aucune racine en ρ^2 .

Considérons la première équation de stabilité correspondant à la fonction de Lamé :

$$R_i = \rho^2 - \alpha \quad \text{avec} \quad R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}.$$

Nous avons trouvé :

$$\frac{R_i S_i}{2n + 1} = R_i^2(\rho) \int_{\rho}^{\infty} \frac{r dr}{R_i^2(r) \sqrt{D}},$$

avec

$$D = (r^2 - a^2) (r^2 - b^2) (r^2 - c^2).$$

Par suite l'équation de stabilité s'écrit en général :

$$F(\rho^2) = R_2^2(\rho) \int_{\rho}^{\infty} \frac{rdr}{R_2^2(r)\sqrt{D}} - R_i^2(\rho) \int_{\rho}^{\infty} \frac{rdr}{R_2^2(r)\sqrt{D}} = 0$$

ou, en remplaçant R_2 et R_i par leurs valeurs :

$$\begin{aligned} F(\rho^2) &= (\rho^2 - b^2) \int_{\rho}^{\infty} \frac{rdr}{(r^2 - b^2)\sqrt{D}} - (\rho^2 - \alpha)^2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{rdr}{(r^2 - \alpha)^2\sqrt{D}} \\ &= \int_{\rho}^{\infty} \left[\frac{\rho^2 - b^2}{r^2 - b^2} - \left(\frac{\rho^2 - \alpha}{r^2 - \alpha} \right)^2 \right] \frac{rdr}{\sqrt{D}} = 0. \end{aligned}$$

Par suite :

$$F(c^2) = \int_{c^2}^{\infty} \left[\frac{c^2 - b^2}{r^2 - b^2} - \left(\frac{c^2 - \alpha}{r^2 - \alpha} \right)^2 \right] \frac{rdr}{\sqrt{D}}.$$

D'autre part :

$$a^2 < \alpha < b^2 < c^2 < r^2 < +\infty.$$

On a vu que le nombre α est la racine comprise entre a^2 et b^2 de

$$\frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0.$$

L'expression

$$\frac{c^2 - x}{r^2 - x}$$

est décroissante avec $x(r^2 > c^2)$.

Elle est inférieure à 1, donc :

$$\frac{c^2 - b^2}{r^2 - b^2} < \frac{c^2 - \alpha}{r^2 - \alpha} < 1.$$

La quantité sous le signe \int peut donc être positive ou négative pour

$$c^2 < r^2 < +\infty.$$

8. DEUXIÈME FORME DE L'ÉQUATION DE STABILITÉ. — Pour étudier les solutions des diverses équations de stabilité, effectuons le changement de variables déjà utilisé en posant :

$$\begin{aligned} r^2 - b^2 &= (\rho^2 - b^2)(1 + x), \\ s &= \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - a^2} = \frac{B^2}{A^2}, & t &= \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - c^2} = \frac{B^2}{C^2}, & h &= \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - \alpha}. \end{aligned}$$

Il vient :

$$r^2 - a^2 = (\rho^2 - a^2)(1 + sx), \quad r^2 - c^2 = (\rho^2 - c^2)(1 + tx), \quad r^2 - \alpha = (\rho^2 - \alpha)(1 + hx).$$

La première équation de stabilité s'écrit alors :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+hx)^2\sqrt{\Delta}} = 0,$$

avec

$$\Delta = (1+x)(1+sx)(1+tx).$$

La deuxième équation de stabilité correspondant à la fonction de Lamé d'ordre 3:

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - a^2}(\rho^2 - \alpha)$$

s'écrit de même :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+sx)(1+hx)^2\sqrt{\Delta}} = 0,$$

le nombre α étant la racine comprise entre a^2 et b^2 de :

$$\frac{3}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0.$$

On a donc en général, pour les fonctions de Lamé d'ordre pair de la forme :

$$R_i = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \dots (\rho^2 - \alpha_k)$$

une équation de stabilité de la forme :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+h_1x)^2(1+h_2x)^2 \dots (1+h_kx)^2\sqrt{\Delta}} = 0$$

et pour les fonctions de Lamé d'ordre impair une équation de la forme :

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - a^2}(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \dots (\rho^2 - \alpha_k)$$

une équation analogue de la forme :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+sx)(1+h_1x)^2(1+h_2x)^2 \dots (1+h_kx)^2\sqrt{\Delta}} = 0.$$

Équations déterminant les nombres h .

Ces équations se déduisent de celles définissant les quantités α . On peut écrire :

$$\frac{1}{\alpha_i - a^2} = \frac{1}{(\rho^2 - a^2) - (\rho^2 - \alpha_i)}$$

$$\frac{\rho^2 - b^2}{\alpha_i - a^2} = \frac{1}{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - b^2} - \frac{\rho^2 - \alpha_i}{\rho^2 - b^2}} = \frac{1}{\frac{1}{s} - \frac{1}{h_i}} = \frac{h_i s}{h_i - s}.$$

De même :

$$\frac{\rho^2 - b^2}{\alpha_i - b^2} = \frac{h_i}{h_i - 1}, \quad \frac{\rho^2 - b^2}{\alpha_i - c^2} = \frac{h_i t}{h_i - t},$$

$$\frac{\rho^2 - b^2}{\alpha_i - \alpha_j} = \frac{h_i h_j}{h_i - h_j}.$$

Les k équations cherchées seront donc de la forme :

$$\frac{\theta s}{h_i - s} + \frac{1}{h_i - 1} + \frac{t}{h_i - t} + 4 \sum_{j \neq i} \frac{h_j}{h_i - h_j} = 0 \quad (\theta = 1 \text{ ou } 3)$$

obtenue en faisant disparaître les facteurs $\rho^2 - b^2$ et h_i .

En particulier pour :

$$R_i = \rho^2 - \alpha,$$

l'équation unique vérifiée par h est :

$$\frac{s}{h-s} + \frac{1}{h-1} + \frac{t}{h-t} = 0$$

et pour :

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - a^2} (\rho^2 - \alpha),$$

elle est :

$$\frac{3s}{h-s} + \frac{1}{h-1} + \frac{t}{h-t} = 0.$$

Les nombres h sont tous compris entre s et 1.

En effet, les nombres α vérifient la double inégalité :

$$a^2 < \alpha < b^2,$$

ou :

$$\rho^2 - a^2 > \rho^2 - \alpha > \rho^2 - b^2,$$

ou encore :

$$\frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - a^2} < \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - \alpha} < \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - b^2},$$

c'est-à-dire :

$$s < h < 1.$$

Enfin, de la même façon que les nombres α croissent avec a^2 quand b^2 et c^2 restent fixes, les nombres h croissent avec s quand t reste fixe.

Chaque équation de stabilité apparaît ainsi comme une relation entre s et t , puisque les nombre h sont des fonctions de s , t .

Nous verrons que la première équation de stabilité définit pour chaque valeur de t une valeur bien déterminée s , que nous écrirons $s_2(t)$ (2 étant l'ordre de la fonction de Lamé).

La réciproque n'est pas vraie : à une valeur de s peuvent correspondre zéro, une ou deux valeurs de t .

De même, la deuxième équation de stabilité définit un nombre $s_3(t)$.

Ces résultats préliminaires étant établis, nous allons montrer que :

le rapport t ayant une valeur donnée quelconque entre 1 et $+\infty$, les valeurs $s_2(t)$, $s_3(t)$... $s_n(t)$... définies par les équations de stabilité décroissent avec n lorsqu'elles existent.

9. THÉORÈME. — *Les nombres $s_n(t)$ décroissent avec n .*

Nous diviserons la démonstration en trois parties.

I. Écrivons la première équation de stabilité :

$$(1) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+hx)^2\sqrt{\Delta}} = 0.$$

Ainsi que nous l'avons dit, elle définit pour chaque valeur de t un nombre $s_2(t)$.
Pour les valeurs de s telles que :

$$s_2 < s \leq 1$$

le premier membre est positif : on s'en rend compte facilement pour $s = 1$ par exemple, alors $h = 1$ et l'on a :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{\Delta}} > 0.$$

Écrivons la troisième équation de stabilité :

$$(2) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+h_1x)^2(1+h_2x)^2\sqrt{\Delta}} = 0.$$

Conservons toujours la même valeur de t et donnons à s la valeur s_2 définie précédemment : l'un des nombres h_1 ou h_2 est supérieur à h (propriétés des racines des polynômes de Lamé).

Le produit

$$(1+h_1x)^2(1+h_2x)^2$$

est donc supérieur à

$$(1+hx)^2.$$

Les éléments de la deuxième intégrale de l'équation (2) sont ainsi inférieurs à ceux de la deuxième intégrale de l'équation (1).

Le premier membre de l'équation (2) est par conséquent positif pour $s = s_2$ et par suite pour :

$$s_2 \leq s \leq 1.$$

La troisième équation de stabilité ne peut donc être vérifiée que pour une valeur de s inférieure à s_2 , solution de la première équation de stabilité.

II. Écrivons maintenant la deuxième équation de stabilité :

$$(3) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+sx)(1+hx)^2\sqrt{\Delta}} = 0.$$

Conservons la valeur précédente de t : elle définit un nombre $s_3(t)$.

Écrivons la quatrième équation de stabilité :

$$(4) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+sx)(1+h_1x)^2(1+h_2x)^2\sqrt{\Delta}} = 0.$$

Il est clair que nous pouvons répéter le raisonnement précédent.

Par conséquent, le premier membre de l'équation (4) est positif pour :

$$s_3 \leq s \leq 1.$$

La quatrième équation de stabilité ne peut donc être vérifiée que pour une valeur de s inférieure à s_3 , solution de la deuxième équation de stabilité.

III. Le nombre h' correspondant à la première équation de stabilité est relié au nombre α_1 défini par :

$$f_1(\alpha_1) = \frac{1}{\alpha_1 - a^2} + \frac{1}{\alpha_1 - b^2} + \frac{1}{\alpha_1 - c^2} = 0 ;$$

le nombre h'' correspondant à la deuxième équation de stabilité est relié au nombre α_2 défini par :

$$f_2(\alpha_2) = \frac{3}{\alpha_2 - a^2} + \frac{1}{\alpha_2 - b^2} + \frac{1}{\alpha_2 - c^2} = 0.$$

Les fonctions f sont décroissantes dans l'intervalle (a^2, b^2) .
 α_1 et α_2 sont compris entre a^2 et b^2 .

Si ε est une quantité très petite, on a :

$$\begin{array}{ll} f_1(a^2 + \varepsilon) = +\infty & f_2(a^2 + \varepsilon) = +\infty \\ f_1(\alpha_1) = 0 & f_2(\alpha_2) = 0 \\ f_1(b^2 - \varepsilon) = -\infty & f_2(b^2 - \varepsilon) = -\infty. \end{array}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f_2(\alpha_1) &= \frac{3}{\alpha_1 - a^2} + \frac{1}{\alpha_1 - b^2} + \frac{1}{\alpha_1 - c^2} \\ &= \frac{2}{\alpha_1 - a^2} + f_1(\alpha_1) \\ &= \frac{2}{\alpha_1 - a^2}. \end{aligned}$$

C'est une quantité positive.

Le nombre α_1 est donc compris entre a^2 et α_2 .

On a la suite :

$$a^2 < \alpha_1 < \alpha_2 < b^2.$$

Donc :

$$s < h' < h'' < 1.$$

L'élément différentiel (équation 3) :

$$\frac{dx}{(1 + sx)(1 + h''x)^2 \sqrt{\Delta}}$$

est donc inférieur à l'élément différentiel

$$\frac{dx}{(1 + h'x)^2 \sqrt{\Delta}} \quad (\text{équation 4}).$$

Par suite, la racine $s_3(t)$ de la deuxième équation de stabilité ne peut être qu'inférieure à la racine $s_2(t)$ de la première équation de stabilité.

Pour une même valeur de t , les racines :

$$s_2(t), \quad s_3(t), \quad \dots \quad s_n(t)$$

décroissent avec n .

10. CONCLUSIONS. — Si le premier coefficient de stabilité est positif, tous les autres coefficients de stabilité sont positifs.

Il suffit donc, pour conclure, d'étudier la première équation de stabilité :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} - \int_0^\infty \frac{dx}{(1+hx)^2\sqrt{\Delta}} = 0.$$

Remarque. — Si on veut déterminer les éléments des figures de bifurcation, il faut résoudre les différentes équations de stabilité.

Nous verrons que la fonction $s_2(t)$ varie dans un intervalle très restreint quand t croît de 1 à $+\infty$.

De plus, on peut calculer les valeurs s_2, s_3, \dots, s_n pour $t = 1$. Ce calcul s'effectue à l'aide des fonctions de Legendre.

11. ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE STABILITÉ (première équation). — Nous commencerons par étudier l'équation :

$$(1) \quad \frac{R_2 S_2}{3} = \frac{R_1 S_1}{2n+1}$$

pour la fonction de Lamé la plus simple :

$$R_1 = \rho^2 - \alpha \quad (n = 2);$$

c'est la première équation de stabilité.

On a vu en général que :

$$\frac{R_1 S_1}{2n+1} = R_1^2(\rho) \int_\rho^{+\infty} \frac{r dr}{R_1^2(r) \sqrt{D}}.$$

Enfin :

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}.$$

Nous allons voir que l'équation (1) fait correspondre à chaque valeur de t une seule valeur de s et que les valeurs de s ainsi obtenues varient dans un intervalle très limité.

On peut dire pratiquement que s est voisin de 0,25 et $\frac{b}{a} = \sqrt{s}$ voisin de 0,5.

Le calcul numérique s'effectue à l'aide des fonctions elliptiques de Legendre (Tables Numériques de Potin) dans le cas général.

J'ai étudié en détail les deux cas limites :

a) $t = 1 = \left(\frac{b}{c}\right)^2$ (ellipsoïde de révolution allongé) :

le calcul donne $\frac{b}{a} = \sqrt{s} = 0,512$;

b) $t = \infty$ (ellipsoïde très allongé : aiguille) :

le calcul donne $\frac{b}{a} = \sqrt{s} = 0,515$.

L'équation de stabilité est :

$$(1) \quad \frac{R_2 S_2}{3} = \frac{R_i S_i}{2n + 1}.$$

La première valeur de R_i pour laquelle cette équation a des racines est :

$$R_i = \rho^2 - \alpha \quad (n = 2).$$

Dans ce cas :

$$\frac{R_2 S_2}{3} = (\rho^2 - b^2) \int_{\rho}^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 - b^2) \sqrt{D}},$$

$$\frac{R_i S_i}{2n + 1} = (\rho^2 - \alpha)^2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 - \alpha)^2 \sqrt{D}},$$

avec

$$D = (r^2 - a^2) (r^2 - b^2) (r^2 - c^2).$$

Le nombre α est la racine de l'équation :

$$(2) \quad \frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0$$

comprise entre a^2 et b^2 :

$$a^2 < \alpha < b^2.$$

Par le changement de variable déjà utilisé :

$$r^2 - b^2 = (\rho^2 - b^2) (1 + x).$$

en posant :

$$s = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - a^2} \quad t = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - c^2} \quad h = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - \alpha},$$

il vient :

$$r^2 - a^2 = (\rho^2 - a^2) (1 + sx), \quad r^2 - c^2 = (\rho^2 - c^2) (1 + tx),$$

$$r^2 - \alpha = (\rho^2 - \alpha) (1 + hx).$$

L'équation (1) s'écrit alors :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x) \sqrt{\Delta}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + hx)^2 \sqrt{\Delta}},$$

avec

$$\Delta = (1 + x) (1 + sx) (1 + tx).$$

On a toujours :

$$s < 1, \quad t > 1, \quad a^2 < b^2 < c^2.$$

Puisque $a^2 < \alpha < b^2$, le nombre h est compris entre s et 1 .

L'équation (2) peut s'écrire :

$$\frac{1}{(\rho^2 - \alpha) - (\rho^2 - a^2)} + \frac{1}{(\rho^2 - \alpha) - (\rho^2 - b^2)} + \frac{1}{(\rho^2 - \alpha) - (\rho^2 - c^2)} = 0,$$

ou :

$$\frac{1}{\frac{1}{h} - \frac{1}{s}} + \frac{1}{\frac{1}{h} - 1} + \frac{1}{\frac{1}{h} - \frac{1}{t}} = 0,$$

ou :

$$\frac{s}{h - s} + \frac{1}{h - 1} + \frac{t}{h - t} = 0.$$

Pour calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + hx)^2 \sqrt{\Delta}}$$

nous utilisons l'identité :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x + c}{(x + \alpha) \sqrt{D}} \right) = \frac{1}{2} \frac{c - a}{a - \alpha} \frac{1}{(x + a) \sqrt{D}} + \frac{1}{2} \frac{c - b}{b - \alpha} \frac{1}{(x + b) \sqrt{D}} - \frac{c - \alpha}{(x + \alpha)^2 \sqrt{D}}$$

(ici on a : $D = (x + a)(x + b)(x + c)$).

Elle est vérifiée quels que soient a, b, c si :

$$\frac{1}{\alpha - a} + \frac{1}{\alpha - b} + \frac{1}{\alpha - c} = 0.$$

On peut choisir :

$$\alpha = \frac{1}{h} \quad a = \frac{1}{s} \quad b = \frac{1}{t} \quad c = 1.$$

Écrivons aussi pour simplifier :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{s dx}{(1 + sx) \sqrt{\Delta}} \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1 + x) \sqrt{\Delta}} \quad I_3 = \int_0^{\infty} \frac{t dx}{(1 + tx) \sqrt{\Delta}}.$$

L'équation à résoudre s'écrit alors $I = I_2$.

(On sait que $I_1 + I_2 + I_3 = 2$, ce qu'il est facile de vérifier.)

On obtient ainsi l'équation :

$$1 = \frac{1}{2} \frac{1 - s}{1 - h} I_1 + \frac{1}{2} \frac{t - 1}{t - h} I_3 - (1 - h) I.$$

La condition imposée étant $I = I_2$, il vient :

$$1 + (1 - h) I_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - s}{h - s} I_1 + \frac{t - 1}{t - h} I_3 \right].$$

Résolution numérique de l'équation de stabilité (première équation). — Ce calcul peut être effectué à l'aide des fonctions elliptiques :

$$F(\alpha, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(\alpha, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

avec

$$k^2 = \sin^2 \alpha = \frac{t(1-s)}{t-s},$$

$$z^2 = \sin^2 \varphi = \frac{t-s}{t}.$$

En posant :

$$F' = \frac{F}{\sqrt{t-s}}, \quad E' = \frac{E}{\sqrt{t-s}}, \quad A = \frac{tE' - 1}{t-1},$$

on trouve :

$$\frac{I_1}{2} = \Phi = \frac{s}{1-s} (F' - E'),$$

$$\frac{I_2}{2} = A - \Phi, \quad \frac{I_3}{2} = 1 - A.$$

L'équation de stabilité s'écrit alors :

$$\frac{1-h}{t-h} + 2(1-h)(A - \Phi) = \frac{1-s}{h-s} \Phi - \frac{t-1}{t-h} A.$$

12. EXAMEN DE DEUX CAS LIMITES.

a) $t = \infty$ (aiguille).

L'équation définissant h se réduit à :

$$h^2 - 2h(1+s) + 3s = 0,$$

d'où la seule valeur de h acceptable :

$$h = 1 + s - \sqrt{(1+s)^2 - 3s}.$$

De même :

$$\sin^2 \alpha = 1 - s, \quad \sin^2 \varphi = 1, \quad \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right),$$

$$A \sim \frac{E}{\sqrt{t-s}}, \quad \Phi \sim \frac{s}{1-s} \frac{F-E}{\sqrt{t-s}}.$$

L'équation se réduit à :

$$2(1-h)(A - \Phi) = \frac{1-s}{h-s} \Phi - A,$$

d'où :

$$\frac{\Phi}{A} = \frac{h}{h+1}.$$

La limite de $\frac{\Phi}{A}$ étant d'autre part :

$$\frac{F-E}{E} \frac{s}{1-s},$$

on aura :

$$\frac{F - E}{E} = \frac{1 - s}{s} \cdot \frac{h}{h + 1}.$$

On effectue le calcul par approximations successives en choisissant s .

On trouve :

$$s = 0,2652, \quad \frac{b}{a} = 0,5150.$$

b) $t = 1$ (ellipsoïde de révolution allongé).

Dans ce cas :

$$\sin^2 \alpha = 1 \quad \sin^2 \varphi = 1 - s.$$

Les fonctions E et F se réduisent à :

$$F = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} L \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad E = \int_0^\varphi \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi,$$

$$F' = \frac{1}{2 \sin \varphi} L \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad E' = 1.$$

$$\lim. \frac{E - \sin \alpha}{\cos^2 \varphi} = G = \frac{1}{2} (F - E),$$

$$\lim. A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s}{1 - s} \frac{F - E}{\sin \varphi} \right),$$

$$\Phi = \frac{1}{1 - s} \frac{F - E}{\sin \varphi}.$$

La valeur de h est :

$$h = \frac{3s}{s + 2}.$$

L'équation de stabilité se réduit à :

$$(1 - h)(2 - h) = \frac{2}{3} (F' - 1) [h(1 - h) + 3].$$

En posant :

$$s = 1 - x^2 \quad (x = \sin \varphi), \quad \text{on trouve l'équation :}$$

$$F' = \frac{1}{2x} L \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{9 - x^2}{9 - 4x^2 - x^4}.$$

Le calcul donne :

$$s = 0,2627, \quad \frac{b}{a} = 0,5125.$$

13. CONCLUSIONS RELATIVES AUX CONDITIONS DE STABILITÉ. — *Pour une valeur donnée de λ , l'équation définissant les figures d'équilibre était :*

$$\psi(s, t) - \lambda \varphi(s, t) = 0.$$

A un facteur constant près, on avait :

$$\begin{aligned}\psi(s, t) &= tI_2 - I_3, \\ \varphi(s, t) &= I_1 - sI_2,\end{aligned}$$

avec les notations précédentes.

En définitive on avait une équation :

$$t = f(s),$$

ou

$$\frac{b}{c} = F\left(\frac{b}{a}\right),$$

faisant correspondre une seule valeur de $\frac{b}{c}$ à chaque valeur de $\frac{b}{a}$.

On pouvait représenter graphiquement les solutions de cette équation par un arc de courbe AE dans le plan *Ost*. Cet arc de courbe passait par les points :

$$E(s = 0, t = 1) \quad \text{et} \quad A(s = 1, t = 1).$$

La première équation de stabilité est indépendante de λ (ainsi que toutes les autres d'ailleurs).

Elle définit un arc de courbe CD partant du point C ($s = 0,2576, t = 1$) et allant jusqu'à l'infini, où elle est asymptote à la droite $s = 0,2652$.

Cet arc de courbe limite vers la gauche la région DCAY, région du plan *Ost* où le premier coefficient de stabilité est positif.

Il correspond à l'équation :

$$\frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_4 S_4}{5} = 0$$

relative à la fonction de Lamé de degré $n = 2$.

Les courbes telles que GH correspondant aux fonctions de Lamé de degré supérieur à 2 sont situées à gauche de CD.

Il en résulte que dans la région DCAY située à droite de CD *tous les coefficients de stabilité sont positifs* et, par conséquent, les figures d'équilibre sont stables.

Pour une valeur donnée de λ (cette valeur de λ dépend du champ de gravitation), les seules figures d'équilibre stables sont celles pour lesquelles les rapports des axes $\frac{b}{a}$ et $\frac{b}{c}$ ont des points représentatifs (s, t) situés sur l'arc de courbe AB du plan *Ost*. Cet arc est limité au point A et au point B de rencontre de la courbe ABE et de la courbe CD précédemment définis. Le point B n'est pas le point le plus élevé de la courbe ABE. Son abscisse reste bien voisine de :

$$s = 0,25 \quad \left(\frac{b}{a} = 0,5\right)$$

quand l'arc ABE se déforme avec λ .

Ainsi : les figures ellipsoïdales d'équilibre obtenues au cours d'un mouvement circulaire uniforme dans un champ de gravitation sont stables si le rapport $\frac{b}{a}$ de l'axe moyen au grand axe est supérieur à une valeur bien déterminée pour chaque valeur de λ . Cette valeur est toujours voisine de 0,5. La valeur du rapport $\frac{b}{c}$ de l'axe moyen au petit axe croît avec λ de zéro à l'infini.

Représentation graphique. — Variation de s en fonction de t . Quand t varie de 1

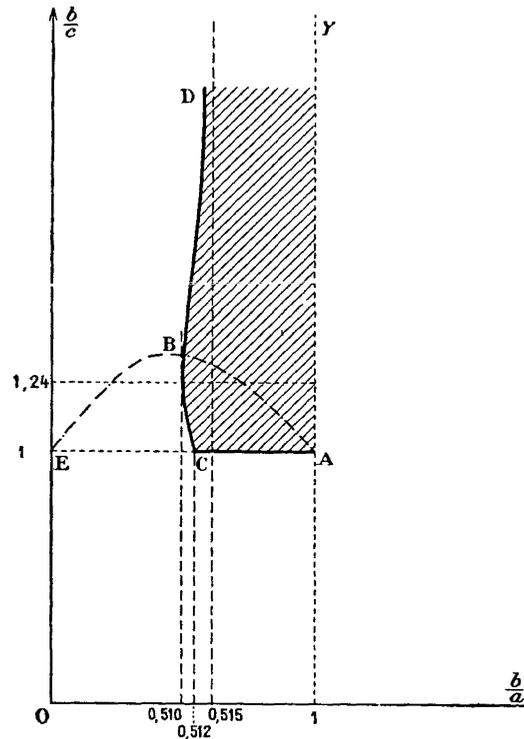


FIG. 5.

à $+\infty$, la valeur $s_2(t)$ définie par la première équation de stabilité décroît d'abord de $s = 0,2627$ jusqu'à un minimum $s = 0,2600$, puis croît jusqu'à $s = 0,2652$.

Ces résultats sont représentés ci-dessous (tableau II).

TABLEAU II

$\frac{b}{c}$	1	1,24	$+\infty$
t	1	1,50	$+\infty$
s	0,2627	↘ 0,2600 ↗	0,2652
$\sqrt{s} = \frac{b}{a}$	0,5125	↘ . 0,510 ↗	0,5150

La figure 5 représente la courbe $\frac{b}{c} = f\left(\frac{b}{a}\right)$; la région hachurée correspond aux ellipsoïdes stables; l'arc de courbe AB est déterminé pour chaque valeur de λ .

14. ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE STABILITÉ (deuxième équation). — Nous étudions ensuite la deuxième équation de stabilité :

$$\frac{R_2 S_2}{3} = \frac{R_i S_i}{2n + 1}.$$

C'est l'équation obtenue en prenant la fonction de Lamé de degré $n = 3$:

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - a^2} (\rho^2 - \alpha).$$

Ce calcul n'est effectué qu'à titre de vérification. Il serait nécessaire, cependant, si l'on voulait calculer les éléments de la deuxième figure de bifurcation.

Il en est de même pour l'étude générale du cas limite $t = 1$. Les valeurs de $s(t)$ varient en effet très peu quand t varie de 1 à $+\infty$ et restent voisines de la valeur calculée pour $t = 1$ (ellipsoïde de révolution).

L'équation de stabilité est toujours :

$$(1) \quad \frac{R_2 S_2}{3} = \frac{R_i S_i}{2n + 1},$$

avec

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - a^2} (\rho^2 - \alpha).$$

Dans ce cas :

$$\frac{R_2 S_2}{3} = (\rho^2 - b^2) \int_{\rho}^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 - b^2) \sqrt{D}},$$

$$\frac{R_i S_i}{2n + 1} = (\rho^2 - a^2) (\rho^2 - \alpha)^2 \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 - a^2) (r^2 - \alpha)^2 \sqrt{D}}.$$

Le nombre α est la racine de l'équation :

$$(2) \quad \frac{3}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0$$

comprise entre a^2 et b^2 ($a^2 < \alpha < b^2$).

Par le même changement de variable que précédemment, l'équation (1) devient :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+sx)(1+hx)^2\sqrt{\Delta}}.$$

L'équation définissant h se déduit de (2) de manière analogue :

$$\frac{3s}{h-s} + \frac{1}{h-1} + \frac{t}{h-t} = 0 \quad (s < h < 1).$$

Pour calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+sx)(1+hx)^2\sqrt{\Delta}},$$

nous utiliserons l'identité :

$$-2(a - \alpha)(b - \alpha)(c - \alpha) \frac{1}{(x + s)(x + \alpha)^2 \sqrt{D}} = \frac{b - c}{(x + b)\sqrt{D}} 2 \frac{d}{dx} \left[\frac{x + c}{(x + \alpha)\sqrt{D}} \right] (b - \alpha) \\ + [2(b - \alpha) + (c - \alpha)] \frac{1}{(x + \alpha)\sqrt{D}}.$$

Elle est vérifiée quels que soient a, b, c pourvu que α soit racine de :

$$\frac{3}{\alpha - a} + \frac{1}{\alpha - b} + \frac{1}{\alpha - c} = 0.$$

En prenant :

$$\alpha = \frac{1}{h}, \quad a = \frac{1}{s}, \quad b = \frac{1}{t}, \quad c = 1,$$

on obtient :

$$2h(t - h) + 2(h - s)(t - h)(1 - h)I_2 = [2(t - h) + t(1 - h)]I_1 + h(t - 1)I_3.$$

Avec les mêmes notations, l'équation de condition s'écrit :

$$\frac{h}{t - h} + A \left[2(h - s) + \frac{h(t - 1)}{(t - h)(1 - h)} \right] = \Phi \left[2(h - s) + \frac{2}{1 - h} + \frac{t}{t - h} \right].$$

Examen de cas limites.

a) $t = \infty$ (aiguille).

L'équation donnant h se réduit à :

$$h^2 - 2h(1 + s) + 5s = 0,$$

d'où :

$$h = 1 + 2s - \sqrt{(1 + 2s)^2 - 5s}$$

et l'équation de stabilité devient :

$$\frac{\Phi}{A} = \frac{h + 2(h - s)(1 - h)}{3 - h + 2(h - s)(1 - h)},$$

d'où :

$$\frac{F - E}{E} = \frac{1 - s}{s} \cdot \frac{h + 2(h - s)(1 - h)}{3 - h + 2(h - s)(1 - h)}.$$

Le calcul donne :

$$s = 0,115, \quad \frac{b}{a} = 0,34.$$

b) $t = 1$ (ellipsoïde de révolution).

Dans ce cas

$$h = \frac{5s}{2 + 3s}$$

et l'équation de stabilité se réduit à :

$$2h + 2(h - s)(1 - h)I_2 = 3I_1, \\ I_1 = 2 - 2I_2, \quad I_3 = I_3, \\ I_2 = \frac{1}{1 - s}(1 - sF').$$

Finalement, en posant :

$$s = 1 - x^2,$$

on a :

$$F' = \frac{1}{2x} L \frac{1+x}{1-x} = \frac{6(1-s)^2 + (11+4s)(2+3s)}{3(2+3s)^2 + 6s(1-s)^2}.$$

Le calcul donne :

$$x = 0,94, \quad s = 0,110, \quad \frac{b}{a} = 0,33.$$

Équation de stabilité : cas général $t = 1$ (ellipsoïdes de révolution).

La condition imposée est toujours :

$$\frac{R_2 S_2}{3} = \frac{R_1 S_1}{2n+1}, \text{ avec } b = c \text{ ou } t = 1.$$

On a :

$$R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2},$$

$$\frac{S_2}{3} = R_2 \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 - b^2) \sqrt{D}},$$

avec

$$\sqrt{D} = \sqrt{r^2 - a^2} (r^2 - b^2).$$

Dans ce cas, les fonctions de Lamé se réduisent aux fonctions de Legendre de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2} & R_2 = \rho^2 - a_1 & R_3 = \sqrt{\rho^2 - a^2} (\rho^2 - a_1) \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{array}$$

etc.

On suppose, ce qui est possible :

$$a^2 = 0, \quad b^2 = 1;$$

d'où :

$$s = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - a^2} = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} R_1 &= X_1 = \rho, \\ R_4 &= X_2 = \frac{1}{2} (3\rho^2 - 1), \\ R_7 &= X_3 = \frac{\rho}{2} (5\rho^2 - 3), \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ R_k &= X_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (\rho^2 - 1)^n}{d\rho^n}. \end{aligned}$$

De même :

$$\frac{S_k}{2n+1} = X_n \int_0^\infty \frac{dr}{X_n^2(r^2-1)} = Q_n,$$

Q_n étant la fonction de Legendre de 2^e espèce :

$$Q_n = X_n \frac{1}{2} L \frac{\rho+1}{\rho-1} - F_{n-1}.$$

En particulier :

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{2}(3\rho^2 - 1) & F_1 &= \frac{3}{2}\rho \\ X_3 &= \frac{\rho}{2}(5\rho^2 - 3) & F_2 &= \frac{1}{6}(15\rho^2 - 4) \\ X_4 &= \frac{1}{8}(35\rho^4 - 30\rho^2 + 3) & F_3 &= \frac{5\rho}{24}(21\rho^2 - 11). \end{aligned}$$

Puisque :

$$\frac{R_2 S_2}{3} = (\rho^2 - 1) \int_0^\infty \frac{dr}{(r^2 - 1)^2} = \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{4}(\rho^2 - 1)L \frac{\rho+1}{\rho-1},$$

on aura l'équation de stabilité :

$$\frac{1}{2} X_n^2 L \frac{\rho+1}{\rho-1} - F_{n-1} X_n = \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{4}(\rho^2 - 1)L \frac{\rho+1}{\rho-1},$$

d'où :

$$\frac{1}{2} L \frac{\rho+1}{\rho-1} = \frac{\rho + 2X_n F_{n-1}}{\rho^2 - 1 + 2X_n^2}.$$

Pour $n = 2$, on peut vérifier le cas déjà traité, on trouve bien :

$$\frac{1}{2\rho} L \frac{\rho+1}{\rho-1} = \frac{9\rho^2 - 1}{2(\rho^2 - 1) + (3\rho^2 - 1)^2}.$$

De même pour $n = 3$.

15. RELATION ENTRE LE MINIMUM DE DENSITÉ ET LA CONDITION DE STABILITÉ. —
Pour tous les ellipsoïdes de même masse dont les rapports des axes sont compatibles avec la théorie, la densité ρ était égale à :

$$\frac{1}{\varphi(s, t)}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\psi(s, t)},$$

à un facteur constant près.

Nous avons dit que dans ces conditions ρ passait par un minimum pour $\frac{b}{a}$ voisin de 0,5 (s voisin de 0,25).

t est une fonction de s définie par la relation :

$$\psi(s, t) - \lambda \varphi(s, t) = 0.$$

A chaque minimum de ρ correspond un système bien déterminé de valeurs s et t . Ces valeurs varient avec λ . Si on les représente graphiquement dans le plan Ost , on obtient une courbe qui coïncide avec la courbe CD considérée au paragraphe précédent.

Nous allons montrer que la relation définissant le minimum de densité est bien équivalente à la première équation de stabilité.

La relation entre les rapports des axes d'une figure ellipsoïdale d'équilibre :

$$\psi(s, t) - \lambda \varphi(s, t) = 0$$

définit une fonction $t(s)$ pour chaque valeur de λ .

Si on substitue la valeur $t(s, \lambda)$ ainsi obtenue dans l'expression : $\varphi(s, t)$, on a :

$$\varphi(s, t) = \varphi_0[s, t(s)].$$

On obtient ainsi une fonction $\varphi_0(s)$, qui présente un maximum pour une certaine valeur de s .

Ce maximum correspond au minimum de la densité, d'après les formules qui ont été vues précédemment.

Soit donc la fonction :

$$y = \varphi[s, t(s)].$$

Cherchons le maximum.

La dérivée est :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{ds}.$$

Calculons $\frac{dt}{ds}$:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial s} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \frac{dt}{ds} = 0.$$

Pour le maximum, on doit avoir $\frac{dy}{ds} = 0$:

on aura donc la condition :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial s} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

qui se réduit à :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

ou :

$$\frac{D(\psi, \varphi)}{D(t, s)} = 0.$$

On aura donc pour le minimum de la densité ρ , ou pour le maximum de

$$(1) \quad \psi - \lambda \varphi = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0.$$

La relation (2) indépendante de λ représente le lieu des points (s, t) correspondant au maximum de ρ quand λ varie par rapport à des axes Os, Ot .

Remarque. — Cette relation est symétrique en ψ et φ , ainsi qu'il fallait s'y attendre, car d'après :

$$\psi - \lambda\varphi = 0,$$

ψ et φ sont maxima en même temps.

16. VÉRIFICATION DE L'ÉQUIVALENCE DE :

$$(1) \quad \frac{D(\psi, \varphi)}{D(t, s)} = 0$$

et

$$(2) \quad \frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_1 S_1}{2n+1} = 0,$$

la fonction R_i de l'équation (2) étant la première fonction de Lamé :

$$R_i = \rho^2 - \alpha$$

pour laquelle l'équation de stabilité a des racines.

La relation (2) a été mise sous une forme linéaire des intégrales :

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{s dx}{(1+sx)\sqrt{\Delta}}, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{\Delta}}, \quad I_3 = \int_0^\infty \frac{t dx}{(1+tx)\sqrt{\Delta}}.$$

On a l'identité :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 2.$$

On a d'autre part, à un facteur constant près :

$$\varphi = I_1 - sI_2, \quad \psi = tI_2 - I_3.$$

On trouve les dérivées :

$$\frac{\partial I_2}{\partial s} = \frac{1}{2s(1-s)} (sI_2 - I_1),$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial s} = \frac{1}{2s(t-s)} (sI_3 - tI_1),$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial s} = I_1 \frac{2t-ts-s}{2s(1-s)(t-s)} - \frac{I_2}{2(1-s)} - \frac{I_3}{2(t-s)},$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} = -\frac{1}{2t(t-s)} (tI_1 - sI_3),$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} = -\frac{1}{2t(t-1)} (tI_2 - I_3),$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial t} = I_3 \frac{2s-ts-t}{2t(t-1)(t-s)} + \frac{I_2}{2(t-1)} + \frac{I_1}{2(t-s)}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial s} &= \frac{2t - s - s^2}{2s(1-s)(t-s)} I_1 - I_2 \frac{3-s}{2(1-s)} - I_3 \frac{1}{2(t-s)}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{I_1}{2(t-s)} - I_2 \frac{3-t}{2(t-1)} + I_3 \frac{t^2 + t - 2s}{2t(t-1)(t-s)}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{I_1}{2(t-s)} + \frac{s \cdot I_2}{2(t-1)} - I_3 \frac{s(1-s)}{2t(t-1)(t-s)}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial s} &= -I_1 \frac{t(t-1)}{2s(1-s)(t-s)} + \frac{tI_2}{2(1-s)} - I_3 \frac{1}{2(t-s)}.\end{aligned}$$

L'expression $\frac{D(\psi, \varphi)}{D(t, s)}$ est donc une forme quadratique homogène en I_1, I_2, I_3 .

Elle doit être une conséquence de l'identité :

$$P \equiv I_1 + I_2 + I_3 - 2 \equiv 0$$

et de l'équation (2) :

$$\frac{R_2 S_2}{3} - \frac{R_s S_t}{2n+1} = 0$$

qu'on peut mettre sous la forme linéaire en I_1, I_2, I_3 :

$$Q \equiv 2 + 2(1-h)I_2 - \frac{1-s}{h-s} I_1 - \frac{t-1}{t-h} I_3,$$

en ne perdant pas de vue que h est racine de l'équation :

$$\frac{s}{h-s} + \frac{1}{h-1} + \frac{t}{h-t} = 0.$$

On doit donc avoir :

$$\Delta = \frac{D(\psi, \varphi)}{D(t, s)} = (\alpha I_1 + \beta I_2 + \gamma I_3) (u I_1 + v I_2 + w I_3),$$

l'un des deux facteurs linéaires étant égal à : $P + \lambda Q$ par exemple :

$$u I_1 + v I_2 + w I_3 \equiv P + \lambda Q.$$

On voit que $\lambda = 1$; par suite :

$$u I_1 + v I_2 + w I_3 \equiv I_1 + I_2 + I_3 - 2 + 2 + 2(1-h)I_2 - \frac{1-s}{h-s} I_1 - \frac{t-1}{t-h} I_3,$$

d'où :

$$u I_1 + v I_2 + w I_3 \equiv -\frac{1-h}{h-s} I_1 + (3-2h)I_2 + \frac{1-h}{t-h} I_3.$$

La condition :

$$\begin{aligned}\Delta &= AI_1^2 + BI_2^2 + CI_3^2 + 2DI_2I_3 + 2EI_1I_3 + 2FI_1I_2 \\ &\equiv (\alpha I_1 + \beta I_2 + \gamma I_3) (u I_1 + v I_2 + w I_3)\end{aligned}$$

montre qu'on doit avoir les relations :

$$\begin{aligned} A &= \alpha u & B &= \beta v & C &= \gamma w \\ 2D &= \beta w + \gamma v = B \frac{w}{v} + C \frac{v}{w}, \\ 2E &= \gamma u + \alpha w = C \frac{u}{w} + A \frac{w}{u}, \\ 2F &= \alpha v + \beta u = A \frac{v}{u} + B \frac{u}{v}, \end{aligned}$$

c'est-à dire :

$$\begin{aligned} 2D &= B \frac{1-h}{(3-2h)(t-h)} + C \frac{(3-2h)(t-h)}{1-h}, \\ 2E &= C \frac{-(t-h)}{h-s} + A \frac{-(h-s)}{t-h}, \\ 2F &= A \frac{-(3-2h)(h-s)}{1-h} + B \frac{-(1-h)}{(3-2h)(h-s)}. \end{aligned}$$

Il suffit de s'assurer que ces trois relations sont vérifiées identiquement.

Calcul des coefficients A, B, C, D, E, F.

En prenant :

$$\Delta = \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial s},$$

on trouve :

$$\begin{aligned} A &= \frac{t(t-1)}{4s(1-s)(t-s)^2} + \frac{2t-s-s^2}{4s(1-s)(t-s)^2} = \frac{t^2-s^2+t-s}{4s(1-s)(t-s)^2} = \frac{t+s+1}{4s(1-s)(t-s)}, \\ B &= \frac{ts}{4(1-s)(t-1)} - \frac{(3-s)(3-t)}{4(1-s)(t-1)} = 3 \frac{t+s-3}{4(1-s)(t-1)}, \\ C &= \frac{s(1-s)+t^2+t-2s}{4t(t-1)(t-s)^2} = \frac{t+s+1}{4t(t-1)(t-s)}, \\ 2E &= \frac{1}{4(t-s)^2} + \frac{1}{4(t-s)^2} - \frac{1}{4(t-s)^2} - \frac{(t^2+t-2s)(2t-s-s^2)}{4ts(1-s)(t-1)(t-s)^2} \\ &= \frac{1}{4(t-s)^2} - \frac{(t^2+t-2s)(2t-s-s^2)}{4ts(t-1)(1-s)(t-s)^2} \\ &= \frac{ts(1-s)(t-1) - (t^2+t-2s)(2t-s-s^2)}{4ts(t-1)(1-s)(t-s)^2} \\ &= \frac{ts(1-s)(t-1) - [t(t-1) + 2(t-s)][s(1-s) + 2(t-s)]}{4ts(t-1)(1-s)(t-s)^2} \\ &= \frac{-4(t-s)^2 - 2(t-s)[t(t-1) + s(1-s)]}{4ts(s-1)(1-s)(t-s)^2} \\ &= \frac{-4(t-s)^2 - 2(t-s)(t-s)(t+s+1)}{4ts(t-1)(1-s)(t-s)^2} \\ &= \frac{-2(t+s+1)}{4ts(t-1)(1-s)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2D &= -\frac{s}{4(t-1)(t-s)} - \frac{s}{4(t-1)(t-s)} + \frac{(3-s)(t^2+t-2s)}{4t(t-1)(1-s)(t-s)} - \frac{(3-t)}{4(t-1)(t-s)} \\
&= \frac{(3-s)(t^2+t-2s)}{4t(t-1)(1-s)(t-s)} - \frac{3-t+2s}{4(t-1)(t-s)} \\
&= \frac{t-2s-3}{4(t-1)(t-s)} + \frac{(3-s)(t^2+t-2s)}{4t(t-1)(1-s)(t-s)} \\
&= \frac{t-2s-3}{4(t-1)(t-s)} + \frac{(3-s)(t^2+t-2s)}{4t(t-1)(1-s)(t-s)}.
\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples :

$$\begin{aligned}
\frac{t-2s-3}{(t-1)(t-s)} &= \frac{1}{1-s} \left[\frac{3+s}{t-s} - \frac{2(1+s)}{t-1} \right], \\
\frac{t^2+t-2s}{t(t-1)(t-s)} &= -\frac{2}{t} + \frac{2}{t-1} + \frac{1}{t-s},
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
8D &= \frac{1}{1-s} \left(\frac{3+s}{t-s} \right) - \frac{2(1+s)}{(1-s)(t-1)} + \frac{3-s}{1-s} \left[-\frac{2}{t} + \frac{2}{t-1} + \frac{1}{t-s} \right], \\
8D &= \frac{6}{(1-s)(t-s)} - \frac{2(3-s)}{t(1-s)} + \frac{4(1-s)}{(1-s)(t-1)}.
\end{aligned}$$

d'où :

$$2D = \frac{3}{2(1-s)(t-s)} - \frac{3-s}{2t(1-s)} + \frac{1}{t-1}.$$

Le calcul de F s'effectue de la même façon que celui de D, on trouve :

$$2F = \frac{(2t-s-s^2)(3-t)}{4s(t-1)(1-s)(t-s)} - \frac{2t+3-s}{4(1-s)(t-s)}.$$

En décomposant en éléments simples comme ci-dessus, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{2t-s-s^2}{s(1-s)(t-s)} &= \frac{2}{s} + \frac{2}{1-s} + \frac{1}{t-s}, \\
\frac{2t+3-s}{(1-s)(t-s)} &= \frac{1}{t-1} \left[\frac{2(t+1)}{1-s} - \frac{t+3}{t-s} \right].
\end{aligned}$$

Par suite :

$$8F = \frac{1}{t-1} \left[\frac{t+3}{t-s} - \frac{2(t+1)}{1-s} \right] + \frac{3-t}{t-1} \left[\frac{2}{s} + \frac{2}{1-s} + \frac{1}{t-s} \right],$$

ou :

$$8F = \frac{6}{(t-1)(t-s)} + \frac{2(3-t)}{s(t-1)} - \frac{4(t-1)}{(t-1)(1-s)},$$

d'où :

$$2F = \frac{3}{2(t-1)(t-s)} + \frac{3-t}{2s(t-1)} - \frac{1}{1-s}.$$

Nous constatons qu'on passe simplement de D à F en permutant s et t .

17. La vérification de l'identité des deux valeurs de $2F$ comporte les mêmes calculs que celle de $2D$, puisqu'on passe de A à C en permutant aussi s et t .

Pour la commodité des calculs, nous vérifierons l'identité des deux valeurs de la combinaison symétrique en s, t :

$$2Dt + 2Fs.$$

Il est facile de voir que cette vérification est suffisante ; en effet, si nous avons :

$$2Dt + 2Fs = 2D_1t + 2F_1s,$$

nous pouvons écrire :

$$(D - D_1)t = (F_1 - F)s.$$

Nous aurons donc :

$$D - D_1 = \lambda(s, t)s,$$

$$F_1 - F = \lambda(s, t)t,$$

ou :

$$D = D_1 + \lambda(s, t)s,$$

$$F = F_1 - \lambda(s, t)t.$$

Pour passer de D à F par permutation de s et t , il faut :

$$F = F_1 + \lambda(t, s)t,$$

$$D = D_1 - \lambda(t, s)s.$$

Nous devons donc avoir :

$$\lambda(s, t) = -\lambda(t, s).$$

Dans ce cas, notre justification est en défaut, mais il est facile de se rendre compte, pour une valeur particulière de t , que la fonction λ doit être identiquement nulle.

En prenant $t = 1$ par exemple, on a :

$$h = \frac{3s}{s + 2}.$$

Par suite :

$$\lambda(s, t) \equiv 0 \equiv \lambda(1, t), \text{ par permutation,}$$

et :

$$\lambda(s, t) \equiv 0.$$

Vérification de :

$$2E = -C \frac{t-h}{h-s} - A \frac{h-s}{t-h}.$$

On doit avoir :

$$\frac{2(t+s+1)}{4ts(t-1)(1-s)} = \frac{t+s+1}{4t(t-1)(1-s)} \frac{t-h}{h-s} + \frac{t+s+1}{4s(1-s)(t-s)} \frac{h-s}{t-h},$$

ou :

$$2(t-s) = s(1-s) \left[-1 + \frac{t-s}{h-s} \right] + t(t-1) \left[-1 + \frac{t-s}{t-h} \right],$$

ou :

$$2(t-s) = -(t^2 - s^2) + t - s + (t-s) \frac{s(1-s)}{h-s} + (t-s) \frac{t(t-1)}{t-h}.$$

ou enfin :

$$t + s + 1 = \frac{s(1-s)}{h-s} + \frac{t(t-1)}{t-h}.$$

En effectuant, on trouve :

$$h^2(t+s+1) - 2h(ts+t+s) + 3ts = 0,$$

ce qui est bien l'équation vérifiée par h .

Vérification de :

$$2D = B \frac{1-h}{(3-2h)(t-h)} + C \frac{(3-2h)(t-h)}{1-h},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2(1-s)(t-s)} - \frac{3-s}{2t(1-s)} + \frac{1}{t-1} &= \frac{1-h}{(3-2h)(t-h)} \frac{3(t+s-3)}{4(1-s)(t-1)} \\ &+ \frac{t+s+1}{4t(t-1)(1-s)} \frac{(3-2h)(t-h)}{1-h}. \end{aligned}$$

Vérification de :

$$2F = -A \frac{(3-2h)(h-s)}{1-h} - B \frac{1-h}{(3-2h)(h-s)},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2(t-1)(t-s)} + \frac{3-t}{2s(t-1)} + \frac{1}{t-1} &= -\frac{(3-2h)(h-s)}{1-h} \frac{t+s+1}{4s(1-s)(t-s)} \\ &- \frac{1-h}{(3-2h)(h-1)} \frac{3(t+s-3)}{4(1-s)(t-1)}. \end{aligned}$$

Écrivons ces relations :

$$\begin{aligned} 2D &= \frac{B}{t-h} \frac{1-h}{3-2h} + C(t-h) \frac{3-2h}{1-h}, \\ 2F &= -A(h-s) \frac{3-2h}{1-h} - \frac{B}{h-s} \frac{1-h}{3-2h}. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} A &= \frac{t+s+1}{4s(1-s)(t-s)} = \frac{\beta}{s(1-s)}, \\ C &= \frac{t+s+1}{4t(t-1)(t-s)} = \frac{\beta}{t(t-1)}, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{t+s+1}{4(t-s)}, \\ B &= \frac{3(t+s-3)}{4(1-s)(t-1)} \quad \text{et} \quad H = \frac{1-h}{3-2h}. \end{aligned}$$

Il vient :

$$2D = \frac{B}{t-h} H + \frac{\beta}{t(t-1)} \frac{t-h}{H},$$

$$2F = -\frac{\beta}{s(1-s)} (h-s) - \frac{B}{h-s} H.$$

La combinaison linéaire :

$$2Dt + 2Fs = B \left(\frac{tH}{t-h} - \frac{sH}{h-s} \right) + \beta \left(\frac{t-h}{t-1} - \frac{h-s}{1-s} \right) \frac{1}{H}$$

devient, après réductions et simplification :

$$2Dt + 2Fs = \frac{B}{3-2h} + \frac{\beta(t-s)(3-2h)}{(t-1)(1-s)},$$

ou :

$$2Dt + 2Fs = \frac{3(t+s-3)}{4(1-s)(t-1)} \frac{1}{3-2h} + \frac{(t+s+1)(3-2h)}{4(1-s)(t-1)},$$

en tenant compte de l'équation :

$$\frac{s}{h-s} + \frac{t}{h-t} + \frac{1}{h-1} = 0.$$

Le calcul direct de l'expression :

$$2Dt + 2Fs$$

donne d'autre part :

$$\begin{aligned} 2Dt + 2Fs &= \frac{3t}{2(1-s)(t-1)} - \frac{3-s}{2(1-s)} + \frac{t}{t-1} \\ &+ \frac{3s}{2(t-1)(t-s)} + \frac{3-t}{2(t-1)} - \frac{s}{1-s} \\ &= \frac{3(t-s)(t+s-1)}{2(1-s)(t-1)(t-s)} + \frac{t+3}{2(t-1)} - \frac{s+3}{2(1-s)}, \end{aligned}$$

ou encore :

$$= \frac{3(t+s-1)}{2(1-s)(t-1)} + \frac{t+3}{2(t-1)} - \frac{s+3}{2(1-s)},$$

ou, enfin, en groupant :

$$2Dt + 2Fs = \frac{3+t+s-2ts}{2(1-s)(t-1)}.$$

Nous devons vérifier l'identité :

$$\frac{3+t+s-2ts}{2(1-s)(t-1)} = \frac{3(t+s-3)}{4(3-2h)(1-s)(t-1)} + \frac{(t+s+1)(3-2h)}{4(1-s)(t-1)},$$

ou, après réduction au même dénominateur :

$$2(3+t+s-2ts)(3-2h) = 3(t+s-3) + (t+s+1)(3-2h)^2.$$

On sait d'autre part que h est racine de l'équation :

$$h^2(t + s + 1) - 2h(ts + t + s) + 3ts = 0.$$

On vérifie facilement qu'on passe de la deuxième à la première de ces équations par la substitution :

$$3 - 2h = H \quad \text{ou} \quad h = \frac{3 - H}{2},$$

C. Q. F. D.

18. FIGURE D'ÉQUILIBRE VOISINE DE L'ELLIPSOÏDE (*figure de bifurcation*). — Cette surface est définie à partir de l'ellipsoïde en portant sur la normale extérieure une longueur :

$$\zeta = \varepsilon l M_i N_i.$$

ε est une quantité petite par rapport aux dimensions de l'ellipsoïde ; à la surface de cet ellipsoïde $\rho = \rho_0 = C^{te}$, l a pour expression :

$$l = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}} \quad (\rho^2 > c^2);$$

μ, ν sont les deux paramètres définissant un point de la surface de l'ellipsoïde.

$$M_i = \mu^2 - \alpha, \quad N_i = \nu^2 - \alpha, \quad R_i = \rho^2 - \alpha$$

sont des fonctions de Lamé, α étant racine de l'équation :

$$\frac{1}{\alpha - a^2} + \frac{1}{\alpha - b^2} + \frac{1}{\alpha - c^2} = 0,$$

avec :

$$a^2 < \alpha < b^2 < c^2.$$

L'ellipsoïde a pour équation :

$$\frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

C'est l'ellipsoïde de bifurcation, qui limite les ellipsoïdes stables.

On avait :

$$s = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - a^2} < 1 \quad t = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - c^2} > 1 \quad h = \frac{\rho^2 - b^2}{\rho^2 - \alpha},$$

avec

$$s < h < 1.$$

Ainsi :

$$\zeta = \varepsilon \frac{(\mu^2 - \alpha)(\nu^2 - \alpha)}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}.$$

On écrit :

$$M_i N_i = \frac{R_i M_i N_i}{R_i} = \frac{(\rho^2 - \alpha)(\mu^2 - \alpha)(\nu^2 - \alpha)}{\rho^2 - \alpha}.$$

Or, on a :

$$\frac{(\rho^2 - \alpha)(\mu^2 - \alpha)(\nu^2 - \alpha)}{(\alpha - a^2)(\alpha - b^2)(\alpha - c^2)} = \frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1$$

$$\frac{(\mu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \rho^2)}{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} = \frac{x^2}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2}.$$

Par suite :

$$t = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} \left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} \right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{ABC} \left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} \right)^{-1/2},$$

A, B, C désignant les demi-axes de l'ellipsoïde. On peut donc écrire, à une fonction de ρ près (par conséquent à un facteur constant près) :

$$= K \left(\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{A^4} + \frac{y^2}{B^4} + \frac{z^2}{C^4} \right)^{-1/2},$$

que nous écrirons :

$$\zeta = KE\lambda.$$

Cette relation définit la figure voisine en coordonnées cartésiennes.

Étudions les sections de cette surface par les plans de coordonnées.

1° *Section par le plan des xz ($y = 0$).* — L'ellipsoïde est coupé suivant l'ellipse :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1.$$

La quantité ζ est nulle sur l'hyperbole :

$$\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} = 1.$$

Calculons ζ en fonction de z .

Sur l'ellipsoïde, on a :

$$x^2 = A^2 \left(1 - \frac{z^2}{C^2} \right),$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{x^2}{A^4} + \frac{z^2}{C^4} = \frac{1}{A^2} \left(1 - \frac{z^2}{C^2} \right) + \frac{z^2}{C^4},$$

$$\frac{A^2}{\lambda^2} = 1 - \frac{z^2}{C^2} \left(1 - \frac{A^2}{C^2} \right) = 1 - \frac{a^2 - c^2}{C^2} \frac{z^2}{C^2},$$

puisque :

$$C^2 - A^2 = a^2 - c^2,$$

$$E = \frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1 = \frac{A^2}{\alpha - a^2} \left(1 - \frac{z^2}{C^2} \right) + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1$$

$$= \frac{A^2}{\alpha - a^2} - 1 + z^2 \left(\frac{1}{\alpha - c^2} - \frac{A^2}{C^2} \cdot \frac{1}{\alpha - a^2} \right)$$

Après transformation, on trouve :

$$E = \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - a^2} \left[1 + z^2 \cdot \frac{c^2 - a^2}{(\alpha - c^2)(\rho^2 - c^2)} \right].$$

On a enfin :

$$\zeta = KE\lambda = K \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - a^2} \left[1 + z^2 \frac{c^2 - a^2}{(\alpha - c^2)(\rho^2 - c^2)} \right] \frac{A(\rho^2)}{\sqrt{C^4 - (a^2 - c^2)z^2}}.$$

Pour $z = C$ (sommet) :

$$\zeta = K \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - a^2} \frac{\alpha - a^2}{\alpha - c^2} C = KC \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - c^2} = \zeta_0.$$

Par suite :

$$\zeta = \zeta_0 \frac{\alpha - c^2}{\alpha - a^2} \frac{AC}{\sqrt{C^4 - (c^2 - a^2)z^2}} \left[1 - z^2 \frac{c^2 - a^2}{(c^2 - \alpha)(\rho^2 - c^2)} \right].$$

ζ est nul aux points de rencontre de l'ellipse et de l'hyperbole considérées au début pour :

$$z_0^2 = \frac{(c^2 - \alpha)(\rho^2 - c^2)}{c^2 - a^2} = C^2 \frac{c^2 - \alpha}{c^2 - a^2}.$$

On peut écrire :

$$\frac{c^2 - \alpha}{c^2 - a^2} = \frac{(\rho^2 - \alpha) - (\rho^2 - c^2)}{(\rho^2 - a^2) - (\rho^2 - c^2)} = \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{t}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{t}} = \frac{t - h}{t - s} \cdot \frac{s}{h}.$$

2° *Section par le plan des xy* ($z = 0$). — Il suffit de changer dans les calculs précédents :

$$z \text{ en } y, \quad C \text{ en } B, \quad c \text{ en } b.$$

Alors :

$$\zeta = K \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - a^2} \left[1 + y^2 \frac{b^2 - a^2}{(\alpha - b^2)(\rho^2 - b^2)} \right] \frac{AB^2}{\sqrt{B^4 + (b^2 - a^2)y^2}}.$$

Pour $y = B$ (sommet) :

$$\zeta = \zeta_1 = KB \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - b^2}.$$

Par suite :

$$\zeta = \zeta_1 \frac{\alpha - b^2}{\alpha - c^2} \frac{AB}{\sqrt{B^4 + (b^2 - a^2)y^2}} \left[1 - y^2 \frac{b^2 - a^2}{(b^2 - \alpha)(\rho^2 - b^2)} \right].$$

3° *Section par le plan des yz* ($x = 0$). — On obtient dans l'ellipsoïde, l'ellipse :

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1.$$

La quantité

$$\frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1$$

est toujours négative.

D'autre part :

$$y^2 = B^2 \left(1 - \frac{z^2}{C^2} \right),$$

$$\frac{B^2}{\lambda^2} = 1 - \frac{b^2 - c^2}{C^2} \frac{z^2}{C^2},$$

d'où :

$$E = \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - b^2} \left[1 + z^2 \frac{c^2 - b^2}{(\alpha - c^2)(\rho^2 - c^2)} \right] = \frac{\rho^2 - \alpha}{\rho - b^2} \left[1 - z^2 \frac{c^2 - b^2}{(c^2 - \alpha)(\rho^2 - c^2)} \right],$$

ce qui donne :

$$= K \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - b^2} \left[1 - z^2 \frac{c^2 - b^2}{(c^2 - \alpha)(\rho^2 - c^2)} \right] \cdot \frac{BC}{\sqrt{C^4 - (b^2 - c^2)z^2}}.$$

Pour $z = c$ (sommet) :

$$\zeta = \zeta_2 = K \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - b^2} \frac{\alpha - b^2}{\alpha - c^2} C = KC \frac{\rho^2 - \alpha}{\alpha - c^2},$$

d'où enfin :

$$\zeta = \zeta_2 \frac{\alpha - c^2}{\alpha - b^2} \frac{BC'}{\sqrt{C^4 + (c^2 - b^2)z^2}}$$

$$\left[1 - z^2 \frac{c^2 - b^2}{(c^2 - \alpha)(\rho^2 - c^2)} \right].$$

Cette figure d'équilibre admet, comme l'ellipsoïde, trois plans de symétrie rectangulaire deux à deux.

A chaque fonction de Lamé pour laquelle l'équation de stabilité admet des solutions correspond une figure de bifurcation.

Ces figures d'équilibre ne sont pas nécessairement stables.

Les courbes de la figure représentent les sections par les plans de coordonnées d'un ellipsoïde et de la figure de bifurcation voisine ; Ox , Oy , Oz sont respectivement le grand axe, l'axe moyen et le petit axe de l'ellipsoïde.

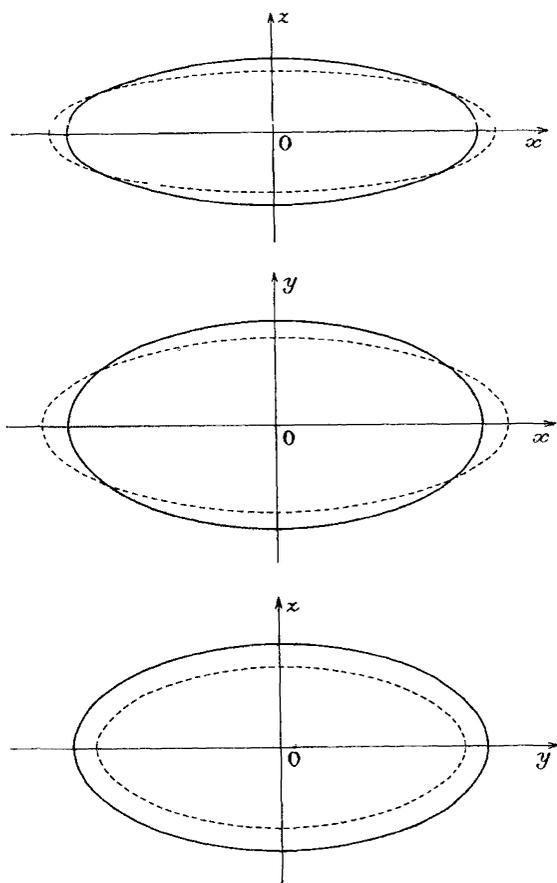


Fig. 6.

CHAPITRE III

FORMES ET MOUVEMENTS INTERNES D'UN AMAS DONT LE CENTRE DE GRAVITÉ DÉCRIT UNE TRAJECTOIRE QUELCONQUE

I. PROBLÈME. — Nous avons vu au chapitre I l'impossibilité de figures d'équilibre ellipsoïdales dans le cas où la trajectoire du centre de gravité de l'amas est quelconque.

Nous allons voir que dans ce cas l'amas peut tout de même prendre une forme ellipsoïdale, mais l'ellipsoïde limitant l'amas est variable et cette déformation (variation des axes et déplacement d'ensemble) est accompagnée de mouvements internes.

Nous avons assimilé l'amas à une masse fluide homogène dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton.

Pour définir les mouvements internes, nous avons pris pour composantes des vitesses relatives :

$$u(x, y, z, t) \quad v(x, y, z, t) \quad w(x, y, z, t)$$

les expressions suivantes, limitées aux termes du premier ordre en x, y, z :

$$u = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$v = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$w = a_3x + b_3y + c_3z.$$

Ces expressions restent linéaires en x, y, z si nous considérons la vitesse absolue au lieu de la vitesse relative.

En effet, les composantes de la vitesse absolue sont :

$$U = \frac{dx}{dt} + qz - ry = u + qz - ry$$

$$V = \frac{dy}{dt} + rx - pz = v + rx - pz$$

$$W = \frac{dz}{dt} + py - qx = w + py - qx.$$

Les quantités a, b, c sont des fonctions du temps.

Ces expressions ne permettent pas, bien entendu, de choisir des vitesses initiales arbitraires, mais nous négligeons les différences entre les vitesses provenant de termes au delà du premier ordre.

Nous commencerons par étudier en détail un cas relativement simple, celui d'un amas dont le centre de gravité décrit une *courbe A dans le plan de symétrie de la Voie Lactée* (fig. 7).

Nous supposons que les forces extérieures auxquelles est soumis l'amas dérivent de la fonction :

$$U(r) + G(z).$$

r étant la distance au centre évaluée dans le plan galactique, z la distance au plan galactique :

$$r = \overline{Om}, \quad z = \overline{mM}.$$

Enfin, nous supposons que les axes de symétrie de l'amas sont :

l'un Gx dans la direction du centre galactique ;

l'autre Gz perpendiculaire au plan galactique ;

le troisième Gy perpendiculaire aux deux premiers.

Nous commencerons par calculer le développement d'une fonction $U(r)$ en fonction des coordonnées x, y du point M (ou m) de l'amas par rapport aux axes mobiles $Gxyz$.

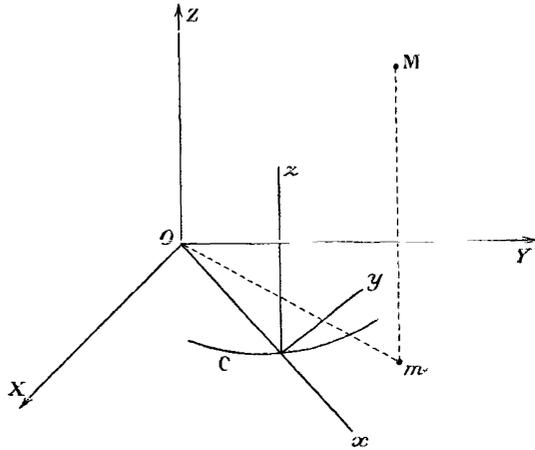


FIG. 7.

2. DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION $U(r)$ EN UN POINT DE L'AMAS. — Soient Gx, Gy des axes liés à l'amas ; M un point de l'amas ; x, y ses coordonnées par rapport à ces axes.

Soit G le centre de gravité, $\overline{OG} = \rho$.

On a :

$$\overline{OM} = r$$

et

$$r^2 = (\rho + x)^2 + y^2.$$

On en déduit :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\rho + x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

l'indice 0 désignant la valeur pour

$$x = 0, \quad y = 0 \quad (\rho = r).$$

On peut écrire :

$$U(r) = U_0 + x \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 + y \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 + \frac{x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 + xy \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)_0 + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 + \dots$$

On a de suite :

$$U_0 = U(\rho)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \text{d'où :} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0 = \frac{\partial U}{\partial \rho};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \text{d'où :} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{(\rho + x)^2}{r^2} + \frac{\partial U}{\partial r} \left[\frac{1}{r} - \frac{(\rho + x)^2}{r^3} \right];$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{y^2}{r^3} + \frac{\partial U}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right);$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \frac{(\rho + x)y}{r^2} - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{(\rho + x)y}{r^3}.$$

Développement de la fonction G(z).

Au voisinage de $z = 0$, ce développement sera :

$$G(z) = G_0 + z \left(\frac{dG}{dz}\right)_0 + \frac{z^2}{2} \left(\frac{d^2G}{dz^2}\right)_0 + \dots$$

Pour que le mouvement du centre de gravité ait lieu dans le plan galactique ($z = 0$), il faut :

$$\left(\frac{dG}{dz}\right)_0 = 0.$$

Il reste donc :

$$G(z) = G_0 + \frac{z^2}{2} \left(\frac{d^2G}{dz^2}\right)_0 + \dots$$

$\frac{d^2G}{dz^2}$ est une constante négative.

On aura donc en définitive, à une constante additive près :

$$U(r) + G(z) = U(\rho) + x \frac{dU}{d\rho} + \frac{x^2}{2} \frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{y^2}{2} \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} + \frac{z^2}{2} \frac{d^2G}{dz^2} + \dots$$

Composantes de l'accélération de M.

Les composantes de la vitesse de M sur les axes mobiles Gx , Gy sont :

$$\rho' + x' - \omega y, \quad y' + \omega(\rho + x)$$

en posant $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ supposé variable avec t .

On a :

$$2T = V^2 = (\rho' + x' - \omega y)^2 + [y' + \omega(x + \rho)]^2.$$

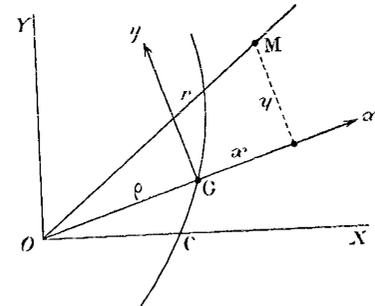


FIG. 8.

Les composantes de l'accélération sont :

$$\Gamma_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{d}{dt} (\rho' + x' - \omega y) - \omega [y' + \omega (\rho + x)],$$

$$\Gamma_y = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y'} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{d}{dt} [y' + (\rho + x)] + \omega [\rho' + x' - \omega y],$$

ou, en développant :

$$\Gamma_x = \rho'' - \omega^2 \rho + x'' - 2\omega y' - \omega' y - \omega^2 x,$$

$$\Gamma_y = 2\omega \rho' + \omega' \rho + y'' + 2\omega x' + \omega' x - \omega^2 y.$$

Enfin, on aura :

$$\Gamma_z = z''.$$

3. ÉQUATIONS DU MOUVEMENT. — En désignant par V la fonction des forces dues à l'attraction à l'intérieur de l'amas, par p la pression, μ la densité, on aura les équations :

$$\Gamma_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\Gamma_y = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\Gamma_z = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z},$$

qui s'écrivent :

$$V = -\frac{1}{2} (Ax^2 + By^2 + Cz^2)$$

$$\rho'' - \omega^2 \rho + x'' - 2\omega y' - \omega' y - \omega^2 x = x \frac{d^2 U}{d\rho^2} - Ax - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{dU}{d\rho},$$

$$2\omega \rho' + \omega' \rho + y'' + 2\omega x' + \omega' x - \omega^2 y = y \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} - By - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$z'' = z \frac{d^2 G}{dz_0^2} - Cz - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Les équations du mouvement du centre de gravité sont :

$$\rho'' - \omega^2 \rho = \frac{dU}{d\rho},$$

$$2\omega \rho' + \omega' \rho = 0.$$

Il reste donc :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x'' - 2\omega y' - \omega' y - \omega^2 x = x \frac{d^2 U}{d\rho^2} - Ax - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ y'' + 2\omega x' + \omega' x - \omega^2 y = y \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} - By - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ z'' = z \frac{d^2 G}{dz^2} - Cz - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer :

$$\begin{aligned} x' \text{ par } u & & z'' \text{ par } \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}, \\ y' \text{ par } v & & y'' \text{ par } \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Les équations (1) doivent permettre de déterminer la fonction $p(x, y, z, t)$.
Elles s'écrivent :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - 2\omega v - \omega'y - \omega^2 x &= x \frac{d^2 U}{d\rho^2} - Ax - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + 2\omega u + \omega'x - \omega^2 y &= y \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} - By - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= z \frac{d^2 G}{dz_0^2} - Cz - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

puisque le centre de gravité demeure dans le plan xOy .

Détermination des vitesses.

Écrivons :

$$u = a_1 x + b_1 y, \quad v = a_2 x + b_2 y.$$

L'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

donne de suite :

$$a_1 + b_2 = 0.$$

Par conséquent :

$$u = a_1 x + b_1 y, \quad v = a_2 x - a_1 y.$$

En substituant dans les équations (2), on obtient :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} x(a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 - 2a_2 \omega - \omega^2) + y(b'_1 + 2a_1 \omega - \omega') &= x \frac{d^2 U}{d\rho^2} - Ax - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ x(a'_2 + 2a_1 \omega + \omega') + y(-a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 + 2b_1 \omega - \omega^2) &= y \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} - By - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= z \frac{d^2 G}{dz_0^2} - Cz - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Pour que ces équations définissent une fonction p , il suffirait que :

$$b'_1 + 2a_1 \omega - \omega' = a'_2 + 2a_1 \omega + \omega';$$

mais alors la fonction p contiendrait des termes en xy et la surface libre, qui est une surface $p = C^{\text{te}}$, n'aurait plus comme axes de symétrie ceux que nous nous sommes imposés au début.

Nous devons donc supposer ici que p ne contient pas de termes en xy , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} b'_1 + 2a_1 \omega - \omega' &= 0, \\ a'_2 + 2a_1 \omega + \omega' &= 0. \end{aligned}$$

Les équations (3) se réduisent alors à :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} x(a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 - 2a_2 \omega - \omega^2) - x \frac{d^2 U}{d\rho^2} + Ax = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ y(-a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 + 2b_1 \omega - \omega^2) - y \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} + By = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ -z \frac{d^2 G}{dz_0^2} + Cz = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Nous les écrirons pour simplifier :

$$\begin{aligned} \alpha x + Ax &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \beta y + By &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \gamma z + Cz &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}$$

en posant :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \alpha = a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 - 2a_2 \omega - \omega^2 - \frac{d^2 U}{d\rho^2}, \\ \beta = -a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 + 2b_1 \omega - \omega^2 - \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho}, \\ \gamma = -\frac{d^2 G}{dz_0^2}. \end{array} \right.$$

4. DÉTERMINATION DE LA SURFACE. — Les surfaces d'égalité de pression seront définies par :

$$-\frac{p}{\mu} + C^{\text{te}} = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2) + \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2).$$

La surface libre ($p = C^{\text{te}}$) doit pouvoir être identifiée avec celle de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

A, B, C sont des fonctions des rapports des axes de cet ellipsoïde ; on aura donc les relations :

$$(A + \alpha)a^2 = (B + \beta)b^2 = (C + \gamma)c^2.$$

α , β , γ sont en général des quantités variables ; ici exceptionnellement $\gamma = C^{\text{te}}$.

Dans ces relations figurent seulement les rapports des axes ; les axes eux-mêmes se déduiront de la relation :

$$abc = K,$$

K étant une constante donnée.

Comparaison avec le mouvement circulaire. — Nous pouvons comparer ces équations avec celles qui ont été obtenues dans le cas où le centre de gravité décrit une circonférence d'un mouvement uniforme.

Les équations du mouvement d'un point quelconque M étaient :

$$\begin{aligned}x'' - 2\omega y' - \omega^2 x &= x \frac{d^2 U}{d\rho^2} - Ax - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\y'' + 2\omega x' - \omega^2 y &= y \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} - By - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\z'' &= z \frac{d^2 G}{dz_0^2} - Cz - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}$$

Pour une figure d'équilibre relatif, ces équations étaient compatibles pour :

$$x' = y' = z' = 0.$$

D'autre part, le mouvement étant circulaire uniforme :

$$\omega^2 = - \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} = \text{Cte.}$$

Finalement, ces équations se réduisaient à :

$$\begin{aligned}0 &= x \left(\frac{d^2 U}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} \right) - Ax - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\0 &= \phantom{x \left(\frac{d^2 U}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} \right)} - By - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\0 &= z \frac{d^2 G}{dz^2} - Cz - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}$$

Les quantités α , β , γ avaient donc les valeurs particulières constantes :

$$\alpha = - \frac{d^2 U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = - \frac{d^2 G}{dz_0^2}.$$

5. CONDITIONS AUX LIMITES. — Il faut écrire maintenant que la pression reste constante à la surface libre au cours du mouvement.

Soit

$$f(x, y, z, t) = 0$$

l'équation de cette surface libre.

On aura :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

ou encore :

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

compte tenu de l'équation de la surface libre. Celle-ci étant un ellipsoïde, nous écrivons son équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

La condition imposée s'écrit :

$$u \frac{x}{a^2} + v \frac{y}{b^2} - x^2 \frac{a'}{a^3} - y^2 \frac{b'}{b^3} - z^2 \frac{c'}{c^3} + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) = 0.$$

On en déduit de suite $\lambda = 0$ et $c' = 0$, d'où $c = \text{C}^{\text{te}}$.

Il reste, en substituant u et v :

$$(a_1x + b_1y) \frac{x}{a^2} + (a_2x - a_1y) \frac{y}{b^2} - \frac{x^2 a'}{a^3} - y^2 \frac{b'}{b^3} = 0,$$

d'où finalement les trois conditions :

$$a_1 - \frac{a'}{a} = 0, \quad -a_1 - \frac{b'}{b} = 0, \quad \frac{b_1}{a^2} + \frac{a_2}{b^2} = 0.$$

On a trouvé précédemment :

$$\begin{aligned} b'_1 + 2a_1\omega - \omega' &= 0, \\ a'_2 + 2a_1\omega + \omega' &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit facilement $ab = \text{C}^{\text{te}}$, qui traduit l'équation de continuité.

6. CAS PARTICULIER D'UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION. — On peut traiter facilement le cas particulier $a = b$ (ellipsoïde de révolution).

On a successivement :

$$b_1 + a_2 = 0, \quad a_1 = 0,$$

d'où :

$$a = b = \text{C}^{\text{te}}.$$

Il reste :

$$b'_1 - \omega' = 0, \quad a'_2 + \omega' = 0,$$

d'où :

$$b_1 = \omega + \omega_0, \quad a_2 = -(\omega + \omega_0),$$

ω_0 étant une constante.

Les équations (4) se réduisent à :

$$\begin{aligned} x[2\omega(\omega + \omega_0) - (\omega + \omega_0)^2 - \omega^2] - x \frac{d^2U}{d\rho^2} + Ax &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ y[2\omega(\omega + \omega_0) - (\omega + \omega_0)^2 - \omega^2] - y \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} + By &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ -z \frac{d^2G}{dz_0^2} + Cz &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}$$

ou, en simplifiant :

$$\begin{aligned} -\omega_0^2 x - x \frac{d^2U}{d\rho^2} + Ax &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ -\omega_0^2 y - \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} + Ay &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ -z \frac{d^2G}{dz_0^2} + Cz &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}$$

puisque $A = B$.

En exceptant le cas du mouvement circulaire ($\rho = C^{te}$), ces conditions sont incompatibles avec le fait que les axes de l'ellipsoïde doivent rester constants, puisque

$$\frac{d^2U}{d\rho^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho}$$

sont en général fonctions du temps ; il y a exception dans le cas

$$U = \frac{K\rho^2}{2},$$

alors :

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} = K.$$

On obtient, pour déterminer le rapport des axes, l'équation :

$$(A + \alpha)a^2 = (C + \gamma)c^2,$$

avec

$$\alpha = -\omega_0^2 - K.$$

Puisqu'il s'agit d'une attraction, K est négatif et ω_0 est une constante arbitraire.

Ainsi le centre de gravité de l'amas décrit une ellipse et cet amas tourne lui-même avec une vitesse qui peut être quelconque ; le rapport des axes dépend de α et γ .

L'expression $U = \frac{K\rho^2}{2}$ suppose que la Voie Lactée est assimilée à un ellipsoïde homogène de révolution aplati.

Avec notre système d'unités (voir chapitre I) :

$$K = -0,942 \cdot 10^{-15}, \quad \gamma = 5,65 \cdot 10^{-15}, \quad f = 4,499 \cdot 10^{-15}.$$

La condition demandée (en supposant d'abord $\omega_0 = 0$) s'écrit en posant

$$c/a = \cos \varphi :$$

$$\pi f \rho \beta'_1 + \alpha = \cos^2 \varphi (\pi f \beta'_3 + \gamma),$$

ou :

$$\beta'_1 + \frac{\alpha}{\pi f \rho} = \cos^2 \varphi \left(\beta'_3 + \frac{\gamma}{\pi f \rho} \right),$$

ou :

$$\frac{1}{\pi f \rho} (\alpha - \gamma \cos^2 \varphi) = \beta'_3 \cos^2 \varphi - \beta'_1,$$

avec

$$\beta'_1 = \frac{2 \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi),$$

$$\beta'_3 = \frac{4 \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} (\operatorname{tg} \varphi - \varphi).$$

Remarque. — La valeur de K (expérimentale) pour la Voie Lactée serait donnée par une formule théorique analogue :

$$-K = \pi f \delta B'_1,$$

ce qui, en admettant $\delta = 0,1$, donne :

$$B'_1 = \frac{2 \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) = 0,67.$$

Le calcul de φ donne une idée de l'aplatissement.

7. CAS D'UN ELLIPSOÏDE QUELCONQUE. — On a dans ce cas les équations :

$$\begin{aligned} b'_1 + 2a_1\omega - \omega' &= 0, & a'_2 + 2a_1\omega + \omega' &= 0, \\ \frac{b_1}{a^2} + \frac{a_2}{b^2} &= 0, & a_1 - \frac{a'}{a} &= 0, & -a_1 - \frac{b'}{b} &= 0. \end{aligned}$$

Puisque :

$$ab = S,$$

on peut supprimer la dernière équation et écrire dans la troisième :

$$b^2 = \frac{S^2}{a^2}.$$

Elle devient alors :

$$b_1 S^2 + a_2 a^4 = 0.$$

En posant :

$$\int a_1 \omega dt = F, \quad \text{d'où} \quad a_1 = \frac{F'}{\omega},$$

on aura :

$$\begin{aligned} b_1 &= -2F + \omega + b_0, \\ a_2 &= -2F - \omega + a_0, \end{aligned}$$

b_0 et c_0 étant des constantes.

D'autre part :

$$a^4 = -\frac{b_1 S^2}{a_2} = S^2 \frac{\omega + b_0 - 2F}{\omega - c_0 + 2F}$$

et :

$$\frac{a'}{a} = a_1 = \frac{F'}{\omega}.$$

On peut en déduire une relation différentielle entre F et ω .

Cette relation étant supposée vérifiée, on peut calculer a_1 , a_2 , b_1 , a et b .

On en déduit les quantités α , β par les formules (5).

En général, il sera donc impossible de vérifier les relations :

$$(A + \alpha)a^2 = (B + \beta)b^2 = (C + \gamma)c^2,$$

la fonction F restant seule à déterminer.

Il n'existe donc pas de figure ellipsoïdale à axes variables lorsque le centre de gravité décrit une courbe plane, l'un des axes étant assujéti à passer par le centre galactique,

8. ÉTUDE DU CAS GÉNÉRAL : LA TRAJECTOIRE DU CENTRE DE GRAVITÉ DE L'AMAS EST QUELCONQUE.

Soient :

OXYZ un système d'axes fixes,

Oxyz un système d'axes mobiles,

Γ la trajectoire du centre de gravité (fig. 9).

Soient :

p, q, r les projections sur les axes mobiles de la rotation instantanée du trièdre Cxyz;

λ, μ, ν les composantes de la vitesse du centre de gravité C, sur les axes Cxyz ;

X, Y, Z les coordonnées d'un point quelconque M de l'amas par rapport aux axes fixes ;

x, y, z les coordonnées du même point par rapport aux axes mobiles ;

X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées du centre de gravité C par rapport aux axes fixes.

Soit enfin $CX_1Y_1Z_1$ un système d'axes qui se déduit de OXYZ par translation, et soient X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées de M par rapport à ces derniers axes.

Les composantes de l'accélération sur Cxyz, trouvées précédemment, sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= \lambda' + q\nu - r\mu + x'' + 2(qz' - ry') + q'z - r'y - x(p^2 + q^2 + r^2) + p(px + qy + rz), \\ \Gamma_y &= \mu' + r\lambda - p\nu + y'' + 2(rx' - pz') + r'x - p'z - y(p^2 + q^2 + r^2) + q(px + qy + rz), \\ \Gamma_z &= \nu' + p\mu - q\lambda + z'' + 2(py' - qx') + p'y - q'x - z(p^2 + q^2 + r^2) + r(px + qy + rz). \end{aligned}$$

Soit $U(X, Y, Z)$ le champ de gravitation extérieur.

On aura :

$$X = X_0 + X_1, \quad Y = Y_0 + Y_1, \quad Z = Z_0 + Z_1,$$

avec :

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ Y_1 &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ Z_1 &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Dans ces formules, les α, β, γ ont la signification habituelle.

X_1, Y_1, Z_1 sont des quantités petites par rapport à X_0, Y_0, Z_0 .

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} U(X, Y, Z) &= U(X_0, Y_0, Z_0) + X_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + Y_1 \frac{\partial U}{\partial Y_0} + Z_1 \frac{\partial U}{\partial Z_0} + \frac{X_1^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \frac{Y_1^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + \frac{Z_1^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial Z_0^2} \\ &\quad + Y_1 Z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0 \partial Z_0} + X_1 Z_1 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Z_0} + X_1 Y_1 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0} + \dots \end{aligned}$$

En remplaçant X_1, Y_1, Z_1 par leurs valeurs, il vient (α, β, γ sont des fonctions du temps) :

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U(X_0, Y_0, Z_0) + x \left(\alpha_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial Y_0} + \alpha_3 \frac{\partial U}{\partial Z_0} \right) \\ &\quad + y \left(\beta_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \beta_2 \frac{\partial U}{\partial Y_0} + \beta_3 \frac{\partial U}{\partial Z_0} \right) \\ &\quad + z \left(\gamma_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial Y_0} + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial Z_0} \right) \end{aligned}$$

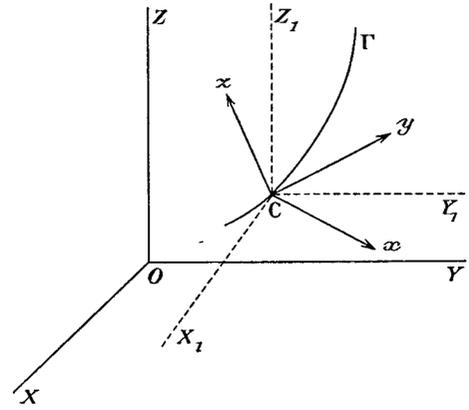


FIG. 9.

$$\begin{aligned}
& + \frac{x^2}{2} \left[\alpha_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + \alpha_3^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Z_0^2} + 2\alpha_1\alpha_2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0} + 2\alpha_2\alpha_3 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0 \partial Z_0} + 2\alpha_1\alpha_3 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Z_0} \right] \\
& + \frac{y^2}{2} \left[\beta_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \beta_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + \beta_3^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Z_0^2} + 2\beta_1\beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0} + 2\beta_2\beta_3 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0 \partial Z_0} + 2\beta_1\beta_3 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Z_0} \right] \\
& + \frac{z^2}{2} \left[\gamma_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \gamma_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + \gamma_3^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Z_0^2} + 2\gamma_1\gamma_2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0} + 2\gamma_2\gamma_3 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0 \partial Z_0} + 2\gamma_1\gamma_3 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Z_0} \right] \\
& + xy \left[\alpha_1\beta_1 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \alpha_2\beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + \alpha_3\beta_3 \frac{\partial^2 U}{\partial Z_0^2} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0} + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Z_0} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0 \partial Z_0} \right] \\
& + yz \left[\beta_1\gamma_1 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \beta_2\gamma_2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + \beta_3\gamma_3 \frac{\partial^2 U}{\partial Z_0^2} + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0} + (\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1) \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Z_0} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + (\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0 \partial Z_0} \right] \\
& + zx \left[\alpha_1\gamma_1 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \alpha_2\gamma_2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + \alpha_3\gamma_3 \frac{\partial^2 U}{\partial Z_0^2} + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0} + (\alpha_1\gamma_3 + \alpha_3\gamma_1) \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Z_0} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + (\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0 \partial Z_0} \right] \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Le potentiel intérieur de gravitation de l'amas, supposé de forme ellipsoïdale, sera :

$$V = -\frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2).$$

Les composantes de la force s'exerçant sur chaque étoile de l'amas seront :

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}, \\
F_y &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}, \\
F_z &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Les équations du mouvement d'une étoile quelconque seront :

$$\begin{aligned}
\Gamma_x &= \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial Y_0} + \alpha_3 \frac{\partial U}{\partial Z_0} + xP_1 + yQ_3 + zQ_2 + \frac{\partial V}{\partial x}, \\
\Gamma_y &= \beta_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \beta_2 \frac{\partial U}{\partial Y_0} + \beta_3 \frac{\partial U}{\partial Z_0} + yP_2 + xQ_3 + zQ_1 + \frac{\partial V}{\partial y}, \\
\Gamma_z &= \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial Y_0} + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial Z_0} + zP_3 + yQ_1 + xQ_2 + \frac{\partial V}{\partial z},
\end{aligned}$$

en désignant par $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ les coefficients de la forme quadratique faisant partie de $U(x, y, z)$.

En particulier les équations du mouvement du centre de gravité ($x = y = z = 0$) sont :

$$\begin{aligned}\lambda' + q\nu - r\mu &= \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial Y_0} + \alpha_3 \frac{\partial U}{\partial Z_0}, \\ \mu' + r\lambda - p\nu &= \beta_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \beta_2 \frac{\partial U}{\partial Y_0} + \beta_3 \frac{\partial U}{\partial Z_0}, \\ \nu' + p\mu - q\lambda &= \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial Y_0} + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial Z_0}.\end{aligned}$$

En tenant compte de ces dernières équations, les équations du mouvement d'une étoile quelconque se réduisent à :

$$(E) \left\{ \begin{aligned} x'' + 2(qz' - ry') + q'z - r'y - x(p^2 + q^2 + r^2) + p(px + qy + rz) \\ \quad \quad \quad = xP_1 + yQ_3 + zQ_2 - Ax, \\ y'' + 2(rx' - pz') + r'x - p'z - y(p^2 + q^2 + r^2) + q(px + qy + rz) \\ \quad \quad \quad = xQ_3 + yP_2 + zQ_1 - By, \\ z'' + 2(py' - qx') + p'y - q'x - z(p^2 + q^2 + r^2) + r(px + qy + rz) \\ \quad \quad \quad = xQ_2 + yQ_1 + zP_3 - Cz. \end{aligned} \right.$$

Si nous assimilons l'amas à une masse fluide dont les particules s'attirent suivant la loi de la gravitation (l'ensemble de ces forces correspond au potentiel interne de l'amas), il suffira d'ajouter aux seconds membres les forces de pression, c'est-à-dire :

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varpi}{\partial x}, \quad -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \quad -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varpi}{\partial z}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que ces trois équations déterminent une fonction $\varpi(x, y, z)$. De plus, les axes Cx, Cy, Cz doivent être les axes de symétrie de la masse fluide et la surface libre doit être une surface $\varpi = C^{te}$.

En conséquence, ϖ doit être de la forme :

$$\varpi(x, y, z) = Lx^2 + My^2 + Nz^2 + K,$$

L, M, N, K pouvant être des fonctions du temps seulement.

Nous supposons, comme dans le cas particulier précédemment étudié :

$$\begin{aligned}x' &= u = a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' &= v = a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' &= w = a_3x + b_3y + c_3z.\end{aligned}$$

Les équations (E) doivent donc contenir respectivement seulement des termes en x , en y ou en z .

On a :

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ y'' &= \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ z'' &= \frac{dz'}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} x'' &= a'_1x + b'_1y + c'_1z + (a_1x + b_1y + c_1z)a_1 \\ &+ (a_2x + b_2y + c_2z)b_1 + (a_3x + b_3y + c_3z)c \\ &= x(a'_1 + a_1^2 + a_2b_1 + a_3c_1) \\ &+ y(b'_1 + a_1b_1 + b_1b_2 + b_3c_1) \\ &+ z(c'_1 + a_1c_1 + b_1b_2 + c_3c_1). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} y'' &= a'_2x + b'_2y + c'_2z + (a_1x + b_1y + c_1z)a_1 + (a_2x + b_2y + c_2z)b_2 + (a_3x + b_3y + c_3z)c_2 \\ &= x(a'_2 + a_1a_2 + a_2b_2 + a_3c_2) \\ &+ y(b'_2 + a_2b_1 + b_2^2 + b_3c_2) \\ &+ z(c'_2 + a_2c_1 + b_2c_2 + c_3c_2) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} z'' &= a'_3x + b'_3y + c'_3z + (a_1x + b_1y + c_1z)a_3 + (a_2x + b_2y + c_2z)b_3 + (a_3x + b_3y + c_3z)c_3 \\ &= x(a'_3 + a_1a_3 + a_2b_3 + a_3c_3) \\ &+ y(b'_3 + a_3b_1 + b_2b_3 + b_3c_3) \\ &+ z(c'_3 + a_3c_1 + b_3c_2 + c_3^2). \end{aligned}$$

9. On aura donc les six conditions suivantes, obtenues en annulant dans :
la première équation (E) les termes en y et z ,
la deuxième équation (E) les termes en x et z ,
la troisième équation (E) les termes en x et y .

$$(E_1) \left\{ \begin{aligned} b'_1 + a_1b_1 + b_1b_2 + b_3c_1 + 2(qb_3 - rb_2) - r' + pq &= Q_3 \\ c'_1 + a_1c_1 + b_1c_2 + c_3c_1 + 2(qc_3 - rc_2) + q' + pr &= Q_2 \\ a'^2 + a_1a_2 + a_2b_2 + a_3c_2 + 2(ra_1 - pa_3) + r' + pq &= Q_3 \\ c'_2 + a_2c_1 + b_2c_2 + c_3c_2 + 2(rc_1 - pc_3) - p' + qr &= Q_1 \\ a'_3 + a_1a_3 + a_2b_3 + a_3c_3 + 2(pa_2 - qa_1) - q' + pr &= Q_2 \\ b'_3 + a_3b_1 + b_2b_3 + b_3c_3 + 2(pb_2 - qb_1) + p' + qr &= Q_1. \end{aligned} \right.$$

Il faut y ajouter la condition exprimée par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

ou :

$$a_1 + b_2 + c_3 = 0.$$

Si ces conditions sont réalisées, les équations du mouvement se réduisent à :

$$\begin{aligned} x(a'_1 + a_1^2 + a_2b_1 + a_3c_1) + 2(qa_3 - ra_2)x - x(q^2 + r^2) &= xP_1 - Ax - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ y(b'_2 + a_2b_1 + b_2^2 + b_3c_2) + 2(rb_1 - pb_3)y - y(p^2 + r^2) &= yP_2 - By - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ z(c'_3 + a_3c_1 + b_3c_2 + c_3^2) + 2(pc_2 - qc_1)z - z(p^2 + q^2) &= zP_3 - Cz - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial z}. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire ces équations :

$$\begin{aligned} \alpha x + Ax &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ \beta y + By &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ \gamma z + Cz &= -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \end{aligned}$$

en posant pour simplifier :

$$\begin{aligned} \alpha &= a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 + a_3 c_1 + 2(qa_3 - ra_2) - (q^2 + r^2) - P_1, \\ \beta &= b'_2 + a_2 b_1 + b_2^2 + b_3 c_2 + 2(rb_1 - pb_3) - (p^2 + r^2) - P_2, \\ \gamma &= c'_3 + a_3 c_1 + b_3 c_2 + c_3^2 + 2(pc_2 - qc_1) - (p^2 + q^2) - P_3. \end{aligned}$$

On en déduira :

$$-\sigma + C^te = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) + \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2).$$

10. DÉTERMINATION DE LA SURFACE. — Pour que la surface libre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

puisse être identifiée à une surface à pression constante, il faudra vérifier les relations :

$$(A + \alpha)a^2 = (B + \beta)b^2 = (C + \gamma)c^2.$$

Ce sont bien les relations déjà trouvées ; seules diffèrent les expressions de α , β , γ . Nous devons y ajouter les relations entre

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \quad \text{et} \quad p, q, r.$$

11. CONDITIONS AUX LIMITES. — Il faut écrire maintenant que la pression reste constante à la surface libre au cours du mouvement.

Soit

$$f(x, y, z, t) = 0$$

l'équation de cette surface libre.

On a comme précédemment :

$$u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

compte tenu de l'équation de la surface libre.

Nous pouvons écrire ici l'équation de cet ellipsoïde ;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

La condition imposée s'écrit :

$$u \frac{x}{a^2} + v \frac{y}{b^2} + w \frac{z}{c^2} - x^2 \frac{a'}{a^3} - y^2 \frac{b'}{b^3} - z^2 \frac{c'}{c^3} = 0.$$

Cette relation doit être identiquement vérifiée à un terme :

$$\lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \quad \text{près.}$$

On voit de suite que $\lambda = 0$.

La condition imposée s'écrit donc :

$$(a_1x + b_1y + c_1z) \frac{x}{a^2} + (a_2x + b_2y + c_2z) \frac{y}{b^2} + (a_3x + b_3y + c_3z) \frac{z}{c^2} - x^2 \frac{a'}{a^3} - y^2 \frac{b'}{b^3} - z^2 \frac{c'}{c^3} = 0,$$

ce qui donne les six conditions :

$$(E_2) \left\{ \begin{array}{lll} a_1 - \frac{a'}{a} = 0, & b_2 - \frac{b'}{b} = 0, & c_3 - \frac{c'}{c} = 0, \\ \frac{b_1}{a^2} + \frac{a_2}{b^2} = 0, & \frac{c_2}{b^2} + \frac{b_3}{c^2} = 0, & \frac{c_1}{a^2} + \frac{a_3}{c^2} = 0. \end{array} \right.$$

Des trois premières, on peut déduire en tenant compte de l'équation de continuité :

$$a_1 + b_2 + c_3 = 0.$$

12. CONCLUSION. — On obtient pour résoudre le problème l'ensemble des quinze équations vérifiées par les quinze inconnues :

$$\begin{array}{l} \begin{array}{ccccc} a_1, b_1, c_1 & a_2, b_2, c_2 & a_3, b_3, c_3 & a, b, c & p, q, r \end{array} \\ (1) \text{ bis } \left\{ \begin{array}{l} b'_1 + a_1b_1 + b_1b_2 + b_3c_1 + 2(qb_3 - rb_2) - r' + pq = Q_3, \\ c'_1 + a_1c_1 + b_1c_2 + c_3c_1 + 2(qc_3 - rc_2) + q' + pr = Q_2, \\ a'_2 + a_1a_2 + a_2b_2 + a_3c_2 + 2(ra_1 - pa_3) + r' + pq = Q_3, \\ c'_2 + a_2c_1 + b_2c_2 + c_3c_2 + 2(rc_1 - pc_3) - p' + qr = Q_1, \\ a'_3 + a_1a_3 + a_2b_3 + a_3c_3 + 2(pa_2 - qa_1) - q' + pr = Q_2, \\ b'_3 + a_3b_1 + b_2b_3 + b_3c_3 + 2(pb_2 - qb_1) + p' + qr = Q_1; \end{array} \right. \\ (2) \text{ bis } \quad a_1 + b_2 + c_3 = 0 \quad (\text{ou } abc = C^{\text{te}}); \\ (4) \text{ bis } \left\{ \begin{array}{lll} a_1 - \frac{a'}{a} = 0 & b_2 - \frac{b'}{b} = 0 & c_3 - \frac{c'}{c} = 0, \\ \frac{b_1}{a^2} + \frac{a_2}{b^2} = 0 & \frac{c_2}{b^2} + \frac{b_3}{c^2} = 0 & \frac{c_1}{a^2} + \frac{a_3}{c^2} = 0; \end{array} \right. \\ (3) \text{ bis } \quad (A + \alpha)a^2 = (B + \beta)b^2 = (C + \gamma)c^2; \end{array}$$

avec :

$$\begin{array}{l} \alpha = a'_1 + a_1^2 + a_2b_1 + a_3c_1 + 2(pa_3 - ra_2) - (q^2 + r^2) - P_1, \\ \beta = b'_2 + a_2b_1 + b_2^2 + b_3c_2 + 2(rb_1 - pb_3) - (p^2 + r^2) - P_2, \\ \gamma = c'_3 + a_3c_1 + b_3c_2 + c_3^2 + 2(pc_3 - qc_1) - (p^2 + q^2) = P_3. \end{array}$$

Remarque. — On peut mettre les équations sous une forme légèrement différente en introduisant les quantités

$$\begin{aligned} B_1 &= b_1 - r, & C_1 &= c_1 + q, & A_2 &= a_2 + r, \\ C_2 &= c_2 - p, & A_3 &= a_3 - q, & B_3 &= b_3 + p; \end{aligned}$$

ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned} b_1 &= B_1 + r, & c_1 &= C_1 - q, \\ a_2 &= A_2 - r, & c_2 &= C_2 + p, \\ a_3 &= A_3 + q, & b_3 &= B_3 - p; \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} u &= a_1x + b_1y + c_1z = a_1x + B_1y + C_1z + ry - qz, \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z = A_2x + b_2y + C_2z + pz - rx, \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z = A_3x + B_3y + c_3z + qx - py. \end{aligned}$$

Les quantités :

$$\begin{aligned} U &= a_1x + B_1y + C_1z = u + qz - ry = \frac{dx}{dt} + qz - ry \\ V &= A_2x + b_2y + C_2z = v + rx - pz = \frac{dy}{dt} + rx - pz \\ W &= A_3x + B_3y + c_3z = w + py - qx = \frac{dz}{dt} + py - qx \end{aligned}$$

sont les composantes de la *vitesse absolue* de M sur les axes mobiles.

Les équations (1) s'écrivent alors en changeant leur ordre pour des raisons de symétrie :

$$(1) \text{ ter } \left\{ \begin{aligned} B'_2 + A_3B_1 + rA_3 - qB_1 - B_3a_1 - p(c_3 - b_2) &= Q_1, \\ C'_1 + B_1C_2 + pB_1 - rC_2 - C_1b_2 - q(a_1 - c_3) &= Q_2, \\ A'_2 + C_2A_3 + qC_2 - pA_3 - A_2c_3 - r(b_2 - a_1) &= Q_3, \\ C'_2 + C_1A_2 + rC_1 - qA_2 - C_2a_1 - p(c_3 - b_2) &= Q_1, \\ A'_3 + A_2B_3 + pA_2 - rB_3 - A_3b_2 - q(a_1 - c_3) &= Q_2, \\ B'_1 + B_3C_1 + qB_3 - pC_1 - B_1c_3 - r(b_2 - a_1) &= Q_3; \end{aligned} \right.$$

$$(2) \text{ ter } \quad a_1 + b_2 + c_3 = 0;$$

$$a_1 - \frac{a'}{a} = 0, \quad b_2 - \frac{b'}{b} = 0, \quad c_3 - \frac{c'}{c} = 0;$$

$$(4) \text{ ter } \quad \begin{aligned} (b^2 - c^2)p &= b^2B_3 + c^2C_2, \\ (c^2 - a^2)q &= c^2C_1 + a^2A_3, \\ (a^2 - b^2)r &= a^2A_2 + b^2B_1; \end{aligned}$$

$$(3) \text{ ter } \quad (A + \alpha)a^2 = (B + \beta)b^2 = (C + \gamma)c^2;$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= a'_1 + a_1^2 + A_3C_1 + A_2B_1 + q(A_3 + C_1) - r(A_2 + B_1) - P_1, \\ \beta &= b'_2 + b_2^2 + B_1A_2 + B_3C_2 + r(B_1 + A_2) - p(B_3 + C_2) - P_2, \\ \gamma &= c'_3 + c_3^2 + C_2B_3 + C_1A_3 + p(C_2 + B_3) - q(C_1 + A_3) - P_3. \end{aligned}$$

13. ÉTUDE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DE CONDITION. — Dans les équations précédentes, effectuons le changement de variables :

$$\begin{aligned}x_1 &= 2b^2B_3 - p(b^2 - c^2) = b^2B_3 - c^2C_2, \\x_2 &= 2c^2C_1 - q(c^2 - a^2) = c^2C_1 - a^2A_3, \\x_3 &= 2a^2A_2 - r(a^2 - b^2) = a^2A_2 - b^2B_1.\end{aligned}$$

Nous obtenons par combinaison les équations :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= rx_2 - qx_3 + Q_1(b^2 - c^2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= px_2 - rx_2 + Q_2(c^2 - a^2), \\ \frac{dx_3}{dt} &= qx_1 - px_2 + Q_3(a^2 - b^2); \\ 2a^2 \frac{d}{dt} [p(b^2 - c^2)] &= 2a^2[x_1 - p(b^2 + c^2)](b_2 - c_3) \\ - x_2x_3 + q(c^2 - a^2)x_3 - r(a^2 - b^2)x_2 + \mu_1qr + 2a^2Q_1(b^2 + c^2), \\ 2b^2 \frac{d}{dt} [q(c^2 - a^2)] &= 2b^2[\dots], \\ 2c^2 \frac{d}{dt} [r(a^2 - b^2)] &= 2c^2[\dots]\end{aligned}$$

Nous pouvons remplacer les relations :

$$(A + \alpha)a^2 = (B + \beta)b^2 = (C + \gamma)c^2$$

par :

$$A + \alpha = \frac{\lambda}{a^2}, \quad B + \beta = \frac{\lambda}{b^2}, \quad C + \gamma = \frac{\lambda}{c^2},$$

λ étant pour le moment une fonction arbitraire ; ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}& c^2(a^2 - b^2) (3b^2 + a^2)r^2 - b^2(c^2 - a^2) (a^2 + 3c^2)q^2 \\ & + 2b^2(c^2 - a^2)qx_2 - 2c^2(a^2 - b^2)rx_3 + b^2x_2^2 + c^2x_3^2 \\ & - 4a^2b^2c^2(a_1^2 + a_1' - \frac{\lambda}{a^2} + A - P_1) = 0, \\ & a^2(b^2 - c^2) (3c^2 + b^2)p^2 - \dots, \\ & b^2(c^2 - a^2) (3a^2 + c^2)q^2 - \dots\end{aligned}$$

On permute circulairement et on passe de a_1 à b_2 et à c_3 en posant :

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 3a^4 - \omega, & \mu_2 &= 3b^4 - \omega, & \mu_3 &= 3c^4 - \omega, \\ \omega &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.\end{aligned}$$

Les équations :

$$\begin{aligned}a_1 + b_2 + c_3 &= 0, \\ a_1 - \frac{a'}{a} &= 0, & b_2 - \frac{b'}{b} &= 0, & c_3 - \frac{c'}{c} &= 0,\end{aligned}$$

demeurent inchangées.

Les expressions $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ sont des fonctions du temps par l'intermédiaire des coordonnées du centre de gravité et des paramètres directeurs

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i.$$

Ceux-ci sont liés à p, q, r par les relations classiques :

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = r\alpha_2 - q\alpha_3, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = r\beta_2 - q\beta_3, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3.$$

Autre forme des équations de conditions.

Considérons maintenant le système des six variables : x_1, x_2, x_3 (variables précédentes) et y_1, y_2, y_3 définies par :

$$\begin{aligned} x_1 &= b^2B_3 - c^2C_2, & y_1 &= bc(C_2 - B_3), \\ x_2 &= c^2C_1 - a^2A_3, & y_2 &= ca(A_3 - C_1), \\ x_3 &= a^2A_2 - b^2B_1, & y_3 &= ab(B_1 - A_2). \end{aligned}$$

Ce choix permet d'éliminer p, q, r (sauf par l'intermédiaire de $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$) ; il vient

$$\begin{aligned} x'_1 &= \sigma_3 y_3 x_2 - \sigma_2 y_2 x_3 + \theta_1 x_2 x_3 + Q_1(b^2 - c^2), \\ x'_2 &= \sigma_1 y_1 x_3 - \sigma_2 y_2 x_1 + \theta_2 x_3 x_1 + Q_2(c^2 - a^2), \\ x'_3 &= \sigma_2 y_2 x_1 - \sigma_1 y_1 x_2 + \theta_3 x_1 x_2 + Q_3(a^2 - b^2); \\ y'_1 &= \sigma_3 x_3 y_2 - \sigma_2 x_2 y_3 + \theta_1 y_2 y_3, \\ y'_2 &= \sigma_1 x_1 y_3 - \sigma_3 x_3 y_1 + \theta_2 y_3 y_1, \\ y'_3 &= \sigma_2 x_2 y_1 - \sigma_1 x_1 y_2 + \theta_3 y_1 y_2, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2bc}{(b^2 - c^2)^2}, & \sigma_2 &= \frac{2ca}{(c^2 - a^2)^2}, & \sigma_3 &= \frac{2ab}{(a^2 - b^2)^2}, \\ \theta_1 &= \frac{(b^2 - c^2)(3a^4 - \omega)}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)^2}, & \theta_2 &= \frac{(c^2 - a^2)(3b^4 - \omega)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)^2}, \\ \theta_3 &= \frac{(a^2 - b^2)(3c^4 - \omega)}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)^2}, & \omega &= b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2. \end{aligned}$$

Les trois autres équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} &a \frac{3b^2 + a^2}{(a^2 - b^2)^3} (x_3 + y_3)^2 - a \frac{3c^2 + a^2}{(c^2 - a^2)^3} (x_2 + y_2)^2 \\ &- \frac{2x_3 y_3}{(a + b)^3} - \frac{2x_2 y_2}{(a + c)^3} - a'' + \frac{\lambda}{a} + a(P_1 - A) = 0, \\ &b \frac{3c^2 + b^2}{(b^2 - c^2)^3} (x_1 + y_1)^2 - b \dots, \\ &c \dots \end{aligned}$$

La présence des termes $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ ne permet pas de tirer des relations simples de ce système d'équations. Aussi commencerons-nous par étudier divers cas particuliers.

14. ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER. — Considérons le cas où le mouvement du centre de gravité s'effectue dans le plan des xy .

Supposons d'abord la rotation de l'amas perpendiculaire au plan des xy ; l'un des axes de symétrie n'est plus assujéti à passer par le point 0.

On a les formules de transformation :

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha_1 x + \beta_1 y = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ Y_1 &= \alpha_2 x + \beta_2 y = -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ Z_1 &= z. \end{aligned}$$

De plus

$$p = q = 0 \quad \text{et} \quad v = 0.$$

Les composantes de l'accélération sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= \lambda' - r\mu + x'' - 2ry' - r'y - r^2x, \\ \Gamma_y &= \mu' + r\lambda + y'' + 2rx' + r'x - r^2y, \\ \Gamma_z &= z''. \end{aligned}$$

La fonction de forces s'écrit (ici $Z_0 = 0$) :

$$\begin{aligned} U(X, Y, Z) &= U(X_0, Y_0, Z_0) + x \left(\alpha_1 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \beta_1 \frac{\partial U}{\partial Y_0} \right) + y \left(\alpha_2 \frac{\partial U}{\partial X_0} + \beta_2 \frac{\partial U}{\partial Y_0} \right) + z \frac{\partial U}{\partial Z_0} \\ &+ \frac{x^2}{2} \left[\alpha_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + 2\alpha_1\alpha_2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0} \right] \\ &+ \frac{y^2}{2} \left[\beta_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \beta_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + 2\beta_1\beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0} \right] + \frac{z^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial Z_0^2} \\ &+ xy \left[\alpha_1\beta_1 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \alpha_2\beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0} \right] \\ &+ yz \left[\beta_1 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Z_0} + \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0 \partial Z_0} \right] + zx \left[\alpha_1 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Z_0} + \alpha_2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0 \partial Z_0} \right] + \dots \end{aligned}$$

Supposons pour le moment :

$$\begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y, \\ v &= a_2 x + b_2 y, \\ w &= 0. \end{aligned}$$

L'équation de continuité donne :

$$a_1 + b_2 = 0.$$

Les conditions de possibilité se réduisent à deux :

$$(E_1) \quad \begin{aligned} b'_1 + a_1 b_1 + b_1 b_2 - 2r b_2 - r' &= Q_3, \\ a'_2 + a_1 a_2 + a_2 b_2 + 2r a_1 + r' &= Q_3, \end{aligned}$$

Q_3 désignant le coefficient de xy dans U :

$$Q_3 = \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0}.$$

Les conditions (E₂) s'écrivent de même :

$$(E_2) \quad \begin{aligned} a_1 - \frac{a'}{a} = 0, \quad b_2 - \frac{b'}{b} = 0, \quad \frac{c'}{c} = 0, \\ \frac{b_1}{a^2} + \frac{a_2}{b^2} = 0. \end{aligned}$$

On en déduit : $c = C^{te}$ et $ab = C^{te}$.

Puisque $a_1 + b_2 = 0$, les deux équations E₁ s'écrivent :

$$(E_1) \quad \begin{aligned} b'_1 + 2ra_1 - r' &= Q_3, \\ a'_2 + 2ra_1 + r' &= Q_3. \end{aligned}$$

Nous devons y ajouter les relations liant $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ à r .

Elles se réduisent ici à $r = \frac{d\varphi}{dt}$ et Q_3 s'écrit :

$$Q_3 = \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} \right) + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0}.$$

Les quantités α, β, γ considérées précédemment s'écrivent :

$$\begin{aligned} \alpha &= a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 - 2ra_2 - r^2 - P_1, \\ \beta &= b'_2 + a_2 b_1 + b_2^2 + 2rb_1 - r^2 - P_2, \\ \gamma &= - P_3, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0}, \\ P_2 &= + \beta_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0^2} + \beta_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y_0^2} + 2\beta_1 \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_0 \partial Y_0}, \\ P_3 &= \frac{\partial^2 U}{\partial Z_0^2}. \end{aligned}$$

Puisque $a_1 + b_2 = 0$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \alpha &= a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 - 2ra_2 - r^2 - P_1, \\ \beta &= -a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 + 2rb_1 - r^2 - P_2, \\ \gamma &= -P_3, \end{aligned}$$

et nous devons avoir :

$$(A + \alpha)a^2 = (B + \beta)b^2 = (C + \gamma)c^2.$$

15. Nous allons continuer le calcul en supposant :

$$\begin{aligned} U &= F(R) + G(Z), \\ (R^2 &= X^2 + Y^2). \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Z} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial Z} = 0.$$

Par conséquent :

$$Q_1 = Q_2 = 0.$$

Nous introduirons les coordonnées polaires : R , θ du point G ; par suite :

$$X_0 = R \cos \theta, \quad Y_0 = R \sin \theta, \quad Z_0 = 0.$$

Calculons les dérivées partielles de U :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} &= F' \frac{X}{R}, & \frac{\partial U}{\partial Y} &= F' \frac{Y}{R}, & \frac{\partial U}{\partial Z} &= G', \\ \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} &= F'' \frac{X^2}{R^2} - F' \frac{X^2}{R^3} + F' \frac{1}{R}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} &= F'' \frac{Y^2}{R^2} - F' \frac{Y^2}{R^3} + F' \frac{1}{R}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} &= F'' \frac{XY}{R^2} - F' \frac{XY}{R^3}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} &= G''. \end{aligned}$$

(Nous supposons $\frac{\partial U}{\partial Z_0} = 0$ pour $Z_0 = 0$, pour que le mouvement du centre de gravité puisse effectivement avoir lieu dans le plan OXY .)

Nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha_1 X_0 + \alpha_2 Y_0 &= R \cos(\theta - \varphi), \\ \beta_1 X_0 + \beta_2 Y_0 &= R \sin(\theta - \varphi). \end{aligned}$$

Calculons les valeurs des autres quantités P_1 , P_2 et Q_3 au centre de gravité G ; nous avons, en supprimant les indices 0 :

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + 2\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \\ &= \left(\frac{F''}{R^2} - \frac{F'}{R^3} \right) (\alpha_1 X + \alpha_2 Y)^2 + \frac{F'}{R} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \\ &= \left(F'' - \frac{F'}{R} \right) \cos^2(\varphi - \theta) + \frac{F'}{R}, \\ P_2 &= \beta_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \beta_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + 2\beta_1 \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \\ &= \left(\frac{F''}{R^2} - \frac{F'}{R^3} \right) (\beta_1 X + \beta_2 Y)^2 + \frac{F'}{R} \cdot (\beta_1^2 + \beta_2^2) \\ &= \left(F'' - \frac{F'}{R} \right) \cdot \sin^2(\varphi - \theta) + \frac{F'}{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \alpha_2 \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \\ &= \left(\frac{F''}{R^2} - \frac{F'}{R^3} \right) (\alpha_1 X + \alpha_2 Y) (\beta_1 X + \beta_2 Y) + \frac{F'}{R} (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) \\ &= \left(F'' - \frac{F'}{R} \right) \cos(\theta - \varphi) \sin(\theta - \varphi). \end{aligned}$$

A titre de vérification, supposons l'axe Gx dirigé suivant OG , alors $\varphi = 0$; on retrouve bien les valeurs déjà considérées :

$$\begin{aligned} P_1 &= F'' - \frac{F'}{R} + \frac{F'}{R} = F'' = \frac{d^2 U}{dR^2}, \\ P_2 &= 0 + \frac{F'}{R}, \quad = \frac{F'}{R} = \frac{1}{R} \frac{dU}{dR}, \\ Q_3 &= 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des équations obtenues s'écrit :

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 &= 0, \\ b'_1 + 2ra_1 - r' &= \left(F'' - \frac{F'}{R} \right) \frac{\sin 2(\theta - \varphi)}{2} = Q_3, \\ a'_2 + 2ra_1 + r' &= \left(F'' - \frac{F'}{R} \right) \frac{\sin 2(\theta - \varphi)}{2} = Q_3 ; \\ \alpha &= a'_1 + a_1^2 + a_2 b_1 - 2ra_2 - r^2 - P_1, \\ \beta &= -a'_1 + a_2 b_1 + a_1^2 + 2rb_1 - r^2 - P_2, \\ \gamma &= \frac{d^2 G}{dz^2} = G'' ; \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(F'' - \frac{F'}{R} \right) \cos^2(\varphi - \theta) + \frac{F'}{R}, \\ P_2 &= \left(F'' - \frac{F'}{R} \right) \sin^2(\varphi - \theta) + \frac{F'}{R}, \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} ; \\ (A + \alpha)a^2 &= (B + \beta)b^2 = (C + \gamma)c^2 ; \\ a_1 - \frac{a'}{a} &= 0, \quad b_2 - \frac{b'}{b} = 0, \\ \frac{b_1}{a^2} + \frac{a_2}{b^2} &= 0. \end{aligned}$$

(On a

$$c = C^{te} \quad \text{et} \quad ab = C^{te}.)$$

Cas d'un ellipsoïde de révolution ($a = b$).

On a successivement :

$$\begin{aligned} a &= b = \text{Cte}, \\ a_1 = b_2 &= 0, & a_2 + b_1 &= 0, \\ b'_1 - r' &= Q_3, \\ a'_2 + r' &= Q_3, \end{aligned}$$

ce qui est possible pour $Q_3 = 0$.

Dans ce cas, on peut toujours choisir $\varphi = \theta$ ou $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$.

On retrouve les résultats obtenus dans la première partie.

16. ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION APLATI. — Supposons d'abord :

$$a = b.$$

On déduit des équations (4) :

$$a_1 = b_2 \quad \text{et} \quad a_2 + b_1 = 0.$$

L'équation (2) donne :

$$c_3 = -a_1 - b_2 = -2a_1.$$

Supposons encore :

$$p = q = 0$$

et

$$a_3 = b_3 = c_1 = c_2 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u &= a_1x - a_2y, \\ v &= a_2x + a_1y, \\ w &= - 2a_1z. \end{aligned}$$

Puisque

$$Q_1 = Q_2 = 0,$$

les équations de conditions (1) se réduisant à :

$$\begin{aligned} b'_1 + a_1b_1 + b_1b_2 - 2rb_2 - r' &= Q_3, \\ a'_2 + a_1a_2 + a_2b_2 + 2ra_1 + r' &= Q_3. \end{aligned}$$

Elles peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} (b_1 - r)' + 2a_1(b_1 - r) &= Q_3, \\ (a_2 + r)' + 2a_1(a_2 + r) &= Q_3. \end{aligned}$$

1° Si nous supposons encore :

$$U = F(r) + G(z) = \frac{Kr^2}{2} + G(z)$$

(ce qui revient à assimiler en première approximation le potentiel de la Voie Lactée à celui d'un ellipsoïde homogène de révolution), nous aurons :

$$\begin{aligned} F'' - \frac{F'}{r} &= 0 \quad \text{et} \quad Q_3 = 0, \\ P_1 = P_2 = \frac{F'}{r} &= K \quad (K \text{ négatif}). \end{aligned}$$

On se rappelle que :

$$P_3 = \frac{d^2U}{az_0^2}$$

est constant si la trajectoire du centre de gravité est une courbe plane du plan galactique.

Des équations précédentes, nous déduisons :

$$a_2 + r = C e^{-\int 2a_1 dt},$$

$$b_1 - r = -C e^{-\int 2a_1 dt}.$$

En vertu de la condition :

$$a_2 + b_1 = 0,$$

on a :

$$r = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Il en résulte :

$$\alpha = a'_1 + a_1^2 - a_2^2 - 2ra_2 - r^2 - P_1,$$

$$\beta = a'_1 - a_2^2 + a_1^2 - 2ra_2 - r^2 - P_2,$$

$$\gamma = -P_3 - 2a'_1 + 4a_1^2.$$

On a bien $\alpha = \beta$, puisque $P_1 = P_2$.

La relation :

$$(A + \alpha)a^2 = (C + \gamma)c^2,$$

qui ne dépend que du rapport $\frac{c}{a} = \sigma$, détermine ce rapport en fonction de t par l'intermédiaire de α , c'est-à-dire en définitive de a_1 . Les axes se déduisent de $a^2c = a^3 \sigma = V_0$.

Si la trajectoire est plane, $\frac{d^2U}{az_0^2}$ est constant.

Si la trajectoire est quelconque, $\frac{d^2U}{az_0^2}$ est variable.

Puisque nous supposons :

$$F(r) = \frac{Kr^2}{2},$$

la trajectoire du centre de gravité est une ellipse concentrique à la Voie Lactée.

Conclusion. — On suppose :

$$F(r) = \frac{Kr^2}{2},$$

il existe une infinité d'ellipsoïdes de révolution d'axes variables, dont le centre de gravité décrit une trajectoire elliptique (ou un cercle), ou plus généralement une courbe tracée sur un cylindre elliptique.

La loi de variation dépend de deux fonctions arbitraires a_1 et a_2 du temps, qui dépendent des conditions initiales imposées aux vitesses.

Par exemple, si l'on veut que u soit nul pour $y = 0$, il faut $a_1 = 0$, par suite $w = 0$, et le mouvement se réduit à une rotation de vitesse angulaire constante, puisque :

$$\begin{aligned} \Omega &= a_2 + r = \text{Cte}, \\ u &= -a_2 y, & v &= a_2 x, & w &= 0. \end{aligned}$$

Remarque. — En général, on considère la Voie Lactée comme formée par la superposition d'ellipsoïdes de révolution, auxquels on ajoute quelquefois une masse centrale.

2° Supposons maintenant $\varphi = \theta$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} P_1 &= F'' - \frac{F'}{R}, & P_2 &= \frac{F'}{R}, \\ Q_3 &= 0. \end{aligned}$$

On n'a pas en général $\alpha = \beta$ si $F(r)$ est quelconque : il n'y a pas en général d'ellipsoïdes de révolution.

Remarques. — 1° Si on prend $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$, P_1 et P_2 sont permutés, Q_3 reste nul, le problème est le même.

2° Il resterait à examiner s'il n'existe pas de choix possible pour :

$$p, q, \quad c_1, c_2, \quad a_3, b_3.$$

Ellipsoïdes quelconques. — Si nous supposons $\varphi = 0$, nous aurons :

$$P_1 = F'' - \frac{F'}{R}, \quad P_2 = \frac{F'}{R}, \quad Q_3 = 0.$$

Supposons ensuite :

$$a_3 = b_3 = c_1 = c_2 = 0,$$

d'où :

$$\begin{aligned} p &= q = 0. \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

est connu par le mouvement du centre de gravité.

Prenons :

$$\begin{aligned} u &= a_1 x + b_1 y, \\ v &= a_2 x + b_2 y, \\ w &= c_3 z. \end{aligned}$$

On doit avoir :

$$c_3 = -(a_1 + b_2);$$

d'autre part :

$$\frac{b_1}{a^2} + \frac{a_2}{b^2} = 0.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} A'_2 - A_2 C_3 - r(b_2 - a_1) &= 0, \\ B'_1 - B_1 C_3 - r(b_2 - a_1) &= 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (A'_2 - B'_1) - C_3(A_2 - B_1) &= 0, \\ A_2 - B_1 &= C e^{+\int c_3 dt} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \alpha &= a'_1 + a_1^2 + A_2 B_1 - r(A_2 - B_1) - P_1, \\ \beta &= b'_2 + b_2^2 + A_2 B_1 + r(A_2 + B_1) - P_2, \\ \gamma &= c'_3 + c_3^2 - P_3. \end{aligned}$$

17. ÉTUDE DES RELATIONS : $(B_1 + \alpha)a^2 = (B_2 + \beta)b^2 = (B_3 + \gamma)c^2$.

a, b, c sont les demi-axes de l'ellipsoïde. Leurs rapports peuvent être quelconques.

α, β, γ sont des constantes dépendant du champ extérieur de gravitation, des vitesses intérieures et du temps.

B_1, B_2, B_3 sont les coefficients du potentiel intérieur de l'ellipsoïde (à une constante près $\frac{1}{2\pi f\rho}$).

Un calcul de B_1, B_2, B_3 a été fait dans l'hypothèse où $a > b > c$. (Calcul de $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ dans le but de résoudre l'équation dans le cas particulier où $\beta = 0$).

A cet effet, on a introduit les rapports (H. MINEUR, *Annales d'Astrophysique*) :

$$s = \left(\frac{b}{a}\right)^2 < 1, \quad t = \left(\frac{b}{c}\right)^2 > 1,$$

en fonction desquels s'effectue le calcul de $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$.

Afin d'utiliser ces résultats dans la mesure du possible, nous conserverons ces notations.

L'ensemble des valeurs possibles de s et t peut être représenté dans le plan *Ost*. On obtient 6 régions principales, qui peuvent se réduire à 3 par permutation de s et t .

Les deux groupes sont séparés par $t = s$.

$$\text{Région 1} \quad a > b > c.$$

Étudions d'abord la région (1) :

$$t > 1, \quad s < 1 \quad \text{ou} \quad a > b > c.$$

Dans cette région :

$$B_1 = \beta'_1, \quad B_2 = \beta'_2, \quad B_3 = \beta'_3$$

sont déjà calculés.

Les relations :

$$(B_1 + \alpha)a^2 = (B_2 + \beta)b^2 = (B_3 + \gamma)c^2$$

s'écrivent, avec

$$t = \frac{b^2}{c^2}, \quad s = \frac{b^2}{a^2};$$

$$\frac{B_1 + \alpha}{s} = B_2 + \beta = \frac{B_3 + \gamma}{t}.$$

On peut écrire :

$$\alpha = B_2 s - B_1 + \beta s = \varphi + \beta s,$$

$$\gamma = B_2 t - B_3 + \beta t = \psi + \beta t.$$

Les ψ et φ sont les mêmes à une constante près.

Considérons l'espace $O\alpha\beta\gamma$ (fig. 10).

Pour $\beta = C^{te}$, α et γ sont fonctions des deux paramètres s et t .

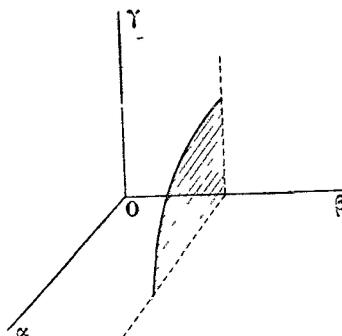


FIG. 10.

Pour chaque valeur de β , il existe une infinité de courbes lieux de :

$$\alpha(s, t), \quad \gamma(s, t).$$

$$\text{Région 2} \quad a > c > b.$$

Étudions maintenant la région :

$$t < 1, \quad s < 1 \quad (t > s),$$

ou :

$$a > c > b.$$

Pour utiliser les calculs relatifs à la région 1, désignons les axes respectivement par $A > B > C$.

Les relations s'écrivent, en divisant par c^2 :

$$\frac{B_1 + \alpha}{c^2/a^2} = \frac{B_2 + \beta}{c^2/b^2} = B_3 + \gamma,$$

avec :

$$S = \left(\frac{B}{A}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2, \quad T = \left(\frac{B}{C}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{B_1 + \alpha}{S} = \frac{B_2 + \beta}{T} = B_3 + \gamma.$$

On aura :

$$\begin{aligned} B_1 &= \beta'_1, & B_2 &= \beta'_3, & B_3 &= \beta'_2, \\ T &= \frac{1}{t}, & S &= \frac{s}{t}, \end{aligned}$$

et inversement :

$$s = \frac{S}{T}, \quad t = \frac{1}{T}.$$

On en déduit sans peine :

$$\alpha = B_2 \frac{S}{T} - B_1 + \beta \frac{S}{T} = B_2 s - B_1 + \beta s,$$

$$\gamma = B_2 \frac{1}{T} - B_3 + \beta \frac{1}{T} = B_2 t - \beta_3 + \beta t.$$

(Il ne faut pas oublier que B_2 et B_3 se déduisent de β'_2 et β'_3 par permutation).

Région 3 $c < a < b$.

Étudions la région

$$t > s > 1 \quad (t > s),$$

ou

$$c < a < b.$$

Désignons les axes respectivement par :

$$C < B < A.$$

D'autre part, les relations s'écrivent, en divisant par a^2 :

$$B_1 + \alpha = \frac{B_2 + \beta}{a^2/b^2} = \frac{B_3 + \gamma}{a^2/c^2},$$

ou encore, en posant :

$$S = \left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, \quad T = \frac{B^2}{C^2} = \frac{a^2}{c^2};$$

$$B_1 + \alpha = \frac{B_2 + \beta}{S} = \frac{B_3 + \gamma}{T}.$$

On aura cette fois :

$$\begin{aligned} B_1 &= \beta'_2, & B_2 &= \beta'_1, & B_3 &= \beta'_3, \\ T &= \frac{t}{s}, & S &= \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

et inversement :

$$s = \frac{1}{S}, \quad t = \frac{T}{S}.$$

On en déduit :

$$\alpha = B_2 \frac{1}{S} - B_1 + \beta \frac{1}{S} = B_2 s - B_1 + \beta s,$$

$$\gamma = B_2 \frac{T}{S} - B_3 + \beta \frac{T}{S} = B_2 t - B_3 + \beta t.$$

Ici B_1 et B_2 se déduisent de β'_1 et β'_2 par permutation.

Régions 4, 5, 6.

Ces différentes régions se déduisent respectivement de 1, 2, 3 par permutation de s et t et par suite de β'_1 et β'_3 (autrement dit a et c sont permutés).

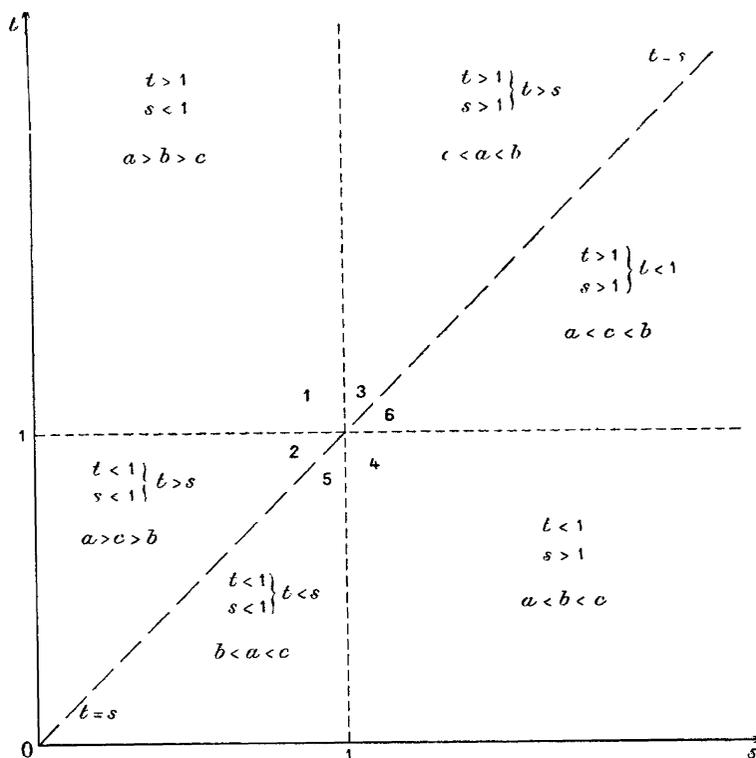


FIG. 11.

Aucun nouveau calcul n'est donc nécessaire.

L'ensemble de ces résultats est représenté figure 11.

Remarque. — Supposons construites pour une valeur donnée de β les courbes du plan $O\alpha\gamma$:

$$\alpha = \Phi(s, t) + \beta s = F(s, t),$$

$$\gamma = \Psi(s, t) + \beta t = G(s, t).$$

Ces courbes balayent une région limitée du plan $O\alpha\gamma$; pour avoir l'équation de la courbe limitant cette région, supposons par exemple :

$$\alpha = F(s, t) = C^{te},$$

ce qui définit une certaine fonction $t(s)$. Si nous substituons cette valeur de $t(s)$ dans l'expression :

$$\gamma = G(s, t),$$

nous sommes amenés à chercher le maximum de cette fonction :

$$\gamma = G[s, t(s)].$$

On obtient ainsi les deux conditions :

$$\frac{\partial G}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{dt}{ds} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{dt}{ds} = 0.$$

L'élimination de $\frac{dt}{ds}$ fournit la condition cherchée symétrique en F et G :

$$\frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial s} = 0.$$

Nous pouvons écrire à une constante près :

$$\begin{aligned} \alpha = F(s, t) &= \varphi + \beta s, \\ \gamma = G(s, t) &= \psi + \beta t, \end{aligned}$$

φ et ψ ayant les expressions déjà considérées. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial s} &= \frac{\partial \psi}{\partial s}, & \frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta, \\ \frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \beta, & \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

D'où la condition :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} + \beta \right) &= 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) - \beta^2 &= 0. \end{aligned}$$

En particulier, si $\beta = 0$, cette condition se réduit à :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

qui a été trouvée précédemment à propos de la stabilité et du minimum de densité.

L'étude de ces relations montre que le point (α, β, γ) ne peut être choisi que dans certaines régions de l'espace $O\alpha\beta\gamma$ pour que la détermination de s et t soit possible.

Pour s'en rendre compte, on peut tracer pour chaque valeur de γ les familles de courbes (α, γ) .

18. CONCLUSION. — Dans ce modeste travail, je n'ai fait qu'effleurer le problème du mouvement des amas d'étoiles dans un cas particulièrement simple, où ceux-ci sont homogènes.

Le lecteur se rendra compte que le sujet est loin d'être épuisé et que de nombreux cas importants restent à traiter : en particulier celui des amas globulaires, dont la trajectoire s'écarte le plus souvent beaucoup du plan galactique, et qui pourraient être assimilés à une masse gazeuse en équilibre polytropique.

Il est souhaitable que des recherches continuent dans cette voie, pour une plus parfaite connaissance de l'Univers.

Manuscrit reçu le 1^{er} août 1945.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES GÉNÉRAUX

- TISSERAND, *Traité de Mécanique Céleste*, 1, 2, Paris, 1891.
 APPELL P., *Traité de Mécanique rationnelle*, 3, 4, Paris, 1932.
 H. POINCARÉ, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, Paris, 1902.
 H. POINCARÉ, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, Paris, 1913.
 J. H. JEANS, *Théorie dynamique des gaz*, Paris, 1925.
 P. DIVE, *Rotations internes des astres fluides*, Paris, 1930.
 Y. ROCARD, *L'hydrodynamique et la théorie cinétique des gaz*, Paris, 1932.
 H. SHAPLEY, *Star Clusters-Harvard Monographs*, New-York, 1930.
 V. VOLTERRA, Rotation des corps dans lesquels existent des mouvements internes (*Collection de Physique Mathématique*, fasc. 4), Paris, 1938.
 Handbuch der Astrophysik, *Stellar Clusters*, par SHAPLEY, 5, fasc. 2, Berlin, 1933.

PÉRIODIQUES

- H. POINCARÉ, *Acta Mathematica*, t. 7, p. 259 (1885).
 LIAPOUNOFF, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 6, p. 5 (1904).
 DARWIN, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A, 208, p. 1 (1908).
 SKETLOFF, *Annales de l'École Normale Supérieure*, 44, p. 469 (1908) ; 45, p. 275 (1909).
 EDDINGTON, *Monthly Notices*, 74, p. 5 (1913) ; 75, p. 366 (1915) ; 76, p. 37 (1915).
 JEANS, *Monthly Notices*, 76, p. 567 (1915).
 HUMBERT, *Journal de l'École Polytechnique*, 2^{me} série, 20^{me} cahier, p. 1 (1919).
 JEANS, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A, 218, p. 157 (1919).
 E. CARTAN, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 46, p. 317 et 356 (1922).
 B. J. BOK, *Harvard College Observatory*, Circular N° 384 (1933).
 H. MINEUR, *Annales d'Astrophysique*, 2, p. 1 (1939).
 CHANDRASEKHAR, *Astrophysical Journal*, 93, p. 285 (1941) ; 92, p. 441 (1940) ; 90, p. 1 (1939).
 B. LINDBLAD, *Stockholms Observatoriums Annaler*, Bd. 13, n° 10 ; Bd 14, n° 1 (1941).

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

FONCTIONS DE LAMÉ

1. Coordonnées elliptiques — Équation de Laplace.	11
2. Polynômes de Lamé.	12
3. Calcul des polynômes de Lamé (racines, indices).	12
4. Propriétés des polynômes de Lamé.	14
5. Fonctions de Lamé de 2 ^e espèce.	15
6. Développement d'une fonction de deux variables en série de Lamé.	15
7. Problème de Dirichlet pour l'ellipsoïde.	16
8. Potentiel de l'ellipsoïde homogène.	17
9. Pesanteur à la surface de l'ellipsoïde.	18
10. Formules relatives au potentiel de l'ellipsoïde.	19
11. Champ de gravitation de la Voie Lactée.	20
12. Figures d'équilibre ellipsoïdales de Mr MINEUR.	21

CHAPITRE II

STABILITÉ DES FIGURES OBTENUES DANS LE MOUVEMENT CIRCULAIRE

1. Énergie potentielle.	24
2. Condition de stabilité séculaire.	24
3. Variation de l'énergie potentielle.	25
4. Expression de cette variation.	26
5. Équation de stabilité. Figures de bifurcation.	28
6. Théorèmes généraux sur les racines d'une équation de stabilité.	28
7. Premières conclusions.	31
8. Deuxième forme de l'équation de stabilité.	33
9. Théorème fondamental.	35
10. Conclusions générales.	38
11. Résolution de la première équation de stabilité.	38
12. Cas limites $t = 1$ et $t = 0$ pour cette équation.	41
13. Conclusions numériques (graphique)	42
14. Étude de la deuxième équation de stabilité et du cas général $t = 1$	45
15. Minimum de densité (rappel de résultats, expression de ce minimum).	48
16. Vérification de l'équivalence de la condition du minimum de densité et de la première équation de stabilité	50
17. Simplification des calculs dus à la symétrie des formules.	54
18. Figure de bifurcation.	57

CHAPITRE III

ÉTUDE DU CAS GÉNÉRAL : TRAJECTOIRE QUELCONQUE DE L'AMAS

1. Énoncé du problème pour une trajectoire plane.	61
2. Développement en série.	62
3. Équations du mouvement.	64
4. Détermination de la surface.	66
5. Conditions aux limites.	67
6. Cas d'un ellipsoïde de révolution.	68
7. Cas d'un ellipsoïde quelconque à axes variables dont un axe passe par le centre galactique.	70
8. Formules générales pour une trajectoire quelconque.	71
9. Équations de condition relatives à la symétrie de la figure.	74
10. Détermination de la surface.	75
11. Conditions aux limites	75
12. Résumé des quinze conditions.	76
13. Changement de variables.	78
14. Cas d'un mouvement plan avec axes de symétrie de l'amas ne passant plus par le centre galactique.	80
15. Calcul avec $U = F(R) + G(z)$	81
16. Cas d'un ellipsoïde de révolution.	84
17. Étude directe des équations $(A + \alpha)a^2 = (B + \beta)b^2 = C + \gamma)c^2$	87
18. CONCLUSION.	92