THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

JEAN FERRANDON

Un procédé de rigidification des ouvrages suspendus

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1944

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1944__266__1_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

N° D'ORDRE :
120

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR JEAN FERRANDON
Ingenieur civil de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussees

1re THÈSE. — UN PROCÉDÉ DE RIGIDIFICATION DES OUVRAGES SUSPENDUS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 26 septembre 1944 devant la Commission d'examen.

MM. BÉGHIN, *Président.*
FOCH, PÉRÈS, *Examinateurs.*

UNIVERSITÉ DE PARIS
FACULTÉ DES SCIENCES
CABINET DU DÉPARTEMENT DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

INSTITUT H. POINCARÉ
1, Rue Pierre-Curie
PARIS-5e

1947

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... M. PAUL MONTEL.

PROFESSEURS

P. MONTEL.....	T	Théorie des fonctions.
L. BLARINGHEM ...	T	Botanique.
G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN.....	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY...	T	Pétrographie.
A. DENJOY	T	Géométrie supérieure.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
E. BLOCH.....	T	Physique.
G. BRUHAT.....	T	Physique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE	T	Electronique et Radio-activité.
M. JAVILLIER.	T	Chimie biologique.
ROBERT LÉVY.....	T	Physiologie comparée.
HENRI VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL.....	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON.....	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER..	T	Électrotechnique générale.
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN...		Optique appliquée.
JOB		Chimie générale.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY.....		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES...	T	Physiologie végétale.
GARNIER.....	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.
PÉRÈS.....	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL.....	T	Chimie minérale.
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT.....		Technique aéronautique.
M. CURIE.....		Physique (P.C.B.).
G. RIBAUD.....	T	Hautes températures.
CHAZY.....	T	Mécanique analytique.
GAULT.....	T	Chimie (P. C. B.).
CROZE.....	T	Physique théorique et Physique céleste.
DUPONT.....	T	Théories chimiques.
LANQUINE.....	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
VALIRON.....	T	Calcul différentiel et intégral.
BARRABÉ.....		Géologie structurale et Géologie appliquée.
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON.....	T	Analyses et mesures chimiques
G. DARMOIS.....	T	Mathématiques générales.
CHATTON....	T	Biologie maritime.
AUBEL.....		Chimie biologique.
JACQUES BOURCART.		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radio-activité.
PLANTEFOL.....	T	Botanique.
CABANNES	T	Recherches physiques.
GRASSÉ	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
PRÉVOST.....		Chimie organique.
BOULIGAND.		Mathématiques.
CHAUDRON.....		Chimie.
WYART.....		Minéralogie.
TEISSIER.....		Zoologie.
MANGENOT..		Biologie végétale (P. C. B.).
P. AUGER.....		Physique.
MONNIER.....		Physiologie générale.
PIVETEAU..... ...		Géologie.
ROCARD.....		Physique.
H. CARTAN.....		Calcul différentiel.
SCHAEFFER.....	T	Physiologie générale.
LAFFITTE.....		Chimie (P. C. B.).
LERAY..... ..		Mécanique théor. des fluides.
FAVART.....		Calcul des Probabilités et Physique Mathématique.
COULOMB.....	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN.....		Biologie animale (P. C. B.).
CHRÉTIEN..... ..		Analyse et mesures chimiques.
DRACH.....		Évolution des êtres organisés.

Secrétaire..... ..... C. MONIER.

PREMIÈRE THÈSE.

UN PROCÉDÉ DE RIGIDIFICATION
DES OUVRAGES SUSPENDUS.

(PASSERELLES ET TRANSPORTEURS AÉRIENS.)

SOMMAIRE.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE THÉORIQUE.

Pages.

INTRODUCTION 5

Câbles isolés chargés verticalement 7

1. Hypothèses et définitions 7
2. Équilibre des forces extérieures 7
3. Figure d'équilibre 8
4. Longueur d'un câble à flèche modérée 9
5. Traction suivant la corde 10
6. Câble chargé uniformément 10
7. Câble porteur 11
8. Calcul direct de l'accroissement de traction dû à un système de surcharges modifiant relativement peu la figure d'équilibre initiale du câble 12
9. Corrections à faire pour tenir compte des allongements élastiques et des variations thermiques 14

Théorie d'un dispositif susceptible de réduire les déformations des câbles porteurs 16

10. Constitution 16
11. Définitions et notations 17
12. Recherche de la déformation 18
13. Recherche des tractions complémentaires 19
14. Efforts dans les suspentes 23
15. Corrections 25

Câble ou système de câbles associés à un tablier rigide 28

16. Généralités 28
17. Équations générales relatives au système complet 29

Pages.

18. Recherche des paramètres Q_0 et Q_1 33
19. Efforts dans les suspentes 35
20. Corrections 36
21. Détermination approchée de l'action de la poutre de rigidité 37

CONCLUSIONS 40

DEUXIÈME PARTIE.

ESSAIS.

I. Rigidification d'une passerelle de 36^m de portée 43
II. Essais sur modèle réduit 51

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE THÉORIQUE.

INTRODUCTION.

L'utilisation des câbles apporte une solution simple et souvent économique au problème du franchissement des brèches.

Ces organes sont faciles à mettre en œuvre au travers d'une vallée ou d'une gorge profonde.

Soumis uniquement à des efforts de traction enveloppant leur figure d'équilibre, ils ne sont pas alourdis par les pièces accessoires destinées à éviter le flambement, que l'on rencontre dans les poutres ou dans les arcs partiellement ou totalement comprimés. Les propriétés de la matière y sont utilisées au mieux.

Par contre, leur grande déformabilité, tant au passage des surcharges que sous l'action de sollicitations accidentelles comme l'effet du vent, constitue un inconvénient qu'il convient de limiter au maximum. Les déformations sont toujours gênantes, parfois dangereuses pour la circulation et préjudiciables à la bonne tenue des ouvrages, disloqués à la longue par les changements de forme importante et successifs qu'ils subissent.

Le dispositif, que nous préconisons pour réduire les dénivellations verticales au passage des surcharges et augmenter accessoirement la stabilité transversale des ouvrages suspendus, consiste essentiellement dans l'adjonction aux câbles porteurs de câbles auxiliaires précontraints appelés *câbles de rigidité* (*fig.* A).

Nous envisageons son application à deux circonstances de la pratique courante :

1° *Franchissement des brèches de portées moyennes par des surcharges localement peu importantes.* — Les éléments du tablier déterminés normalement pour livrer passage aux surcharges sont trop faibles pour assurer, comme dans les ponts suspendus à tablier rigide et à poutre de rigidité

un raidissage efficace de l'ensemble. Les câbles auxiliaires jouent un rôle important en permettant l'emploi économique d'un type avantageux d'ouvrages.

2° *Franchissement des grandes brèches par charges uniques isolées.* — Ce problème, qui se pose fréquemment en montagne, est habituellement résolu par l'emploi de *téléphériques à câbles mous*, dont les inconvénients sont connus. L'adoption de câbles paraboliques rigidifiés par câbles précontraints permet de leur substituer des *lignes aériennes* stables et d'exploitation aisée.

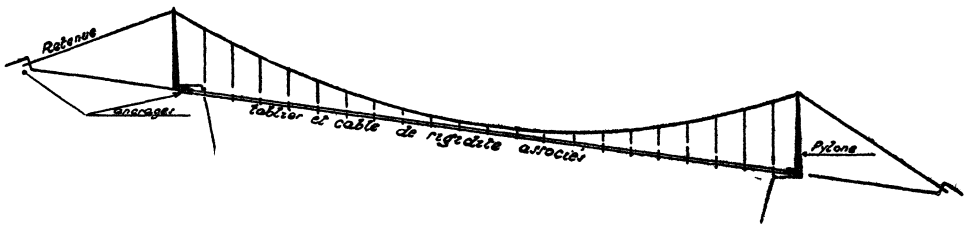

Fig. A. — Schéma d'un ouvrage suspendu rigidifié.

Nous examinerons successivement :

1° Les propriétés des câbles isolés chargés verticalement dont la connaissance est indispensable à l'intelligence de la suite.

2° La théorie d'un dispositif susceptible de réduire les déformations des câbles porteurs.

3° L'extension de la théorie précédente au cas où le tablier présente une rigidité propre.

En annexe nous rendons compte de diverses mesures effectuées sur ouvrage réel et sur modèle réduit.

CÂBLES ISOLÉS CHARGÉS VERTICALEMENT.

1. **Hypothèses et définitions.** — Les câbles utilisés dans la construction des ouvrages peuvent être traités, dans les calculs de stabilité de ceux-ci, comme des organes *flexibles*, incapables de résister élastiquement à d'autres efforts qu'à ceux qui se développent parallèlement à leurs éléments constitutifs. Il en résulte que les actions intérieures relatives à toute section transversale d'un câble donné sont équivalentes à une force unique ou *tension* passant par le centre de gravité de la section et tangente à la figure d'équilibre de la fibre moyenne du câble, ce qui, en employant le langage de la résistance des matériaux, peut s'énoncer :

Tout le long d'un câble en équilibre, le moment fléchissant est nul.

Considérons un câble isolé, pesant, chargé verticalement, établi entre deux *points d'accrochage* A et B; il prend une figure d'équilibre située dans le plan vertical de ces points.

Les axes étant ceux du plan de figure, Ox horizontale du point A, O y verticale descendante de ce point (*fig.* 1), nous désignons par :

θ, l'angle de la droite AB et de l'axe O x;

λ, la distance AB, $l = \lambda \cos \theta$ sa projection sur O x;

L et f, la longueur et la flèche du câble;

ϖ, le poids du câble, au mètre courant de projection horizontale, pouvant être considéré comme *constant* pour les câbles à faibles flèches que nous envisageons, et lié au poids réel unitaire par la relation approchée $p = \varpi \cos \theta$;

p_i, l'intensité d'une charge isolée d'abscisse x_i;

μ, le moment fléchissant, ou *moment statique*, déterminé dans une *poutre fictive* sur appuis simples, de portée horizontale l par l'ensemble des charges (ϖ, p_i) auxquelles est soumis le câble.

2. **Équilibre des forces extérieures.** — L'ensemble des forces extérieures agissant sur le câble comprend :

— Son poids propre et les charges p_i verticales;

— Les réactions T_A et T_B des points d'accrochage A et B, tangentes en A et B à la figure d'équilibre du câble.

Soient (R_A, Q_A), (R_B, Q_B) les composantes suivant Oy et suivant AB des réactions T_A et T_B. L'équilibre statique des diverses forces impose :

— Aux composantes verticales R_A et R_B d'être egales aux réactions-d'appuis de la poutre fictive soumise aux mêmes charges que le câble;

Aux composantes Q_A et Q_B d'être égales et de signes contraires; nous appelons *traction suivant la corde* la valeur de leur commune valeur absolue Q.

3. **Figure d'équilibre.** — Au point courant M (x, y), d'abscisse curviligne s, effectuons un sectionnement (*fig.* 1). L'équilibre du système sera maintenu à condition d'adjoindre aux forces extérieures (poids propre,

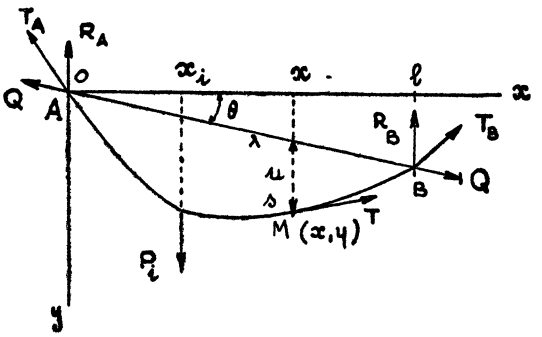

Fig. 1.

charge p_i, réaction T_A) appliquées au tronçon AM, la force de tension T, d'origine M tangente en ce point à la figure d'équilibre, traduisant l'action du tronçon BM sur AM exercée à travers la section M.

Soit u la distance, *comptée verticalement* de M à la corde AB; la considération de l'équilibre du tronçon AM et de la parfaite flexibilité du câble entraîne les conditions :

— projection horizontale des forces agissant sur AM, nulle :

$$Q \cos\theta = T \frac{dx}{ds}, \tag{1}$$

— moment fléchissant en M, nul :

$$\mu - Q u \cos\theta = 0. \tag{2}$$

La première indique que le long du câble, le maximum de la tension coïncide avec le maximum d'inclinaison de la figure d'équilibre.

La seconde assigne à la figure d'équilibre la forme d'un *funiculaire des charges* dont la détermination s'achève par la connaissance de Q

$$u = \frac{\mu}{Q \cos \theta}.$$

La recherche de Q est ainsi le problème essentiel de l'étude d'un câble; sa solution dépend d'une question préliminaire que nous traitons tout d'abord ci-dessous.

4. **Longueur d'un câble à flèche modérée.** — Les câbles employés dans le franchissement des brèches sont toujours relativement tendus; si pour les caractériser à ce point de vue, on considère le rapport de leur flèche à vide (ordonnée du câble non chargé, rapportée à la droite des points d'accrochage et mesurée au milieu de la portée) à leur portée (distance des points d'accrochage), on a pour diverses catégories d'ouvrages les ordres de grandeur suivants :

OUVRAGES	$\frac{f}{l}$
Ponts suspendus.....	de $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{12}$
Téléphériques.....	de $\frac{1}{15}$ à $\frac{1}{25}$
Trailles.....	de $\frac{1}{20}$ à $\frac{1}{30}$

qui justifient le mode de calcul que nous allons maintenant exposer.

Les coordonnées x, y au point M et son ordonnée oblique u étant liées par la relation

$$y = x \operatorname{tg} \theta + u,$$

l'élément $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ a pour expression approchée, en négligeant dans le développement en série du radical toute puissance de $\frac{du}{dx}$ au moins égale à la troisième pour quelconque, et à la quatrième pour $\theta = 0$,

$$ds = \frac{1}{\cos \theta}\left[1 + \sin \theta \cos \theta \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\cos^4 \theta \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right] dx.$$

Par intégration, la longueur L (x) de l'arc AM s'en déduit.

$$(3) \qquad L(x) = \frac{1}{\cos \theta}\left[x + \sin \theta \cos \theta\, u + \frac{1}{2}\cos^4 \theta \int_0^x \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx\right],$$

et plus particulièrement la longueur L de l'arc entier AB.

$$L = \frac{1}{\cos\theta}\left[l + \frac{1}{2}\cos^2\theta \int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx\right]. \tag{4}$$

5. **Traction suivant la corde.** — La figure d'équilibre d'un câble dépend de l'intensité et de la position des charges qui lui sont appliquées; mais aux allongements élastiques et thermiques près, sa longueur se conserve au cours de toute déformation. Cette condition d'invariance détermine la partie principale de la traction suivant la corde qui sera corrigée ultérieurement, si besoin s'en fait sentir, par la prise en compte des variations élastiques et thermiques négligées en première approximation.

L'expression (4) de la longueur L, dans laquelle $\frac{du}{dx}$ est remplacé par sa valeur $\frac{1}{Q\cos\theta}\frac{\partial\mu}{\partial x}$ déduite de (2) s'écrit en effet :

$$L = \lambda + \frac{\cos\theta}{2Q^2}\int_0^l \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{5}$$

elle détermine Q.

Les formules (1), (2), (5) résument en ce qu'elle a d'essentiel la théorie des câbles isolés chargés verticalement. Nous allons en examiner l'application à deux cas importants de la pratique courante des constructions : câble soumis à son seul poids ou à une charge uniformément répartie s'étendant sur toute la portée, câble porteur isolé.

6. **Câble chargé uniformément.** — Les haubans d'amarrage, les câbles paraboliques des ponts supendus sollicités par leur seule charge morte sont dans ce cas.

Soit ϖ la charge unitaire horizontale, le moment fléchissant qu'elle détermine au point d'abscisse x étant

$$\mu = \frac{\varpi}{2}x(l-x),$$

la figure d'équilibre, funiculaire des charges, est une parabole à axe vertical d'équation,

$$u = \frac{4f}{l^2}x(l-x).$$

La longueur L de l'arc AB résulte de la formule (4) dans laquelle

$$\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = -\int_0^l u\frac{d^2u}{dx^2}dx = \frac{8f}{l^2}\int_0^l u\,dx.$$

Si l'on remarque que la valeur de la dernière intégrale est $\frac{2}{3} fl$, il vient

$$L = l\left[\frac{1}{\cos\theta} + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\cos^3\theta\right]. \tag{6}$$

D'autre part, la formule (2) qui s'écrit

$$\frac{\varpi}{2}x(l-x) = Q\frac{4f}{l^2}x(l-x)\cos\theta$$

fournit la valeur de la partie principale de la traction suivant la corde

$$Q = \frac{\varpi l^2}{8 f\cos\theta}. \tag{7}$$

Les équations (6) et (7) permettant de calculer successivement la flèche et la traction d'un câble de longueur donnée, chargé uniformément, résolvent le problème posé.

7. **Câble porteur.** — En plus de la charge uniforme, le câble est sollicité par un système de surcharges verticales ponctuelles.

Sa longueur *à vide*, c'est-à-dire en l'absence des surcharges ponctuelles, est donnée par (6); Q résulte de (5). Dans cette dernière relation, l'intégrale du second membre

$$J = \int_0^l \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 dx,$$

dont la valeur dépend des charges appliquées, est susceptible d'une interprétation simple. Une intégration par parties donne en effet

$$J = \left(\mu\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)_0^l - \int_0^l \mu\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}dx,$$

soit

$$J = \Sigma P_i\,\mu(x_i) + \varpi\int_0^l \mu\,dx. \tag{8}$$

Cette formule traduit la règle :

Pour avoir J, *on multiplie chaque charge, élémentaire ou finie, par l'ordonnée correspondante du diagramme des moments fléchissants de la poutre fictive, et l'on totalise les produits obtenus.*

En résumé, pour obtenir la figure d'équilibre et la traction suivant la corde d'un câble soumis à une charge uniformément répartie ϖ au mètre

courant de projection horizontale et à un système de surcharges isolées p_i d'abscisse x_i ($i = 1, 2, \ldots$), on pourra procéder ainsi :

1° Tracer le diagramme des moments statiques $\mu(x)$ dû au système complet de charges. Ce diagramme se compose d'arcs de paraboles à axes verticaux avec points anguleux au droit des charges concentrées.

2° A l'aide de ce diagramme et par application de la formule (8), calculer J.

3° La traction suivant la corde est alors donnée par

$$Q = \sqrt{\frac{J \cos\theta}{2(L - \lambda)}}.$$

4° Les ordonnées de la figure d'équilibre du câble s'obtiennent enfin, en divisant par $\frac{Q}{\cos\theta}$ les ordonnées du diagramme $\mu(x)$.

8. **Calcul direct de l'accroissement de tractiou dû à un système de surcharges modifiant relativement peu la figure d'équilibre initiale du câble.** — Supposons connu un *état initial* dans lequel la figure d'équilibre (ordonnée u') ainsi que les efforts mis en jeu (traction Q', moment statique μ') ont été préalablement déterminés, et envisageons un *état final* voisin du précédent, dans lequel les ordonnées sont $u' + v$, la traction suivant la corde $Q' + Q$, le moment statique $\mu' + \mu$, est connu de par la définition des surcharges produisant la déformation v; Q et v sont à déterminer et l'on suppose *a priori* v petit par rapport à u' (*fig.* 2).

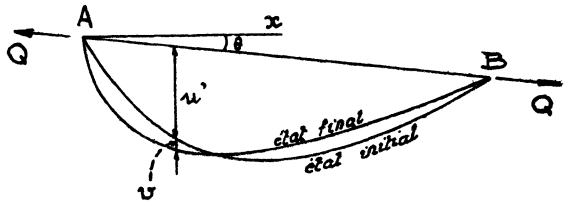

Fig. 2.

Exprimons tout d'abord la nullité du moment fléchissant en chaque point du câble et pour chacun des deux états envisagés :

Dans l'état initial

$$u' \cos\theta = \frac{\mu'}{Q'};$$

Dans l'état final

$$(u' + v) \cos\theta = \frac{\mu' + \mu}{Q' + Q}.$$

Par différence entre ces deux dernières relations, il vient :

$$v \cos\theta = \frac{p - Q u' \cos\theta}{Q + Q'}. \tag{9}$$

Soit $\Delta L'$ l'allongement que subit le câble entre l'état initial et l'état final et provenant de l'intégration des allongements élastiques et éventuellement des variations thermiques élémentaires. Par application de la formule (4), il vient successivement

$$L' = \frac{1}{\cos\theta}\left[l + \frac{1}{2}\cos^2\theta \int_0^l \left(\frac{du'}{dx}\right)^2 dx\right],$$

$$L' + \Delta L' = \frac{1}{\cos\theta}\left\{l + \frac{1}{2}\cos^2\theta \int_0^l \left[\frac{d(u' + v)}{dx}\right]^2 dx\right\},$$

puis par différence et en négligeant les termes du second ordre

$$\Delta L' = \cos^2\theta \int_0^l \frac{du'}{dx}\, dv.$$

Si $\frac{du'}{dx}$ est *continue*, c'est-à-dire si la figure initiale du câble ne présente pas de points anguleux, l'intégration par parties :

$$\int_0^l \frac{du'}{dx}\, dv = \left(v \frac{du'}{dx}\right)_0^l - \int_0^l \frac{d^2 u'}{dx^2}\, v\, dx$$

est légitime, et en remarquant que v s'annule aux extrémités de l'intervalle (o, l)

$$\Delta L' = -\cos^2\theta \int_0^l \frac{d^2 u'}{dx^2}\, v\, dx.$$

Si, plus particulièrement, la figure initiale est une *parabole* d'équation

$$u' = \frac{4f}{l^2} x(l - x),$$

la valeur constante de $\frac{d^2 u'}{dx^2}$ est $-\frac{8f}{l^2}$, et l'on a finalement

$$\Delta L' = \frac{8f}{l^2}\cos^2\theta \int_0^l v\, dx. \tag{10}$$

La condition déterminant la partie principale de la traction suivant la corde, et négligeant les variations élastiques et thermiques, s'écrit

$$\int_0^l v\, dx = o, \tag{11}$$

elle indique que l'*aire du diagramme des déformations est nulle* et donne, par prise en considération de (9),

$$Q\cos\theta = \frac{\int_0^l \mu\, dx}{\int_0^l u'\, dx}. \tag{12}$$

Si le système de surcharge additionnel déterminant la modification d'état se réduit à une force verticale unique d'intensité p, d'abscisse α

$$\int_0^l \mu(\alpha, x)\, dx = \frac{P}{2}\alpha(l-\alpha),$$

et comme

$$\int_0^l u'\, dx = \frac{2}{3}fl,$$

on a

$$Q\cos\theta = \frac{3P}{4f}\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right). \tag{13}$$

9. **Corrections à faire pour tenir compte des allongements élastiques et des variations thermiques.** — Les deux ordres de phénomènes sont cause de variations de la traction suivant la corde, tout allongement déterminant une diminution de traction, tout raccourcissement un accroissement de celle-ci.

Soient $\Delta L'$ la variation de longueur à partir de la longueur initiale L', ΔQ la variation correspondante de traction, par différentiation de (5), il vient

$$2\frac{\Delta Q}{Q} = -\frac{\Delta L'}{L'-\lambda}. \tag{14}$$

Les variations $\Delta L'$ correspondant à chaque éventualité envisagée se calculent aisément.

a. Allongements élastiques. — S désignant la section du câble, E' son coefficient d'élasticité longitudinal dans l'état actuel, l'allongement de tout élément ds sous l'action de la tension T qui le sollicite est

$$\delta\, ds = \frac{T}{E'S}\, ds,$$

soit, en tenant compte de l'expression (1),

$$\delta\, ds = \frac{Q}{E'S}\cos\theta\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx,$$

et l'allongement total ΔL_s résultant de l'intégration de l'équation précédente est

$$\Delta L_s = \frac{Q}{E'S} \cos\theta \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx,$$

et en tenant compte des calculs qui nous ont conduit à la formule (4),

$$\Delta L_s = \frac{Q}{E'S\cos\theta}\left(l + 2\,\frac{L' - \lambda}{\cos\theta}\right). \tag{15}$$

b. Variations thermiques. — Toute variation de température détermine une variation linéaire

$$\delta\, ds = \tau\, ds$$

de chaque élément ds. L'allongement total du câble L_t est donc

$$\Delta L_t = \tau L' \tag{16}$$

Remarque. — Si comme précédemment, on désigne par f la flèche de la figure parabolique de portée horizontale l, de longueur L', dont la corde fait avec l'horizontale l'angle θ, onpeut aussi écrire

$$L_s = \frac{Ql}{E'S}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{16}{3}\,\frac{f^2}{l^2}\cos\theta\right), \tag{15'}$$

$$L_t = \tau l\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{8}{3}\,\frac{f^2}{l^2}\cos^3\theta + \quad\right). \tag{16'}$$

THÉORIE D'UN DISPOSITIF SUSCEPTIBLE DE RÉDUIRE LES DÉFORMATIONS DES CÂBLES PORTEURS.

10. **Constitution.** — Le système mécanique dont l'étude est l'objet principal des développements actuels est constitué schématiquement de la manière suivante.

Une nappe de câbles *porteurs paraboliques* supporte par l'intermédiaire de *suspentes* verticales un tablier plan, normal au plan vertical des câbles porteurs et supposé tout d'abord dépourvu de rigidité propre appréciable. Sur le tablier repose un faisceau de câbles parallèles entre eux et à l'axe longitudinal de l'ouvrage, ancrés aux rives à leurs extrémités, préalablement tendus et fixés au tablier en des points *rapprochés.* Nous appelons ces organes *câbles de rigidité.*

Nous nous proposons d'examiner cette association de câbles au double point de vue des efforts qui s'y développent et des déformations qu'elle subit lorsqu'un système additionnel de surcharges circule sur le tablier; nous comparerons les résultats obtenus à ceux relatifs au *système libre* obtenu par suppression des câbles de rigidité.

Pour étudier cet ensemble, nous le réduisons à un seul câble parabolique (Γ_0) et à un câble unique de rigidité (Γ_1) tendu parallèlement à la corde du premier. Le câble parabolique supportera une charge permanente uniformément répartie ϖ'_0 par unité de longueur horizontale. Le système additionnel de surcharge sera réduit à un *poids unique* circulant sur le tablier. Les calculs développés pour ce cas de charge seront étendus sans difficultés à des circonstances plus complexes. A cet égard, il est utile de remarquer dès à présent que le principe de superposition, et partant le processus des *lignes d'influence,* ne sont applicables qu'à certaines des grandeurs mécaniques à prendre en considération. Les développements ultérieurs préciseront ce point important.

Les suspentes sont supposées inextensibles et suffisamment rapprochées pour être traitées dans le calcul comme un voile *continu*; cette hypothèse est couramment admise dans la détermination des ponts suspendus. Les liaisons du câble de rigidité et du tablier sont telles qu'elles ne puissent cesser de rester en contact.

11. **Définitions et notations.** — Dans ces conditions, partons d'un *état initial* (*fig.* 3), parfaitement défini, dans lequel le câble parabolique supporte la seule charge morte ϖ'_0 (1) (poids propre, suspentes, câble de

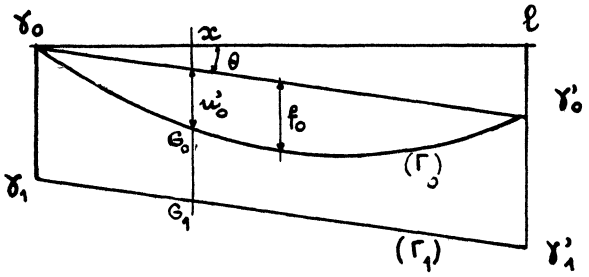

Fig. 3.

rigidité, tablier) et où le câble de rigidité est soumis à la *traction de précontrainte* Q'_0.

Soient :

u'_0, l'ordonnée oblique, par rapport à la droite $\gamma_0 \gamma'_0$ des points d'accrochage inclinée de θ sur l'horizontale, du point courant G_0 d'abscisse x du câble parabolique;

f_0, la flèche du câble parabolique, L'_0 sa longueur, S_0 sa section;

l, la projection horizontale de la distance $\gamma_0 \gamma'_0$;

$\mu'_0(x)$, le moment fléchissant statique produit dans la section d'abscisse x par la charge P'_0;

Q'_0 et Q'_1 les tractions initiales des câbles (Γ_0) et (Γ_1).

De la théorie des câbles isolés résultent entre ces diverses grandeurs les relations suivantes :

$$u'_0 = \frac{4 f_0}{l^2} x (l - x), \qquad L'_0 = l\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{8}{3}\frac{f_0^2}{l^2}\cos^3\theta\right), \qquad \mu'_0 = Q'_0 u'_0 \cos\theta.$$

L'introduction d'une surcharge verticale ponctuelle P, d'abscisse α conduit le système à un *état déformé* (*fig.* 4) qu'il s'agit d'étudier.

Dans cet état, désignons par :

$u'_0 + v$, l'ordonnée d'un point courant du câble parabolique par rapport à sa corde, ordonnée relativement peu différente de u'_0 si le câble de rigidité remplit convenablement son rôle;

---

(1) ϖ'_0, intensité de la charge permanente par unité de longueur horizontale.

$\mu(\alpha, x)$, le moment statique déterminé au point d'abscisse x par la surcharge ponctuelle P d'abscisse α;

ν, le moment statique correspondant à l'intensité de la charge régnant dans la nappe des suspentes et due à l'introduction sur le tablier de la surcharge P;

L_1, la longueur du câble (Γ_1) élastiquement déformé, S_1 sa section;

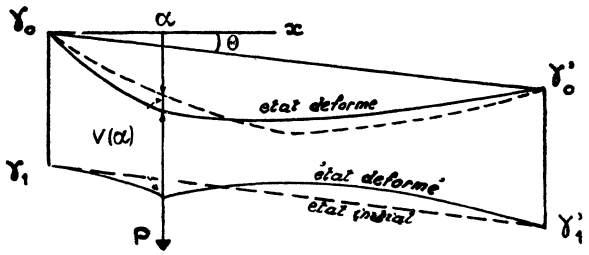

Fig. 4.

Q_0, l'accroissement de traction suivant la corde du câble parabolique, Q_1 l'accroissement de traction du câble de rigidité, produite par la surcharge.

12. **Recherche de la déformation** $v(x)$. — La nappe des suspentes étant assimilée à un voile continu et inextensible, à toute déformation $v(x)$ du câble parabolique, comptée à partir de l'état initial, correspond la même déformation $v(x)$ du câble de rigidité.

Dès lors, les relations suivantes expriment, dans l'un et l'autre état envisagés, la nullité du moment fléchissant en tout point de chaque câble :

— dans le câble porteur à vide :

$$(a) \qquad u'_0 \cos\theta = \frac{\mu'_0}{Q'_0};$$

— dans le câble porteur chargé où le moment devient $\mu_0 + \nu$:

$$(b) \qquad (u'_0 + v)\cos\theta = \frac{\mu'_0 + \nu}{Q_0 + Q_0};$$

— dans le câble de rigidité à vide :

$$(c) \qquad u'_1 = 0;$$

— dans le câble de rigidité chargé où le moment devient $\mu - \nu$:

$$(d) \qquad v \cos\theta = \frac{\mu - \nu}{Q'_1 + Q_1}.$$

Des équations (a) et (b), on déduit par différence

$$\nu = (Q'_0 + Q_0)\,v \cos\theta + Q_0 u'_0 \cos\theta,$$

l'équation (d) peut s'écrire

$$\mu - \nu = (Q'_1 + Q_1)\,v \cos\theta.$$

Posons $Q'_0 + Q_0 + Q'_1 + Q_1 = Q$ et ajoutons les deux dernières relations, il vient :

$$\mu = (Q\,v + Q_0 u'_0) \cos\theta,$$

soit, en résolvant par rapport à v,

$$v = \frac{\mu - Q_0 u'_0 \cos\theta}{Q \cos\theta}. \tag{17}$$

Cette équation montre nettement, si on la compare à l'équation (9) relative à la déformation du câble non rigidifié, l'influence stabilisatrice du câble de rigidité, par le terme $Q'_1 + Q_1$ qui en dépend; cette influence sera d'autant mieux mise en lumière que nous montrerons plus loin que Q_0 ou du moins sa partie principale est, dans une certaine mesure, indépendante de la rigidité du système.

Dans la relation (17), μ est connu d'après l'intensité P et l'abscisse α de la surcharge, Q'_0 est calculable en fonction de l'intensité de la charge permanente p'_0 (§ 6) :

$$Q'_0 = \frac{\varpi'_0 l^2}{8 f_0 \cos\theta},$$

Q'_1 est la traction de précontrainte du câble de rigidité.

La connaissance de $v(x)$ dépend en outre des deux paramètres Q_0 et Q_1 que nous allons déterminer.

13. **Recherche des tractions complémentaires Q_0 et Q_1.** — Les paramètres Q_0 et Q_1 traduisent la nature hyperstatique du système étudié; ils sont en conséquence déterminables par la considération des allongements des câbles (Γ_0) et (Γ_1).

Le câble de rigidité (Γ_1) étant *a priori* supposé convenablement établi, c'est-à-dire suffisamment efficace pour remplir son rôle de limitateur des déformations verticales, celles-ci seront petites vis-à-vis des ordonnées de la figure d'équilibre initiale, et les développements du paragraphe 8 s'appliqueront à chacun des câbles (Γ_0) et (Γ_1) que nous allons examiner successivement.

a. Câble parabolique. — Il convient naturellement de faire usage de l'équation (10) liant l'allongement total du câble à ses déformations verticales et qui s'écrit dans le cas actuel

$$\Delta L'_0 = \frac{8 f_0}{l^2} \cos^3\theta \int_0^l v\, dx.$$

Faisant provisoirement abstraction des variations thermiques dont la prise en considération oblige à rejeter l'hypothèse admise d'inextensibilité des suspentes et conduit à une complication de calcul sans intérêt pratique, nous pouvons écrire l'expression de l'allongement $\Delta L'_0$ uniquement dû à l'accroissement de traction suivant la corde Q_0, sous la forme déduite de (15')

(18) (1)
$$\Delta L'_0 = \frac{Q_0 l}{ES_0}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{16}{3}\frac{f_0^2}{l^2}\cos\theta\right),$$

ou plus simplement et avec l'approximation couramment admise

(18')
$$\Delta L'_0 = \frac{Q_0 l}{ES_0 \cos\theta}.$$

Le second membre de l'équation de départ se calcule aisément en tenant compte de l'expression de v [formule (17)] et en reprenant les développements du paragraphe 8.

Il vient finalement :

(19)
$$\Delta L'_0 = \frac{8 f_0 \cos^2\theta}{Q}\left[\frac{P}{2}\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) - \frac{2}{3} Q_0 \frac{f_0}{l}\cos\theta\right].$$

Soit, en résolvant par rapport à Q_0,

(20)
$$Q_0 = \frac{3Pl}{4 f_0 \cos\theta}\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) - \frac{3}{16}\frac{l}{f^2\cos^3\theta} Q\, \Delta L'_0.$$

Le dernier terme du second membre ayant la forme et l'importance d'un terme correctif, la partie principale de l'accroissement de traction suivant la corde du câble parabolique est

(21)
$$Q_0 = \frac{3Pl}{4 f_0 \cos\theta}\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right).$$

L'équation (21), identique à celle trouvée plus haut pour un câble directement chargé peu déformé à partir de sa figure initiale parabolique [équation (13)], montre que l'*influence de l'organe de rigidité est faible en*

---

(1) E coefficient d'élasticité longitudinale du câble.

ce qui concerne la distribution des efforts. Le signe du terme correctif de l'équation complète (20) indique que son action consiste en un *déchargement* du câble porteur, ce qui est favorable à la tenue de l'ouvrage.

b. Câble de rigidité. — Dans l'état initial, le câble de rigidité, supporté par le tablier, présente une flèche nulle; sa longueur L'_1 est

$$L'_1 = \frac{l}{\cos\theta}.$$

Dans l'état déformé, sa longueur L_1 est donnée par l'équation (4) dans laquelle il suffit de remplacer u par v, soit

$$L_1 = \frac{1}{\cos\theta}\left[l + \frac{1}{2}\cos^4\theta \int_0^l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx\right],$$

par différence, il vient

$$\Delta L'_1 = \frac{1}{2}\cos^3\theta \int_0^l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx.$$

L'allongement $\Delta L'_1$ dû à l'accroissement de traction Q_1 du câble de rigidité s'écrit simplement puisque la flèche initiale est nulle

$$\Delta L'_1 = \frac{Q_1 l}{ES_1 \cos\theta}. \tag{22}$$

Calculons le second membre de l'équation de déformation. Tenant compte de l'équation (17), il vient tout d'abord :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{Q\cos\theta}\left(\frac{\partial\mu}{\partial x} - Q_0 \frac{du'_0}{dx}\cos\theta\right)$$

et

$$\int_0^l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{Q^2\cos^2\theta}\left[\int_0^l \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 dx - 2Q_0\cos\theta \int_0^l \frac{\partial\mu}{\partial x} du'_0 + Q_0^2\cos^2\theta \int_0^l \left(\frac{du'_0}{dx}\right)^2 dx\right].$$

La fonction $\mu(\alpha, x)$, moment statique déterminé dans la poutre fictive de portée l, à la section d'abscisse x par la charge P placée dans la section d'abscisse α, est bien connue, on en déduit la fonction $\frac{\partial\mu(\alpha, x)}{\partial x}$.

Deux cas sont à distinguer :

1° $\quad x < \alpha, \quad \mu = x\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)P, \quad \frac{\partial\mu}{\partial x} = \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)P;$

2° $\quad x > \alpha, \quad \mu = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\alpha P, \quad \frac{\partial\mu}{\partial x} = -\frac{\alpha}{l}P;$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ peut donc se représenter par l'ensemble de deux droites (*fig.* 5) parallèles à Ox et d'ordonnées respectives $\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) P$ et $-\frac{\alpha}{l} P$.

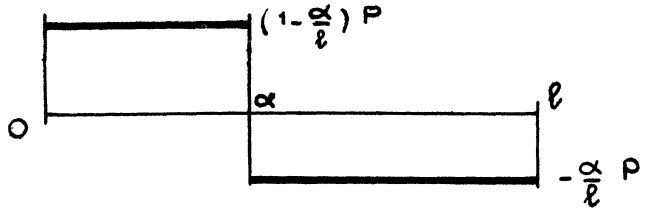

Fig. 5.

Évaluons successivement les trois intégrales définies précédentes.

On a, manifestement,

$$\int_0^l \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 dx = P^2\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)^2 + P^2 \frac{\alpha^2}{l^2}(l - \alpha) = P^2 \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right).$$

Pour calculer l'intégrale de la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}\, du'_0$, on peut, du'_0 étant continue dans l'intervalle (o, l), effectuer l'intégration par parties :

$$\int_0^l \frac{\partial \mu}{\partial x}\, du'_0 = \left(\mu \frac{du'_0}{dx}\right)_0^l - \int_0^l \mu \frac{d^2 u'_0}{dx^2}\, dx,$$

soit, en remarquant que μ est nul aux extrémités de l'intervalle et que

$$\frac{d^2 u'_0}{dx^2} = -\frac{8 f_0}{l^2},$$

$$\int_0^l \frac{\partial \mu}{\partial x}\, du'_0 = \frac{8 f_0}{l^2} \int_0^l \mu\, dx = 4 P f_0 \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right).$$

La dernière intégrale $\int_0^l \left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 dx$ donne lieu à des remarques analogues et se calcule de la même manière.

$$\int_0^l \left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 dx = -\frac{d^2 u_0}{dx^2} \int_0^l u_0\, dx = \frac{8 f_0}{l^2} \frac{2}{3} f_0 = \frac{16}{3} \frac{f_0^2}{l}.$$

Finalement, $\int_0^l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$ a pour expression :

$$\int_0^l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{Q^2 \cos^2\theta} P^2 \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) - 8 Q_0 P f_0 \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)\cos\theta + \frac{16}{3} Q_0^2 \frac{f_0^2}{l} \cos^2\theta$$

et l'équation de déformation du câble de rigidité s'écrit

$$(25)\qquad 2\frac{Q_1 l}{ES_1} = \frac{\cos^2\theta}{Q^2}\left[P^2\left(1-\frac{\alpha}{l}\right) - 8Q_0 P f_0 \frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\cos\theta + \frac{16}{3}Q_0^2\frac{f_0^2}{l}\cos^2\theta\right].$$

Les équations (20) et (23) permettent de déterminer Q_0 et Q_1 par *approximations successives* à partir de la valeur approchée Q_0 fournie par l'équation (21). Les calculs numériques n'offrent pas de difficultés spéciales, sinon que l'équation (23) en Q_1 est du troisième degré. Si dans cette équation on remplace Q_0 par sa valeur principale, elle prend d'ailleurs la forme

$$(23')\qquad \frac{Q_1 Q^2}{\cos^2\theta} = \frac{ES_1 P^2}{2}\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\left[1-3\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right)\right],$$

intéressante à noter, car on s'en tiendra souvent à la première approximation.

Dans cette expression :

$$Q = Q'_0 + Q_0 + Q'_1 + Q_1 = \frac{\varpi'_0 l^2}{8 f_0 \cos\theta} + \frac{3Pl}{4 f_0 \cos\theta}\frac{\alpha}{l}\left(1-\frac{\alpha}{l}\right) + Q'_1 + Q_1,$$

Q'_1 étant la traction de précontrainte fixée.

Remarque. — Notons que la *partie principale* de la traction suivant la corde du câble parabolique est justiciable de la méthode des lignes d'influence, ainsi que le montre la formule (21); cette propriété ne s'étend ni à l'accroissement de traction du câble de rigidité, ni aux déformations verticales du système.

14. **Efforts dans les suspentes.** — Le voile des suspentes supposé continu est soumis à deux sortes d'efforts :

Une traction concentrée agissant dans la section d'abscisse α et d'intensité φ;

Une traction à répartition continue d'intensité σ par unité de longueur horizontale.

Ces quantités se déduisent du moment fléchissant ν déterminé dans la nappe des suspentes par l'introduction de la surcharge P sur le tablier, soit (§ 12) :

$$\nu = (Q'_0 + Q_0)\rho\cos\theta + Q_0 u'_0 \cos\theta$$

et en tenant compte de (17)

$$\nu = \frac{Q'_0 + Q_0}{Q}(\mu - Q_0 u'_0 \cos\theta) + Q_0 u'_0 \cos\theta.$$

a. Traction concentrée. — L'intensité φ de la traction concentrée est égale à la discontinuité de l'effort tranchant $\frac{dv}{dx}$ au droit de la section d'abscisse α; u'_0 étant une fonction continue de x, on a simplement

$$\varphi = \frac{Q'_0 + Q_0}{Q}\left[\left(\frac{d\mu}{dx}\right)_{\alpha-\varepsilon} - \left(\frac{d\mu}{dx}\right)_{\alpha+\varepsilon}\right],$$

soit

$$\varphi = \frac{Q'_0 + Q_0}{Q} P. \tag{24}$$

b. Traction répartie. — L'intensité σ de la traction répartie est

$$\sigma = -\frac{d^2 v}{dx^2},$$

soit, en remarquant que $\frac{d^2\mu}{dx^2}$ est identiquement nul et que $\frac{d^2 u'_0}{dx^2} = -\frac{8f_0}{l^2}$,

$$\sigma = \frac{8f_0}{l^2}\,\frac{Q_0(Q'_1 + Q_1)}{Q}\cos\theta. \tag{25}$$

Les formules (24) et (25) précisent quantitativement l'action du *câble de rigidité* en tant qu'*organe répartiteur de charges.* Cette action, d'autant plus efficace que la traction totale $Q'_1 + Q_1$ est importante, entraîne le travail simultané de toutes les suspentes de l'ouvrage, ce qui conduit à en diminuer la section; elle est particulièrement avantageuse aux grandes portées où le poids mort de la suspension est important.

Le câble de rigidité est soumis à la charge concentrée :

$$P\left(1 - \frac{Q'_0 + Q_0}{Q}\right) = \frac{Q'_1 + Q_1}{Q} P$$

et à la force uniformément répartie

$$-\sigma = -\frac{8f_0}{l^2}\,\frac{Q_0(Q'_1 + Q_1)}{Q}\cos\theta$$

dirigée de *bas en haut.*

Remarque. — Le câble parabolique est, par l'intermédiaire des suspentes, sollicité par la charge uniforme σ et par la charge concentrée φ. En application du principe de superposition et des formules (7) et (21), la *partie principale* de la traction suivant la corde qu'y déterminent les forces en question est

$$Q_0 = \frac{\sigma l^2}{8f_0\cos\theta} + \frac{3\varphi l}{4f_0\cos\theta}\,\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right),$$

qui peut s'écrire en remplaçant σ et φ par leurs valeurs [formules (24) et (25)]

$$Q_0 = \frac{Q_0(Q_1 + Q_1)}{Q} + \frac{3}{4}\,\frac{Q_0 + Q_0}{Qf_0}\,\frac{Pl}{\cos\theta}\,\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right).$$

En résolvant par rapport à Q_0, il vient

$$Q_0 = \frac{3P}{4f_0\cos\theta}\,\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)$$

qui coïncide bien avec l'équation (21).

15. **Corrections** — Pour les ouvrages importants — dont la portée est supérieure à une centaine de mètres — il peut être utile de compléter les résultats obtenus précédemment par des corrections portant sur des éléments jusqu'alors négligés.

a. Correction de poids propre. — Le poids permanent de l'ouvrage a été supposé réparti uniformément sur toute la portée; en réalité il croît vers les appuis comme la longueur des suspentes. La correction qui en résulte peut être importante, particulièrement dans le cas d'ouvrages à tabliers très légers ou, comme le *caté-rail*, pouvant être considérée comme dépourvue de tabliers.

La charge morte ϖ_0 consiste en une part fixe q_0 et en une part variable d'intensité parabolique

$$r_0\left[1 - \frac{4x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right],$$

nulle au milieu de la portée et égale à r_0 au voisinage des points d'accrochage. Son moment statique égal à celle de ses intégrales secondes qui s'annule pour $x = 0$, $x = l$, est

$$x\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{l} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{l^2} - \frac{1}{6}\right)r_0,$$

pour $x = \frac{l}{2}$ sa valeur est $\frac{r_0 l^2}{48}$. Le moment total déterminé par la charge morte ϖ'_0 au centre de la portée est donc

$$\left(q_0 + \frac{1}{6}r_0\right)\frac{l^2}{8}.$$

La charge *uniforme équivalente* à la charge morte

$$\varpi'_0 = q_0 + \frac{1}{6}r_0 \tag{26}$$

est inférieure à la *charge moyenne*

$$q_0 + \frac{f_0}{l}\int_0^l \left[1 - \frac{4x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] dx = q_0 + \frac{1}{3} r_0.$$

La tension initiale Q'_0 du câble parabolique se trouve ainsi diminuée par la considération de la distribution réelle.

b. Correction tenant compte des variations de température. — A partir de l'état initial précédemment défini et dans lequel les tractions des câbles (Γ_0) et (Γ_1) sont respectivement Q'_0 et Q'_1, la flèche du câble parabolique égale à f_0 et où le câble de rigidité est rectiligne, envisageons une variation de température conduisant le système à un nouvel état ou *intermédiaire* (*fig.* 6), duquel l'état final sera déduit par mise en jeu de la surcharge P, comme il a été déduit plus haut de l'état initial alors qu'il était fait abstraction des modifications thermiques.

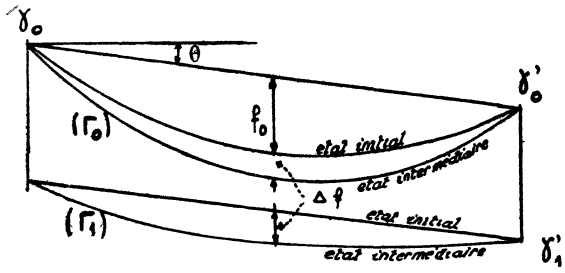

Fig. 6.

L'effet thermique est caractérisé par le coefficient τ donnant pour la variation de température envisagée la variation relative $\frac{\delta . ds}{ds}$ de tout élément linéaire ds du système.

Désignons par $f_0 + \Delta f$, $Q'_0 + q_0$, la flèche et la traction suivant la corde du *câble parabolique* dans l'état intermédiaire. En passant de l'état initial à l'état intermédiaire, ce câble s'allonge de $\tau L'_0$, et par différentiation de l'équation (6) on a :

$$\frac{16}{3}\frac{f_0}{l}\Delta f \cos^3\theta = \tau L'_0,$$

soit

$$\Delta f = \frac{3}{16\cos^3\theta}\frac{l L'_0}{f_0}\tau. \tag{27}$$

La flèche du *câble de rigidité* est sensiblement égale à Δf dans l'état intermédiaire, car les suspentes, relativement courtes dans la région centrale, n'y subissent que des modifications de longueur négligeables.

La longueur du câble de rigidité, initialement égale à l, varie de τl entre les deux états, et la traction qui y règne devient $Q'_1 - \tau ES_1$.

L'equation des moments, écrite pour le milieu de la portée, appliquée successivement à chaque câble, détermine q_0 et Δf.

Soit en effet s l'accroissement uniforme de charge dans la nappe des suspentes, dû au changement d'état, il vient

— câble parabolique,

$$(Q'_0 + q_0)(f_0 + \Delta f)\cos\theta = (\varpi'_0 + s)\frac{l^2}{8};$$

— câble de rigidité,

$$(Q'_1 - \tau ES_1)\Delta f \cos\theta = -s\frac{l^2}{8},$$

soit, par addition, et en remarquant que $Q'_0 = \frac{\varpi'_0 l^2}{8 f_0 \cos\theta}$,

$$q_0 = -\frac{Q'_0 + Q_1 - \tau ES_1}{f_0 + \Delta f}\Delta f$$

et en tenant compte de l'équation (27)

$$q_0 = -\frac{3 l L'_0}{16 f_0 \cos\theta}\,\frac{Q'_0 + Q'_1 - \tau ES_1}{f_0 + \frac{3 l L'_0}{16 f_0 \cos^3\theta}}\tau. \tag{28}$$

Les équations (27) et (28) définissent le nouvel état de départ dans lequel :

La traction de pose du câble parabolique est $Q'_0 + q_0$;
La traction initiale du câble de rigidité est $Q_1 - \tau ES_1$;
La flèche du câble parabolique $f_0 + \Delta f$.

Remarque. — Dans l'état intermédiaire, le câble de rigidité prend la forme de la parabole d'équation

$$u'_1 = \frac{f}{4l^2}x(l - x),$$

au lieu de la droite $u'_1 = 0$ de l'état initial.

Pratiquement, dans le calcul de Q_0 et de Q_1, il est inutile de tenir compte de cette modification; les déformations verticales qui ont pour expression

$$v = \frac{\mu - Q_0 u'_0 \cos\theta - Q_1 u'_1 \cos\theta}{Q}$$

sont toujours peu différentes de celles données par l'équation (17).

CÂBLE OU SYSTÈMES DE CABLES ASSOCIÉS A UN TABLIER RIGIDE.

16. Au lieu de tenir comme précédemment la rigidité du tablier pour négligeable, admettons qu'il présente une inertie appréciable provenant soit de ses éléments porteurs, soit de l'adjonction à ceux-ci de dispositifs spéciaux de raidissage connus sous le nom de *poutres de rigidité*.

Avant d'entreprendre l'étude de ce système, nous allons rappeler quelques résultats classiques relatifs aux ouvrages constitués par un câble porteur parabolique associé par l'intermédiaire de suspentes inextensibles à une poutre de rigidité libre à ses extrémités; ils apparaîtront plus loin comme des cas particuliers de ceux que nous établirons pour le système complet.

Les notations sont celles du paragraphe 11; soit en outre I le moment d'inertie de la section de la poutre par rapport à son axe transverse horizontal.

En supposant v suffisamment petit, c'est-à-dire en admettant que la poutre de rigidité remplit son rôle vis-à-vis des déformations verticales, on est conduit aux conséquences suivantes :

1° La partie principale de l'accroissement de traction suivant la corde du câble parabolique déterminé par l'accroissement du moment statique a pour expression

$$Q_0 = \frac{1}{\cos\theta} \frac{\int_0^l \mu u'_0 \, dx}{\int_0^l u'^2_0 \, dx}.$$

Si la surcharge se réduit à une force verticale d'intensité P agissant. dans la section d'abscisse α, on a

$$Q_0 = \frac{5Pl}{8 f_0 \cos\theta} \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)\left[1 + \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)\right].$$

2° Le système est réglé de telle manière que, sous la charge permanente, la poutre de rigidité ne soit soumise qu'à des contraintes négligeables; dans cet état, la traction suivant la corde du câble parabolique est désignée par Q'_0.

Soit M (x) le moment fléchissant développé dans la poutre par la mise en jeu des surcharges, M (x) est solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{Q_0 + Q'_0}{E'I} M - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mu - Q_0 u'_0 \cos\theta) = 0 \quad (^1);$$

l'effort tranchant correspondant étant

$$T(x) = \frac{dM}{dx}.$$

3° Soient $\nu(x)$ et $s(x)$ le moment fléchissant et la charge unitaire dans le voile des suspentes, on a

$$\nu = \mu - M, \qquad s(x) = -\frac{d^2\nu}{dx^2}.$$

4° La déformation verticale $v(x)$ peut enfin se mettre sous la forme

$$v = \frac{\mu - Q_0 u'_0 \cos\theta - M}{Q_0 + Q'_0}.$$

17. **Équations générales relatives au système complet.** — Réduisons le système à un câble parabolique (Γ) à un câble de rigidité (Γ_1) et à une poutrelle dont le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe transverse horizontal est I.

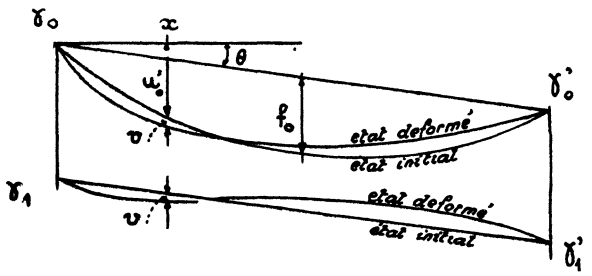

Fig. 7.

Nous considérons un *état initial* (*fig.* 7) dans lequel les ordonnées du câble porteur, comptées par rapport à la corde et la traction de cet organe, sont respectivement

$$u'_0 = \frac{4 f_0}{l^2} x(l - x) \qquad \text{et} \qquad Q'_0 = \frac{\varpi'_0 l^2}{8 f_0 \cos\theta},$$

puis un *état déformé* déterminé par l'introduction sur l'ouvrage du système de surcharges.

---

(1) E′ coefficient d'elasticite longitudinale de la poutre de rigidité.

Soient :

μ le moment statique déterminé par les surcharges;

ν le moment statique dans le voile des suspentes, supposé continu;

m le moment statique traduisant l'action du câble de rigidité sur la poutre à laquelle il est lié invariablement dans le sens vertical.

En application du principe de l'action et de la réaction, l'action des suspentes sur la poutrelle consiste en un moment statique $-\nu$, et l'action de la poutrelle sur le câble de rigidité en un moment statique $-m$.

Déformation verticale. — Les suspentes étant inextensibles, les déformations sont concordantes dans les trois organes : câble porteur, câble et poutre de rigidité.

Exprimons d'abord la nullité du moment fléchissant en tout point des câbles et pour chacun des deux états initial et déformé; on a successivement :

— dans le câble porteur à vide,

$$(a) \qquad u'_0 \cos\theta = \frac{\mu_0}{Q'_0};$$

— dans le câble porteur chargé où le moment statique devient $\mu' + \nu$,

$$(b) \qquad (u'_0 + v) \cos\theta = \frac{\mu'_0 + \nu}{Q'_0 + Q_0};$$

— dans le câble de rigidité à vide,

$$(c) \qquad u'_1 = 0,$$

— dans le câble de rigidité chargé où le moment est $-m$,

$$(d) \qquad v \cos\theta = \frac{-m}{Q'_1 + Q_1}.$$

D'autre part, dans la poutre de rigidité, le moment M est

$$(e) \qquad M = \mu + m - \nu.$$

Des équations (a) et (b) on tire

$$\nu = (Q'_0 + Q_0) v \cos\theta + Q_0 u'_0 \cos\theta,$$

l'équation (d) peut se mettre sous la forme

$$-m = (Q'_1 + Q_1) v \cos\theta.$$

Posons $Q_0 + Q_1 + Q_0 + Q_0 = Q$, et ajoutons ces deux dernières équations, il vient

$$(f) \qquad \nu - m = Q v \cos\theta + Q_0 u'_0 \cos\theta.$$

En tenant compte de (e) et résolvant par rapport à $v \cos\theta$, cette équation donne

$$v \cos\theta = \frac{\mu - Q_0 u'_0 \cos\theta - M}{Q}. \tag{29}$$

L'expression précédente met en lumière le rôle respectif de chaque organe de rigidité.

L'action du câble est produite par le terme $Q'_0 + Q_1$ du dénominateur Q, celle de la poutre par le terme — M du numérateur.

Étude de la poutre de rigidité. — Les déplacements étant comptés positivement de haut en bas, et les moments fléchissants d'après la convention courante, une relation générale de la résistance des matériaux, appliquée à la poutre de rigidité s'écrit

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{E'I}, \tag{g}$$

soit en remplaçant M par sa valeur (e)

$$E'I \frac{d^2 v}{dx^2} = \nu - m - \mu$$

et en tenant compte de (f)

$$E'I \frac{d^2 v}{dx^2} - Q v \cos\theta = Q_0 u'_0 \cos\theta - \mu. \tag{30}$$

Cette équation différentielle en v à deux paramètres inconnus Q_0 et Q, donne par double dérivation et en tenant compte de (g) l'équation différentielle du moment fléchissant dans la poutre de rigidité

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{Q \cos\theta}{E'I} M + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Q_0 u'_0 \cos\theta - \mu) = 0,$$

ou en remplaçant u_0 par sa valeur $u'_0 = \frac{4 f_0}{l^2} x (l - x)$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{Q \cos\theta}{E'I} M - \frac{8 f_0}{l^2} Q_0 \cos\theta = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}. \tag{31}$$

A *titre d'exemple*, cherchons la solution de l'équation (31) dans l'éventualité où la surcharge est constituée par un poids unique P agissant dans la section d'abscisse α; $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}$ est identiquement nul, posons $\frac{Q \cos\theta}{E'I} = K^2$, la solution générale dépendant de deux constantes arbitraires est

$$M = \frac{1}{K^2}\left(C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} - \frac{8 f_0}{l^2} Q_0 \cos\theta\right),$$

$$T = \frac{1}{K}(C_1 e^{kx} - C_2 e^{-kx}).$$

Cette solution change de détermination analytique au droit de la charge, deux cas sont à envisager :

1° $0 < x < \alpha$

$$M = \frac{1}{K^2}\left(A\, e^{kx} + B\, e^{-kx} - \frac{8 f_0}{l^2} Q_0 \cos\theta\right),$$

$$T = \frac{1}{K}\,(A\, e^{kx} - B\, e^{-kx}).$$

2° $\alpha < x < l$

$$M = \frac{1}{K^2}\left(A' e^{kx} + B' e^{-kx} - \frac{8 f_0}{l^2} Q_0 \cos\theta\right),$$

$$T = \frac{1}{K}\,(A' e^{kx} - B' e^{-kx}).$$

Pour déterminer les quatre constantes A, B, A′, B′, nous proposons, des *conditions aux limites* exprimant la nullité de M aux extrémités de la travée, des conditions de *raccordement* exprimant qu'au droit de la charge, les moments de flexion sont égaux et que les efforts tranchants diffèrent de l'intensité de la charge.

Conditions de raccordement :

$$(A - A')\, e^{k\alpha} + (B - B')\, e^{-k\alpha} = 0,$$

$$(A - A')\, e^{k\alpha} - (B - B')\, e^{-k\alpha} = KP.$$

Conditions aux limites :

$$A + B = \frac{8 f_0}{l^2} Q_0 \cos\theta,$$

$$A' e^{kl} + B' e^{-kl} = \frac{8 f_0}{l^2} Q_0 \cos\theta.$$

En résumé on obtient les quatre équations linéaires :

$$A' + B' = \frac{8 f_0}{l^2} Q_0 \cos\theta + \frac{K}{2} P\,(e^{k\alpha} - e^{-k\alpha}),$$

$$A' e^{kl} + B' e^{-kl} = \frac{8 f_0}{l^2} Q_0 \cos\theta,$$

$$A = A' + \frac{K}{2} P\, e^{-k\alpha},$$

$$B = B' - \frac{K}{2} P\, e^{k\alpha},$$

dont la résolution est aisée pour une valeur donnée de α et une fois connus les paramètres Q_0 et K.

18. **Recherches des paramètres Q_0 et Q_1.** — Comme au paragraphe 13, la considération des allongements élastiques des câbles (Γ_0) et (Γ_1) va permettre la détermination des tractions complémentaires Q_0 et Q_1.

a. Câble parabolique. — Les considérations du paragraphe 8 donnent l'expression de l'allongement élastique du câble (Γ_0)

$$\Delta L'_0 = \cos^3\theta \int_0^l \frac{du'_0}{dx}\, dv.$$

Le premier membre a pour valeur (18) :

$$\Delta L'_0 = \frac{Q_0 l}{E S_0}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{16}{3}\frac{f_0^2}{l^2}\cos\theta\right).$$

Pour calculer le second membre, observons que la fonction $\frac{dv}{dx}$ est continue dans l'intervalle (o, l), car, contrairement à ce qui a lieu pour le système dépourvu de poutre de rigidité, le tablier, dont les déformations concordent avec celles du câble parabolique, étant solidaire d'une poutre rigide n'y peut présenter de point anguleux. Cette remarque légitime l'intégration par parties :

$$\int_0^l \frac{du'_0}{dx}\, dv = \left(u'_0 \frac{dv}{dx}\right)_0^l - \int_0^l u'_0 \frac{d^2 v}{dx^2}\, dx$$

et comme $u'_0(o) = u'_0(l) = o$,

$$\Delta L'_0 = -\cos^3\theta \int_0^l u'_0 \frac{d^2 v}{dx^2}\, dx.$$

Remplaçons $\frac{d^2 v}{dx^2}$ par sa valeur $\frac{1}{E'I}(Q\, v \cos\theta + Q_0\, u'_0 \cos\theta - \mu)$ l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{Q_0 \cos\theta}{E'I}\int_0^l u'^2_0\, dx = \frac{1}{E'I}\int_0^l \mu u'_0\, dx - \frac{Q\cos\theta}{E'I}\int_0^l u'_0\, v\, dx - \frac{\Delta L'_0}{\cos^3\theta}.$$

Dans cette expression, $\frac{\Delta L_0}{\cos^3\theta}$, faisant intervenir les allongements élastiques du câble, joue comme à l'ordinaire le rôle d'un terme correctif.

L'avant dernier terme du second membre sera lui aussi toujours très petit; dans l'intégrale $\int_0^l u'_0\, v\, dx$ en effet, non seulement les valeurs locales de v sont faibles vis-à-vis des valeurs correspondantes de u'_0, mais la fonction v s'annule au moins une fois dans l'intervalle (o, l), et à chacune de ses extrémités.

Si l'on s'en tient aux deux termes restants, la *partie principale* de l'accroissement de traction suivant la corde du câble porteur est

$$(32) \qquad Q_0 = \frac{1}{\cos\theta} \frac{\int_0^l \mu u'_0 \, dx}{\int_0^l u'^2_0 \, dx},$$

qui *se confond avec la même grandeur relative au système dépourvu de câble de rigidité.*

Dans le *cas particulier* où la surcharge consiste en un poids P agissant dans la section d'abscisse α, le numérateur de l'expression (32) représente le moment statique déterminé dans la section d'abscisse α par des charges fictives réparties d'intensité élémentaire :

$$P u'_0 \, dx.$$

Il suffit donc pour l'obtenir de prendre celle des intégrales secondes de la fonction

$$-P u'_0 = -\frac{4 f_0 P}{l^2} \alpha (l - \alpha),$$

s'annulant pour $x = 0$ et $x = l$. Le calcul du dénominateur s'effectue sans difficulté particulière. Finalement on a

$$(33) \qquad Q_0 = \frac{5 P l}{8 f_0 \cos\theta} \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)\left[1 + \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)\right].$$

Il est notable que la valeur numérique de cette expression pour toute valeur de $\frac{\alpha}{l}$ s'écarte assez peu de celle à laquelle conduit l'application de la formule (21) commune aux câbles porteurs libres peu déformés et aux câbles porteurs rigidifiés par un câble rectiligne précontraint. C'est ce qui ressort du tableau ci-dessous où K est le rapport des tractions suivant la corde, dans l'un et l'autre cas.

$\frac{\alpha}{l}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$K = \frac{5}{6}\left[1 + \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)\right]$	0,83	0,99	1,02	1,04

On en déduit la conclusion importante :

La traction suivant la corde du câble porteur dépend peu des organes de rigidité (câble ou poutre) à condition que ceux-ci limitent efficacement les déformations verticales de l'ensemble.

Câble de rigidité. — L'équation de déformation du câble de rigidité est celle établie au paragraphe 13

$$\Delta L'_1 = \frac{1}{2}\cos^3\theta \int_0^l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx.$$

La valeur du premier membre est connue, on a [formule (22)] :

$$\Delta L'_1 = \frac{Q_1 l}{ES_1 \cos\theta}.$$

Par intégration par parties, effectuée en vertu d'une remarque précédente sur la continuité de $\frac{dv}{dx}$, il vient

$$\int_0^l \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = \left(v\frac{dv}{dx}\right)_0^l - \int_0^l v\frac{d^2v}{dx^2}dx,$$

puis en tenant compte de la nullité de v aux deux extrémités de l'intervalle (o, l) :

$$\frac{2Q_1 l}{ES_1 \cos^4\theta} = -\int_0^l v\frac{d^2v}{dx^2}dx.$$

Si, dans cette équation, on remplace v par sa valeur (29) et $\frac{d^2v}{dx^2}$ par $-\frac{M}{EI}$, elle devient :

$$\frac{2Q_1 l}{ES_1 \cos^3\theta} = \frac{1}{QE'I}\int_0^l (\mu - Q_0 u'_0 \cos\theta - M)M\,dx. \tag{34}$$

Les inconnues Q_0 Q_1 et M sont solutions des trois équations (31), (32) et (34) qui résolvent théoriquement le problème. Pratiquement, l'expression de M en fonction des paramètres Q_0 et Q_1 obtenue par intégration de l'équation (31) et la forme de l'équation (34) sont telles qu'il ne peut être question de les traiter autrement que par tâtonnements dans chaque cas particulier donné. L'étude des déformations verticales se poursuivra ensuite par prise en considération de l'équation (29).

Remarque. — La formule (33) montre que la *partie principale* de la traction suivant la corde du câble parabolique est, ici encore, justiciable de la méthode des lignes d'influence; des développements ci-dessus, il résulte que ni Q_1 ni M, ni v ne possèdent la même propriété.

19. **Efforts dans les suspentes.** — Nous avons établi au paragraphe 17 l'expression du moment fléchissant dans le voile des suspentes supposé continu

$$\nu = (Q'_0 + Q_0)v\cos\theta + Q_0 u'_0 \cos\theta.$$

L'effort tranchant

$$\frac{dv}{dx} = (Q'_0 + Q_0)\frac{dv}{dx}\cos\theta + Q_0\frac{du'_0}{dx}\cos\theta$$

est continu tout le long de l'ouvrage comme les fonctions $\frac{dv}{dx}$ et $\frac{du'_0}{dx}$.

Il n'y a donc pas d'efforts concentrés dans la nappe des suspentes; *la poutre de rigidité transforme toute charge ponctuelle en une charge répartie sur la totalité de la portée.*

Soit $\sigma = -\frac{d^2 v}{dx^2}$ l'intensité de cette dernière, on a

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = (Q'_0 + Q_0)\frac{d^2 v}{dx^2}\cos\theta + Q_0\frac{d^2 u'_0}{dx^2}\cos\theta,$$

soit, en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs,

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = (Q'_0 + Q_0)\frac{M}{E'I}\cos\theta + \frac{8 f_0}{l^2} Q_0 \cos\theta. \tag{35}$$

A la constante $\frac{8 f_0}{l^2} Q_0 \cos\theta$ *près, la tension des suspentes a des variations proportionnelles à celles du moment fléchissant* M *dans la poutre de rigidité.*

20. **Corrections**. — La *correction* de *poids propre* donne lieu à des considérations identiques à celles développées au paragraphe 15; il en est de même pour les *effets de la température* dans le câble porteur et dans le câble de rigidité.

La distribution du moment fléchissant est en outre modifiée dans la poutre de rigidité du fait des variations thermiques; soit M (x) ce moment, dans l'*état intermédiaire* précédemment défini (§ 15).

Pour établir l'équation différentielle susceptible de le déterminer, tenons compte des variations de longueur des suspentes: à cet effet désignons par v et w les déformations non concordantes du câble porteur et de la poutre de rigidité. Un raisonnement en tout point analogue à celui du paragraphe 17 permet de remplacer l'équation (29) qui en résulte par

$$M + [Qw + (Q'_0 + Q_0)(v - w) + Q_0 u'_0]\cos\theta = 0.$$

Une double dérivation donne ensuite

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \left[Q\frac{d^2 w}{dx^2} + (Q'_0 + Q_0)\, d^2\frac{v - w}{dx^2} - \frac{8 f_0}{l^2} Q_0\right]\cos\theta = 0.$$

Or

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{E'I} \qquad \text{et} \qquad w - v = \tau u'_0.$$

Finalement, l'équation cherchée s'écrit

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{Q\cos\theta}{E'I} - \frac{8f_0\cos\theta}{l^2}[Q_0 + (Q'_0 + Q_0)\tau] = 0, \tag{36}$$

son intégration ne nécessite pas de développements particuliers.

21. Détermination approchée de l'action de la poutre de rigidité. — Les développements ayant fait l'objet du présent chapitre conduisent à des calculs complexes qui, nous l'avons déjà signalé, ne peuvent être conduits que par tâtonnements. Pour servir de point de départ à ceux-ci et les diriger convenablement, il est utile de pouvoir se faire *a priori* une idée approchée des actions respectives du câble de rigidité et de la poutre associée.

A cet effet, posons

$$V = \frac{p - Q_0 u'_0 \cos\theta}{Q}.$$

V représente assez bien la déformation du système dépourvu de poutre de rigidité, mais soumis aux mêmes actions et à la même traction de précontrainte Q'_1 que le système complet. En effet, Q_0 est peu affecté, ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 18 par la mise en jeu des organes de rigidité et Q_1, généralement faible, devient $Q'_0 + Q_0 + Q'_1$ ne sera que légèrement diminué par l'action de la poutre.

L'équation différentielle (30) peut s'écrire

$$E'I\frac{d^2\varphi}{dx^2} + Q(V - \varphi) = 0. \tag{37}$$

Supposons V développable en série de Fourier

$$V = \sum V_{0,n}\sin\left(\frac{2\pi}{l}nx + \varphi_n\right) \tag{a}$$

et cherchons pour φ un développement de même forme

$$\varphi = \sum \varphi_{0,n}\sin\left(\frac{2\pi}{l}nx + \varphi_n\right). \tag{b}$$

Portant les expressions précédentes de φ et V dans l'équation (37), il vient par identification

$$\varphi_{0,n} = \frac{Q}{Q + \frac{4\pi^2}{l^2}n^2E'I}V_{0,n}, \tag{38}$$

$v_{0\,n}$ décroît très rapidement avec n; la *poutre de rigidité a pour effet d'étouffer les harmoniques de* V.

Dans certaines circonstances, la déformation V peut être correctement représentée par un terme unique du développement (a) :

$$(a') \qquad V = V_0 \sin \frac{2\pi}{l} \lambda x.$$

C'est le cas notamment où la surcharge uniforme s'étend à la moitié de la travée ($\lambda = 1$) ou à la travée entière $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$ (*fig.* 8).

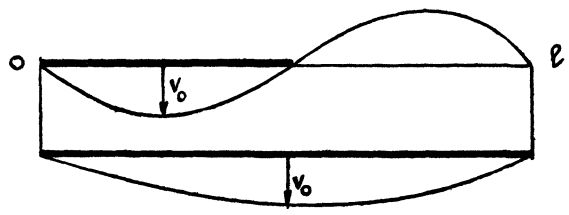

Fig. 8.

On en déduit

$$v = \frac{Q}{Q + \frac{4\pi^2}{l^2}\lambda^2 E'I} V,$$

soit encore

$$(39) \qquad v = \frac{\mu - Q_0 u'_0 \cos\theta}{Q + \frac{4\pi^2}{l^2}\lambda^2 E'I}.$$

Cette dernière relation montre que la *poutre de rigidité est sensiblement équivalente u point de vue de la limitation des déformations verticales à un accroissement de traction égal à* $\frac{4\pi^2}{l^2}\lambda^2 E'I$ *du câble de rigidité.*

Revenons à l'équation de l'allongement élastique du câble de rigidité (§ 18) :

$$\frac{2Q_1 l}{ES_1 \cos^4\theta} = -\int_0^l v \frac{d^2 v}{dx^2} dx,$$

compte tenu de l'équation (37) elle s'écrit

$$\frac{2Q_1 l}{ES_1 \cos^4\theta} = \frac{Q}{E'I}\int_0^l (V - v)\, v\, dx,$$

et en admettant l'approximation précédente :

$$\frac{2Q_1 l}{ES_1 \cos^4\theta} = \frac{Q}{E'I}(V_0 - v_0)\int_0^l \sin^2\frac{2\pi}{l}x\,dx,$$

soit

$$\frac{Q_1}{S_1} = \frac{EQ\cos^4\theta}{4E'I}(V_0 - v_0)v_0. \tag{40}$$

Il est essentiel de remarquer que les formules (39) et (40) exigent pour leur application que la déformation V du système dépourvu de poutre de rigidité soit d'allure sinusoidale.

CONCLUSIONS.

En résumé, les principales propriétés du dispositif étudié concernent les points suivants.

1° *Traction suivant la corde du câble porteur.* — La partie principale de l'accroissement de la traction, suivant la corde du câble porteur sous l'action des surcharges, est pratiquement indépendante des caractéristiques des organes de rigidité — câble ou câble et poutre associée - - pourvu que ceux-ci soient suffisants pour limiter efficacement les déformations verticales de l'ouvrage.

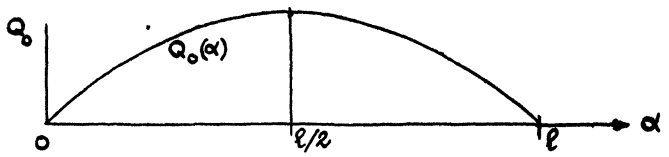

Fig. 9.

Cette grandeur admet une *ligne d'influence* d'allure générale parabolique, symétrique par rapport à la verticale du milieu de la portée et y présentant un maximum, égal à $\frac{3l}{16 f_0 \cos\theta}$ pour le système sans poutre, et à $\frac{25l}{128 f_0 \cos\theta}$ lorsque le tablier présente quelque rigidité.

2° *Déformations verticales.* — Non seulement les déformations verticales sont localement diminuées par l'action des organes de rigidité, mais elles sont *uniformisées* sur une partie importante de la portée, de part et d'autre du centre de la travée.

Si l'on applique par exemple la formule (17) relative au dispositif sans poutre, au cas d'une seule charge circulante, on vérifie que la *trajectoire* de celle-ci — lieu géométrique du point anguleux du câble de rigidité

déformé — peut être correctement représentée par l'équation

$$y = a\frac{1 - 3\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)}{b + 3\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)}\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (^1).$$

La fonction y, symétrique par rapport à $x = \frac{l}{2}$, est minimum pour cette valeur de l'abscisse et présente un maximum dans chaque demi-travée (*fig.* 10).

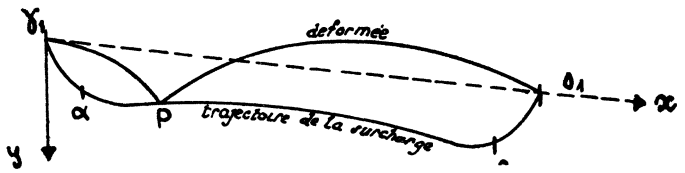

Fig. 10.

Ces valeurs extrêmes diffèrent suffisamment peu pour que la trajectoire puisse être assimilée sur une grande partie de la portée (entre α et β dans le cas de la figure 10) à une droite parallèle à la ligne $\gamma_1 \gamma'_1$ des points d'accrochage du câble raidisseur.

Cette propriété trouve tout naturellement son utilisation dans l'installation de lignes pour *transporteurs aériens* : la nacelle, au lieu d'être accrochée au câble porteur comme dans les téléphériques normaux roule sur un rail lié invariablement au câble de rigidité.

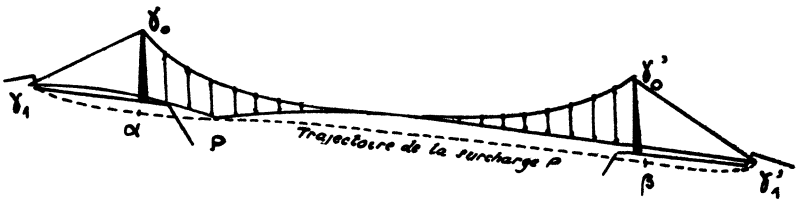

Fig. 11.

Ce type d'ouvrage, actuellement à l'étude comme application de notre procédé, sous le nom de *caté-rail*, semble constituer une solution particulièrement avantageuse du problème posé par le franchissement des grandes brèches en montagne.

---

(1) a et b constantes :

Axe de x . ligne d'équilibre initial du câble de rigidité $\gamma_1 \gamma'_1$;

Axe des y : verticale descendante de γ_1

Notons enfin que l'uniformité de la déformation sera mieux obtenue encore, si au lieu d'accrocher le câble de rigidité au droit des pylônes, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, on reporte les points fixes γ_1 et γ'_1 suffisamment loin sur les rives (*fig.* 11), par exemple, jusqu'aux ancrages des retenues, pour profiter de la présence de ceux-ci. La portion quasi rectiligne $\alpha\beta$ de la trajectoire de la surcharge peut alors intéresser la totalité de la portée, ce qui est un avantage évident.

3° *Efforts dans les suspentes.* — Nous avons vu que les organes de rigidité transforment tout ou partie des surcharges concentrées appliquées à l'ouvrage en surcharges continues distribuées sur toute la portée. Cette propriété conduit à une économie sensible sur les dimensions des suspentes qui concourent ainsi simultanément au transport des charges du tablier au câble porteur.

4° *Stabilité transversale de l'ouvrage.* — L'emploi d'un câble de rigidité initialement rectiligne ne pouvant présenter d'autres déformations que celles dues à son allongement élastique, a pour conséquence une grande stabilité, du tablier de l'ouvrage, ou de la ligne aérienne, lorsque l'ensemble vient à être soumis à des efforts transversaux, notamment à ceux dus au vent.

DEUXIÈME PARTIE.

ESSAIS.

Le procédé de rigidification des ouvrages suspendus par câbles auxiliaires précontraints, dont, dès 1937, nous avons préconisé l'emploi à diverses reprises a fait l'objet, sur ouvrage réel et sur modèle réduit, d'essais dont nous allons rendre compte.

I.

RIGIDIFICATION D'UNE PASSERELLE DE 36^{m} DE PORTÉE.

L'ouvrage, conçu dans le but précis d'étudier la réduction des déformations verticales d'un système rigidifié par rapport à celles du système libre, a été réalisé à l'aide d'un matériel existant et mis à notre disposition à cet effet au Polygone des Ponts lourds métalliques d'Avignon.

Description (Planche I). — La surcharge roulante est constituée par un lorry pour voie de 0,60 chargé à 3^{t}, de telle sorte que chaque essieu supporte 1^{t},5 et chaque roue 0^{t},75 (*fig.* 12).

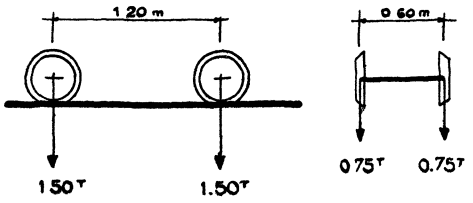

Fig. 12.

Les dispositions générales adoptées pour assurer la circulation de cette surcharge sont les suivantes.

Câbles porteurs. — Chacune des deux nappes porteuses est réduite à un seul câble parabolique de 18^{mm} en fils d'acier étiré à haute résistance, disposés en torons. Chaque câble arrêté aux sommets des pylônes auxquels il aboutit est prolongé sur les rives par des câbles de retenue indépendants.

Suspension. — La nappe des suspentes est constituée par des étriers en rond de 10^{mm} écartés de $1^{m},20$ d'axe en axe.

Tablier. — Le tablier comporte :

— Des *poutrelles* métalliques reposant sur les platines des suspentes, distantes de $1^{m},20$ comme ces dernières. Chacune est constituée par un profilé IPN 200 pesant 28^{kg} au mètre;

— Deux *longrines* reposant sur les poutrelles et liées à celles-ci par des colliers; symétriques par rapport à l'axe longitudinal de la voie portée, elles sont à l'écartement de $0^{m},60$ et supportent les rails de roulement; chaque longrine de $4^{m},40$ de long est constituée par deux madriers de 22×8 jumelés; elle est liée à celle qui la précède et à celle qui la suit dans la travure par un éclissage lâche ne s'opposant pratiquement pas aux déformations.

A l'extérieur de la voie et sur toute la largeur de l'ouvrage, les poutrelles sont recouvertes par un platelage en planches de 4 permettant la circulation du personnel.

Câbles de rigidité. — Identiques aux câbles porteurs, ils sont au nombre de deux et disposés de chaque côté de l'ouvrage, à l'aplomb de la suspension à laquelle ils sont liés; les extrémités de chacun d'eux traversent les soubassements bétonnés des pylônes leur servant d'ancrage dans des tubes d'acier et sont arrêtés par des U d'ancrage et des mordaches disposés à cet effet. La traction de précontrainte est donnée et mesurée à l'une des extrémités par un vérin à huile muni d'un manomètre.

Pylônes. — Nous nous sommes servis des pylônes métalliques d'une passerelle de montage Pigeaud du Génie militaire, dont l'écartement a été réduit à $1^{m},40$ d'axe en axe.

Le poids propre de l'ouvrage ainsi sommairement décrit ressort à 120^{kg} au mètre linéaire d'ouvrage. Chaque câble parabolique supporte donc 60^{kg} au mètre avant l'introduction de toute surcharge. Le réglage initial réalise une flèche de $3^{m},60$ sous cette charge et une parfaite horizontalité du tablier.

Étude de la passerelle non rigidifiée. — Nous utilisons les notations et les résultats des paragraphes 6 et 7.

1° Calculons d'abord la différence de longueur entre le câble et sa corde :

$$L - l = \frac{8}{3}\frac{f^2}{l} = \frac{8}{3} \times 10 \times 3,60 = 0^{m},96.$$

2° Soient μ_c et μ_u les moments statiques déterminés par la charge uniforme et la surcharge respectivement

$$\mu = \mu_u + \mu_c$$

et

$$J = P(\mu_u + \mu_c) + \varpi \int_0^l \mu_u \, dx + \varpi \int_0^l \mu_c \, dx.$$

D'autre part, on sait que α désignant l'abscisse de la surcharge P,

$$\mu_u(\alpha) = \frac{\varpi l^2}{2}\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right), \qquad \mu_c(\alpha) = P l \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)$$

et que

$$\int_0^l \mu_c \, dx = \mu_c \frac{l}{2}, \qquad \int_0 \mu_u \, dx = \frac{2}{3}\frac{\varpi l^3}{8}.$$

Ces relations permettent le calcul de J puis de Q, u et $v = u_0 - u'_0$.

Les résultats de calcul sont consignés dans le tableau I ci-après.

La connaissance des ordonnées v conduit au tracé de la trajectoire de la charge roulante telle qu'elle est représentée à la figure 3.

Étude de la passerelle rigidifiée. — Pour effectuer cette étude, nous utilisons les résultats du paragraphe 13.

1° La traction de pose du câble parabolique est

$$Q'_0 = \frac{\varpi l^2}{8f} = 5,40\,T$$

et l'accroissement de cette quantité sous l'action de la charge P d'abscisse α est donnée par la formule (21) :

$$Q_0 = \frac{3Pl}{4f}\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right).$$

2° La relation (23′) donnant Q_1, dans laquelle nous posons

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)\left[1 - 3\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)\right],$$

TABLEAU I.

(Unités T, m.)

GRANDEURS	$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
α (m).....	2,00	3,60	6,00	7,20	9,00	12,000	18,00
μ_c.....	2,833	4,860	7,500	8,640	10,125	12,000	13,500
$\int_0^l \mu_c\, dx$.....	46,994	87,48	135	155,52	182,25	216	243
$\int_0^l \mu\, dx$ (*).....	280,274	320,76	368,28	388,80	415,53	449,28	476,28
$\varpi \int_0^l \mu\, dx$.....	6,816	19,255	22,096	23,328	24,931	26,956	28,576
μ_u.....	2,200	3,499	5,400	6.200	7,290	8,640	9,720
$\mu_u + \mu_c$..... ..	5,033	8,359	12,900	14,84	17,415	20,640	23,220
$P(\mu_u + \mu_c)$.....	7,549	12,538	19,350	22,260	26,122	30,960	35,740
J.....	24,363	31,793	42,446	45,688	51,053	57,916	64,316
Q.....	3,56	4,06	4,70	4,88	5,16	5,50	5,75
u_0.....	1,41	2,06	2,74	3,03	3,37	3,74	4,05
u'_0.....	0,755	1,296	2,000	2,304	2,700	3,200	3,600
φ.....	0,66	0,77	0,74	0,73	0,67	0,54	0,45

(*) avec $\int_0^l \mu_u\, dx = 233,88$.

résolue par rapport à Q'_1 s'écrit

$$Q'_1 = P\sqrt{\frac{ES_1\varphi(\alpha)}{2Q_1}} - (Q_1 + Q'_0 + Q_0).$$

Elle peut être représentée dans le plan $(Q_1 . Q'_1)$ par une famille de courbes à un paramètre α faciles à tracer.

TABLEAU II. — *Fonctions utiles et* Q_0.

FONCTIONS	$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)$.....	$\frac{17}{324}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$
$1 - 3\frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)$.....	$\frac{273}{324}$	$\frac{73}{100}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\varphi(\alpha)$.....	0,0452	0,0657	0,0810	0,0832	0,0820	0,074	0,0625
$Q_0(\alpha)$.....	0,5900	1,0125	1,6625	1,8000	2,1090	2,5000	2,8125

TABLEAU III. — *Étude de* Q'_1 *en fonction de* Q_1 *et de* α

$Q'_0 = 5,4\,T$, $S_1 = 260\ mm^2$, $E = 15\,000\ kg/mm^2$.

FONCTIONS	$Q_1 = 0,8$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{18}$, $A = P\sqrt{\frac{ES_1\varphi}{2}} = 446$, $Q_0 = 0,59$, $Q_0 + Q'_0 = 5,99$							
$\frac{A}{\sqrt{Q_1}}$	15,80	14,10	12,87	11,92	11,15	10,51	10
$Q'_0 + Q_0 + Q_1$	6,79	6,99	7,19	7,39	7,59	7,79	7,99
Q'_1	9,01	7,11	5,68	4,53	3,56	2,72	2,01
$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{10}$, $A = 536$, $Q_0 = 1,0125$, $Q'_0 + Q_0 = 6,41$							
$\frac{A}{\sqrt{Q_1}}$	18,98	16,94	15,48	14,32	13,40	12,62	12
$Q'_0 + Q_0 + Q_1$	7,21	7,41	7,61	7,81	8,01	8,21	8,41
Q'_1	11,77	9,53	7,87	6,51	5,39	4,41	3,59
$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{6}$, $A = 596$, $Q_0 = 1,5625$, $Q'_0 + Q_0 = 6,96$							
$\frac{A}{\sqrt{Q_1}}$	21,08	18,84	17,20	15,90	14,90	14,04	13,32
$Q'_0 + Q_0 + Q_1$	7,76	7,96	8,16	8,36	8,56	8,76	8,96
Q'_1	13,32	10,88	9,04	7,54	6,34	5,28	4,36
$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{5}$, $A = 602$, $Q_0 = 1,8000$, $Q'_0 + Q_0 = 7,20$							
$\frac{A}{\sqrt{Q_1}}$	21,31	19,06	17,40	16,12	15,06	14,20	13,48
$Q'_0 + Q_0 + Q_1$	8	8,20	8,40	8,60	8,80	9	9,20
Q'_1	13,31	10,85	9,00	7,52	6,26	5,20	4,28
$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{4}$, $A = 600$, $Q_0 = 2,1090$, $Q'_0 + Q_0 = 7,51$							
$\frac{A}{\sqrt{Q_1}}$	21,12	19,00	17,30	16,02	15,00	14,15	13,44
$Q'_0 + Q_0 + Q_1$	8,31	8,51	8,71	8,91	9,11	9,31	9,51
Q'_1	12,81	10,49	8,59	7,11	5,89	4,84	3,93
$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{3}$, $A = 572$, $Q_0 = 2,50$, $Q'_0 + Q_0 = 7,90$							
$\frac{A}{\sqrt{Q_1}}$	20,12	18,08	16,50	15,30	14,30	13,48	12,80
$Q'_0 + Q_0 + Q_1$	8,70	8,90	9,10	9,30	9,50	9,70	9,90
Q'_1	11,42	9,18	7,40	6,00	4,80	3,78	2,90
$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{2}$, $A = 524$, $Q_0 = 2,8125$, $Q'_0 + Q_0 = 8,21$							
$\frac{A}{\sqrt{Q_1}}$	18,53	16,58	15,14	14,00	13,10	12,35	11,72
$Q'_0 + Q_0 + Q_1$	9,01	9,21	9,41	9,61	9,81	10,01	10,21
Q'_1	9,52	7,37	5,73	4,39	3,29	2,34	1,51

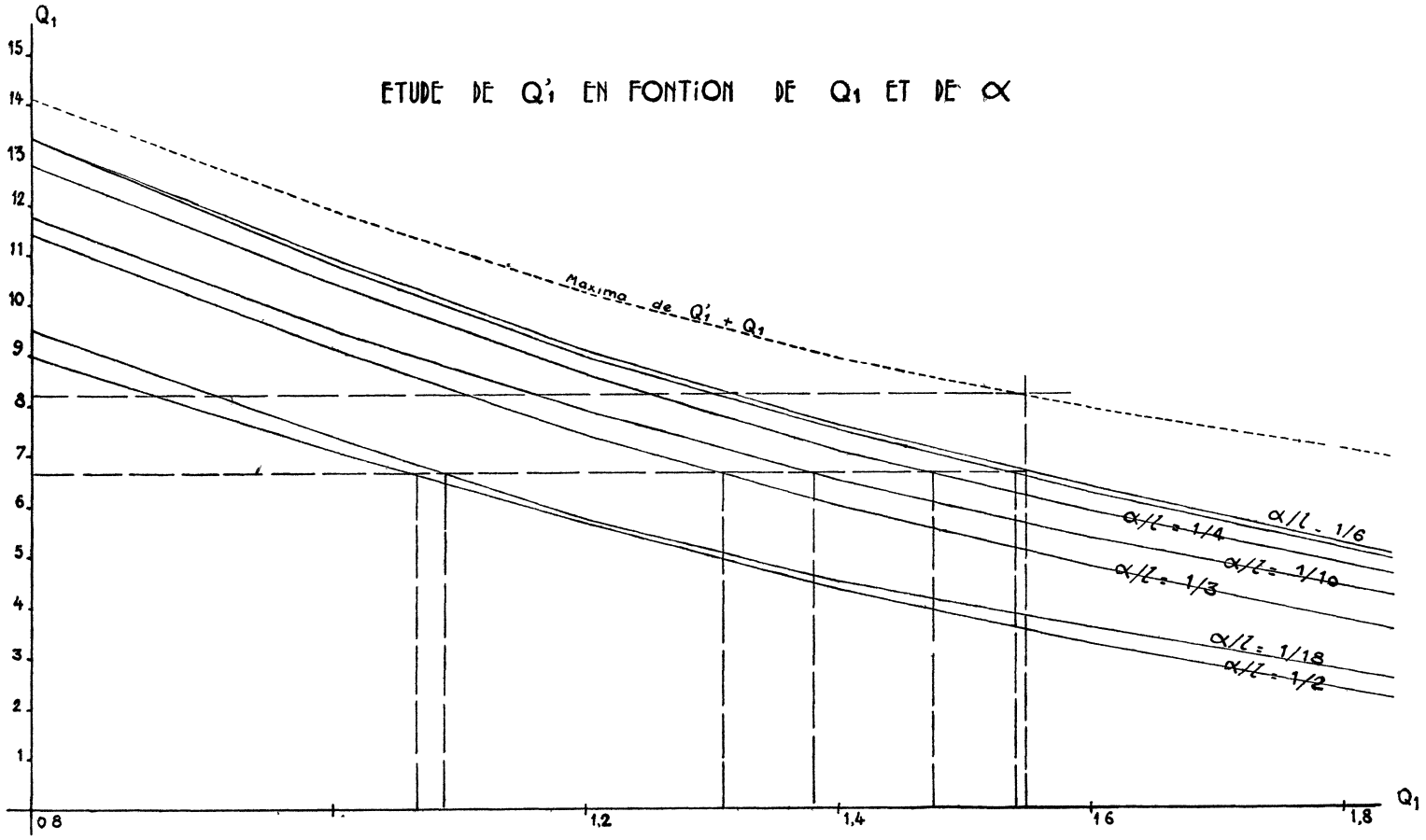
ETUDE DE Q'1 EN FONTION DE Q1 ET DE α
Q1
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0 8
1,2
1,4
1 6
1,8
Q1
Maxima de Q'1 + Q1
α/l - 1/6
α/l = 1/4
α/l = 1/10
α/l = 1/3
α/l = 1/18
α/l = 1/2

Fig 13

On en déduit :

— La valeur de la traction de précontrainte Q'_1 à adopter pour que la traction totale $Q'_1 + Q_1$ reste au plus égale à la traction de sécurité F du câble de rigidité;

— La valeur de Q_1 pour chaque position de la surcharge roulante;

— Enfin $Q = Q'_0 + Q_0 + Q'_1 + Q_1$, et ρ par la formule (17).

$$\rho = \frac{\mu - Q_0 u'_0}{Q}.$$

Dans le cas actuel nous admettons que la traction de sécurité est égale à 8,2 T correspondant pour une section de 260^{mm^2} à une contrainte de 31^{kg} par millimètre carré.

Les calculs numériques relatifs à ce cas et leur représentation graphique font l'objet des Tableaux II, III, IV et des figures 13 et 14.

L'abaque de la figure 13 montre qu'à la traction de sécurité de 8,20 T correspond une traction de précontrainte de 6,65 T; Q'_1 étant fixé à cette dernière valeur, le même abaque donne Q_1 pour toute position de la surcharge; on en déduit Q et ρ,

TABLEAU IV. — *Détermination de la déformation verticale.*

$Q'_1 = 6,65$ T.

FONCTIONS	$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{18}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Q_1	1,09	1,38	1,544	1,540	1,48	1,31	1,06
$Q'_1 + Q_1$	7,74	8,03	8,194	8,190	8,13	7,96	7,71
$Q'_0 + Q_0$	5,99	6,41	6,96	7,20	7,51	7,90	8,21
Q	13,73	14,44	15,154	15,39	15,54	15,86	15,92
μ	2,833	4,860	7,500	8,640	10,125	12,00	13,500
$Q_0 u'_0$	0,445	1,312	3,125	4,147	5,694	8,000	10,125
$\mu - Q_0 u'_0$	2,388	3,548	4,375	4,493	4,431	4,000	3,375
ρ	0,205	0,248	0,288	0,292	0,288	0,252	0,212

Par comparaison avec le Tableau I, on conclut que la diminution théorique des déformations verticales, due à l'action d'un simple câble de rigidité, ressort à :

Position de la surcharge	2^m	$3^m,60$	6^m	$7^m,20$	9^m	12^m	18^m
Diminution relative de flèche (%)	67	68	61	60	58	54	54

Les observations ont porté sur la mesure des dénivellations verticales à l'aplomb de la charge roulante. Les lectures effectuées au niveau à lunette, sur mires parlantes disposées au droit des 3e, 5e, 10o et 15e suspentes et

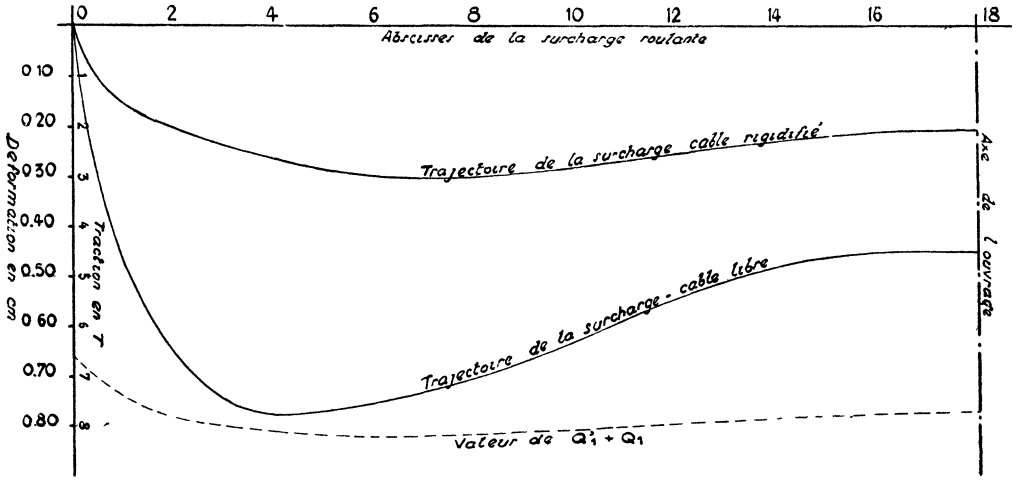

Fig. 14.

liées invariablement à celles-ci, ont donné les résultats ci-dessous reproduits pour une traction de précontrainte de 6,65 T mesurée aux vérins manométriques placés aux extrémités des câbles de rigidité.

TABLEAU V. — *Dénivellations observées.*

$Q'_1 = 6,65$ T.

$\frac{\alpha}{l}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
ν	-	0,225	0,259	-	-	0,231	0,210

Les dénivellations observées sont légèrement inférieures à celles calculées (environ 10 %). Cette discordance, d'ailleurs très faible, entre le calcul et l'expérience, tient vraisemblablement aux causes suivantes :

— Le coefficient d'élasticité du câble a été estimé et non déterminé expérimentalement; il est possible que sa valeur réelle soit supérieure à 15 000kg par millimètre carré;

— La surcharge roulante n'est pas rigoureusement ponctuelle; elle se répartit entre deux couples de suspentes;

— Nous avons limité les calculs à la première approximation en négligeant systématiquement les allongements élastiques du câble parabolique.

En conclusion, nous voyons que nos diverses hypothèses conduisant à des résultats très proches de la réalité peuvent être considérées comme satisfaisantes.

II.

ESSAIS SUR MODÈLE RÉDUIT.

En vue de l'application du procédé de rigidification en cause à l'installation de lignes pour transporteurs aériens de montagne, les Services techniques d'une société industrielle [1] ont procédé sur modèles réduits à des essais dont les résultats vérifient les principaux points de la théorie développée.

La maquette utilisée à cet effet a été établie conformément aux dispositions de la planche II; elle est organisée pour la mesure des tractions des câbles et le repérage des dénivellations.

Deux balances romaines, disposées respectivement à l'extrémité de droite de chaque câble permettent de fixer la précontrainte dans le câble de rigidité et de déterminer les variations de traction des câbles au passage de la surcharge roulante.

La mesure des déformations verticales s'effectue au moyen d'une équerre reportant les ordonnées du câble déformé sur un plan parallèle à l'ouvrage, où est figuré le schéma d'équilibre initial. On peut ainsi apprécier directement les dénivellations de l'ordre du millimètre.

Pour tenir compte des dispositions particulières présentées par le câble de rigidité au voisinage de ses ancrages (*voir* Pl. II), on a écrit son équation de déformation sous la forme

$$\Delta L_1'' = \frac{1}{2}\int_a^{l-a}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx,$$

supposant que les tronçons de longueur a comptée à partir des ancrages restent sensiblement horizontaux, ce qui est en accord avec les observations effectuées.

---

[1] *L'Omnium lyonnais*, 20, rue d'Athènes, à Paris.

En posant $\sigma = \frac{\alpha}{l}\left(1 - \frac{\alpha}{l}\right)$ et en développant comme au paragraphe 13, on obtient la relation

$$(23'') \qquad Q_1 Q^2 = \frac{ES_1 P^2}{2}\left[l\sigma(1 - 3\sigma) - a(1 - 8\sigma + 18\sigma^2)\right]$$

qui remplace l'équation (23′) pour le calcul de Q_1.

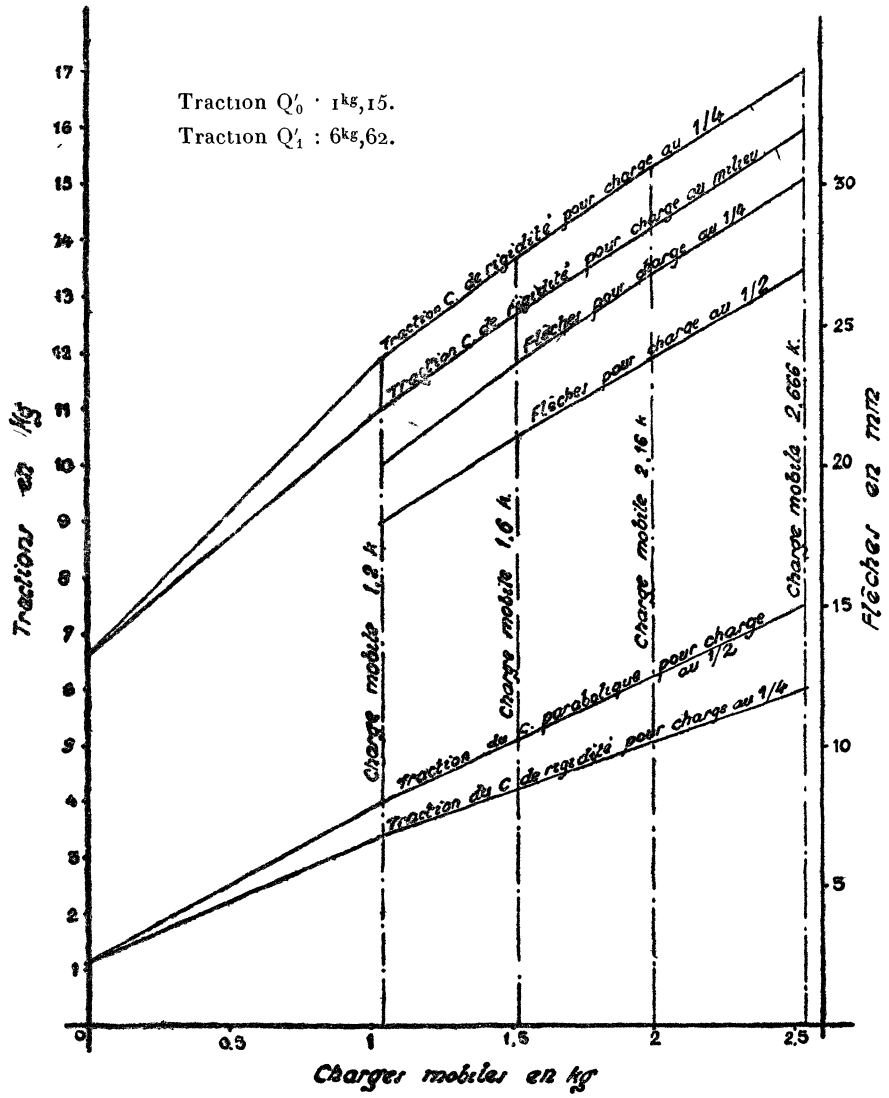

Fig. 15.

Le Tableau VI consigne quelques-uns des résultats d'observation et les valeurs calculées correspondantes en application des formules (17),

(21), (23″). Il en permet la comparaison. L'ensemble des mesures fait l'objet des figures 15 et 16.

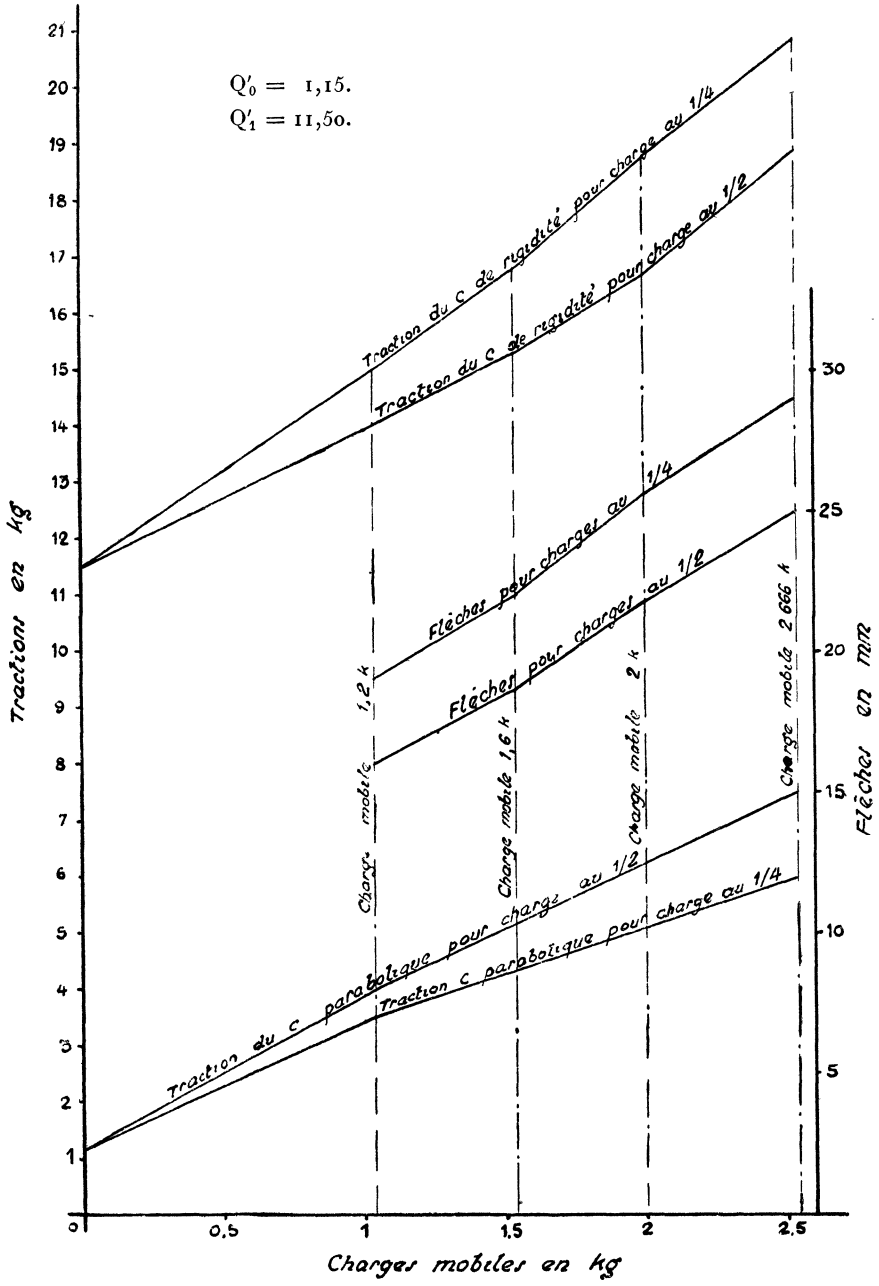

Fig. 16.

L'examen des résultats d'observation et de calcul conduit aux remarques suivantes.

TABLEAU VI. — *Résultats d'observation et de calcul.*

Données. — Portée $l = 4^{m},20$, flèche $f = 0^{m},30$, $\cos\theta = 1$, $a = 0^{m},18$, $S_0 = S_1 = 2^{mm^2},67$, charge morte $\varpi'_0 = 0,155$ kg/m. Traction de pose du parabolique $Q'_0 = 1^{kg},15$; $E = 15\,000$ kg/mm².

DÉSIGNATION des grandeurs déterminées	MODE de détermination	Q'_1 (kg)	P (kg)	UNITÉS	SECTIONS 180 mm	$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{4}$ 1050 mm	$\frac{\alpha}{l} = \frac{1}{2}$ 2200 mm
Dénivellations du câble de rigidité	Observation....	6,62	1,20	mm	–	20	18
	Calcul.....			»	18	23	18
Traction suivant la corde du câble parabolique	Observation....			kg	–	3,4	4
	Calcul.....			»	1,60	3,5	4,3
Traction du câble de rigidité	Observation....			kg	–	12	11
	Calcul.....			»	8,2	13,8	12,4
Dénivellations du câble de rigidité	Observation....	6,62	2,67	mm	–	31	27
	Calcul.....			»	31	34	27
Traction suivant la corde du câble parabolique	Observation....			kg	–	6	7,5
	Calcul.....			»	2,3	6,4	8,1
Traction du câble de rigidité	Observation....			kg	–	17	16
	Calcul.....			»	11	20,7	18,2
Dénivellations du câble de rigidité	Observation....	11,50	1,20	mm	–	19	16
	Calcul.....			»	16	20	16
Traction suivant la corde du câble parabolique	Observation....			kg	–	3,5	4
	Calcul.....			»	1,6	3,5	4,3
Traction du câble de rigidité	Observation....			kg	–	15	14
	Calcul.....			»	12,3	16,7	15,6
Dénivellations du câble de rigidité	Observation....	11,50	2,67	mm	–	29	25
	Calcul.....			»	24	31	24
Traction suivant la corde du câble parabolique	Observation....			kg	–	6	7,5
	Calcul.....			»	2,3	6,4	8,1
Traction du câble de rigidité	Observation....			kg	–	21	19
	Calcul.....			»	14,4	23,7	20,9

Flèches. — Les flèches observées sont très voisines de celles calculées, tout en leur restant inférieures au quart de la portée. Elles sont remarquablement uniformes d'une extrémité à l'autre.

Traction des câbles. — *a. Câble parabolique.* — Les tractions observées sont inférieures de 7 % en moyenne à celles calculées. Sur les diagrammes, elles apparaissent comme des fonctions linéaires de l'intensité de la surcharge, ce qui est en conformité avec l'existence d'une ligne d'influence.

b. Câble de rigidité. — Les tractions observées sont inférieures de 10 % environ à celles calculées; ainsi que cela résulte de la théorie, elles ne suivent pas de loi linéaire en fonction des surcharges.

Dans leur ensemble les observations coïncident suffisamment avec les prévisions théoriques pour constituer une justification des hypothèses émises et des calculs développés à partir de celles-ci.

Vu et approuvé :

Paris, le 18 septembre 1944.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

P. MONTEL.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

G. ROUSSY.