THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

R. CAZENAVE

Champs scalaires centrés et leurs ondes associées

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1944

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1944__268__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

N° D'ORDRE :
81

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

(DOCTORAT ÉTAT)

PAR R. CAZENAVE

1re THÈSE. — CHAMPS SCALAIRES CENTRÉS ET LEURS ONDES ASSOCIÉES.

2e THÈSE. — LA GÉOMÉTRIE DE CAYLEY DANS SES RAPPORTS AVEC LA PHYSIQUE THÉORIQUE.

Soutenues le 2 décembre 1944 devant la Commission d'Examen.

MM. BUHL, *Président.*
JACQUES, DURAND. } *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands Augustins, 55

1944

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

FACULTÉ DES SCIENCES

PERSONNEL

Administration.

MM. Dop..... Doyen.
Mignonac..... Assesseur.

Honorariat.

Deltheil..... Doyen honoraire, professeur honoraire.
Jacob..... Professeur honoraire.
Giran..... Professeur honoraire.
Bertrand..... Professeur honoraire.
Drach..... Professeur honoraire.
Bouasse..... Professeur honoraire.
Sourisseau..... Professeur honoraire.
Clarens..... Professeur honoraire.
Camichel..... Professeur honoraire, Membre de l'Institut.
Mengaud..... Professeur honoraire.

Professeurs.

Buhl..... Calcul différentiel et intégral.
Roy..... Mécanique rationnelle et appliquée, correspondant de l'Institut.
Duffour..... Minéralogie.
Nicolas..... Botanique appliquée.
Dop..... Botanique.
Vàndel..... Zoologie.
Cathala..... Chimie physique et électrochimie.
Mignonac..... Chimie générale.
Despax..... Zoologie appliquée et hydrobiologie.
Escande..... Mécanique des fluides.
Jacques..... Mathématiques générales.
Dupouy..... Physique.
Pichot..... Physique.
Gaussen..... Botanique.
Castéras..... Géologie.
N..... Chimie.

Maîtres de conférences.

Nouvel..... Zoologie.
Dupin..... Electrotechnique.
Teissié-Solier..... Électrotechnique.
Capdecomme..... Minéralogie.
Renaud..... Chimie physique.
Gallais..... Chimie.

Chargé de cours.

Palogue..... Astronomie.

Chargé de conférences.

Durand..... Astronomie.

Secrétariat.

Ducros..... Secrétaire.

A LA MÉMOIRE DE MES CHERS PARENTS

qui firent des hommes de leurs fils.

A MONSIEUR BUHL

et à tous mes anciens professeurs
des Facultés des Sciences de Montpellier et de Toulouse.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES CHAMPS SCALAIRES CENTRÉS

ET

LEURS ONDES ASSOCIÉES

INTRODUCTION.

Dans *Continu et discontinu en Physique moderne* (p. 158 et 159), M. Louis de Broglie souligne l'insurmontable objection à laquelle se heurte la théorie quantique du rayonnement : l'énergie propre de l'électron, dué à la réaction de son champ sur lui-même, a une valeur infinie, physiquement inadmissible, qui résulte du caractère ponctuel implicitement attribué à l'électron.

Si la conception classique, qui fut celle de Lorentz, de l'électron sphérique (au repos), de rayon fini, lève cette difficulté, elle en soulève d'autres : l'action à distance, sans intervention du milieu où il se trouve, subsiste; il paraît impossible de définir la structure et la nature de l'électron et aussi de déterminer les forces de cohésion qui en assurent l'indestructibilité par la stabilité de l'équilibre de sa charge, c'est-à-dire qui, en d'autres termes, empêchent cette charge de se disperser en la maintenant indivisible et localisée dans l'électron. Il est vrai que cette cohésion pourrait s'expliquer par la pression de Poincaré qui s'exercerait de l'extérieur sur la surface de l'électron si l'on admettait une répartition superficielle de la charge, hypothèse suggérée par l'équilibre électrostatique des conducteurs, mais qui, par là-même, est contestable, car il est audacieux d'étendre à l'échelle microscopique du corpuscule un fait expérimentalement reconnu à notre échelle macroscopique.

De même que celle de l'électron ponctuel, la conception de l'électron constitué par une charge d'électricité négative occupant un volume fini, sphérique au repos, nous paraît donc dénuée de toute réalité physique.

Suivant les idées de Maxwell sur la transmission des interactions entre corpuscules par le milieu où ils sont plongés et en chaque point duquel se trouve localisée l'énergie du champ coulombien de l'électron, il apparaît logique et naturel d'admettre corrélativement une distribution continue de la charge dans tout l'espace. Cette façon de voir semble trouver une justification dans les conceptions plus modernes de la Mécanique ondulatoire. Celle-ci associe au corpuscule ponctuel une « fonction d'onde » continue Ψ des coordonnées d'espace et du temps qui, définie en chaque point de l'espace, présente le caractère d'un champ sans en avoir la signification physique qu'ont, par contre, d'autres grandeurs construites à partir d'elle.

Ces théories nous suggèrent l'idée de représenter un corpuscule par une distribution continue de matière ou de charge électrique, et, partant, d'énergie dans tout l'espace, de façon qu'elle soit concentrée autour d'un point central et diluée loin de lui, sa raréfaction augmentant au fur et à mesure qu'on s'en éloigne. L'activité du corpuscule ainsi constitué se manifesterait par un champ de forces dérivant d'un potentiel, asymptotique au champ newtonien ou coulombien d'un corpuscule ponctuel placé au centre et qui aurait pour masse ou pour charge la masse ou la charge totale, répandue dans tout l'espace, du corpuscule considéré, c'est-à-dire l'intégrale triple étendue à tout l'espace de la densité de matière ou de charge définie en chaque point. Le centre du champ, point représentatif du corpuscule, serait la position d'équilibre stable d'un point matériel libre soumis à l'action du champ de forces du corpuscule. Comme tel, il serait le point de l'espace où le potentiel est minimum. Il jouerait ainsi le rôle d'un point matériel ayant la masse ou la charge du corpuscule qu'il représente, et dont l'énergie propre serait l'énergie totale du champ considérée comme l'intégrale triple, étendue à tout l'espace, d'une densité d'énergie définie comme une fonction continue de point.

Le champ corpusculaire considéré serait évidemment à symétrie sphérique autour du centre pour le corpuscule *au repos*, c'est-à-dire par rapport à un système de référence invariablement lié au centre du champ. Suivant les vues relativistes, il se déformerait au cours du mouvement de son centre par rapport au système de référence auquel est lié l'observateur, chaque sphère équipotentielle subissant une contraction analogue à celle de Lorentz suivant le diamètre dirigé dans la direction de la vitesse du centre, ce dernier restant défini comme le point où le potentiel est minimum. Les surfaces équipotentielles du champ, rapportées au système de référence par rapport auquel le centre est en mouvement, resteraient ainsi des surfaces fermées convexes aplaties dans le sens du mouvement, ce qui est conforme à la conception de l'électron déformable par suite du mouvement (Lorentz-Poincaré).

Une telle représentation du champ corpusculaire nous a conduit à envisager des champs scalaires définis par une fonction de point $f(x, y, z)$ continue dans tout l'espace qui, comme le potentiel du champ corpusculaire, admet un

maximum ou un minimum en un seul point isolé de l'espace, auquel il est indiqué de donner le nom de *centre du champ*, d'où la dénomination de *champs scalaires centrés* sous laquelle nous désignons de tels champs. Leur étude constitue l'objet essentiel de notre Thèse. Elle prolonge en quelque sorte dans l'espace l'étude des champs scalaires plans qu'ont faite MM. Georges Bouligand et Jacques Devisme dans leur ouvrage intitulé *Lignes de niveau, Lignes intégrales*.

Il apparaît, ainsi que nous le démontrerons, que les surfaces de niveau d'un de ces champs doivent être, comme les surfaces équipotentielles du champ de forces d'un corpuscule en mouvement, des surfaces fermées convexes. Cette propriété géométrique essentielle d'un champ scalaire centré suffit à le définir. Elle est évidente aux environs du centre autour duquel les surfaces de niveau se confondent très sensiblement avec des ellipsoïdes homothétiques ayant pour centre le centre du champ. L'existence d'un extremum unique, en un point isolé, de $f(x, y, z)$ suffit pour reconnaître si une surface définie par son équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ est une surface fermée convexe.

En admettant que f ait la même valeur à l'infini dans toutes les directions, ce qui revient à admettre qu'il existe une surface de niveau à l'infini, qui est manifestement une sphère de rayon infini centrée au centre du champ, les surfaces de niveau sont *quasi sphériques* à grande distance du centre.

L'assimilation du champ-gradient de f au champ de vitesses d'un mouvement permanent irrotationnel d'un fluide permet de déterminer aisément les propriétés différentielles (trièdre de Frenet, courbure, torsion) en un point d'une des lignes de champ orthogonales aux surfaces de niveau, qui constituent les lignes de courant de ce mouvement permanent et qui représentent géométriquement le champ scalaire au même titre que les surfaces de niveau.

Dans le même ordre d'idées, nous déterminons les propriétés différentielles (courbure, ombilics, lignes de courbure, asymptotiques, géodésiques) des surfaces de niveau $f(x, y, z) = \text{const.}$, et, en particulier, d'une surface *définie par une équation cartésienne* $f(x, y, z) = 0$, qui est une surface de niveau du champ scalaire f.

L'étude des champs scalaires centrés, qui constitue en quelque sorte la première partie de notre Thèse, se termine par celle des propriétés intégrales des surfaces de niveau qui font intervenir leur courbure moyenne en tant que divergence d'un vecteur unitaire dirigé suivant le gradient de f et qui définit le *champ directeur* du champ gradient.

Le chapitre qui la suit, qui pourrait servir de *deuxième partie*, est relatif aux transformations ponctuelles permettant de passer d'un champ scalaire à un autre. Si ce dernier est un champ *sphérique*, c'est-à-dire dont les surfaces de niveau sont des sphères concentriques, nous obtenons la correspondance ponctuelle qui existe entre une surface fermée convexe $f(x, y, z) = 0$ et une sphère centrée au point intérieur où la fonction f est extrema.

Enfin, dans une troisième et dernière partie constituant le dernier chapitre, remarquant qu'une famille de surfaces d'onde peut être représentée par les surfaces de niveau d'un champ scalaire défini par une fonction $f(x, y, z)$ choisie en conséquence, nous mettons en évidence que la propagation d'une onde peut être associée au mouvement d'un point matériel de masse m sur une ligne du champ scalaire correspondant. C'est là au fond l'idée fondamentale de la Mécanique ondulatoire dont nous retrouverons successivement les premières formules.

Des considérations d'homogénéité nous amènent d'abord à adopter pour f, dont le choix est arbitraire, l'expression $c^2 t$ proportionnelle au temps t et au carré de la vitesse c de la lumière dans le vide, ce qui nous conduit à la *relation* $VW = c^2$ *de M. Louis de Broglie* entre la vitesse de propagation V de l'onde et la vitesse W du point matériel. En faisant ensuite intervenir l'énergie totale E de ce dernier, l'action d'Hamilton $S = m\int_0^t W^2\,dt$ et la fonction de Jacobi $\psi = S - Et$, nous aboutissons à la relation $V = \frac{E}{mW}$ et à la *formule d'Einstein* $E = mc^2$.

Considérant la propagation d'ondes fermées convexes (représentées par un champ scalaire centré) à deux fronts, un front-avant et un front-arrière, ce qui amène à définir une longueur d'onde λ relative à chaque position de l'onde, et une *période locale* T, nous établissons que ces ondes deviennent sensiblement des ondes sphériques concentriques pour lesquelles λ, V, T sont des constantes. Prenant ensuite le cas où ces ondes sont des ondes *ordinaires* (du second ordre), dont nous établissons l'équation de propagation, nous introduisons des ondes planes sinusoïdales qui leur sont associées et qui correspondent au terme fondamental et aux harmoniques d'une série de Fourier représentant la fonction d'onde qui est périodique.

Envisageant enfin l'onde plane monochromatique fondamentale, nous montrons que sa phase est $k\psi$, k étant une constante ne dépendant que de la masse m et de la fréquence ν qui caractérise cette onde. Un raisonnement assez simple sur la relation qui *doit* exister nécessairement entre m et ν nous conduit directement à la *relation des quanta* $E = h\nu$ de laquelle se déduisent aussitôt *la formule* $\lambda = \frac{h}{mW}$ *de M. Louis de Broglie* et l'équation de Schrödinger.

En définitive, le plan suivi dans notre exposé est le suivant.

Chapitre I. — *Champs scalaires centrés.*

Définition. Nature du champ. Cas fondamentaux. Étude locale du champ. Variations de f avec r, le long d'un rayon central et d'une ligne de champ. Lignes isoclines. Section plane d'une surface de niveau. Convexité des surfaces de niveau. Surfaces de niveau et lignes de champ au voisinage du centre. Quasi-sphéricité des surfaces de niveau à grande distance du centre.

CHAPITRE II. — *Propriétés differentielles des lignes de champ et des surfaces de niveau.*

A. *Courbure et torsion des lignes de champ.* — Représentation cinématique du champ gradient. Lignes de champ extrémales de l'action d'Hamilton. Trièdre de Frenet en un point, courbure, torsion d'une ligne de champ.

B. *Courbure et lignes remarquables des surfaces de niveau.* — Tenseur, quadriques indicatrices et torsion du champ en un point. Indicatrice de Dupin. Courbure d'une surface de niveau. Ombilics. Lignes ombilicales du champ. Lignes de courbure. Asymptotiques et géodésiques.

CHAPITRE III. — *Propriétés intégrales des surfaces de niveau.*

Champ directeur associé au champ gradient, complexe des normales, aire d'une surface de niveau. Propriétés intégrales attachées à la courbure moyenne des surfaces de niveau.

CHAPITRE IV. — *Transformation d'un champ scalaire centré en un autre champ scalaire centré.*

Correspondance entre un point et une surface. Passage d'un champ scalaire centré à un champ sphérique. Définition d'un champ scalaire centré borné et transformation de ce champ en un champ scalaire centré illimité de même centre.

CHAPITRE V. — *Ondes associées à un champ scalaire centré.*

Représentation d'une famille de surfaces d'onde par les surfaces de niveau d'un champ scalaire. Vitesse de propagation suivant une ligne de champ. Onde associée au mouvement d'un point matériel le long d'une ligne de champ. Propagation d'une onde fermée convexe à front unique. Propagation d'une onde fermée convexe à deux fronts, période et longueur d'onde. Propagation d'une onde ordinaire, équation de d'Alembert. Onde sphérique ordinaire à front avant et front arrière. Onde plane monochromatique associée au mouvement rectiligne uniforme d'un point matériel. Relation des quanta et longueur d'onde associée.

*
* *

Je ne saurais terminer cette Introduction sans saluer la Libération de la France et exprimer à M. le professeur A. Buhl, toute ma gratitude pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mes recherches, l'aide bienveillante, qu'il m'a donnée, ainsi que les conseils qu'il m'a prodigués.

Foix, septembre 1944.

CHAPITRE I.

CHAMPS SCALAIRES CENTRÉS.

1. **Définitions.** — Un champ scalaire spatial est dit *centré* si la fonction $f(x, y, z)$ qui le définit satisfait aux quatre conditions suivantes :

— elle est uniforme, définie, continue et possède des dérivées partielles des deux premiers ordres continues dans tout l'espace;

— elle admet un maximum ou un minimum strict f_0 en un point isolé unique $M_0(x_0, y_0, z_0)$ appelé *centre* du champ;

— elle a même valeur (finie ou infinie) à l'infini dans toutes les directions;

— son *hessien*

$$H(f) = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix},$$

a un signe constant en tout point de l'espace.

L'avant-dernière condition comprend comme surface de niveau particulière le plan de l'infini lui-même qui doit être considéré comme une sphère de rayon infini centrée en un point quelconque à distance finie.

La dernière condition exprime que la transformation ponctuelle

$$(1) \qquad u = f'_x, \qquad v = f'_y, \qquad w = f'_z,$$

qui fait correspondre le point $m(u, v, w)$ au point $M(x, y, z)$ et dont le jacobien est $H(f)$, est *biunivoque*.

Nous dirons que le champ gradient $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ dont les projections sur les axes sont u, v, w est *univoque*. Si l'on rapporte l'espace des u, v, w et celui des x, y, z aux mêmes axes, à tout point M de l'espace ne correspond qu'un vecteur $\vec{W}$ équipollent à $\overrightarrow{Om}$ et à toute valeur vectorielle $\vec{W}$ du gradient de f ne correspond qu'un point M de l'espace.

Le champ scalaire f sera dit de *première espèce* si la valeur de f à l'infini est infinie, de *seconde espèce* si elle y est finie.

L'adjonction à f d'une constante de signe convenable et de valeur absolue prise assez grande permet de se ramener toujours au cas où f a un signe constant et où $f_0 \neq 0$.

La substitution de la fonction $\frac{1}{f}$ à la fonction f permet de passer d'un champ scalaire de première espèce à un champ scalaire de seconde espèce pour lequel f a une valeur nulle à l'infini. Inversement, si f a une valeur finie l à l'infini, la considération de la fonction $\frac{1}{f-l}$ ou $\frac{1}{l-f}$ au lieu de la fonction f fait passer d'un champ scalaire de seconde espèce à un champ de première espèce. Comme les surfaces de niveau $f = C$ sont aussi celles de tout champ scalaire $F(f)$, F étant une fonction quelconque de f, elles restent les mêmes dans les transformations que l'on fait subir à la fonction scalaire f.

Cette conservation des surfaces de niveau sera mise à profit pour établir commodément certaines de leurs propriétés grâce au choix d'un champ scalaire approprié, correspondant à la fonction F adoptée en conséquence.

2. Nature du champ scalaire d'après la représentation mécanique de son champ gradient. — Les *lignes de champ* du champ gradient ou *lignes intégrales* du champ scalaire, tangentes en chacun de leurs points au vecteur-champ $\vec{W}$ correspondant, passent par le centre O du champ où f présente un extremum, car les équations différentielles

$$\frac{dx}{f'_x} = \frac{dy}{f'_y} = \frac{dz}{f'_z} \tag{2}$$

qui les définissent, s'écrivent

$$f'_y\,dx - f'_x\,dy = 0, \qquad f'_z\,dy - f'_y\,dz = 0, \tag{2 bis}$$

et sont vérifiées en O où $f'_x = f'_y = f'_z = 0$.

Sur chaque ligne de champ, orientée dans le sens de $\vec{W}$, pour laquelle les cosinus directeurs de sa demi-tangente positive sont

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{f'_x}{W}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{f'_y}{W}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{f'_z}{W}, \tag{3}$$

où

$$W = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{\Delta_1 f}, \qquad \text{avec } \Delta_1 f = f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z \qquad (\textit{opérateur de Lamé}), \tag{4}$$

f est une fonction de l'abscisse curviligne s (comptée à partir de O) dont la dérivée est positive, car elle a pour valeur

$$\frac{df}{ds} = f'_x \frac{dx}{ds} + f'_y \frac{dy}{ds} + f'_z \frac{dz}{ds} = W; \tag{5}$$

le long d'une ligne de champ, $\vec{W}$ est dirigé dans le sens des f croissants, qui est celui des s croissants sur cette ligne.

Le champ $\vec{W}$ et la ligne de champ correspondante sont dirigés vers le centre O si f y est maxima, en sens opposé si f y est minima. Le champ

scalaire et le centre O sont dits *attractifs* dans le premier cas, par une extension évidente du cas où le champ gradient est un champ de forces dérivant de la *fonction des forces* f ou *du potentiel* $-f$, *révulsifs* dans le second cas.

Selon qu'il est attractif ou répulsif, le centre constitue une *position d'équilibre stable* ou *d'équilibre instable* pour un point matériel libre soumis à l'action d'un tel champ de forces, la force qu'il subit de la part de ce champ tendant à le ramener en O dans le premier cas, à l'en éloigner dans le second cas, pour peu qu'il en soit écarté. De là se déduit le théorème de Dirichlet relatif à la stabilité de l'équilibre en un point où le potentiel est minimum.

3. **Les quatre cas fondamentaux. Réduction de l'un à l'autre.** — f ayant un signe constant déterminé (cas auquel on peut toujours se ramener comme il a été précisé au n° 1 et en changeant en outre f en $-f$), tous les cas possibles se réduisent aux quatre cas *fondamentaux* suivants.

Premier cas. — *Champ répulsif de première espèce* (minimum positif de f en O, $f=+\infty$ à l'infini).

Deuxième cas. — *Champ attractif de première espèce* (maximum négatif de f en O, $f=-\infty$ à l'infini).

Troisième cas. — *Champ révulsif de seconde espèce* [minimum positif de f en O, $f=l$ (valeur finie) à l'infini].

Quatrième cas. — *Champ attractif de seconde espèce* [maximum positif de f en O, $f=l$ (valeur finie) à l'infini].

Le passage de l'un à l'autre de ces cas s'opère par le changement de f en

$-f$	pour passer de l'un à l'autre des deux premiers cas,			
$\frac{1}{f}$	»	»	»	deux derniers cas,
$\frac{1}{f-l}$	»	»	»	premier et quatrième cas,
$\frac{1}{l-f}$	»	»	»	deuxième et troisième cas.

La réduction des trois derniers cas au premier, qui est souvent le plus intéressant, lorsque le minimum f_0 est nul, se fait en prenant comme fonction définissant le champ scalaire, une fonction homographique appropriée de f égale à f_0-f, si l'on se trouve dans le second cas, à $\frac{f_0-f}{(f_0-l)(f-l)}$ si l'on part du troisième ou du quatrième cas.

Le premier cas convient à l'étude des surfaces de niveau à distance finie, le troisième à leur étude à grande distance du centre.

4. Étude locale du champ scalaire en un point. — Le long d'une demi-droite Δ, de cosinus directeurs λ, μ, ν, issue d'un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ en lequel f prend la valeur C_0, $f(x, y, z)$ est une fonction de la distance ρ à M_0, de la forme $F(\rho) = f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho)$, dont la dérivée première est

$$\frac{df}{d\rho} = \lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = W\cos\theta, \tag{6}$$

θ étant l'angle de Δ avec $\overrightarrow{W}$ (pris en un point de Δ) et dont la dérivée seconde est

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} = \lambda\frac{df'_x}{d\rho} + \mu\frac{df'_y}{d\rho} + \nu\frac{df'_z}{d\rho}.$$

Or

$$\frac{df'_x}{d\rho} = \lambda f''_{x^2} + \mu f''_{xy} + \nu f''_{xz} = \Phi_\lambda,$$

Φ_λ désignant la demi-dérivée partielle par rapport à λ de la *forme quadratique fondamentale*

$$\Phi(\lambda, \mu, \nu) = \lambda^2 f''_{x^2} + \mu^2 f''_{y^2} + \nu^2 f''_{z^2} + 2\lambda\mu f''_{xy} + 2\mu\nu f''_{yz} + 2\nu\lambda f''_{zx}. \tag{7}$$

On trouverait de même

$$\frac{df'_y}{d\rho} = \Phi_\mu, \qquad \frac{df'_z}{d\rho} = \Phi_\nu.$$

Comme, d'après l'identité d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$\lambda\Phi_\lambda + \mu\Phi_\mu + \nu\Phi_\nu = \Phi(\lambda, \mu, \nu),$$

l'expression de la dérivée seconde de f se réduit à

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} = \Phi(\lambda, \mu, \nu). \tag{8}$$

Au point $M(x, y, z)$, où Δ perce la surface de niveau $f = C$, on a

$$C - C_0 = \rho\left(\frac{df}{d\rho}\right)_0 + \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{d^2 f}{d\rho^2}\right)_0 + \ldots,$$

ou

$$C - C_0 = \rho\left[W_0\cos\theta_0 + \frac{\rho}{2}\Phi_0(\lambda, \mu, \nu)\right] + \ldots,$$

W_0, θ_0 et Φ_0 désignant les valeurs de W, θ et Φ en M_0. Au voisinage de M_0, pour ρ très petit (pris comme infiniment petit principal), on a, au troisième ordre près,

$$C - C_0 = \rho\left[W_0\cos\theta_0 + \frac{\rho}{2}\Phi_0(\lambda, \mu, \nu)\right]. \tag{9}$$

ρ étant essentiellement positif, la différence $C - C_0$ a le signe de la projection $W_0\cos\theta_0$ de $\overrightarrow{W_0}$ sur la direction Δ si elle n'est pas nulle, c'est-à-dire

si $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ et $W_0 \neq 0$. Par suite $C > C_0$ si $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que la fonction f croît avec ρ le long de toute demi-droite faisant un angle aigu avec la demi-normale, orientée dans le sens du champ gradient, à la surface du niveau (S_0) passant par M_0.

Si $W_0 \cos\theta_0 = 0$, soit que $W_0 = 0$ (f stationnaire en M_0 confondu alors avec O) soit que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, cas pour lequel Δ est tangente en M_0 à (S_0) sur laquelle se trouve M, $C - C_0$ a le signe de la forme quadratique

$$\Phi_0(X, Y, Z) = \rho^2 \Phi(\lambda, \mu, \nu),$$
$$X = \lambda\rho, \qquad Y = \mu\rho, \qquad Z = \nu\rho$$

étant les coordonnées de M par rapport aux axes de coordonnées transportés parallèlement à eux-mêmes en M pris comme nouvelle origine.

Si $\Phi_0(X, Y, Z)$ a un signe constant quelle que soit la direction de la tangente M_0M à (S_0) en M_0, le point M voisin de M_0 est du même côté du plan tangent (Π_0) à (S_0) en M_0, ce qui revient à dire qu'une petite portion de la surface environnant le point de contact est tout entière du même côté du plan tangent : *la surface du niveau est convexe au point* M_0.

La réciproque est immédiate.

5. **Variation de f avec r le long d'un rayon central.** — *Un rayon central* de cosinus directeurs λ, μ, ν, c'est-à-dire une demi-droite issue du centre O du champ, ne perce qu'en un point toute surface de niveau $f = C$, car le long de ce rayon $f(x, y, z) = f(\lambda r, \mu r, \nu r)$ est une fonction continue monotone de $r = OM$, qui passe donc une seule fois par la valeur C comprise entre l'extremum f_0 et la valeur de f à l'infini. Quelle que soit sa direction, toute droite passant par O traverse une surface de niveau quelconque en deux points à distance finie situés de part et d'autre de O : une surface de niveau est une surface fermée entourant le centre O. Comme elles ne se coupent pas, puisque le champ scalaire f est uniforme, *les surfaces de niveau sont des surfaces fermées entourant le centre du champ et intérieures les unes aux autres.*

D'après le numéro précédent, la dérivée de la fonction f le long du rayon central considéré (λ, μ, ν) est $\frac{df}{dr} = \vec{W} \cos\theta$, θ étant l'angle de $\vec{W}$ et du rayon.

Elle a un signe constant pour tout r fini non nul, puisque cette fonction est monotone : si f croît avec r le long du rayon, $\vec{W}$ fait avec lui un angle $\theta < \frac{\pi}{2}$; si f décroît avec $\frac{1}{r}$, $\theta > \frac{\pi}{2}$.

La courbe représentative de $F(r) = f(\lambda r, \mu r, \nu r)$ n'a un point d'inflexion, pour lequel $F''(r) = \Phi(\lambda, \mu, \nu)$ s'annule (une seule fois), que si f a une valeur finie pour $r = \infty$, c'est-à-dire si le champ scalaire est de deuxième espèce.

6. Variation de f avec r le long d'une ligne de champ. — f croissant avec r sur tout rayon dans le cas d'un champ répulsif, il en est évidemment de même le long d'une ligne de champ, ce qu'il est d'ailleurs facile d'établir.

En effet, sur cette ligne, f est une fonction de l'abscisse curviligne $s = \widehat{OM}$, comptée à partir du centre, dont la dérivée est

$$\frac{df}{dr} = W\frac{ds}{dr},$$

d'après (5).

Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la demi-tangente positive à la ligne de champ (n° 2),

$$dx = \alpha\, ds, \qquad dy = \beta\, ds, \qquad dz = \gamma\, ds,$$

d'où $r\,dr = p\,ds$,

$$p = \alpha x + \beta y + \gamma z = r\cos\theta$$

étant la distance du centre O au plan tangent en M à la surface de niveau (S) passant par ce point. Par suite

$$\frac{dr}{ds} = \cos\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{df}{dr} = W\cos\theta,$$

expression de $\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{df}{dr}$ le long du rayon OM, positive puisque f croît avec r le long du rayon : *f croît avec r le long d'une ligne de champ,* ce qui revient à dire que le point décrivant la ligne de champ dans le sens des f croissants s'éloigne indéfiniment du centre du champ.

Conclusion contraire dans le cas d'un champ attractif.

7. Lignes isoclines du champ. — 1° Lorsqu'un point $M(x, y, z)$ décrit une ligne (L), son *image* $m(u, v, w)$, extrémité du vecteur $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{W}$, décrit une ligne (l) qui correspond à (L) par la transformation ponctuelle biunivoque définie par les relations (1). Par exemple si (L) est une ligne de champ, (l) est une courbe située sur le demi-cône directeur des tangentes à (L) dont le sommet est O.

Réciproquement, à toute ligne (l) décrite par m correspond, par la transformation inverse de (1), une ligne (L) décrite par M. C'est ainsi qu'à un rayon central Δ, de cosinus directeurs *donnés* α, β, γ, pris comme lieu de m, correspond une *ligne isocline* qui est le lieu des points M où $\overrightarrow{W}$ est parallèle à Δ. Le long d'une isocline, les tangentes aux lignes de champ qu'elle rencontre sont parallèles à une direction fixe Δ. Cette ligne est le lieu des points des surfaces de niveau où le plan tangent est parallèle à une direction de plans fixe normale à une direction donnée (α, β, γ). Ses équations sont

$$\frac{u}{\alpha} = \frac{v}{\beta} = \frac{w}{\gamma} = W, \tag{10}$$

où u, v, w ont les valeurs (1).

En remplaçant $1-\alpha^2$, $1-\beta^2$, $1-\gamma^2$ par $\beta^2+\gamma^2$, $\gamma^2+\alpha^2$, $\alpha^2+\beta^2$ dans les relations

$$(11)\qquad u=\alpha W,\qquad v=\beta W,\qquad w=\gamma W,$$

où

$$W=\alpha u+\beta v+\gamma w,$$

ces équations s'écrivent

$$\begin{aligned}(\beta^2+\gamma^2)u-\alpha\beta v-\alpha\gamma w&=0,\\ -\alpha\beta u+(\gamma^2+\alpha^2)v-\beta\gamma w&=0,\\ -\gamma\alpha u-\gamma\beta v+(\alpha^2+\beta^2)w&=0,\end{aligned}$$

qui, grâce aux expressions (1) de u, v, w, définissent trois surfaces dont l'isocline considérée est l'intersection commune, car ces équations, linéaires et homogènes en u, v, w, ne sont pas indépendantes, leur déterminant (symétrique) étant

$$\begin{vmatrix}\beta^2+\gamma^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma\\ -\alpha\beta & \gamma^2+\alpha^2 & -\beta\gamma\\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & \alpha^2+\beta^2\end{vmatrix}=0.$$

2° Déterminons la demi-tangente à l'isocline orientée dans le sens des f croissants. Soit (dx, dy, dz) un déplacement élémentaire sur cette ligne.

Par (1), on a

$$(12)\qquad \begin{cases} du=f''_{x^2}dx+f''_{xy}dy+f''_{xz}dz,\qquad dv=f''_{xy}dx+f''_{y^2}dy+f''_{yz}dz,\\ dw=f''_{xz}dx+f''_{yz}dy+f''_{z^2}dy;\end{cases}$$

par (11),

$$(13)\qquad du=\alpha\,dW,\qquad dv=\beta\,dW,\qquad dw=\gamma\,dW,$$

d'où le système linéaire en $\frac{dx}{dW}$, $\frac{dy}{dW}$, $\frac{dz}{dW}$,

$$\begin{cases} f''_{x^2}\frac{dx}{dW}+f''_{xy}\frac{dy}{dW}+f''_{xz}\frac{dz}{dW}=\alpha,\\ f''_{xy}\frac{dx}{dW}+f''_{y^2}\frac{dy}{dW}+f''_{yz}\frac{dz}{dW}=\beta,\\ f''_{xz}\frac{dx}{dW}+f''_{yz}\frac{dy}{dW}+f''_{z^2}\frac{dz}{dW}=\gamma,\end{cases}$$

dont le déterminant est $H(f)\neq 0$ et qui admet la solution

$$(14)\qquad \begin{cases} -H(f)\frac{dx}{dW}=\begin{vmatrix}\alpha & f''_{xy} & f''_{xz}\\ \beta & f''_{y^2} & f''_{yz}\\ \gamma & f''_{yz} & f''_{z^2}\end{vmatrix},\qquad -H(f)\frac{dy}{dW}=\begin{vmatrix}f''_{x^2} & \alpha & f''_{xz}\\ f''_{xy} & \beta & f''_{yz}\\ f''_{xz} & \gamma & f''_{z^2}\end{vmatrix},\\ -H(f)\frac{dz}{dW}=\begin{vmatrix}f''_{x^2} & f''_{xy} & \alpha\\ f''_{xy} & f''_{y^2} & \beta\\ f''_{xz} & f''_{yz} & \gamma\end{vmatrix}.\end{cases}$$

Ces déterminants peuvent être pris comme paramètres directeurs de la tangente à l'isocline qui sont proportionnels à dx, dy, dz. Ils définissent les projections sur les axes d'un vecteur $\vec{\tau}$ tangent à l'isocline, dont la projection

$$\delta = \alpha \frac{dx}{dW} + \beta \frac{dy}{dW} + \gamma \frac{dz}{dW}$$

sur Δ est donnée par

$$(15) \qquad -H(f)\,\delta = \begin{vmatrix} & & & \alpha \\ & H(f) & & \beta \\ & & & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

δ prend une expression très simple lorsqu'on fait intervenir la distance $p = \alpha x + \beta y + \gamma z$ du centre O au plan tangent à la surface du niveau au point $M(x, y, z)$ où l'isocline traverse cette surface.

En effet, le long de l'isocline, $dp = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz$, d'où

$$(16) \qquad \delta = \frac{dp}{dW}.$$

Or, par (11), $df = u\,dx + v\,dy + w\,dz$ devient

$$(17) \qquad df = W\,dp$$

et (16) s'écrit encore

$$(18) \qquad \delta = \frac{df}{W\,dW}.$$

3° L'isocline étant orientée dans le sens des f croissants, sa demi-tangente positive fait un angle aigu avec $\vec{W}$, c'est-à dire avec la normale (α, β, γ) à (S). W positif, qui a un minimum nul en O, croissant lorsque M sur l'isocline part du centre et s'en éloigne, δ qui est du signe de dW grâce à (18) si $df > 0$, est positif dans le seul cas considéré ici où le champ f est répulsif : $\vec{\tau}$ est dirigé dans le sens des f croissants au voisinage du centre.

4° Le signe de δ est d'ailleurs celui de la forme quadratique $\Phi(\lambda, \mu, \nu)$, où λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la tangente à l'isocline.

En effet, pour le déplacement élémentaire (dx, dy, dz) sur l'isocline, par (12), (13) et (16) on a

$$\Phi(dx, dy, dz) = du\,dx + dv\,dy + dw\,dz = dp\,dW = (dW)^2\,\delta.$$

Comme

$$dx = \lambda\,d\sigma, \qquad dy = \mu\,d\sigma, \qquad dz = \nu\,d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément d'arc sur l'isocline,

$$\Phi(dx, dy, dz) = \Phi(\lambda, \mu, \nu)\,d\sigma^2,$$

d'où, finalement,

$$\Phi(\lambda, \mu, \nu) = \left(\frac{dW}{d\sigma}\right)^2 \delta,$$

qui est du signe de δ.

5° D'après (17), p croît avec f sur l'isocline : dans le cas du champ scalaire répulsif, le plan tangent en $M(x, y, z)$ à la surface du niveau correspondante (S) s'éloigne de O en même temps que M décrivant l'isocline. Ce plan est normal à la direction Δ à laquelle correspond l'isocline considérée. *Une isocline n'est donc traversée qu'en un point par tout plan normal à la direction correspondante.* La transformation ponctuelle biunivoque (1) associant une seule ligne isocline à une direction donnée, *il n'existe pas de plan tangent à deux surfaces de niveau.* De cette proposition résultera la convexité des surfaces de niveau établie plus loin.

L'isocline correspondant à une droite passant par le centre O formée par les deux isoclines correspondant aux deux directions opposées sur la droite, traverse chaque surface de niveau (S) en deux points situés de part et d'autre de O : *toute surface de niveau a donc toujours deux plans tangents parallèles quelle que soit leur direction.*

Cette propriété est corrélative de celle qu'a toute surface de niveau d'être percée en deux points par toute droite passant par le centre du champ.

Il suffit pour l'établir de considérer le point μ corrélatif du plan tangent (π) à (S) en M. Ce point, qui a pour coordonnées

$$\xi = -\frac{\alpha}{p}, \qquad \eta = -\frac{\beta}{p}, \qquad \zeta = -\frac{\gamma}{p},$$

est l'antipôle de (π) par rapport à la sphère unité Ω de centre O. Si M décrit (S), μ décrit la surface corrélative (Σ), symétrique par rapport à O de la transformée de (S) par polaires réciproques par rapport à la sphère Ω. Le centre O étant le corrélatif du plan à l'infini, à deux plans tangents parallèles à (S) correspondent les deux points corrélatifs de rencontre de (Σ) avec une droite passant par O, conjuguée de la droite à l'infini des deux plans : (Σ) est une surface fermée entourant O. Aux deux points d'intersection de (S) avec une droite D passant par O correspondent deux plans corrélatifs tangenst à (Σ) et parallèles puisqu'ils passent par la droite conjuguée de D, située dans le plan de l'infini (conjugué de O). Ainsi les deux surfaces fermées (S) et (Σ) entourant le centre O sont telles qu'aux deux points d'intersection de l'une avec une droite passant par O correspondent deux plans tangents parallèles à l'autre, d'ailleurs perpendiculaires à la droite considérée.

8. **Section plane d'une surface de niveau.** — La surface fermée (S) est coupée par un plan quelconque (P) suivant une ou plusieurs courbes fermées avec ou sans point double (ou multiple). Sur l'une des aires planes délimitées par ces courbes et sur son contour, la fonction f est continue. Comme elle est constante le long du contour, f admet au *moins*, en un point intérieur à cette aire, un extremum qui, dans l'hypothèse du champ scalaire répulsif, est un minimum

où un maximum suivant que l'aire plane considérée est intérieure ou extérieure à (S), car f est alors maxima ou minima sur le contour de l'aire.

1° *Au point* M_0 *correspondant à l'extremum de* f *sur l'aire plane considérée, le plan* (P) *est tangent à la surface de niveau correspondante* (S_0).

En effet, si

$$x = a_1\xi + b_1\eta + c_1, \qquad y = a_2\xi + b_2\eta + c_2, \qquad z = a_3\xi + b_3\eta + c_3,$$

sont les équations paramétriques du plan (P), ξ, η étant deux paramètres et les a, b, c des constantes données, l'équation cartésienne

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

est la condition de compatibilité

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 - x \\ a_2 & b_2 & c_2 - y \\ a_3 & b_3 & c_3 - z \end{vmatrix} = 0$$

des trois équations paramétriques (linéaires en ξ, η), de sorte que les coefficients directeurs du plan (P) sont

$$A = a_2b_3 - a_3b_2, \qquad B = a_3b_1 - a_1b_3, \qquad C = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Dans le plan (P), f est une fonction continue de ξ, η de la forme

$$G(\xi, \eta) = f(a_1\xi + b_1\eta + c_1,\ a_2\xi + b_2\eta + c_2,\ a_3\xi + b_3\eta + c_3),$$

dont les dérivées partielles

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = a_1 f'_x + a_2 f'_y + a_3 f'_z, \qquad \frac{\partial G}{\partial \eta} = b_1 f'_x + b_2 f'_y + b_3 f'_z$$

s'annulent en M où f présente un extremum. Ce point est ainsi déterminé par les deux équations en ξ, η,

$$a_1 f'_x + a_2 f'_y + a_3 f'_z = 0, \qquad b_1 f'_x + b_2 f'_y + b_3 f'_z = 0,$$

qui sont linéaires et homogènes en f'_x, f'_y, f'_z et s'écrivent

$$\frac{f'_x}{A} = \frac{f'_y}{B} = \frac{f'_z}{C},$$

exprimant ainsi que le plan (P) est tangent à la surface de niveau (S_0) au point M_0 considéré.

2° *Le point* M_0 *correspondant à un extremum de* f *est unique dans* (P).

Sinon (P) serait tangent à autant de surfaces de niveau qu'il y a de points rendant f extremum, ce qui est contraire à la propriété établie au n° 7.

3° M_0 *est intérieur à* (S) *et correspond au minimum de* f *sur* (P).

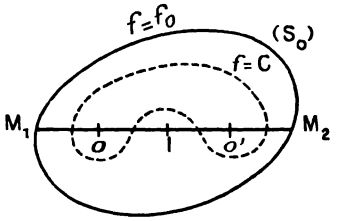
Car chacune des aires planes délimitées par l'intersection de (P) et de (S) comportant un point intérieur unique où f est extremum, leur nombre est celui des points correspondant aux extrema de f et en lesquels (P) serait tangent à autant de surfaces de niveau, de sorte que, en raison de ce qui précède, la section de (S) par (P) se réduit à une aire plane intérieure à (S), limitée par une courbe fermée *convexe* sans point double.

9. Convexité des surfaces de niveau. — Le raisonnement qui précède montre que tout plan (P) tangent à une surface de niveau (S) n'a pas d'autre point commun avec elle que le point de contact pour lequel la fonction f dans (P) est minima (toujours dans le cas d'un champ répulsif), c'est-à-dire que le plan (P) est tout entier extérieur à (S) : *les surfaces de niveau d'un champ scalaire centré sont des surfaces fermées convexes intérieures les unes aux autres et entourant le centre du champ.*

Réciproquement, un champ scalaire, défini et continu dans tout l'espace, dont les surfaces de niveau sont des surfaces fermées convexes intérieures les unes aux autres, est un champ scalaire centré.

C'est évident au point de vue géométrique : les surfaces de niveau (S) s'entourant les unes les autres sont forcément réductibles à un point qui

Fig. 1.



représente une surface de niveau évanouissante pour laquelle la fonction f est maxima ou minima et qui constitue le centre du champ. Cette propriété peut servir de définition géométrique d'un champ scalaire centré. Elle s'établit aisément du point de vue analytique. La fonction $f(x, y, z)$ définissant le champ scalaire, continue sur une surface de niveau quelconque (S_0) et dans la région intérieure où elle prend des valeurs inférieures ou supérieures à la valeur f_0 qu'elle acquiert sur (S_0), admet au moins en un point O intérieur à (S_0), un minimum ou un maximum.

Cet extremum est unique. Supposons, en effet, qu'il y ait deux points O et O′ intérieurs à (S_0), pour lesquels f serait minima, en supposant que l'on ait $f < f_0$ à l'intérieur de (S_0). Du fait de la continuité de f, il existerait sur le segment OO′ un point I pour lequel f admettrait un maximum M inférieur à f_0.

Si la droite OO′ perce (S_0) en M_1 et M_2 respectivement du même côté de I que O et O′, f prendrait en quatre points intercalés entre les points M_1, O, I, O′, M_2 une valeur C quelconque comprise entre le plus grand des minima de f en O et O′ et le maximum M. La droite OO′ rencontrerait en ces quatre points la surface de niveau $f = C$ qui ne serait donc pas convexe. L'existence des deux points où cette surface rencontre les segments OM_1 et $O'M_2$ résultant de celle des minima de f en O et O′, les deux autres points de rencontre avec le segment OO′ doivent disparaître, ce qui exige la coïncidence des deux points O et O′, c'est-à-dire l'unicité du minimum de f à l'intérieur d'une (S) quelconque.

De ce qui précède il résulte *qu'une surface $f(x, y, z) = 0$ est une surface fermée convexe s'il existe un point unique où f est maxima ou minima et si le hessien de f a un signe constant dans une région englobant la surface.* Le point en lequel f admet un extremum est facile à déterminer comme l'unique solution du système

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f' = 0.$$

Le raisonnement précédent et celui du n° 5 montrent que :

Les surfaces de niveau d'un champ scalaire uniforme, à hessien non nul, défini par une fonction f admettant des extrema en des points isolés, sont des surfaces fermées qui ne sont convexes que lorsqu'elles entourent un seul de ces points. D'où un moyen de reconnaître si une surface $f(x, y, z) = 0$ est fermée et, éventuellement, si elle est convexe, les signes des extrema des f renseignant sur la position relative des points correspondants et de la surface considérée.

10. **Surfaces de niveau et lignes de champ au voisinage du centre.** — L'application des résultats obtenus au n° 4 à la fonction considérée au voisinage immédiat du centre O où elle prend la valeur f_0 montre que la différence $f - f_0$, dont le signe est constant, peut être représentée, à un infiniment petit du troisième ordre près, par sa valeur principale $\frac{1}{2}\Phi_0(x, y, z)$, qui est donc une forme quadratique définie puisqu'elle a le signe de $f - f_0$, et dont les coefficients sont les valeurs au centre O des dérivées partielles secondes de f.

Avec cette approximation, valable seulement si la distance au centre $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est très petite vis-à-vis de l'unité de longueur choisie, les surfaces de niveau, près de O, se confondent avec les ellipsoïdes homothétiques $\Phi_0(x, y, z) = \text{const.}$, qui ont pour centre O et dont les axes définissent les *axes centraux du champ*. Ces axes peuvent être pris avantageusement comme axes de coordonnées si l'on sait résoudre *l'équation en* S

$$E_0(S) = \begin{vmatrix} f''_{x_0^2} - S & f''_{x_0 y_0} & f''_{x_0 z_0} \\ f''_{x_0 y_0} & f''_{y_0^2} - S & f''_{y_0 z_0} \\ f''_{x_0 z_0} & f''_{y_0 z_0} & f''_{z_0^2} - S \end{vmatrix} = 0$$

ou sous forme développée,

$$E_0(S) = S^3 - (\Delta f)_0 S^2 + [(f''^2_{x_0} f''^2_{y_0} + f''^2_{y_0} f''^2_{z_0} + f''^2_{z_0} f''^2_{x_0}) - (f''^2_{x_0 y_0} + f''^2_{y_0 z_0} + f''^2_{z_0 x_0})]S - H_0(f) = 0,$$

où $(\Delta f)_0 = f''^2_{x_0} + f''^2_{y_0} = f''^2_{z_0}$ est le laplacien de f en O et $H_0(f)$ le hessien correspondant de f : à chaque racine $S_i (i = 1, 2, 3)$ de cette équation correspond, comme on sait, une direction principale dont les cosinus directeurs λ_i, μ_i, ν_i constituent la solution du système linéaire homogène

$$\Phi_{\lambda_i} = \lambda_i S_i, \qquad \Phi_{\mu_i} = \mu_i S_i, \qquad \Phi_{\nu_i} = \nu_i S_i, \tag{19}$$

Φ_{λ_i}, Φ_{μ_i}, Φ_{ν_i} étant les demi-dérivées partielles de

$$\Phi_0(\lambda_i, \mu_i, \nu_i) = \lambda_i \Phi_{\lambda_i} + \mu_i \Phi_{\mu_i} + \nu_i \Phi_{\nu_i} = S_i.$$

Ces considérations présentent le plus grand intérêt dans l'étude des petits mouvements d'un point matériel libre autour d'une position d'équilibre stable dans un champ de forces dérivant d'un potentiel. En particulier, si, pour une raison quelconque, le mouvement de ce point matériel est plan, il est elliptique.

Les trois racines $S_1 = \Phi_0(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $S_2 = \Phi_0(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$, $S_3 = \Phi_0(\lambda_3, \mu_3, \nu_3)$ de l'équation en S sont donc de même signe.

Si $a = \frac{1}{\sqrt{|S_1|}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{|S_2|}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{|S_3|}}$, l'équation générale des ellipsoïdes de niveau très petits s'écrit

$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} + \frac{z^2}{(kc)^2} = 1,$$

le paramètre positif k étant pris très petit, car il est nul pour le centre O en lequel s'évanouissent les surfaces de niveau lorsque $f \to f_0$.

Les lignes du champ f sont osculatrices en O aux trajectoires orthogonales aux ellipsoïdes précédents, qui sont les lignes du champ scalaire centré répulsif

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

dont les équations différentielles $a^2 \frac{dx}{x} = b^2 \frac{dy}{y} = c^2 \frac{dz}{z}$ s'intègrent immédiatement et fournissent leurs équations finies

$$\frac{x^{a^2}}{A} = \frac{y^{b^2}}{B} = \frac{z^{c^2}}{C},$$

deux seulement des trois constantes A, B, C introduites par l'intégration étant arbitraires.

Ces équations seront donc les équations approchées des lignes de champ qu'elles représenteraient au voisinage du centre *si l'on connaissait les axes centraux du champ* auxquelles elles sont rapportées.

Il semble que l'on éviterait la résolution de l'équation en S qu'exige la détermination de ces axes, en cherchant directement les équations finies des lignes du champ *elliptique* $\Phi_0(x, y, z)$ rapportées aux axes primitifs Ox, Oy, Oz. Ces équations s'obtiennent par l'intégration des équations différentielles de telles lignes

$$\frac{dx}{\Phi_x^0} = \frac{dy}{\Phi_y^0} = \frac{dz}{\Phi_z^0},$$

qui forment le système linéaire en x, y, z,

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \qquad \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \qquad \frac{dz}{dt} = a_3 x + b_3 y + c_3 z,$$

où

$$a_1 = f''_{x_0^2}, \qquad b_2 = f''_{y_0^2}, \qquad c_3 = f''_{z_0^2}, \qquad a_2 = b_1 = f''_{x_0 y_0}, \qquad b_3 = c_2 = f''_{y_0 z_0}, \qquad a_3 = c_1 = f''_{z_0 x_0}.$$

Le changement de variables $x = Xz$, $y = Yz$ ramène ce système à l'équation de Jacobi [1]

$$(a_3 X + b_3 Y + c_3)(X\,dY - Y\,dX) - (a_1 X + b_1 Y + c_1)\,dY + (a_2 X + b_2 Y + c_2)\,dX = 0,$$

qui s'écrit très simplement $\Delta(X, Y, O) = 0$, si l'on fait jouer à z, dans l'expression

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ \Phi_x^0 & \Phi_y^0 & \Phi_z^0 \end{vmatrix},$$

le rôle d'une variable d'homogénéité (dans le plan des X, Y).

La reduction de l'équation de Jacobi à une équation homogène, dont l'intégration est immédiate, exige la résolution de l'équation du 3e degré en S

$$\begin{vmatrix} c_3 - S & a_3 & b_3 \\ c_1 & a_1 - S & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 - S \end{vmatrix} = 0,$$

que des échanges convenables de lignes et de colonnes font apparaître comme l'équation $E_0(S) = 0$ dont on voulait éviter la résolution.

11. Quasi-sphéricité des surfaces de niveau à grande distance du centre. — Le plan de l'infini, considéré comme une sphère de rayon infini centrée en O, représentant la surface de niveau à l'infini, les surfaces de niveau tendent à devenir sphériques lorsqu'elles s'éloignent indéfiniment du centre du champ. Précisons avec quelle approximation une surface de niveau (S) peut être confondue avec une sphère de très grand rayon. La surface fermée convexe (S) est comprise entre deux sphères de centre O qui lui sont tangentes, intérieurement, les rayons r_0 de la plus petite et R_0 de la plus grande de ces sphères étant respectivement la distance minima et la distance maxima de O à un point de (S).

---

[1] Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, nos 367, 377 et 422.

Le rapport $\sigma = \frac{R_0 - r_0}{r_0}$ peut servir à caractériser l'*écart de sphéricité* de (S) car il tend vers zéro lorsque r_0 augmente indéfiniment. A une distance de O suffisamment grande pour que ce rapport soit inférieur à un nombre positif ε donné à l'avance et pris arbitrairement petit, on peut dire que la surface de niveau fermée convexe (S) se confond, *à* ε *près*, avec une sphère de centre O et de rayon r compris entre r_0 et R_0, par exemple égal à $\frac{R_0 + r_0}{2}$.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES LIGNES DE CHAMP ET DES SURFACES DE NIVEAU.

A. — COURBURE ET TORSION DES LIGNES DE CHAMP.

12. Représentation cinématique du champ gradient [1]. — Le champ gradient $\vec{W}$ peut être considéré comme le champ de vitesses du mouvement permanent irrotationnel acyclique d'un fluide dont les lignes de courant sont les lignes intégrales du champ scalaire $f(x, y, z)$ qui représente alors le potentiel des vitesses. Les lignes de champ sont les trajectoires des diverses molécules fluides en mouvement, chacune d'elles étant la trajectoire suivie par les particules qui passent successivement avec la même vitesse $\vec{W}$ en l'un de ses points.

Elles naissent au centre O et s'y épanouissent si le potentiel des vitesses f, y est minimum : le fluide sort de O d'où il part du repos et qui est alors une *source*. Elles aboutissent et disparaissent au point O qui constitue un *puits* (ou une *source négative*) si f y est maximum. Nous n'envisagerons dans ce qui suit que le premier cas, le plus suggestif et concevable au point de vue physique, où la vitesse $\vec{W}$ tend vers une limite finie à l'infini ainsi que le potentiel des vitesses, cas qui est celui du champ répulsif de seconde espèce (n° 3).

L'étude des lignes de champ résulte de celle du mouvement d'un point matériel de masse m, représentant une molécule fluide et animé de la vitesse $\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ sur la ligne de champ qui constitue la trajectoire de cette molécule.

La demi-force vive $\frac{1}{2} m W^2$ du point matériel considéré définit une fonction spatiale de point qui, au facteur $\frac{m}{2}$ près, coincide avec l'opérateur de Lamé

$$\Delta_1 f = f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2.$$

L'équation des forces vives

$$\frac{1}{2} m W^2 = U + h,$$

(1) Paul Appel, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, nos 710, 730 et 749.

où h est la constante des forces vives, permet alors de définir une fonction des forces U qui est une nouvelle fonction de point, admettant les mêmes surfaces de niveau (*surfaces équipotentielles*) que l'opérateur de Lamé. En incorporant m dans U et h, ce qui revient à prendre $m = 1$, l'équation des forces vives se réduit à

$$W^2 = 2(U + h). \tag{20}$$

13. Lignes de champ considérées comme extrémales de l'action d'Hamilton. — Les projections sur les axe de la vitesse $\vec{W}$ du point matériel décrivant une ligne de champ sont

$$x' = \alpha W = f'_x, \qquad y' = \beta W = f'_y, \qquad z' = \gamma W = f'_z \tag{21}$$

et celles de son accélération $\vec{\Gamma}$ sont

$$x'' = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad y'' = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad z'' = \frac{\partial U}{\partial z} \tag{22}$$

(équations différentielles du mouvement),

c'est-à-dire

$$x'' = \frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial x}, \qquad y'' = \frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial y}, \qquad z'' = \frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial z} \tag{23}$$

ou, plus simplement,

$$x'' = W\Phi_\alpha, \qquad y'' = W\Phi_\beta, \qquad z'' = W\Phi_\gamma, \tag{24}$$

où

$$\Phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad \Phi_\beta = \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad \Phi_\gamma = \frac{\partial W}{\partial z} \tag{25}$$

sont les demi-dérivées partielles de la forme quadratique $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ dans laquelle α, β, γ sont les cosinus directeurs de la direction de $\vec{W}$.

De $W^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ on déduit

$$\frac{\partial W^2}{\partial x'} = 2x', \qquad \frac{\partial W^2}{\partial y'} = 2y', \qquad \frac{\partial W^2}{\partial z'} = 2z'.$$

Les équations différentielles (23) de la trajectoire décrite par le point matériel dans le champ des forces dérivant de la fonction U définie par (20) sont aussi les équations différentielles

$$\frac{\partial W^2}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W^2}{\partial x'}\right), \qquad \frac{\partial W^2}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W^2}{\partial y'}\right), \qquad \frac{\partial W^2}{\partial z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W^2}{\partial z'}\right)$$

des lignes extrémales le long desquelles l'action d'Hamilton

$$\mathcal{J} = \int_0^t W^2\, dt = \int_0^s W\, ds$$

est stationnaire ou, plus exactement, minima (principe de la moindre action) : *les lignes de champ du champ scalaire sont les extrémales de l'intégrale*

$$\mathcal{J} = \int_0^s \sqrt{\Delta_1 f}\, ds$$

minima le long de ces lignes.

L'action $\mathcal{J} = \int_0^s W\, ds$ est la circulation du vecteur champ $\vec{W}$ le long d'un arc $\widehat{OM} = s$ d'une ligne de champ.

Puisque $W\, ds = df$ d'après (4), $\mathcal{J} = f - f_0$: *l'action le long d'une ligne de champ représente la variation correspondante du potentiel de vitesses.* Elle est positive ou négative selon que le champ est répulsif ou attractif, la ligne de champ étant parcourue de O à l'infini.

14. **Trièdre de Frenet en un point d'une ligne de champ.** — Les considérations cinématiques précédentes vont nous permettre de déterminer le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion d'une ligne de champ en un de ses points.

1° *Tangente.* — La tangente MT à la ligne de champ est dirigée suivant le vecteur $\vec{W}$. Ses cosinus directeurs α, β, γ sont donnés par les relations (3) du n° 2.

2° *Binormale.* — Normale au plan osculateur qui contient la vitesse $\vec{W}$ et l'accélération $\vec{\Gamma}$, la binormale est dirigée suivant le vecteur $\vec{W} \wedge \vec{\Gamma}$, qui a pour projections sur les axes

$$A = y'z'' - z'y'', \qquad B = z'x'' - x'z'', \qquad C = x'y'' - y'x'',$$

ou, d'après (21) et (24),

$$A = W'(\beta\Phi_\gamma - \gamma\Phi_\beta), \qquad B = W'(\gamma\Phi_\alpha - \alpha\Phi_\gamma), \qquad C = W'(\alpha\Phi_\beta - \beta\Phi_\alpha).$$

Les paramètres directeurs de la binormale, proportionnels à A, B, C, peuvent être pris égaux à

$$(26) \qquad B_x = \beta\Phi_\gamma - \gamma\Phi_\beta, \qquad B_y = \gamma\Phi_\alpha - \alpha\Phi_\gamma, \qquad B_z = \alpha\Phi_\beta - \beta\Phi_\alpha,$$

qui sont les composantes suivant les axes d'un vecteur $\vec{B}$ qui a pour grandeur

$$(27) \qquad B = \sqrt{\Phi_\alpha^2 + \Phi_\beta^2 + \Phi_\gamma^2 - \Phi^2},$$

ainsi qu'il résulte de l'identité de Lagrange

$$\begin{aligned}(\beta\Phi_\gamma - \gamma\Phi_\beta)^2 + (\gamma\Phi_\alpha - \alpha\Phi_\gamma)^2 + (\alpha\Phi_\beta - \beta\Phi_\alpha)^2 \\ \equiv (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\Phi_\alpha^2 + \Phi_\beta^2 + \Phi_\gamma^2) - (\alpha\Phi_\alpha + \beta\Phi_\beta + \gamma\Phi_\gamma)^2,\end{aligned}$$

où

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha\Phi_\alpha + \beta\Phi_\beta + \gamma\Phi_\gamma = \Phi \qquad \text{(identité d'Euler).}$$

En divisant les expressions (26) par (27) on obtient les cosinus directeurs de la binormale en tant que projections sur les axes du vecteur unitaire $\vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}$.

3° *Normale principale.* — A la normale principale dirigée suivant le produit vectoriel $\vec{B} \wedge \vec{W}$ peuvent être attribués les paramètres directeurs

$$z' B_y - y' B_z = W(\Phi_\alpha - \alpha\Phi),$$
$$x' B_z - z' B_x = W(\Phi_\beta - \beta\Phi),$$
$$y' B_x - x' B_y = W(\Phi_\gamma - \gamma\Phi),$$

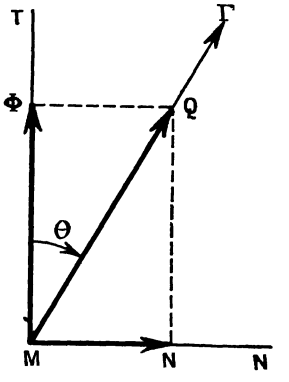
ou simplement

$$(28) \qquad Nx = \Phi_\alpha - \alpha\Phi, \quad Ny = \Phi_\beta - \beta\Phi, \quad Nz = \Phi_\gamma - \gamma\Phi,$$

qui sont les projections sur les axes d'un vecteur $\vec{N}$ de grandeur $N = B$, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

Les quotients des expressions (28) par (27) donnent les cosinus directeurs de la normale principale, projections sur les axes du vecteur unitaire $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{N}$.

Fig. 2.



4° *Remarque.* — Si $\vec{Q} = \overrightarrow{\text{grad}}\, W$ est le vecteur de composantes Φ_α, Φ_β, Φ_γ données par les équations (25), sa projection sur la tangente est un vecteur $\vec{\Phi}$ dont la mesure algébrique sur la tangente est

$$\alpha\Phi_\alpha + \beta\Phi_\beta + \gamma\Phi_\gamma = \Phi$$

et dont les composantes sont $\alpha\Phi$, $\beta\Phi$, $\gamma\Phi$.

Les relations (28) montrent que $\vec{N} = \vec{Q} - \vec{\Phi}$ est la projection sur la normale principale du vecteur $\vec{Q}$, dirigé suivant $\vec{\Gamma} = W\vec{Q}$, comme il résulte des équations (24). La grandeur de $\vec{Q}$ étant $Q = \sqrt{\Phi_\alpha' + \Phi_\beta' + \Phi_\gamma'}$, celle de $\vec{N}$ est bien $N = \sqrt{Q^2 - \Phi^2} = B$.

L'angle θ que fait l'accélération $\vec{\Gamma}$ avec la vitesse $\vec{W}$ étant défini par $\cos\theta = \frac{\Phi}{Q}$, du signe de $\Phi = \Phi(\alpha, \beta, \gamma)$, le mouvement du mobile animé de la vitesse $\vec{W}$ en M sur la ligne de champ est accéléré $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ ou retardé $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$, c'est-à-dire que W croît ou décroît dans le sens des f croissants, suivant que $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ est positif ou négatif.

15. **Courbure d'une ligne de champ.** — 1° L'accélération normale, obtenue en projetant l'égalité vectorielle $\vec{\Gamma} = W\vec{Q}$ sur la normale principale, étant $\Gamma_n = WB$ d'une part et $\Gamma_n = \frac{W^2}{R}$ d'autre part, le rayon de courbure R de la ligne de champ en M est donné par

$$\frac{1}{R} = \frac{B}{W}, \tag{29}$$

où l'on remplace W par $\sqrt{\Delta_1 f}$, α, β, γ par leurs valeurs (3) et Φ_α, Φ_β, Φ_γ par leurs valeurs (25) dans l'expression (27) de B où $\Phi = \alpha\Phi_\alpha + \beta\Phi_\beta + \gamma\Phi_\gamma$.

2° Comme $B^2 = (\beta\Phi_\gamma - \gamma\Phi_\beta)^2 + (\gamma\Phi_\alpha - \alpha\Phi_\gamma)^2 + (\alpha\Phi_\beta - \beta\Phi_\alpha)^2$, les points de la ligne de champ où la courbure est nulle (et la tangente stationnaire) sont ceux pour lesquels

$$\frac{\Phi_\alpha}{\alpha} = \frac{\Phi_\beta}{\beta} = \frac{\Phi_\gamma}{\gamma},$$

relations qui expriment que la normale à la surface de niveau est une direction principale de la quadrique *double* $\Phi(X, Y, Z) = \pm 1$ rapportée aux axes transportés en M parallèlement à eux-mêmes.

D'après les expressions (3) de α, β, γ et (25) de Φ_α, Φ_β, Φ_γ, ces relations s'écrivent

$$\frac{\frac{\partial W^2}{\partial x}}{f'_x} = \frac{\frac{\partial W^2}{\partial y}}{f'_y} = \frac{\frac{\partial W^2}{\partial z}}{f'_z}.$$

Elles doivent être des identités pour que les lignes de champ soient des droites. Elles expriment alors que W^2 est une fonction positive quelconque de f, que nous désignerons par $F(f)$. Les surfaces de niveau sont alors des surfaces parallèles, et l'on a ainsi l'équation aux dérivées partielles bien connue

$$f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z = F(f)$$

de ces surfaces. Dans le cas considéré d'un champ scalaire centré, les lignes de champ sont des droites issues du centre O, de paramètres directeurs x, y, z, de sorte qu'on a identiquement

$$\frac{f'_x}{x} = \frac{f'_y}{y} = \frac{f'_z}{z}.$$

L'équation aux différentielles totales

$$df = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = 0$$

des surfaces de niveau s'écrit

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

et ces surfaces sont les sphères concentriques

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{const.}$$

centrées à l'origine : *hormis les* CHAMPS SPHÉRIQUES (*à surfaces de niveau sphériques et concentriques*), *il n'existe pas de champ scalaire dont les surfaces de niveau soient des surfaces parallèles fermées convexes*. Autrement dit, seuls les champs sphériques sont des champs scalaires centrés dont les surfaces de niveau sont des surfaces parallèles.

3° D'après (29), le rayon de courbure est nul avec W au centre O. La ligne de champ tangente au rayon central (α, β, γ) et, grâce à leurs paramètres directeurs (26) et (28), la binormale et la normale principale à son origine O, sont parfaitement déterminées. D'après les propriétés du plan osculateur, on voit aisément que : *le cône directeur des tangentes à une ligne de champ et le cône qui a cette ligne comme directrice, ayant pour sommet commun le centre* O, *sont tangents suivant la tangente à la ligne du champ en* O, *leur plan tangent commun étant osculateur à cette ligne en leur sommet.*

16. **Torsion d'une ligne de champ.** — Le rayon de torsion T de la ligne de champ est défini par

$$\frac{1}{T} = \vec{n}\frac{d\vec{b}}{ds} \qquad \text{ou} \qquad \frac{B'}{T} = -\vec{B}\frac{d\vec{N}}{ds},$$

car

$$\vec{N} = N\vec{n}, \qquad \vec{B} = B\vec{b}, \qquad N = B \qquad \text{et} \qquad \vec{N}.\vec{B} = 0.$$

Or $\vec{N} = \vec{Q} - \vec{\Phi}$, où $\vec{\Phi} = \Phi\vec{i}$ si $\vec{i} = \frac{\vec{W}}{W}$ est le vecteur unitaire tangent à la ligne de champ.

Comme $\frac{d\vec{i}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$ (*première formule de Frenet-Serret*), et, par suite,

$$\vec{B}\frac{d\vec{\Phi}}{ds} = \frac{\Phi}{R}\left(\vec{B}.\vec{n}\right) + \frac{d\Phi}{ds}\left(\vec{B}.\vec{i}\right) = 0,$$

on a

$$-\frac{B^2}{T} = \vec{B}\frac{d\vec{Q}}{ds} = (\beta\Phi_\gamma - \gamma\Phi_\beta)\frac{d\Phi_\alpha}{ds} + (\gamma\Phi_\alpha - \alpha\Phi_\gamma)\frac{d\Phi_\beta}{ds} + (\alpha\Phi_\beta - \beta\Phi_\alpha)\frac{d\Phi_\gamma}{ds}$$

ou

$$(30)\qquad -\frac{B^\circ}{T}=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \Phi_\alpha & \Phi_\beta & \Phi_\gamma \\ \frac{d\Phi_\alpha}{ds} & \frac{d\Phi_\beta}{ds} & \frac{d\Phi_\gamma}{ds} \end{vmatrix},$$

formule qui fait connaître la torsion $\frac{1}{T}$, B ayant la valeur (27), Φ_α, Φ_β, Φ_γ étant prises égales à $\frac{\Phi_u}{W}$, $\frac{\Phi_v}{W}$, $\frac{\Phi_w}{W}$ [Φ_u, Φ_v, Φ_w demi-dérivées partielles de $\Phi(u, v, w)$ où $u=f'_x$, $v=f'_y$, $w=f'_z$], enfin compte tenu des relations

$$\frac{d\Phi_\alpha}{ds}=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi_\alpha,$$
$$\frac{d\Phi_\beta}{ds}=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi_\beta,$$
$$\frac{d\Phi_\gamma}{ds}=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}+\gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi_\gamma,$$

le long de la ligne de champ considérée.

B. — COURBURE ET LIGNES REMARQUABLES DES SURFACES DE NIVEAU.

17. **Tenseur, quadriques directrices et tension du champ.** — Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point quelconque P de l'espace par rapport aux axes MX, MY, MZ parallèles aux axes Ox, Oy, Oz et ayant pour origine un point déterminé $M(x, y, z)$ de l'espace. Les coefficients de la forme quadratique $\Phi(X, Y, Z)$ relative au point M, sont les composantes

$$\mathcal{T}_{ik}=f''_{x_i x_k}\qquad (\text{avec } x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z)$$

d'un tenseur symétrique droit du second ordre $\mathcal{T}$ appelé *tenseur du champ*, dont les quadriques représentatives sont les quadriques conjuguées

$$\Phi(X, Y, Z)=\pm 1,$$

qui sont deux quadriques à centre, puisque le déterminant de la forme quadratique Φ est le hessien $H(f)\neq 0$. Nous donnerons le nom de *quadriques directrices du champ* à ces deux quadriques dont l'une est toujours réelle. Leurs axes définiront les *directrices principales du champ* au point M considéré.

Nous appellerons *vecteur-tension du champ en* M *suivant une direction* Δ *issue de* M, de cosinus directeurs λ, μ, ν, le vecteur $\vec{T}$ ayant pour composantes

$$T_\lambda=\Phi_\lambda,\qquad T_\mu=\Phi_\mu,\qquad T_\nu=\Phi_\nu,$$

demi-dérivées partielles de la forme quadratique $\Phi(\lambda, \mu, \nu)$ relative à M.

La projection de $\vec{T}$ sur Δ est

$$\overline{T}_\Delta = \lambda\Phi_\lambda + \mu\Phi_\mu + \nu\Phi_\nu = \Phi(\lambda, \mu, \nu).$$

Le long de Δ on a $X = \lambda\rho$, $Y = \mu\rho$, $Z = \nu\rho$, $(\rho = MP)$, partant,

$$\Phi(X, Y, Z) = \rho^2\Phi(\lambda, \mu, \nu) = \rho^2\overline{T}_\Delta.$$

Si $T_\Delta = |\overline{T}_\Delta|$, sur les quadriques indicatrices $\Phi(X, Y, Z) = \pm 1$, on aura

$$MP = \rho = \frac{1}{\sqrt{T_\Delta}} :$$

les quadriques directrices sont le lieu des points P *situés à distance* $\frac{1}{\sqrt{T_\Delta}}$ *de* M *sur les demi-droites issues de ce point.*

Les composantes

$$\Phi_X = \rho\Phi_\lambda, \qquad \Phi_Y = \rho\Phi_\mu, \qquad \Phi_Z = \rho\Phi_\nu$$

du demi-gradient de $\Phi(X, Y, Z)$, normal en P à l'une des quadriques indicatrices, sont proportionnelles à celles de $\vec{T}$: *la tension du champ en un point suivant une demi-droite issue de ce point est normale à l'une des quadriques directrices correspondantes au point où la rencontre la demi-droite considérée.*

Enfin *les directions principales du champ en* M *sont celles qui portent le vecteur-tension* $\vec{T}$ *correspondant*, car on a

$$\frac{\Phi_\lambda}{\lambda} = \frac{\Phi_\mu}{\mu} = \frac{\Phi_\nu}{\nu}$$

suivant ces directions.

18. **Indicatrice de Dupin en un point d'une surface de niveau.** — La recherche des rayons de courbure principaux R_1 et R_2 en M sur la surface de niveau (S) correspondante exige la détermination préalable de l'indicatrice de Dupin relative à ce point. (S) étant une surface fermée convexe, *cette indicatrice est une ellipse.* Nous allons montrer *qu'elle est la section par le plan tangent* (Π) *en* M *à* (S) *de l'une des quadriques*

$$\frac{\Phi(X, Y, Z)}{W} = \pm 1 \tag{31}$$

homothétiques par rapport à M, *dans le rapport* $\sqrt{W}$, *des quadriques directrices du champ en* M.

En effet, il est aisé de voir que l'indicatrice de (S) en M est la projection en vraie grandeur sur le plan tangent (Π) des sections du paraboloïde osculateur à (S) en M par les deux plans parallèles à (Π) qui sont à la distance $\frac{1}{2}$ de ce dernier. Elle se détermine immédiatement en égalant à $\frac{1}{2}$ la valeur principale

de la distance au plan (Π) d'un point de (S) situé sur la même perpendiculaire à (Π), car cette valeur principale est précisément la distance d'un point du paraboloïde osculateur au plan (Π).

Dans le système d'axes MXYZ, la distance d'un point P(X, Y, Z) de la surface, voisin de M, à ce plan qui a pour équation normale $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$, est

$$\zeta = \alpha X + \beta Y + \gamma Z = \frac{Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z}{W}.$$

Les coordonnées de P par rapport au trièdre d'axes $Oxyz$ étant $x + X$, $y + Y$, $z + Z$, on a

$$f(x + X, y + Y, z + Z) = f(x, y, z)$$

puisque M et P sont sur la même surface (S), ou, en limitant aux termes du second ordre le développement du premier membre,

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + \frac{1}{2}\Phi(X, Y, Z) = 0.$$

d'où l'on tire

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = -\frac{1}{2}\Phi(X, Y, Z),$$

ce qui donne

$$2\zeta = -\frac{\Phi(X, Y, Z)}{W}.$$

L'indicatrice cherchée, obtenue en prenant $\zeta = \pm\frac{1}{2}$, est bien la section par le plan tangent (Π), de l'une des quadriques conjuguées (31) qui constituent, par définition, *l'indicatrice du champ au point* M. On peut définir, géométriquement, celle-ci de la même manière que les quadriques directrices, au moyen du vecteur $W\vec{T}$, comme on l'a fait pour ces dernières quadriques à partir du vecteur-tension $\vec{T}$.

En se reportant à la définition de $\vec{T}$ (au numéro précédent) et à ce qui a été dit au n° 14, on voit que le vecteur $\vec{T}$ correspondant à la normale (α, β, γ) à (S) coïncide avec $\vec{Q}$ et $W\vec{T}$ avec l'accélération $\vec{\Gamma}$: $\vec{Q}$ représente la force qui agirait sur le point matériel de masse $m = 1$ à son passage en M s'il y était animé de la vitesse $W = 1$; projection de $\vec{Q}$ sur la normale à (S), $\vec{\Phi}$ est alors la composante tangentielle de cette force dont la composante normale n'est autre que la courbure de la ligne de champ en M.

19. **Courbure des surfaces de niveau.** — Les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 de la surface (S) en M, que nous nous proposons de déterminer, sont fournis par l'équation réduite de l'indicatrice dans le plan tangent considéré (Π). Pour obtenir cette équation, commençons par déterminer l'équation de l'indicatrice par rapport à deux axes rectangulaires Mu et Mv convena-

blement choisis, pris dans son plan. Mu est la droite $\alpha X + \beta Y = 0$ d'intersection du plan tangent $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$ et du plan $Z = 0$ parallèle au plan xOy. Elle a pour cosinus directeurs par rapport au trièdre MXYZ

$$\lambda_1 = -\beta h, \qquad \mu_1 = \alpha h, \qquad \nu_1 = 0 \qquad \left(h = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right).$$

Ceux de l'axe Mv, qui sont les mineurs de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix}$$

relatifs à la première ligne, ont pour valeurs

$$\lambda_2 = -\alpha\gamma h, \qquad \mu_2 = -\beta\gamma h, \qquad \nu_2 = \frac{1}{h}.$$

Considérons enfin l'axe Mw normal à (S) et dirigé suivant $\vec{W}$, dont les cosinus directeurs sont

$$\lambda_3 = \alpha, \qquad \mu_3 = \beta, \qquad \nu_3 = \gamma.$$

L'indicatrice (elliptique) est la section de l'une des quadriques

$$\Phi(X, Y, Z) = \pm W$$

par le plan tangent.

Les formules de passage des nouvelles coordonnées u, v, w aux anciennes X, Y, Z étant

$$X = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w, \qquad Y = \mu_1 u + \mu_2 v + \mu_3 w, \qquad Z = \nu_1 u + \nu_2 v + \nu_3 w,$$

l'indicatrice est, dans le plan tangent $w = 0$, représentée par *l'une* des équations

$$\Phi(\lambda_1 u + \lambda_2 v, \mu_1 u + \mu_2 v, \nu_1 u + \nu_2 v) = \pm W,$$

qui est de la forme

$$(32) \qquad A u^2 + 2 B u v + C v^2 = \pm 1,$$

où

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} AW &= \Phi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) &&= (\beta^2 f''_{x^2} + \alpha^2 f''_{y^2} - 2\alpha\beta f''_{xy}) h^2, \\ CW &= \Phi(\lambda_2, \mu_2, \nu_2) &&= (\alpha^2 f''_{x^2} + \beta^2 f''_{y^2} + 2\alpha\beta f''_{xy}) \gamma^2 h^2 + \frac{f''_{z^2}}{h^2} \\ & &&\quad + 2\alpha\beta\gamma h^2 f''_{xy} - 2\beta\gamma f''_{yz} - 2\gamma\alpha f''_{zx}, \\ BW &= \underbrace{\Phi(\lambda_1, \mu_1, \nu_1; \lambda_2, \mu_2, \nu_2)}_{\text{Forme polaire de } \Phi} &&= (f''_{x^2} - f''_{y^2}) \alpha\beta\gamma h^2 + (\beta^2 - \alpha^2) \gamma h^2 f''_{xy} + \alpha f''_{yz} - \beta f''_{zx}. \end{aligned} \right.$$

Si s_1 et s_2 sont les deux racines (*réelles*) de l'*équation en s*

$$(34) \qquad s^2 - (A + C) s + (AC - B^2) = 0,$$

dont le discriminant est, en effet $(A - C)^2 + 4B^2$, l'équation réduite de l'indicatrice est l'une des équations

$$s_1 u^2 + s_2 v^2 = \pm 1$$

et

$$R_1 = \frac{1}{s_1}, \qquad R_2 = \frac{1}{s_2}.$$

A cause de la convexité des surfaces de niveau d'un champ scalaire centré, les rayons de courbure principaux portés par la demi-normale intérieure et comptés algébriquement sur la normale dirigée suivant $\vec{W}$ ont même signe, il en est de même de s_1 et s_2, de sorte que l'équation réduite de l'indicatrice s'écrit *sans ambiguïté*

$$\sigma_1 u^2 + \sigma_2 v^2 = 1 \qquad \text{si } \sigma_1 = |s_1| \quad \text{et} \quad \sigma_2 = |s_2|.$$

Dans le cas du champ répulsif, R_1 et R_2 sont négatifs. Dans le cas du champ attractif, ils sont positifs.

La courbure moyenne de la surface (S) en M est, au facteur $\frac{1}{2}$ près,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = s_1 + s_2 = A + C.$$

D'après (33), on a

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) W = (\beta^2 + \alpha^2\gamma^2) h^2 f''_{x^2} + (\alpha^2 + \beta^2\gamma^2) h^2 f''_{y^2} + (\alpha^2 + \beta^2) f''_{z^2}$$
$$+ 2\alpha\beta(\gamma^2 - 1) h^2 f''_{xy} - 2\beta\gamma f''_{yz} - 2\gamma\alpha f''_{zx}.$$

Comme $h^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{1 - \gamma^2}$, on obtient ainsi

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) W = (\beta^2 + \gamma^2) f''_{x^2} + (\gamma^2 + \alpha^2) f''_{y^2} + (\alpha^2 + \beta^2) f''_{z^2} - 2(\alpha\beta f''_{xy} + \beta\gamma f''_{yz} + \gamma\alpha f''_{zx})$$
$$= (f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2})$$
$$- [\alpha(\alpha f''_{x^2} + \beta f''_{xy} + \gamma f''_{xz}) + \beta(\alpha f''_{xy} + \beta f''_{y^2} + \gamma f''_{yz}) + \gamma(\alpha f''_{xz} + \beta f''_{yz} + \gamma f''_{z^2})].$$

Soit

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\Delta f - \Phi(\alpha, \beta, \gamma)}{W}. \tag{35}$$

Or de $f'_x = \alpha W$, $f'_y = \beta W$, $f'_z = \gamma W$, on déduit, grâce aux relations (25) :

$$f''_{x^2} = W\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \alpha\Phi_\alpha, \qquad f''_{y^2} = W\frac{\partial\beta}{\partial y} + \beta\Phi_\beta, \qquad f''_{z^2} = W\frac{\partial\gamma}{\partial z} + \gamma\Phi_\gamma,$$

d'où, par addition,

$$\Delta f = W\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) + \Phi(\alpha, \beta, \gamma), \tag{36}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{\Delta f - \Phi(\alpha, \beta, \gamma)}{W}. \tag{37}$$

On déduit de là la *formule de Paul Appell*

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}. \tag{38}$$

Le calcul, un peu long, de la *courbure totale* $\frac{1}{R_1R_1}=s_1s_2=AC-B^2$ conduit à l'expression

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1R_2}=\alpha^2\frac{D(\beta,\gamma)}{D(y,z)}+\beta^2\frac{D(\gamma,\alpha)}{D(z,x)}+\gamma^2\frac{D(\alpha,\beta)}{D(x,y)}\\ +\alpha\beta\left[\frac{D(\alpha,\gamma)}{D(z,y)}+\frac{D(\beta,\gamma)}{D(z,x)}\right]+\beta\gamma\left[\frac{D(\beta,\alpha)}{D(x,z)}+\frac{D(\gamma,\alpha)}{D(x,y)}\right]\\ +\gamma\alpha\left[\frac{D(\gamma,\beta)}{D(y,x)}+\frac{D(\alpha,\beta)}{D(y,z)}\right],\end{aligned} \tag{39}$$

qui prend la forme symétrique très simple

$$\frac{1}{R_1R_2}=-\begin{vmatrix}\frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} & \alpha\\ \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial z} & \beta\\ \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} & \gamma\\ \alpha & \beta & \gamma & 0\end{vmatrix}. \tag{39 bis}$$

Ces résultats ont été obtenus au moyen d'une méthode très élégante par A. Buhl dans *Géométrie et Analyse des intégrales doubles*, de la Collection Scientia (n° 36), en considérant que $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ sont les racines de l'équation du 2e degré en $\frac{1}{R}$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\frac{1}{R} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) & \alpha\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) & \frac{\partial\beta}{\partial y}-\frac{1}{R} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\right) & \beta\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) & \frac{\partial\gamma}{\partial z}-\frac{1}{R} & \gamma\\ \alpha & \beta & \gamma & 0\end{vmatrix}=0.$$

20. **Ombilics des surfaces de niveau. Lignes ombilicales du champ.** — Si le plan tangent (Π) en M à la surface de niveau correspondante (S) est un plan cyclique des quadriques indicatrices $\Phi(X, Y, Z)+\pm 1$, cas qui se présente si celles-ci sont de révolution autour de la normale à (S) en M, l'indicatrice est un cercle de centre M et ce point est un *ombilic*. Cette circonstance a lieu analytiquement si l'équation en s a une racine double, c'est-à-dire si son déterminant est nul, ce qui exige $A=C$ et $B=0$. Sans qu'il soit nécessaire d'expliciter les équations $A=C$, $B=0$, on voit que A, B, C étant homogènes en α, β, γ le sont aussi en f'_x, f'_y, f'_z. En remplaçant alors α, β, γ par f'_x, f'_y, f'_z, on

voit que les ombilics des surfaces de niveau sont situés sur les intersections des surfaces $A = C$ et $B = 0$ qui constituent les *lignes ombilicales du champ* f'_x, f'_y, f' s'annulant en O, *les lignes ombilicales passent par le centre du champ.*

Remarque. — Il est facile d'établir que la surface de niveau à l'infini est une sphère, en montrant que tous ses points sont des ombilics. Les surfaces de niveau restant les mêmes lorsque la fonction f est remplacée par une fonction arbitraire de f; prenons le cas du champ répulsif de deuxième espèce, f augmentant de f_0 à une valeur finie le long d'un rayon central quelconque ou d'une ligne de champ. Suivant le rayon (n° 5)

$$\frac{df}{dr} = W \cos\theta.$$

Le long du rayon, $\frac{df}{dr} \to 0$ avec $\frac{1}{r}$ par suite de l'existence d'une asymptote, d'ordonnée l parallèle à l'axe des r, à la courbe représentative de f en fonction de r. Ainsi $W \cos\theta = 0$ à l'infini. Or, l'angle θ de la direction centrifuge du rayon avec la demi-normale extérieure à (S), dirigée suivant $\vec{W}$, est l'angle toujours aigu et jamais droit, que fait la direction centripète du rayon avec la demi-normale intérieure à la surface fermée convexe (S), puisque le centre O est intérieur à celle-ci. Par suite $\cos\theta \neq 0$ et $W = 0$ à l'infini où l'on a ainsi $f'_x = f'_y = f' = 0$ quelle que soit la direction du rayon considéré. Les équations des ombilicales étant satisfaites en tout point à l'infini, tout point de la surface de niveau à l'infini est un ombilic; cette surface est une sphère (de rayon infini).

21. Lignes de courbure, asymptotiques et géodésiques des surfaces de niveau. — 1° *Lignes de courbure.* — Pour un déplacement élémentaire (dx, dy, dz) à partir de $M(x, y, z)$ le long d'une ligne de courbure dont le rayon de courbure en M est R, les formules d'Olinde Rodrigues

$$dx + R\,d\alpha = 0, \qquad dy + R\,d\beta = 0, \qquad dz + R\,d\gamma = 0$$

fournissent les équations différentielles

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\beta}{dy} = \frac{d\gamma}{dz} \tag{40}$$

des lignes de courbure.

Les relations $\alpha W = u$, $\beta W = v$, $\gamma W = w$ donnent, par différentiation,

$$W\,d\alpha = du - \alpha\,dW, \qquad W\,d\beta = dv - \beta\,dW, \qquad W\,d\gamma = dw - \gamma\,dW$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} W^2\,d\alpha &= W^2\,du - u\,W\,dW, \\ W^2\,d\beta &= W^2\,dv - v\,W\,dW, \\ W^2\,d\gamma &= W^2\,dw - w\,W\,dW. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Si $\Phi_{dx}, \Phi_{dy}, \Phi_{dz}$ sont les demi-dérivées partielles de $\Phi(dx, dy, dz)$ et Φ_u, Φ_v, Φ_w celles de $\Phi(u, v, w)$, on a

$$du = \Phi_{dx}, \qquad dv = \Phi_{dy}, \qquad dw = \Phi_{dz}, \qquad W\,dW = \Phi_u\,dx + \Phi_v\,dy + \Phi_w\,dz = \delta\Phi, \tag{42}$$

de sorte que, d'après (41), les équations différentielles (40) des lignes de courbure deviennent

$$(43)\qquad \frac{u\,\delta\Phi - W'\Phi_{dx}}{dx} = \frac{v\,\delta\Phi - W'\Phi_{dy}}{dy} = \frac{w\,\delta\Phi - W'\Phi_{dz}}{dz}.$$

Les équations (43) étant manifestement satisfaites pour $u = v = w = 0$ ou $W = 0$ à l'infini, dans le cas du champ répulsif de 2e espèce (remarque du numéro précédent), toute direction d'un plan tangent à la surface de niveau à l'infini est principale, le point de contact est un ombilic et, comme ce point est quelconque, cette surface est une sphère.

Puisque $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$ sur la surface, on a

$$dp = x\,d\alpha + y\,d\beta + \gamma\,dz,$$

$p = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$ étant la distance de O au plan tangent en M à la surface de niveau correspondante (S).

La valeur commune des rapports (40) est, d'une part, $-\frac{1}{R}$ d'après les formules d'Olinde Rodrigues, d'autre part,

$$\frac{x\,d\alpha + y\,d\beta + z\,d\gamma}{x\,dx + y\,dy + z\,dz} = \frac{dp}{r\,dr},$$

d'où l'on déduit

$$(44)\qquad \frac{dp}{dr} = -\frac{r}{R};$$

le long d'une ligne de courbure, r étant positif et R négatif dans le cas du champ répulsif, p, qui est alors positif, *augmente ou diminue avec r le long d'une ligne de courbure sur une surface de niveau.*

Si $\left(\frac{dp}{dr}\right)_1$ et $\left(\frac{dp}{dr}\right)_2$ sont les valeurs des dérivées $\frac{dp}{dr}$ en M sur l'une et l'autre des lignes de courbure en ce point, où leurs rayons de courbure sont R_1 et R_2, le produit des deux relations (44) écrites pour ces deux lignes donne la formule

$$(45)\qquad \left(\frac{dp}{dr}\right)_1 \left(\frac{dp}{dr}\right)_2 = \frac{r^2}{R_1 R_2},$$

où intervient la courbure totale $\frac{1}{R_1 R_2}$.

2°. *Lignes asymptotiques.* — Le long des asymptotiques de l'une des surfaces de niveau le plan osculateur est tangent à cette surface. Leur équation différentielle est donc

$$f'_x\,d^2x + f'_y\,d^2y + f'_z\,d^2z = 0.$$

D'après cette équation, l'équation obtenue en différentiant l'équation aux différentielles totales

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = 0$$

des surfaces de niveau, se réduit à

$$dx\,df'_x + dy\,df'_y + dz\,df'_z = 0,$$

qui s'écrit simplement

$$\Phi(dx, dy, dz) = 0. \tag{46}$$

Telle est l'équation différentielle des lignes asymptotiques qui sont imaginaires sur une surface de niveau d'un champ scalaire centré, puisque dans le plan tangent à cette surface fermée convexe Φ est une forme quadratique définie.

3° *Lignes géodésiques.* — Le plan osculateur

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

à une géodésique d'une surface de niveau étant normal à celle-ci, ses coefficients A, B, C satisfont aux trois relations

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \qquad A\,d'x + B\,d'y + C\,d'z = 0, \qquad Af'_x + Bf'_y + Cf'_z = 0.$$

La condition

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d'x & d'y & d'z \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = 0, \tag{47}$$

pour que ce système linéaire et homogène en A, B, C n'admette pas de solution nulle, est l'équation différentielle des géodésiques.

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS INTÉGRALES DES SURFACES DE NIVEAU.

22. Champ directeur associé au champ gradient. Complexe des normales. — 1° D'une façon générale, à un champ de vecteurs $\vec{W}(u, v, w)$ peut être associé un champ de vecteurs unitaires $\vec{i}(\alpha, \beta, \gamma)$ tangents aux lignes de champ qui constitue le *champ directeur* du champ $\vec{W}$. Les droites tangentes aux lignes de champ ne dépendent, comme leur vecteur directeur unitaire $\vec{i}$, que des coordonnées x, y, z de leur point de contact. Elles forment un complexe que nous appellerons *complexe du champ*. Les tangentes menées d'un point aux lignes de champ constituent le *cône du complexe* relatif à ce point et les tangentes aux lignes de champ contenues dans un plan quelconque enveloppent la *courbe du complexe* relative à ce plan. Une corrélation quelconque transforme les droites du complexe en des droites corrélatives qui forment un *complexe corrélatif* et le cône de l'un des complexes relatifs à un point est corrélatif de la courbe de l'autre complexe relative au plan corrélatif de ce point. Si le complexe du champ est algébrique, le complexe corrélatif est aussi algébrique et du même ordre.

Par une transformation ponctuelle appropriée, un complexe quelconque de droites définies par les équations paramétriques

$$X = a_1 + b_1 t, \qquad Y = a_2 + b_2 t, \qquad Z = a_3 + b_3 t$$

devient le complexe du champ directeur obtenu en associant le vecteur $\vec{i}$ au point (a_1, a_2, a_3) transformé du point dont les coordonnées $\xi, \eta; \zeta$ sont les trois paramètres dont dépendent les a et les b. Grâce à la transformation indiquée, les b deviennent des fonctions des a et les composantes de $\vec{i}$, cosinus directeurs de son support, sont

$$\alpha = \frac{b_1}{h}, \qquad \beta = \frac{b_2}{h}, \qquad \gamma = \frac{b_3}{h} \qquad (h = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}),$$

de sorte que le point (X, Y, Z) est à la distance *algébrique* $\rho = ht$ du point (a_1, a_2, a_3) sur la droite correspondante du complexe, orientée suivant la direction (α, β, γ).

2° Dans le cas qui nous occupe ici, d'un champ scalaire centré, le vecteur $\vec{i}$ en M, définissant le champ directeur associé au champ gradient, est le vecteur unitaire directeur de la normale en M à la surface de niveau correspondante, le complexe du champ est le *complexe des normales* aux surfaces de niveau (S) et la courbe du complexe relative à un plan est l'enveloppe des sections par ce plan des développées des surfaces de niveau.

3° *Le flux du champ directeur à travers une surface de niveau est égale à l'aire de celle-ci*, la demi-normale positive à (S) étant dirigée suivant $\vec{i}$.

Appliquons cette proposition évidente à une surface fermée convexe (S) d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, considérée comme la surface de niveau $f = C$ (constante) du champ scalaire centré f, pour laquelle $C = 0$. En changeant au besoin le signe de f, qui n'intervient pas dans l'équation de la surface, on peut prendre $f < 0$ à l'intérieur de (S) et $f > 0$ à l'extérieur. La demi-normale extérieure à (S) est alors dirigée suivant $\vec{i}$, dont le flux (sortant) à travers (S) est positif et représente l'aire totale

$$S = \iint_{(S)} \alpha\, dy\, dz + \beta\, dz\, dx + \gamma\, dx\, dy$$

de la surface.

La formule d'Ostrogradsky donne alors

$$S = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) d\Omega, \tag{48}$$

l'intégrale triple étant étendue au volume Ω intérieur à (S).

Comme $\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{i}$, (48) montre que : *l'aire totale d'une surface fermée convexe $f(x, y, z) = 0$ est représentée par l'intégrale triple, étendue à son volume intérieur, de la divergence du champ directeur du champ scalaire f*, sous réserve de la continuité (implicitement admise) des six fonctions α, β, γ, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial y}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial z}$.

D'après (37), on a aussi

$$S = \iiint_{\Omega} \frac{\Delta f - \Phi(\alpha, \beta, \gamma)}{W}\, d\Omega. \tag{49}$$

Mais $W = 0$ en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ intérieur à S pour lequel f admet un minimum négatif. Malgré cet infini de la fonction à intégrer, l'intégrale triple (49) est convergente, ce que permet de reconnaître le passage aux coordonnées polaires (r, θ, φ) prises par rapport au point M_0, lorqu'on isole ce point de discontinuité par une sphère de très petit rayon centrée sur lui. Sur cette sphère on a, en effet,

$$x = x_0 + \alpha r, \qquad y = y_0 + \beta r, \qquad z = z_0 + \gamma r,$$

d'où, au second ordre près,

$$\begin{aligned}
f'_x &= (x-x_0)f''_{x_0^2} + (y-y_0)f''_{x_0y_0} + (z-z_0)f''_{x_0z_0} = r\,\Phi_\alpha(M_0),\\
f'_y &= (x-x_0)f''_{x_0y_0} + (y-y_0)f''_{y_0^2} + (z-z_0)f''_{y_0z_0} = r\,\Phi_\beta(M_0),\\
f'_z &= (x-x_0)f''_{x_0z_0} + (y-y_0)f''_{y_0z_0} + (z-z_0)f''_{z_0^2} = r\,\Phi_\gamma(M_0),
\end{aligned}$$

$\Phi_\alpha(M_0)$, $\Phi_\beta(M_0)$, $\Phi_\gamma(M_0)$ représentant les demi-dérivées partielles de la forme quadratique $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ relative à M_0. Il suit de là que $\frac{1}{W}$ a le même ordre d'infinitude que $\frac{1}{r}$, ce qui assure la convergence de l'intégrale triple.

Dans le cas du champ répulsif de première espèce, auquel le cas général est toujours réductible par l'un des procédés indiqués au n° 3, la fonction *positive* f est une fonction indéfiniment croissante de la distance ρ à $M(x, y, z)$ le long de la demi-normale extérieure à la surface de niveau correspondante, dont la dérivée seconde $\frac{d^2f}{d\rho^2} = \Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ est positive en même temps que la dérivée première.

La formule (49) montre qu'on ne saurait avoir $\Delta f = 0$: *un champ harmonique ne peut pas avoir des surfaces de niveau fermées convexes*, autrement dit, il ne peut pas être un champ scalaire centré. Ainsi se retrouve l'absence bien connue de maximum ou de minimum pour une fonction harmonique en quelque point de l'espace que ce soit.

23. **Propriétés intégrales attachées à la courbure moyenne des surfaces de niveau.** — Dans ce qui suit apparaît le rôle essentiel que joue la divergence $\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}$ du champ directeur $\vec{i}$ en tant que courbure moyenne $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ des surfaces de niveau. Elle est négative si le champ f est répulsif, positive s'il est attractif.

1° Soit $F(x, y, z)$ une fonction de x, y, z, définie, continue et pourvue de dérivées partielles du premier ordre continues dans un domaine renfermant la surface de niveau (S) et son volume intérieur Ω.

Dans le cas du champ répulsif ($\vec{i}$ porté par la demi-normale extérieure à la surface de niveau), la formule d'Ostrogradsky

$$\iint_S (\alpha A + \beta B + \gamma C)\, dS = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) d\Omega$$

devient, lorsque $A = \alpha F$, $B = \beta F$, $C = \gamma F$,

$$\iint_S F(x, y, z)\, dS = \iiint_\Omega \left[F\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) + \frac{dF}{dn}\right] d\Omega, \tag{50}$$

où

$$\frac{dF}{dn} = \alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \beta\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma\frac{\partial F}{\partial z}$$

est la dérivée de F suivant la demi-normale extérieure à la surface de niveau passant par le point intérieur considéré. Dans la formule (50) intervient la courbure moyenne des surfaces de niveau intérieures à (S).

2° En particulier, pour $F = f$ on a $\frac{dF}{dn} = W$, de sorte que, si $f = C$ sur (S) dont l'aire totale est S, on a

$$(51) \qquad CS = \iiint_\Omega \left[f\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) + W \right] d\Omega,$$

dont la forme (48) est le cas particulier correspondant à $f = 1$ dans tout l'espace et en vertu de laquelle on a

$$CS = \iiint_\Omega C\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) d\Omega,$$

de sorte que, par soustraction,

$$\iiint \left[(f - C)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) + W \right] d\Omega = 0,$$

formule convenant aussi bien pour un champ attractif que pour un champ répulsif car elle exige que la courbure moyenne $\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}$ des surfaces de niveau intérieures à (S) soit de signe opposé à celui de la différence $f - C$, sinon l'intégrale serait positive en même temps que la fonction à intégrer.

3° Si $F = W$ dans (50), le premier membre représente le flux *essentiellement positif* du gradient $\vec{W}$ à travers la surface (S).

D'après (25), on a

$$\frac{dW}{dn} = \alpha\frac{\partial W}{\partial x} + \beta\frac{\partial W}{\partial y} + \gamma\frac{\partial W}{\partial z} = \alpha\Phi_\alpha + \beta\Phi_\beta + \gamma\Phi_\gamma = \Phi(\alpha, \beta, \gamma),$$

d'où, d'après (36), l'expression du flux de $\vec{W}$ à travers (S)

$$(52) \qquad \iint_S W\, dS = \iiint_\Omega \Delta f\, d\Omega,$$

qui montre l'impossibilité pour un champ harmonique ($\Delta f = 0$) d'être centré. Sous la forme (52) se retrouve la formule bien connue

$$\iint_S \frac{df}{dn}\, dS = \iiint_\Omega \Delta f\, d\Omega \qquad \text{puisque } W = \frac{df}{dn}.$$

4° Alors que dans ce qui précède, la divergence de $\vec{i}$ figure dans une intégrale triple, elle apparaît dans une intégrale de surface dans la *formule*

de Paul Appell (¹)

$$(53)\qquad \iint_S \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)-\left(\alpha\frac{dX}{dn}+\beta\frac{dY}{dn}+\gamma\frac{dZ}{dn}\right)\right]dS$$
$$=\iint_S\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)\,dS$$
$$+\int_C(\beta Z-\gamma Y)\,dx+(\gamma X-\alpha Z)\,dy+(\alpha Y-\beta X)\,dZ,$$

obtenue en prenant

$$P=\beta Z-\gamma Y,\qquad Q=\gamma X-\alpha Z,\qquad R=\alpha Y-\beta X,$$

dans la formule de Stokes

$$\iint_S\left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dS=\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

relative à une *cloison* S limitée par un contour fermé C, X, Y, Z étant les composantes d'un champ vectoriel.

Si le vecteur (X, Y, Z) est normal à la surface, c'est-à-dire si

$$\frac{X}{\alpha}=\frac{Y}{\beta}=\frac{Z}{\gamma}=T,$$

l'intégrale curviligne est nulle et la formule (53) se réduit à

$$(54)\quad \iint_S\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)T\,dS=\iint_S\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)-\left(\alpha\frac{dX}{dn}+\beta\frac{dY}{dn}+\gamma\frac{dZ}{dn}\right)\right]dS$$

[où $T=\alpha X+\beta Y+\gamma Z$ est la mesure algébrique du vecteur (X, Y, Z) sur la normale (α, β, γ)], qui devient une identité si $X=\alpha$, $Y=\beta$, $Z=\gamma$, car alors

$$\alpha\frac{dX}{dn}+\beta\frac{dY}{dn}+\gamma\frac{dZ}{dn}=\frac{1}{2}\frac{d}{dn}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0,$$

puisque $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Pour

$$X=\alpha W,\qquad Y=\beta W,\qquad Z=\gamma W,$$

(54) s'écrit

$$(55)\qquad \iint_S W\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)dS=\iint_S[\Delta f-\Phi(\alpha,\beta,\gamma)]\,dS,$$

car

$$X\frac{d\alpha}{dn}+Y\frac{d\beta}{dn}+Z\frac{d\gamma}{dn}=W\left(\alpha\frac{d\alpha}{dn}+\beta\frac{d\beta}{dn}+\gamma\frac{d\gamma}{dn}\right)=0,$$

(¹) A. Buhl, *Géométrie et analyse des intégrales doubles* (Collection *Scientia*, n° 36).

de sorte que

$$\alpha\frac{dX}{dn}+\beta\frac{dY}{dn}+\gamma\frac{dZ}{dn}=\frac{d}{dn}(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)=\frac{dW}{dn}=\Phi(\alpha,\beta,\gamma),$$

et

$$X=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad Y=\frac{\partial f}{\partial y},\qquad Z=\frac{\partial f}{\partial z},$$

en raison des relations (1) et (11).

La formule (55) résulte d'ailleurs immédiatement de la relation (36).

5° Enfin la courbure moyenne

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}$$

intervient dans la *formule de Minkovski* (1)

$$\iint_S\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)dS=2\iint_\sigma p\,d\sigma, \tag{56}$$

relative à une surface fermée convexe (S) et dans laquelle $d\sigma$ est l'élément d'aire sur la sphère unité σ centrée en un point O intérieur à (S), qui correspond à l'élément d'aire dS sur (S) comme un point $\mu(\alpha,\beta,\gamma)$ de cette sphère correspond à un point $M(x,y,z)$ de (S) dont il est *l'image sphérique*,

$$p=\alpha x+\beta y+\gamma z$$

étant la distance de O au plan tangent en M à (S).

---

(1) A. Buhl, *Nouveaux éléments d'Analyse*, t. IV, Chap. III, Exercice 15.

CHAPITRE IV.

TRANSFORMATION D'UN CHAMP SCALAIRE CENTRÉ EN UN AUTRE CHAMP SCALAIRE CENTRÉ.

24. **Correspondance entre un point et une surface.** — Une relation de la forme $F(x, y, z : X, Y, Z) = 0$ entre les six variables x, y, z et X, Y, Z établit une correspondance entre l'un des points $m(x, y, z)$ et M(X, Y, Z) et une surface décrite par l'autre.

Cette correspondance généralise la corrélation dans l'espace qui correspond au cas particulier où F est linéaire et symétrique en x, y, z et X, Y, Z, la relation $F = 0$ s'écrivant alors, sous forme réduite,

$$Zx + Yy + Zz = 1.$$

Comme la corrélation, la correspondance ainsi établie entre un point et une surface ne présente d'intérêt que si elle est *biunivoque*, c'est-à-dire si la surface qui correspond à l'un des points m et M ne correspond qu'à lui seul. Dans le cas général où F n'est pas symétrique en x, y, z et X, Y, Z, les deux points m et M doivent être considérés dans des espaces différents : à l'un d'eux pris dans l'un de ces espaces correspond une surface décrite par l'autre dans l'autre espace. Si l'on considère m et M dans le même espace, ils doivent être rapportés à des trièdres trirectangles différents qui sont les trièdres de référence des deux espaces précédents (superposés à l'espace considéré, mais non confondus avec lui) : à l'un des points, pris par rapport à son trièdre de référence, correspond une surface rapportée à l'autre trièdre auquel est lié le second point.

En général la surface correspondant au point $m(x, y, z)$ n'est pas la même, au déplacement près qui fait coïncider les deux trièdres, que celle qui correspond au point M(X, Y, Z) dont la position par rapport à son trièdre de référence est celle de m par rapport au sien, c'est-à-dire pour lequel $X = x$, $Y = y$, $Z = z$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment qu'en échangeant les deux points m et M de *mêmes coordonnées relatives* on obtienne la même surface correspondante, par rapport à l'un ou l'autre trièdre, ce qui exige que F soit symétrique par rapport à x, y, z et X, Y, Z. Dans ce cas la correspondance considérée est *réciproque*. Une simplification évidente consiste alors à rapporter les deux points m et M au même trièdre de coordonnées en lequel sont confondus les deux trièdres de référence particuliers : les deux points jouant le même rôle, la relation $F = 0$ établit sans ambiguïté une correspondance entre un point et une

surface *dans le même espace*. C'est le cas de la corrélation qui fait correspondre un plan et un point.

Même dans le cas général, à une ligne décrite par m correspond, par $F = 0$, une famille de surfaces (S) dépendant du paramètre t fixant la position de m sur sa trajectoire. Il est facile de prévoir, dès maintenant, qu'une correspondance du type envisagé permettra d'associer une famille de surfaces d'onde au mouvement d'un point matériel sur une trajectoire déterminée.

25. **Transformation d'un champ scalaire centré en un autre champ scalaire centré.** — 1° Prenons, en particulier, comme trajectoire de m, une ligne intégrale du champ scalaire centré $f(x, y, z)$. Il lui correspond la famille des surfaces de niveau d'un autre champ scalaire $g(X, Y, Z)$ si l'on a entre f et g une relation de la forme

$$F(f, g) = 0,$$

qui est, en effet, une relation entre les deux groupes de variables x, y, z et X, Y, Z, la correspondance ainsi établie étant supposée biunivoque, c'est-à-dire que la relation précédente n'admet qu'une racine, soit en f, soit en g.

Or chaque point m définit la surface de niveau $f =$ const., qui passe par lui, de sorte que, par l'intermédiaire du point m, une surface de niveau de l'un des champs correspond à une surface de niveau de l'autre. C'est d'ailleurs ce qu'exprime la relation $F(f, g) = 0$ considérée soit comme une équation en f, g étant donné, soit comme une équation en g pour f donné. La coïncidence des deux points $m(x, y, z)$ et $M(X, Y, Z)$ entraînerait celle des surfaces de niveau des deux champs car, par $F(f, g) = 0$, les deux fonctions $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ seraient fonctions l'une de l'autre.

2° *S'il existe une transformation ponctuelle biunivoque définie par des équations*

$$(T) \qquad x = \xi(X, Y, Z), \qquad y = \eta(X, Y, Z), \qquad z = \zeta(X, Y, Z),$$

telles que le jacobien $J = \frac{D(x, y, z)}{D(X, Y, Z)}$ *ne soit nul en aucun point de l'espace, le champ scalaire défini par la fonction transformée* $g(X, Y, Z) = f(\zeta, \eta, \xi)$ *est un champ scalaire centré.*

En effet, par (T) la fonction $f(x, y, z)$ devient la fonction $g(X, Y, Z)$ dont les dérivées partielles

$$g'_X = f'_x \frac{\partial x}{\partial X} + f'_y \frac{\partial y}{\partial X} + f'_z \frac{\partial z}{\partial X},$$

$$g'_Y = f'_x \frac{\partial x}{\partial Y} + f'_y \frac{\partial y}{\partial Y} + f'_z \frac{\partial z}{\partial Y},$$

$$g'_Z = f'_x \frac{\partial x}{\partial Z} + f'_y \frac{\partial y}{\partial Z} + f'_z \frac{\partial z}{\partial Z},$$

s'annulent avec f'_x, f'_y, f'_z au seul point $M_0(X_0, Y_0, Z_0)$ qui correspond au centre O où f est extréma : la fonction $g(X, Y, Z)$ est stationnaire au point M_0, où elle prend la valeur $g_0 = g(X_0, Y_0, Z_0)$.

Les deux champs étant rapportés aux mêmes axes, M_0 coïncide avec O si X, Y, Z sont remplacés par $X - X_0$, $Y - Y_0$, $Z - Z_0$, ce qui revient à prendre $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$.

Un calcul facile, mais un peu long, des dérivées partielles secondes de $g(X, Y, Z)$ conduit à l'expression

$$\begin{aligned}\Psi(X, Y, Z) = {} & X^2\Phi\left(\frac{\partial x}{\partial X}, \frac{\partial y}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial X}\right) + Y^2\Phi\left(\frac{\partial x}{\partial Y}, \frac{\partial y}{\partial Y}, \frac{\partial z}{\partial Y}\right) + Z^2\Phi\left(\frac{\partial x}{\partial Z}, \frac{\partial y}{\partial Z}, \frac{\partial z}{\partial Z}\right) \\ & + [D(x)f'_x + D(y)f'_y + D(z)f'_z] \\ & + 2[\Gamma(x)f''_{x^2} + \Gamma(y)f''_{y^2} + \Gamma(z)f''_{z^2} + G(x, y)f''_{xy} + G(y, z)f''_{yz} + G(z, x)f''_{zx}]\end{aligned}$$

de la forme quadratique fondamentale

$$\Psi(X, Y, Z) = X^2 g''_{X^2} + Y^2 g''_{Y^2} + Z^2 g''_{Z^2} + 2XY g''_{XY} + 2YZ g''_{YZ} + 2ZX g''_{ZX}$$

du nouveau champ $g(X, Y, Z)$, les D, G, Γ étant les opérateurs

$$D(U) = \left(X^2\frac{\partial^2}{\partial X^2} + Y^2\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + Z^2\frac{\partial^2}{\partial Z^2} + 2XY\frac{\partial^2}{\partial X\,\partial Y} + 2YZ\frac{\partial^2}{\partial Y\,\partial Z} + 2ZX\frac{\partial^2}{\partial Z\,\partial X}\right)U,$$

$$G(U, V) = XY\left(\frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial Y}\right) + YZ\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial V}{\partial Y}\frac{\partial U}{\partial Z}\right) + ZX\left(\frac{\partial U}{\partial Z}\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Z}\frac{\partial U}{\partial X}\right),$$

$$\Gamma(U) = \frac{1}{2}G(U, U).$$

En M_0, confondu avec O où $f''_{x^2} = f''_{x_0^2}$, $f''_{xy} = f''_{x_0 y_0}$, ... et où Φ est une forme quadratique définie, positive ou négative suivant que f est minima ou maxima en O, la forme quadratique Ψ relative à g prend une expression $\Psi_0(X, Y, Z)$ dans laquelle les coefficients des termes carrés ont même signe. La quadrique indicatrice du champ g en O est un ellipsoïde réel et Ψ_0 est une forme quadratique du même signe que Φ_0 : *la fonction $g(X, Y, Z)$ a en O un extremum de même nature que celui qu'y admet la fonction $f(x, y, z)$*, ce qui revient à dire que *le champ $g(x, y, z)$ est un champ scalaire centré de même nature* (répulsif ou attractif) *que le champ $f(x, y, z)$*, auquel on peut attribuer le même centre, moyennant la convention admise plus haut.

3° Les surfaces de niveau du champ g sont, comme celles du champ f, des surfaces fermées convexes entourant le centre O. Les unes et les autres sont rencontrées en un seul point par tout rayon central. Il existe, de ce fait, une correspondance ponctuelle entre la surface de niveau $f = C$ et la surface de niveau $g = G(C)$, $g = G(f)$ étant la racine en g de l'équation $F(f, g) = 0$, les points $m(x, y, z)$ de l'une correspondant aux points $M(X, Y, Z)$ où les rayons qu'ils déterminent percent l'autre surface. Pour préciser cette correspondance

ponctuelle, il suffit de remarquer que la valeur commune des rapports

$$\frac{Om}{OM} = \frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}$$

dépend uniquement soit de la position du point M(X, Y, Z) sur la surface de niveau considérée du champ g, soit de la position du point $m(x, y, z)$ sur la surface $f = C$, de sorte que ce rapport est une fonction de X, Y, Z, que nous désignerons par $\varphi(X, Y, Z)$, ou une fonction de x, y, z, que nous désignerons par $\frac{1}{\psi(x, y, z)}$. Les formules (T) définissant la transformation ponctuelle du champ f en le champ g sont alors

$$\text{(A)} \qquad x = X\varphi(X, Y, Z), \qquad y = Y\varphi(X, Y, Z), \qquad z = Z\varphi(X, Y, Z),$$

la transformation inverse étant définie par les formules

$$\text{(B)} \qquad X = x\psi(x, y, z), \qquad Y = y\psi(x, y, z), \qquad Z = z\psi(x, y, z).$$

Si l'on se donne $\varphi(X, Y, Z)$, les formules (A) permettent de transformer le champ scalaire centré $f(x, y, z)$ en un autre champ scalaire centré

$$g(X, Y, Z) = f(X\varphi, Y\varphi, Z\varphi)$$

de même centre, dont les surfaces de niveau correspondent à celles du champ f par les formules (A), et, d'une façon générale, d'en déduire tout champ scalaire centré de même centre, défini par une fonction g liée à f par une relation $F(f, g) = 0$, qui n'admet qu'une racine en g de la forme $g = G(f)$ où est opéré, dans f, le changement de variables défini par les formules (A).

26. **Passage d'un champ scalaire centré à un champ sphérique.** — Ce procédé s'applique très simplement à la transformation du champ scalaire centré f en un champ *sphérique* de même centre O. Il suffit, après avoir ramené, par les procédés indiqués au n° 3, la fonction f à être nulle en O, positive en tout autre point et infinie à l'infini, de prendre :

d'abord $f = g$, relation de la forme $F(f, g) = 0$ ou $g = G(f)$;

ensuite $g = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, de sorte que les surfaces de niveau $g = \text{const.}$ sont les sphères de centre O (d'où le nom de champ sphérique donné au champ g);

enfin de prendre la fonction $\psi(x, y, z) = \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ dans les formules (B) du numéro précédent, qui s'écrivent ici

$$\text{(C)} \qquad X = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f(x, y, z), \qquad Y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f(x, y, z),$$

$$Z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} f(x, y, z),$$

et pour lesquelles on a bien $g = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = f$.

Les surfaces fermées convexes que sont les surfaces de niveau d'un champ scalaire centré se déduisent donc de sphères concentriques par la transformation ponctuelle définie par les formules (C), grâce auxquelles une surface fermée convexe se transforme en une sphère centrée en un point intérieur à cette surface. D'où l'on déduit *qu'une surface fermée convexe est réductible à une sphère par une déformation continue* consistant en une contraction ou dilatation du rayon vecteur issu d'un point intérieur, résultat établi par d'autres considérations par M. G. Bouligand dans ses *Leçons de Géométrie vectorielle* (2e édition, n° 277).

Si la surface fermée convexe a pour équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z)$ étant une fonction prise négative à l'intérieur, où elle admet le minimum (négatif) f_0 en O, la fonction *positive* qui figure dans les formules (C) et qui est nulle en O, doit y être remplacée, dans le cas présent, par $f(x, y, z) - f_0$ et les formules (C) qui conviennent alors s'obtiennent en remplaçant f par $-f_0$, puisque $f = 0$ sur la surface considérée.

27. **Définition d'un champ scalaire centré borné et transformation de ce champ en un champ scalaire centré illimité de même centre.** — 1° Nous n'avons considéré jusqu'ici que le cas, correspondant à un seul extremum de f, d'un champ scalaire centré *illimité*, c'est-à-dire s'étendant à l'infini dans toutes les directions. Si nous définissons dans une région de l'espace un champ scalaire centré comme un champ scalaire dont les surfaces de niveau sont des surfaces fermées convexes, nous sommes amenés à envisager les champs scalaires centrés *bornés* tel que celui qui existe dans la région environnant l'un des points de l'espace où f admet des extrema. Ce point O est, en effet, entouré par des surfaces de niveau qui sont fermées convexes à son voisinage (n° 9) mais qui, en s'éloignant de O et se rapprochant d'un autre point correspondant à un nouvel extremum de f, cessent de l'être pour le redevenir autour de ce dernier point. Nous avons ainsi deux champs scalaires centrés bornés faisant partie du même champ scalaire f et définis dans les régions environnant les deux points d'extremum, où les surfaces de niveau sont fermées convexes. Ces régions sont séparées par une surface de niveau fermée non convexe (Σ) entourant les deux points, pouvant passer par un point où f est stationnaire. Elles constituent deux *compartiments* de la région intérieure à (Σ) qu'elles forment par leur *réunion*. Sans insister sur ces considérations, remarquons que la région où est défini le champ scalaire centré en O est limité par une surface fermée (S^*) faisant partie de la surface de niveau (Σ), de sorte qu'un champ scalaire centré borné est défini dans une région intérieure à une surface de niveau fermée entourant le centre O considéré de ce champ et sur laquelle f prend la valeur C.

2° Un tel champ peut être transformé en un champ scalaire centré illimité de même centre en faisant correspondre à sa surface frontière (S^*) la surface

de niveau à l'infini du champ illimité, grâce à une transformation homographique opérée sur chaque rayon central, rejetant à l'infini le point où il perce la surface (S*), mais conservant le centre O.

Il suffit d'opérer la transformation ponctuelle définie par les équations (B) du n° 25 où l'on prend

$$\psi(x, y, z) = \frac{f}{C-f} \qquad \text{(quantité positive)}$$

et de définir le nouveau champ par la fonction

$$g(X, Y, Z) = f\left(\frac{C-f}{f}X, \frac{C-f}{f}Y, \frac{C-f}{f}Z\right).$$

CHAPITRE V.

ONDES ASSOCIÉES A UN CHAMP SCALAIRE CENTRÉ.

28. **Représentation d'une famille de surfaces d'onde par les surfaces de niveau d'un champ scalaire.** — Considérons la propagation dans un milieu continu d'une onde n'admettant pas d'onde enveloppe.

Soit

$$F(x, y, z, t) = 0, \tag{57}$$

l'équation des surfaces d'onde. L'absence d'enveloppe pour ces surfaces, qui forment une famille à un paramètre t, se traduit par $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$ à tout instant t en tout point (x, y, z) du milieu de propagation.

De ce fait, l'équation (57) considérée comme une équation en t, admet une seule racine positive,

$$t = \varphi(x, y, z), \tag{58}$$

qui représente une fonction positive croissante de x, y, z, définissant un champ scalaire dont les surfaces de niveau s'identifient avec les surfaces d'onde.

Plus généralement, l'onde en question qui se propage peut être représentée par un champ scalaire défini par une fonction *arbitraire* de la fonction (58), que nous représenterons par $f(x, y, z) = \psi(t) = \psi[\varphi(x, y, z)]$ et que nous supposerons une fois pour toutes être une *fonction positive croissante* de t. Les surfaces d'onde sont les surfaces de niveau de ce champ scalaire.

29. **Vitesse de propagation de l'onde suivant une ligne de champ.** — 1° Un point mobile M parcourant, suivant une loi de mouvement quelconque, dans le sens des f croissants, qui est celui des t croissants, une ligne de champ (L), traverse chaque surface de niveau avec la vitesse

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{W}\frac{df}{dt} \qquad \left(\text{puisque } W = \frac{df}{ds}\right). \tag{59}$$

Si le point M est considéré comme appartenant à la surface d'onde, en tant que trace sur elle de la ligne de champ (L) le long de laquelle cette surface mobile déformable se déplace dans le sens des t croissants, V *est la vitesse de propagation de l'onde suivant cette ligne de champ;* cela résulte de l'orthogo-

nalité de (L) aux surfaces de niveau (S), qui représentent les positions successives de la surface d'onde qu'accompagne le point mobile M toujours situé sur elle. f étant prise comme fonction croissante de t, la vitesse de propagation V définie par (59) est positive et inversement proportionnelle à W.

2° Si le mouvement de M sur (L) a lieu avec la vitesse $\vec{W}$, on a $V = W$, de sorte que $\frac{df}{dt} = W$. Mais de $f = \psi(t)$, on tire

$$t = g(f), \qquad \text{d'où} \quad W = \frac{df}{dt} = \psi'(t) = \frac{1}{g'(f)},$$

c'est-à-dire $\Delta_1 f = \frac{1}{g'(f)}$, équation aux dérivées partielles du premier ordre d'une famille de surfaces parallèles (n° 15) : *la propagation s'effectue par ondes parallèles si la vitesse de propagation est le gradient de la fonction définissant un champ scalaire qui représente cette propagation.*

Dans ce cas, si l'on prend $f = V_0 t$, on a $V = W = V_0$; *la propagation par ondes parallèles a lieu avec une vitesse uniforme* qui est celle du mouvement uniforme de M sur (L). Réciproquement une telle propagation de vitesse V_0 est représentée par $f = V_0 t$ comme il résulte de (59) si l'on convient de prendre $f = 0$ pour $t = 0$.

3° La vitesse de propagation V peut se déterminer directement à partir de l'équation (57) des surfaces d'onde, que cette équation puisse ou non être résolue par rapport à t.

L'équation $F = 0$ représentant aussi les surfaces de niveau $f = \text{const.}$, on a

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{f'_x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{f'_y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{f'_z} = \varepsilon \frac{\sqrt{\Delta_1 F}}{W}, \tag{60}$$

où

$$\Delta_1 F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2$$

et où $\varepsilon = \pm 1$ est pris positif ou négatif suivant que les vecteurs $\vec{W}$ et $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$, normaux à la surface d'onde, sont de même sens ou de sens opposés. On peut toujours prendre $\varepsilon = +1$, car, si $\varepsilon = -1$, il suffit de changer F de signe, ce qui ne modifie par l'équation (57), pour changer le sens du vecteur $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ opposé à $\vec{W}$, qui devient alors celui de $\vec{W}$, partant, pour changer de signe ε qui devient ainsi égal à $+1$.

L'équation $F = 0$ devient une identité lorsque t y est remplacé par $\varphi(x, y, z)$.

On a de la sorte, par dérivation par rapport à chacune des trois variables indépendantes x, y, z, les trois identités

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{61}$$

La substitution de $\varphi(x, y, z)$ à t dans $\psi(t) = f(x, y, z)$ donne de même, par dérivation partielle :

$$\frac{df}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f'_x, \qquad \frac{df}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = f'_y, \qquad \frac{df}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = f'_z. \tag{62}$$

Portant dans (61) les valeurs de $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ tirées des relations (60) où $\varepsilon = +1$ et celles de $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ données par (62), les trois identités (61) se réduisent à la seule identité

$$\frac{\sqrt{\Delta_1 F}}{W} + \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{df}{dt}} = 0,$$

qui, pour $V = \frac{1}{W}\frac{df}{dt}$, donne

$$V = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\Delta_1 F}}. \tag{63}$$

Cette expression bien connue de la vitesse de propagation montre que la fonction $F(x, y, z, t)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 = 0 \tag{64}$$

et peut se déterminer comme solution de cette équation si V est une fonction connue de x, y, z, t.

30. **Onde associée au mouvement d'un point matériel le long d'une ligne de champ.** — 1° Si l'on veut que W soit effectivement une vitesse, il faut, d'après (59), que $\frac{df}{dt} = VW$ ait les dimensions du carré d'une vitesse, cas réalisé dans la propagation par ondes parallèles avec une vitesse uniforme (numéro précédent).

On peut se placer à un autre point de vue, d'ordre dimensionnel.

Les variables d'espace x, y, z, qui figurent dans $F(x, y, z, t)$ et servent à repérer la position d'un point de l'espace par rapport au trièdre de référence, sont homogènes à des longueurs, tandis que la variable-temps t joue un rôle différent, puisqu'elle sert au repérage des surfaces d'onde. Pour faire jouer le même rôle aux quatre variables dont dépend la *fonction d'onde* F, il faut substituer à t une variable u homogène à une longueur. La fonction d'onde, que nous continuerons à désigner par F, devient alors une fonction $F(x, y, z, u)$ des quatre variables x, y, z, u.

En remplaçant t par u dans les équations (59) et (58), les calculs faits au

numéro précédent conduisent au résultat suivant :

$$V = \frac{1}{W}\frac{df}{du}\frac{du}{dt} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\sqrt{\Delta_1 F}}\frac{du}{dt}.$$

Profitons de ce que le choix de u et de f est arbitraire pour prendre, pour ces fonctions de t, les expressions les plus simples donnant à u les dimensions d'une longueur et à $\frac{df}{dt} = \frac{df}{du}\frac{du}{dt}$ celles du carré d'une vitesse, donc à $\frac{df}{du}$ celles d'une vitesse. Ces expressions sont évidemment $u = ct$ et $f = cu = c^2 t$, c étant une constante positive homogène à une vitesse.

On en déduit par (59) que, dans cette représentation de la propagation considérée, la vitesse de propagation V est liée à la vitesse W du point matériel en mouvement par la relation

$$V = \frac{c^2}{W}. \tag{65}$$

Si c est la vitesse de la lumière dans le vide, c'est *la formule de M. Louis de Broglie* (1), reliant la *vitesse de phase* V de l'onde associée à un corpuscule *à la vitesse de groupe* W égale à celle du corpuscule. Ces deux vitesses ne sont égales que si l'une d'elles a la valeur c et le restent si la propagation s'effectue par ondes parallèles, avec, d'ailleurs, la vitesse c. Ce cas se présente dans le cas de l'émission de *photons*, corpuscules animés de la vitesse de la lumière. Dès lors, si l'on admet que c est une constante universelle, la même pour tous les rayonnements, le cas des photons prouve qu'elle est égale à la vitesse de la lumière. La relation (65) est bien la formule de M. de Broglie.

2° Ce qui précède permet d'associer à la propagation d'une onde le mouvement d'un point mobile sur une trajectoire orthogonale aux surfaces d'onde. On obtient aussi cette correspondance entre la trajectoire du mobile et les surfaces d'onde par les considérations du n° 24 en associant le point $m(x, y, z)$, qui décrit une ligne de champ, à une surface d'onde (S), dont M(X, Y, Z) est le point courant, par une relation de la forme $\mathcal{F}(x, y, z; X, Y, Z) = 0$.

3° Inversement, associons au mouvement d'un mobile sur une ligne intégrale du champ scalaire f la propagation d'une onde dans laquelle les surfaces d'onde coïncident avec les surfaces de niveau $f = \text{const.}$, mais prenons cette fois comme mobile un point matériel P de masse m.

C'est le cas des ondes électromagnétiques dues au mouvement accéléré d'un électron (théorie de Lorentz). Plaçons-nous dans le cas d'un champ scalaire centré répulsif. Le point matériel P part du repos (vitesse initiale $W = 0$), du centre du champ O qui constitue sa position d'équilibre stable, et se déplace

(1) Louis de Broglie, *Introduction à la Mécanique ondulatoire*, Chap., III, n°s 1 à 3.

sous l'action d'un champ de forces qui dérive, conformément au théorème des forces vives, d'une fonction de forces $U = \frac{1}{2} m W^2 + U_0$, dont la valeur en O est la constante des forces vives U_0. Ce point matériel possède, à un instant t, l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m W^2$ et l'énergie potentielle $E_p = -U$. Son énergie totale est

$$E = E_c + E_p = -U_0.$$

On a ainsi

$$W^2 = 2\frac{E - E_p}{m}. \tag{66}$$

D'autre part, l'*action d'Hamilton* (n° 13) relative à ce point matériel est

$$S = m\int_0^t W^2\,dt = m(f - f_0). \tag{67}$$

Dans la propagation d'une onde associée au mouvement de P sur une ligne de champ (L) du champ f, l'action S, grâce à f, est une fonction de t et il en est de même de la *fonction* ou *action de Jacobi* $\psi = S - Et$.

Les surfaces $\psi =$ const. coïncident avec les surfaces d'onde $f =$ const.

La fonction ψ joue donc le rôle de la fonction d'onde F et peut être substituée à elle dans (63). Tenant compte de $-\frac{\partial\psi}{\partial t} = E$ et de $\Delta_1\psi = \Delta_1 S = m^2\Delta_1 f = m^2 W^2$, on obtient comme expression de la vitesse de propagation de l'onde associée

$$V = \frac{E}{mW} \tag{68}$$

ou, d'après (66),

$$V = \frac{E}{\sqrt{2m(E - E_p)}}. \tag{69}$$

D'après (68), la *vitesse de propagation est inversement proportionnelle à la quantité de mouvement du point matériel.*

4° D'après (67), $f - f_0 = \int_0^t W^2\,dt$ a les dimensions du produit du carré d'une vitesse par un temps, ce qui est conforme aux considérations d'homogénéité qui nous ont conduit à la formule (65) et en vertu desquelles la fonction *arbitraire* $f - f_0$ peut être prise proportionnelle à t et de la forme $c^2 t$. Dès lors, $S = mc^2 t$ et l'égalité des expressions (65) et (68) de V fournit la *formule d'Einstein*

$$E = mc^2 \tag{70}$$

($c =$ vitesse de la lumière dans le vide) établie ainsi indépendamment de la Relativité.

Remarques. — **1.** L'émission au centre O de corpuscules animés d'un mouvement uniforme de vitesse c suivant les divers rayons centraux et la propagation d'ondes sphériques centrées en O se propageant avec la même vitesse c sont deux phénomènes équivalents au sens indiqué ci-dessus.

2. Au centre d'émission, $W = 0$, la vitesse de propagation y est infinie. D'après la théorie de la Relativité, la vitesse W du point matériel est inférieure à c qu'elle ne peut dépasser. Puisque $W < c$, d'après (65) on a $V > c$, *l'onde associée devance le point matériel,* à moins qu'elle ne l'accompagne avec la vitesse c (cas du photon), la propagation s'effectuant alors par ondes parallèles (n° **29**).

3. Il existe une indétermination sur le choix de la trajectoire du point matériel au mouvement duquel est associée la propagation d'onde considérée, toutes les lignes de champ convenant comme trajectoires de ce point : *il est impossible de préciser la ligne de champ associée à l'onde et, consequemment, de situer la position du point matériel dans l'espace.*

31. **Propagation d'une onde fermée convexe à front unique.** — 1° Considérons, pour fixer les idées, un champ de forces se modifiant au cours du temps et dérivant d'un potentiel qui dépend évidemment du temps. C'est ce qui se produit lors de l'apparition ou de la disparition d'un champ permanent ou variable dans un milieu continu. Il se peut aussi qu'un champ prexistant dans le milieu subisse une modification temporaire ou définitive. Dans tous les cas, il s'agit de la *variation* d'une quantité scalaire telle qu'un potentiel, la projection sur un axe du vecteur champ dans le cas d'un champ de forces ou d'un champ de vitesses, une densité, une pression au sein d'un fluide, etc., qui, en l'absence de cette variation, dont l'état permanent du milieu, est une fonction des coordonnées x, y, z (variables d'espace), et qui, du fait de la modification de cet état, devient en outre une fonction du temps t. Cette variation, et non la quantité scalaire elle-même qui la subit, constitue la *perturbation.* Elle est une fonction de x, y, z, t de même nature que la quantité scalaire qu'elle concerne et que nous avons déjà désignée sous le nom de *fonction d'onde.* C'est elle que nous avons représentée par $F(x, y, z, t)$.

2° A un instant donné, la perturbation intéresse tous les points du milieu appartenant à une région dite *troublée* ou *perturbée,* qui s'étend sans cesse et englobe progressivement le reste du milieu où ne s'est pas encore manifestée la modification envisagée et constituant la *région au repos* à l'instant considéré. C'est dans l'extension progressive de la région troublée que consiste la *propagation de l'onde,* le nom *d'onde* s'appliquant aussi bien à la région où a lieu la perturbation qu'à celle-ci. La fonction d'onde $F(x, y, z, t)$ est identiquement nulle dans la région au repos. Elle l'est évidemment aussi sur la surface (S) qui sépare la région au repos de la région troublée et qui est, par définition, le *front d'onde.* Si l'on donne le nom de *surface d'onde* au lieu des points de l'espace où la fonction d'onde a même valeur C à *un instant donné t,* c'est-à-dire à la surface d'équation $F(x, y, z, t) = C$, le front d'onde est la surface d'onde

particulière $F(x, y, z, t) = 0$ que nous avons eu uniquement en vue jusqu'ici et que nous continuons à considérer sous le nom de *surface d'onde* quand aucune confusion n'est à craindre.

3° De deux choses l'une : ou la perturbation persiste aux points qu'elle a atteints ou elle s'y affaiblit et disparaît. N'examinons ici que le premier cas en supposant que les surfaces d'onde $F = C$ sont à tout instant des surfaces fermées convexes. Le champ f qui représente la propagation est alors un champ scalaire centré. A chaque instant, la région troublée, qui comprend et entoure le centre O du champ, est le volume intérieur à la surface d'onde $F = 0$; le front d'onde est unique. La surface fermée convexe qui constitue ce front d'onde, prend de plus en plus la forme d'une sphère centrée en O au fur et à mesure qu'elle s'éloigne de ce point. Parvenue à une très grande distance de O, elle est sensiblement sphérique. Comme ses positions successives peuvent alors être considérées comme des sphères concentriques, qui sont des surfaces parallèles, la propagation d'une onde fermée convexe devient, à la longue, celle d'une onde sphérique de centre O, loin de ce dernier, et s'effectue avec une vitesse constante V_0 lorsqu'on prend $f = V_0' t$.

Dès maintenant apparaît l'intérêt que présente la propagation d'ondes sphériques parallèles (ou concentriques).

32. **Propagation d'une onde fermée convexe à front avant et front arrière. Période et longueur d'onde.** — 1° Si la région entourant O, troublée par le passage de l'onde, revient au repos —, en admettant même que ce retour au repos se fasse progressivement, par exemple par la décroissance de $|F|$ en fonction du temps suivant une loi exponentielle, mais assez rapidement pour que la perturbation $F(x, y, z, t)$ se réduise, au bout d'un temps relativement court, à une valeur insignifiante qui puisse être négligée —, à un instant donné, la région au repos comprend la région extérieure à la surface d'onde $F = 0$, qui sépare la région troublée de la région non encore atteinte par la perturbation, et la région interieure revenue au repos. Cette dernière région est séparée de la région troublée qui l'entoure, par une surface d'onde $F = 0$, lieu des points où cesse la perturbation.

Le front d'onde $F = 0$ comprend ici deux surfaces fermées convexes entourant le centre O et intérieures l'une à l'autre : l'une (S_1), appelée *front avant*, considérée seule au numéro précédent, qui précède et limite vers l'avant la région troublée, l'autre (S_2), constituant le *front arrière* de l'onde, qui la suit et la limite vers l'arrière. L'onde, c'est-à-dire la région troublée dans laquelle $F \neq 0$, est comprise entre les deux fronts dont la distance (distance minima d'un point de l'un à un point de l'autre) définit la *longueur d'onde* λ qui mesure, en quelque sorte, l'épaisseur minima de cette région. Cette longueur d'onde varie généralement avec l'instant où l'on considère la position de l'onde définie par ses deux fronts. Elle est une fonction de t de la forme $\lambda(t)$. La

durée T de passage de l'onde en un point du milieu, entre l'instant où l'atteint le front avant et celui où le dépasse le front arrière, peut définir la *période locale* de la perturbation en ce point. Elle varie, en général, d'un point à l'autre du milieu, ce qui revient à dire qu'elle est une fonction scalaire positive de la forme $T(x, y, z)$.

2° Lorsque t augmente indéfiniment, les deux fronts d'onde tendent à devenir deux sphères de centre O.

Très loin de la source O, ils peuvent être considérés comme sphériques. Ces deux sphères concentriques cheminent avec la même vitesse de propagation V_0. Elles ne pourraient d'ailleurs pas parvenir à coïncider, sinon l'onde spatiale s'évanouirait en une onde superficielle, ce qui n'a aucune réalité physique. Elles constituent deux surfaces parallèles constamment séparées par la même distance λ_0. La longueur d'onde λ tend donc asymptotiquement vers une limite non nulle λ_0 et il en est de même de la période T qui a pour limite le temps

$$T_0 = \frac{\lambda_0}{V_0},$$

que doit mettre le front arrière pour franchir, avec la vitesse V_0, la distance λ_0 qui sépare de la position qu'occupe le front avant au même instant.

On peut admettre qu'on se trouve très approximativement dans ce cas-limite, où les ondes peuvent être considérées comme des ondes sphériques se propageant avec la vitesse uniforme V_0 suivant un rayon central, si, d'une façon précise, la distance minima ρ du centre O au front arrière de l'onde peut être prise assez grande *par rapport à la longueur d'onde limite* λ_0 pour que l'écart $\lambda - \lambda_0$ de la longueur d'onde réelle λ par rapport à sa limite λ_0 soit très faible vis-à-vis de λ_0, c'est-à-dire si l'on peut choisir $\frac{\rho}{\lambda_0}$ assez grand pour qu'on ait

$$\frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0} < \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \lambda_0(1-\varepsilon) < \lambda < \lambda_0(1+\varepsilon),$$

ε étant un nombre positif donné pris aussi petit qu'on veut.

Le rapport $\frac{|\lambda - \lambda_0|}{\lambda_0}$ mesure en quelque sorte l'approximation obtenue.

Finalement nous sommes ramenés à l'étude d'une propagation d'ondes sphériques concentriques pour lesquelles la vitesse de propagation V, la période T et la longueur d'onde λ sont constantes.

33. Propagation d'une onde ordinaire. Équation de d'Alembert. — 1° *Équation de propagation.* — Écartant le cas d'une *onde de choc*, caractérisée par la discontinuité des dérivées premières de la fonction d'onde $F(x, y, z, t)$ à la traversée du front d'onde (S), nous ne considérons que celui d'une *onde ordinaire* (au sens d'Hugoniot) qui consiste dans la discontinuité des dérivées partielles du second ordre de F à travers la surface d'onde (S).

Ces dérivées secondes, nulles dans la région non troublée, le sont aussi sur le front d'onde (S) qui la limite, le long duquel F est une fonction composée de x, y, z, d'ailleurs identiquement nulle, lorsqu'on y remplace t par $\varphi(x, y, z)$, racine en t de $F(x, y, z, t) = 0$. Sur (S) les dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial F}{\partial t}$$

sont identiquement nulles, de sorte que l'on a, sur (S),

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

(comme dans la région au repos).

Dérivant par rapport à x la première et la dernière de ces équations, on obtient les deux équations

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

d'où, multipliant la seconde par $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et retranchant de la première pour éliminer $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial t}$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0.$$

Ajoutant à celle-ci les équations analogues relatives à y et à z, obtenues de la même façon, on a *l'équation de propagation*

$$\Delta F - \Delta_1 \varphi \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \tag{71}$$

qui est l'équation aux dérivées partielles du *second ordre*, à laquelle doit satisfaire la fonction d'onde F lorsque la fonction $\varphi(x, y, z)$ est donnée.

Pour lui donner la forme connue de *l'équation de d'Alembert*

$$\Delta F - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0. \tag{72}$$

où figure la vitesse de propagation V, il suffit d'utiliser les relations

$$f'_x = \frac{df}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad f'_y = \frac{df}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad f'_z = \frac{df}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

déduites de $f = \psi(\varphi)$ et qui, par élévation au carré et addition, donnent

$$W^2 = f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z = \left(\frac{df}{dt}\right)^2 \Delta_1 \varphi,$$

d'où, en vertu de (59),

$$\Delta_1 \varphi = \left(\frac{W}{\frac{df}{dt}}\right)^2 = \frac{1}{V^2},$$

ce qui transforme (71) en (72).

2° *Cas d'une onde sphérique.* — Dans le cas d'une onde sphérique ordinaire de rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, l'équation de propagation (72) se réduit à

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \tag{73}$$

qui, si l'on prend $F = \frac{U}{r}$, se ramène à *l'équation des cordes vibrantes*

$$\frac{\partial U}{\partial r^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \tag{74}$$

la vitesse de propagation V étant supposée constante.

La solution U convenant à la propagation (centrifuge) envisagée ici est une fonction arbitraire de $r - Vt$ ou, ce qui revient au même, de

$$\xi = K\left(t - \frac{r}{V}\right) = K\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right), \tag{75}$$

si α, β, γ sont les cosinus directeurs du rayon le long duquel est considérée la propagation. K est une constante positive, pour l'instant arbitraire, dont nous déterminerons opportunément la valeur plus tard.

La solution de (73) à adopter est finalement $F = \frac{1}{r}\Psi(\zeta)$, Ψ étant une fonction arbitraire de ξ donnée par (75).

34. **Onde sphérique ordinaire à front avant et front arrière.** — Prenons le cas où l'onde sphérique ordinaire est limitée par un front avant et un front arrière, distants de λ, et dont les rayons sont $\rho + \lambda$ et ρ.

A un instant donné t, la fonction F, solution de (73), est une fonction de r qui s'annule sur les deux fronts d'onde, pour les valeurs ρ et $\rho + \lambda$ de r.

Sa dérivée

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \alpha\frac{\partial F}{\partial x} + \beta\frac{\partial F}{\partial y} + \gamma\frac{\partial F}{\partial z}$$

s'annule aussi $\left(\text{avec } \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ pour ces deux valeurs. D'après le théorème de Rolle, la fonction F de r s'annule pour une valeur intermédiaire de r pour laquelle $\frac{\partial F}{\partial r} \neq 0$. Pour cette valeur de r, il existe une surface d'onde $F = 0$ comprise entre les deux fronts d'onde (S_1) et (S_2). La fonction U de la variable $u = r - Vt$, solution de (74), s'annule, en même temps que F, sur les deux fronts et sur une surface d'onde intermédiaire (Σ). Sur chacune des parties du rayon comprises entre (Σ) et chacun des fronts d'onde, elle représente le déplacement transversal d'une corde vibrante fixée à ses extrémités, dont la longueur (au repos) serait la distance l_1 ou l_2 de (Σ) à (S_1) ou à (S_2). Comme elle est une fonction périodique de u, de période $2l_1$ dans l'un des cas, $2l_2$ dans

l'autre cas [1], et que cette période est évidemment la même dans les deux cas, on a

$$2l_1 = 2l_2 = l_1 + l_2 = \lambda,$$

la surface d'onde intermédiaire (Σ) *est à mi-distance entre les deux fronts d'onde.*

D'après ce qu'on sait sur la solution de l'équation des cordes vibrantes, la fonction U est une fonction périodique de r, de période $\lambda = 2l$, qui est une fonction impaire de $r - l = r - \frac{\lambda}{2}$ et qui prend donc des valeurs opposées pour les valeurs $\frac{\lambda}{2} - m$ et $\frac{\lambda}{2} + m$ de r $\left(\text{si } m \leqq \frac{\lambda}{2}\right)$ en des points du rayon symétriques par rapport à sa trace sur (Σ).

La fonction U est aussi une fonction périodique de t dont la période est $T = \frac{\lambda}{V}$ puisque $t = \frac{r-u}{V}$.

Si l'on prend $K = \frac{2\pi}{T}$, $\xi = K\left(t - \frac{r}{V}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$ représente un arc exprimé en radians. La fonction $U = \Psi(\xi)$ est une fonction périodique de ξ, de période 2π, qui, sous des conditions assez générales que nous supposerons remplies, peut être développée en série de Fourier. Il en est de même de la fonction $F = \frac{\Psi(\xi)}{r}$.

$\Psi(\xi)$ représente une onde plane normale au rayon considéré (α, β, γ), tangente à l'onde sphérique que représente F et à laquelle elle est ainsi associée. L'étude de l'onde sphérique F se ramène donc à celle de l'onde plane Ψ qui, à cause de son développement en série trigonométrique, résulte de la superposition d'ondes planes sinusoïdales simples de fréquences $\nu = \frac{1}{T}$, 2ν, 3ν, ..., $n\nu$, ... correspondant, la première, au *terme fondamental* de la série de Fourier, les suivantes, aux *harmoniques* de cette série.

35. **Onde plane monochromatique associée au mouvement rectiligne uniforme d'un point matériel.** — Nous sommes ainsi ramenés à l'onde plane sinusoïdale simple ou *monochromatique*

$$\Psi = a \sin 2\pi\nu\left(t - \frac{r}{V}\right), \tag{76}$$

qui représente le terme fondamental du développement en série de Fourier.

L'origine des temps est l'instant où cette onde plane, se propageant dans la direction (α, β, γ), passe par l'origine des coordonnées ($\Psi = 0$ pour $t = 0$ lorsque $r = 0$). Cette onde se déplace en restant normale au rayon de cosinus directeurs α, β, γ. Elle met le temps $t = \frac{r}{V}$ pour parcourir, avec la vitesse V, la distance $r = \alpha x + \beta y + \gamma z$ sur le rayon considéré. Le mouvement d'un point matériel de masse m qui lui est associé s'effectue sur une droite normale

[1] Vessiot et Montel, *Cours de Mathématiques générales*, 2e partie, nos 407 et 408.

aux plans d'onde $\alpha x + \beta y + \gamma z = \text{const.}$ Il est rectiligne uniforme, puisque sa vitesse $W = \frac{c^2}{V}$ est constante. Le champ scalaire qui représente la propagation de cette onde plane, et qui a donc pour surfaces de niveau les plans d'onde, est défini par la fonction $f = c^2 t = c^2 \frac{r}{V} = Wr$.

La valeur de f en O étant ainsi $f_0 = 0$, $S = m(f - f_0)$ est ici $S = \frac{Er}{V}$, compte tenu de (70).

La fonction de Jacobi *changée de signe* devenant $\psi = Et - S = E\left(t - \frac{r}{V}\right)$, la fonction d'onde Ψ prend l'expression

$$\Psi = a \sin \frac{2\pi\nu}{E}(Et - S). \tag{77}$$

Sa *phase*, proportionnelle à $\psi = Et - S$, peut être prise égale à $k\psi$, de sorte qu'on peut écrire

$$\Psi = a \sin k\psi, \tag{78}$$

$k = \frac{2\pi\nu}{E}$ étant une constante, au cours de la propagation, indépendante des conditions géométrique et cinématique suivant laquelle s'accomplit la propagation.

Pour préciser ces conditions, remarquons que le mouvement rectiligne uniforme d'un mobile et la propagation uniforme de l'onde plane monochromatique qui lui est associée sont liées l'une à l'autre au double point de vue géométrique et cinématique, de telle sorte que la trajectoire du mobile est une droite normale au plan d'onde (correspondance géométrique) et que la vitesse W du mobile et la vitesse V de propagation dépendent l'une de l'autre par la relation $VW = c^2$ exprimant la correspondance cinématique. La direction (α, β, γ) de propagation fixe la condition géométrique, la vitesse V de propagation correspond à la condition cinématique; la constante k est indépendante de α, β, γ et de V.

36. **Relation des quanta et longueur d'onde associée.** — 1° *Relation des quanta.* — La double correspondance géométrique et cinématique entre le mouvement rectiligne uniforme d'un point matériel mobile et la propagation de l'onde plane monochromatique associée ne fait pas intervenir la nature, c'est-à-dire la masse m du point matériel, ni la fréquence ν qui caractérise la phase de la fonction d'onde, dont l'amplitude ne présente ici aucun intérêt.

A cause de $E = mc^2$, la constante $k = \frac{2\pi}{c^2}\frac{\nu}{m}$, indépendante des circonstances de la propagation ou du mouvement du point matériel, ne dépend, par le rapport $\frac{\nu}{m}$ auquel elle est proportionnelle, que de la fréquence ν de l'onde sinusoïdale et de la masse m du point matériel considéré. La fréquence ν et la masse m sont nécessairement liées par une relation qui doit être de la forme

$m = q\nu$, car si $\nu = 0$, $\Psi = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'onde plane monochromatique qui se propage, et, si $m = 0$, il n'y a pas de point matériel en mouvement, de telle sorte que, le mouvement du point matériel et la propagation de l'onde plane sinusoïdale étant associés, l'un résultant de l'autre sans qu'on puisse affirmer quel est celui qui est la cause et l'autre l'effet, ν et m s'annulent en même temps.

La fonction d'onde Ψ, caractérisée par ν dans son expression (75), doit aussi être caractérisée par m dans son expression (78), où m figure dans $\psi = Et - S$, puisque $E = mc^2$.

Il s'ensuit que $k = \frac{2\pi\nu}{E} = \frac{2\pi}{c^2}\frac{\nu}{m}$ est une constante universelle, qu'il en est de même de $q = \frac{m}{\nu}$, partant, de $h = qc^2 = \frac{E}{\nu}$, qui définit alors la *constante de Planck*. On aboutit ainsi à la *relation des quanta*,

$$E = h\nu, \tag{79}$$

qui exprime la conservation de l'énergie, l'énergie totale E du point matériel en mouvement et l'énergie de rayonnement $h\nu$ transportée par l'onde se transformant l'une dans l'autre suivant que l'on considère l'un ou l'autre des deux aspects du phénomène, mouvement du point matériel ou propagation de l'onde.

Si le raisonnement intuitif précédent, paraît insuffisamment probant, on peut aussi partir de la relation $E = h\nu$ équivalente à $m = q\nu$ et démontrer que h est une constante universelle en utilisant la relativité de la fréquence ν et de l'énergie rayonnante E, E et ν se transforment suivant la même loi dans le passage du système de référence S_0, lié au point matériel en mouvement rectiligne uniforme de vitesse W par rapport à l'observateur, au système de référence S auquel appartient cet observateur. Si E_0 et ν_0 sont l'énergie et la fréquence mesurées par rapport au système S_0 (ν_0 : *fréquence propre de l'onde*), cette loi de transformation s'exprime par les relations

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - \frac{W}{c}}{1 + \frac{W}{c}}},$$

d'où il résulte que

$$h = \frac{E}{\nu} = \frac{E_0}{\nu_0}$$

est une constante universelle.

Cette démonstration repose sur la théorie de la Relativité [1], dont est indépendant le raisonnement direct précédent qui nous a permis d'établir la relation des quanta.

---

[1] J. Becquerel, *Le principe de relativité et la Théorie de la gravitation*, Chap. VIII, nos 35, 36 et 37.

2° *Longueur d'onde de l'onde plane monochromatique associée* (1). — Si dans la relation $\lambda = VT$ on remplace T par $\frac{1}{\nu}$ et V par $\frac{h\nu}{mW}$, valeur donnée par (68) où $E = h\nu$, on obtient la *formule de M. Louis de Broglie*,

$$\lambda = \frac{h}{mW}, \tag{80}$$

qui fait connaître la longueur d'onde de l'onde plane monochromatique associée à un corpuscule de masse m animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse W.

3° *L'équation de Schrödinger* (2). — L'expression (76) de Ψ donne

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi^2 \nu^2 \Psi,$$

d'où

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Psi, \qquad \text{car} \quad \frac{\nu}{V} = \frac{1}{\lambda}.$$

D'après (80) et (69),

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{m^2 W^2}{h^2} = 2m\frac{E - E_p}{h^2},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - E_p)\Psi.$$

Ainsi l'équation de propagation $\Delta\Psi - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$, que vérifie la fonction d'onde Ψ, se transforme en l'*équation de Schrödinger*,

$$\Delta\Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - E_p)\Psi = 0. \tag{81}$$

C'est cette équation non relativiste, à laquelle est adjointe le second membre imaginaire $\frac{4\pi i m}{h}\frac{\partial \Psi}{\partial t}$, qui est le véritable point de départ de la *Mécanique Ondulatoire*.

---

(1) Louis de Broglie, *Introduction à la Mécanique ondulatoire*, Chap. III, nos 4 et 5.
(2) Louis de Broglie, *Introduction à la Mécanique ondulatoire*, Chap. V, no 3.

Lu et approuvé :
Toulouse, le 30 octobre 1944.
Le Doyen,
Paul DOP.

Vu et permis d'imprimer :
Toulouse, le 31 octobre 1944.
Le Recteur,
Paul DOTTIN.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE DES OUVRAGES CONSULTÉS.

Paul APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III (Gauthier-Villars).

Jean BECQUEREL, *Principe de relativité et la Théorie de la gravitation* (Gauthier-Villars).

Georges BOULIGAND, *Leçons de Géométrie vectorielle*, 2e édition (Vuibert).

G. BOULIGAND et Jacques DEVISME, *Lignes de niveau. Lignes intégrales* (Vuibert).

A. BOUTARIC, *La Physique moderne et l'Électron* (Félix Alcan).

Louis de BROGLIE, *Introduction à la Mécanique ondulatoire* (Hermann).
— *La Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules* (Gauthier-Villars).
— *Continu et discontinu en Physique moderne* (Albin Michel).

A. BUHL, *Géométrie et Analyse des intégrales doubles. Collection Scienta*, n° 36 (Gauthier-Villars).
— *Nouveaux éléments d'Analyse*, t. II et IV (Gauthier-Villars).

Gaston DARBOUX, *Théorie des surfaces* (Gauthier-Villars).

Georges DÉJARDIN, *Les Quanta* (Collection Armand Colin, n° 121, 3e édition).

Édouard GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I et II (Gauthier-Villars).

Jacques HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique* (Hermann).
— *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. II (Hermann).

Gaston JULIA, *Éléments de Géométrie infinitésimale* (Gauthier-Villars).

Paul LANGEVIN, *La Physique depuis vingt ans*. Encyclopédie scientifique (Gaston Doin).

P. LÉVY, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. II (Cours lithographié).

Charles PLATRIER, *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique*, t. II (Gauthier-Villars).