

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

BERNARD DUBUISSON

**Détermination des éléments initiaux d'une photographie
aérienne par le calcul différentiel**

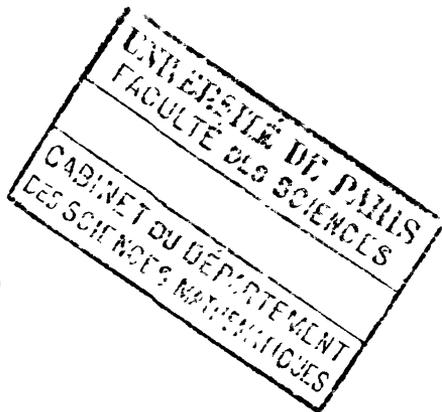
Thèses de l'entre-deux-guerres, 1943

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1943__258__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>



THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE D'INGÉNIEUR-DOCTEUR

PAR

BERNARD DUBUISSON

INGÉNIEUR E.T.P., DIPLÔMÉ DE L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PERFECTIONNEMENT INDUSTRIEL

1^{re} THÈSE

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS INITIAUX
D'UNE PHOTOGRAPHIE AÉRIENNE PAR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL

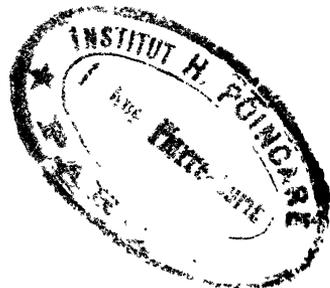
2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ
L'IMAGE LATENTE PHOTOGRAPHIQUE

Soutenues le 24 Novembre 1943, devant la Commission d'Examen

Jury { MM. DARMOIS
PÉRÈS
CROZE

{ Président.
Examineurs.



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. Paul MONTEL.

PROFESSEURS

P. MONTEL	T	Théorie des Fonctions.	LANQUINE	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
L. BLARINGHEM	T	Botanique.	VALIRON	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.	F. PERRIN		Théories physiques.
A. MICHEL-LÉVY	T	Petrographie.	VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.
A. DENJOY	T	Géométrie supérieure.	G. DARMOIS	T	Mathématiques générales.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	CHATTON	T	Biologie maritime.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	AUBEL		Chimie biologique.
A. DEBIERNE	T	Electronique et Radio-activité.	Jacques BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
M. JAVILLIER	T	Chimie biologique.	M ^{me} JOLIOT-CURIE		Physique générale et Radioactivité.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	PLANTEFOL	T	Botanique.
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.	CABANNES	T	Recherches physiques.
Ch. JACOB	T	Géologie.	GRASSE	T	Zoologie (Evolution des êtres organisés.
P. PASCAL	T	Chimie générale.	PRÉVOST		Chimie organique.
M. FRÉCHET	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	BOULIGAND		Mathématiques.
E. ESCLANGON	T	Astronomie.	CHAUDRON		Chimie.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.	WYART		Minéralogie.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.	TEISSIER	T	Zoologie.
PAUTHENIER	T	Electrotechnique générale.	MANGENOT	T	Biologie végétale.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.	MONNIER		Physiologie générale.
JOB		Chimie générale.	PIVETEAU		Géologie.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	ROCARD		Physique.
VILLEY	T	Mécanique appliquée.	H. CARTAN		Calcul différentiel.
COMBES	T	Physiologie végétale.	SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.
GARNIER	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	LAFFITTE		Chimie (P.C.B.)
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.	LERAY		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.	FAVART		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	COULOMB	T	Physique du globe.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.	M ^{me} COUSIN		Biologie animale (P.C.B.)
M. CURIE		Physique (P.C.B.)	CHRÉTIEN		Analyse et mesures chimiques.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	DRACH		Evolution des êtres organisés.
CHAZY	T	Mécanique analytique.	CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
GAULT	T	Chimie appliquée.	EPHRUSSI	T	Génétique.
CROZE	T	Physique théorique et Physique céleste.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique
DUPONT	T	Théories chimiques.	KASTLER		Physique.

Secrétaire CH. MONIER

A mon Président de Thèses,

Monsieur le Professeur E. DARMOIS

A Messieurs les Professeurs PÉRÈS et CROZE
(Examineurs)

A mon Maître

Monsieur le Professeur H. ROUSSILHE

**Ingénieur Hydrographe en Chef
de la Marine (E. R.)**

A la mémoire de mes Parents

A ma Femme

A mes Enfants

A mes Parents et Amis

SOMMAIRE

	Pages
I. — THÉORIE	5
A) Calcul du point S de prise de vue dans l'espace. — Résolution du problème de Pothénot par la méthode du point approché	5
B) Calcul des autres éléments de la prise de vue : θ et i	16
<i>a</i>) Procédé analytique	17
<i>b</i>) Procédé géométrique	19
C) Calcul de l'angle μ , orientation du cliché dans son plan	22
II. — PRÉCISION DES RÉSULTATS	26
A) Cas normal actuel avec les procédés industriels courants pour le traitement des émulsions	27
<i>a</i>) Mesure de l'angle S	27
<i>b</i>) Précision résultante de α, β, A	31
<i>c</i>) Précision de θ et i	34
<i>d</i>) Précision de μ	37
B) Cas idéal d'optique et d'émulsion vers lequel l'on peut tendre	37
<i>a</i>) Mesure de l'angle S	37
<i>b</i>) Précision résultante de α, β, A	38
<i>c</i>) Précision de θ et i	38
C) Cas d'émulsions et d'objectifs dès maintenant réalisables sous certaines réserves	40
III. — APPLICATIONS	41
A) Levers réguliers à grande échelle (par aérotopographie)	41
<i>a</i>) Méthode stéréoscopique ou à double projection	42
<i>b</i>) Méthode du redressement des clichés isolés	43
B) Levers aux petites échelles. — Levers coloniaux	44
C) Lever à grande ou petite échelle par association de deux séries différentes de clichés	46
<i>a</i>) Méthode du survol	47
<i>b</i>) Méthode du vol à focales multiples	52
D) Application au contrôle photographique des performances aéronautiques et étude des indicateurs de bord	54
1° Considérations générales	54
2° Études en vol à altitude constante	55
3° Exécution des vols à altitude variable	58
IV. — EXEMPLES DE CALCULS	60
A) Calcul du point S de prise de vue dans l'espace	60
B) Restitution, par le calcul, d'un point B commun à plusieurs clichés	69
CONCLUSION	75

INTRODUCTION

C'est pour moi un devoir de rendre hommage à mon regretté Maître, M. l'Ingénieur-Hydrographe en Chef de la Marine H. ROUSSILHE, Professeur de Photogrammétrie au Conservatoire National des Arts et Métiers, à un double titre : d'abord pour m'avoir, il y a quelque vingt ans initié aux études des Sciences Géographiques, ensuite pour m'avoir guidé de ses précieux conseils dans ces présentes recherches, effectuées dans un domaine qui est si nettement marqué de l'empreinte de ses travaux.

Je remercie M. le Professeur E. DARMOIS d'avoir bien voulu accepter de présider le Jury de cette thèse, ainsi que MM. les Professeurs PÈRES et CROZE, Examinateurs, de leur bienveillante indulgence, et ce d'autant plus que les événements de guerre ne m'ont pas permis de les tenir informés de la progression de ces recherches menées depuis 1937.

J'adresse ici une pensée émue à mes maîtres civils et militaires.

J'assure de ma reconnaissance M. le Directeur des Révisions Foncières au Ministère des Finances et M. Raymond MARTIN, Ingénieur-Docteur, qui ont bien voulu me confier les clichés qui ont facilité mes recherches expérimentales.

Enfin, je n'oublierai pas l'aide qu'a bien voulu m'apporter, à l'occasion de ma captivité, mon excellent ami M. Jean CHARBONNEL, Chef de la Section d'Etudes du Cadastre.

La photogrammétrie offre un champ illimité de recherches, qui s'imposent d'autant plus impérativement au géographe, que les méthodes cartographiques de l'avenir relèvent presque toutes de son domaine. Cette discipline — d'origine française — doit pouvoir prendre chez nous l'essor qui s'impose, mais sous l'impulsion d'idées simples. Nous nous sommes résolus de nous attacher à cette tâche.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LES MÉTHODES DE LA PHOTOGRAMMÉTRIE

D'une façon générale, un cliché est utilisé comme un théodolite, dès l'instant que l'orientation intérieure (position relative de la plaque et de l'objectif) est connue.

Il y a deux méthodes générales d'utilisation des clichés pour les travaux topographiques ou autres :

1° *La Photogrammétrie terrestre*, dans laquelle les clichés sont pris de points connus en coordonnées et en altitude, et sous un orientation et une inclinaison connus, c'est-à-dire avec une « orientation extérieure » déterminée à l'avance.

2° *La Photogrammétrie aérienne*, qui utilise des clichés pris à bord d'aéronefs ou d'avions, depuis un point inconnu en position et en altitude, suivant une inclinaison, une orientation de l'axe optique et une orientation du cliché dans son plan inconnues, c'est-à-dire avec une « orientation extérieure inconnue ».

La première méthode n'est qu'un cas particulier de la seconde, qui pose le problème sous la forme générale : pour cette raison la seconde méthode, photogrammétrie aérienne, fera seule l'objet de la présente étude.

Les deux méthodes générales d'utilisation des clichés comprennent, l'une comme l'autre, trois solutions :

a) *Utilisation par clichés isolés*, méthode à laquelle se rattache la solution optico-géométrique de M. ROUSSILHE;

b) *Utilisation des couples de clichés par stéréoscopie*, solution à laquelle se rapportent les appareils de M. POIVILLIERS, des Firmes Zeiss et Wild, et de M. SANTONI;

c) *Utilisation des couples de clichés par la méthode de la double projection*, solution à laquelle se rapportent le photocardographe de M. NISTRÌ et le restituteur de M. FERBER.

Dans chacune de ces solutions, quel que soit l'appareil de redressement ou de restitution employé, la première question qui se pose est de définir les *éléments de la prise de vue*, et de procéder au calage correspondant à l'appareil considéré. La seconde question est d'exploiter le cliché, dans tous ses détails, par la méthode de l'intersection, à partir du point de prise de vue, tel qu'il est alors déterminé.

L'étude de ces différentes méthodes d'exploitation des clichés, et des matériels qui leur sont propres, sort du cadre du présent travail, et les considérations générales, qui précèdent, n'ont d'autre but que de déterminer la position du problème qui fait l'objet de ce travail : « *Détermination, par le calcul, des éléments initiaux de prise de vue d'une photographie aérienne* ».

D'une façon générale, la solution de ce problème consiste toujours à déterminer l'orientation extérieure du cliché par rapport à un minimum de trois points, identifiés sur la photographie, et dont on connaît les coordonnées dans l'espace : c'est le problème du relèvement, dit « de la carte » ou de « Pothénot », étendu aux trois dimensions.

Pratiquement, on ne prend jamais trois points de repère, mais quatre afin d'éliminer les solutions étrangères.

Actuellement, le problème fondamental est résolu, d'une manière évidemment différente suivant les restituteurs employés, mais toujours par une méthode optico-géométrique expérimentale, et par *approximations successives*.

Au contraire, la méthode de calcul que nous allons exposer est toute différente : elle est générale, et indépendante du matériel de restitution ; elle procède aussi par approximations successives.

Nous supposons, dans ce qui suit, que l'objet photographié est un *terrain* normal, bien que la méthode générale exposée dans cette étude puisse s'appliquer dans beaucoup d'autres cas.

I. — THÉORIE

A. — CALCUL DU POINT S DE PRISE DE VUE DANS L'ESPACE RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE POTHENOT PAR LA MÉTHODE DU POINT APPROCHÉ

La solution de la première partie de ce calcul est due à M. ROUSSILHE qui la publia en 1929 dans la *Revue Hydrographique* : nous l'avons adaptée à notre nouvelle étude.

Si l'on considère successivement le *trièdre perspectif* de la chambre photographique — défini par le point nodal d'incidence de l'objectif et les images de trois repères du terrain, photographiés sur le cliché — puis le *trièdre* correspondant *de l'espace* — défini par une première approximation de la position du point de vue, et les positions exactes des trois repères sur le terrain — on est amené à résoudre successivement les problèmes suivants :

- a) Evaluation de l'*angle observé* depuis le centre de l'objectif jusqu'à deux repères photographiés sur la plaque;
- b) Evaluation de l'*angle calculé*, d'après les coordonnées approchées adoptées pour le point de prise de vue et les repères du terrain de coordonnées connues;
- c) Calcul du *segment capable* observé;
- d) Etablissement du *graphique* de compensation à grande échelle.

a) CALCUL DE L'ANGLE OBSERVÉ (fig. 1)

Soit P un cliché de focale f , dont les repères b et c sont de coordonnées connues $x_b y_b$, $x_c y_c$, par rapport aux deux axes diamétraux de la plaque. Ces deux axes sont définis par des repères de centrage dans la chambre photographique.

Si l'on a pris toute précaution pour que l'objectif de prise de vue travaille sans distorsion, l'appareil photographique fonctionne comme un théodolite.

Calculons d'abord l'angle $S_0 = \widehat{bSc}$.

Si l'on appelle :

f , la longueur focale de l'objectif;

ω , le point principal du cliché;

d_b , d_c , les distances ωb , ωc ;

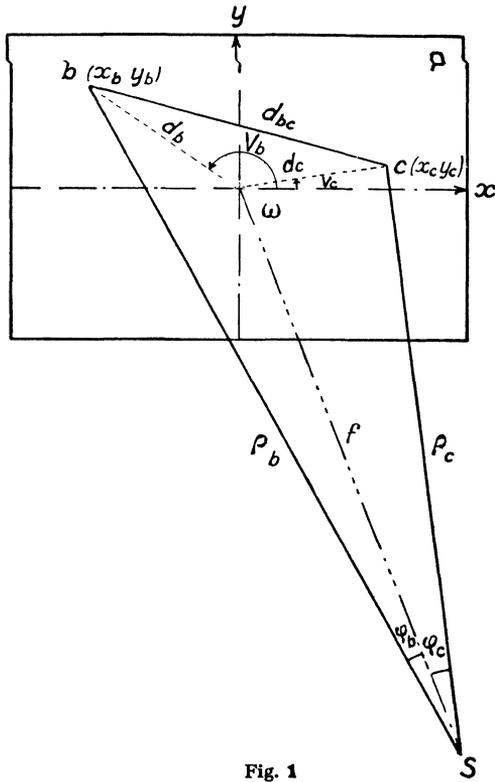


Fig. 1

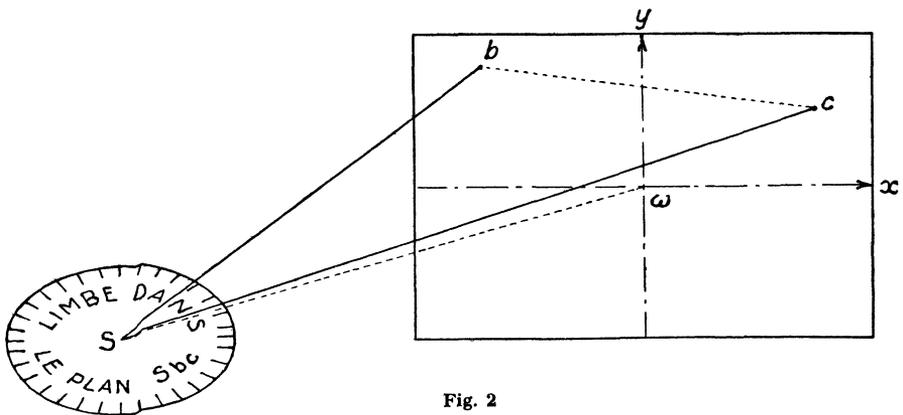


Fig. 2

V_b, V_c , leurs gisements, comptés de 0 à 400 gr à partir de ωx dans le plan P;
 d_{bc} et V_{bc} , la distance bc et son gisement;
 ρ_b, ρ_c , les distances Sb, Sc ;
 φ_b, φ_c , les angles $\widehat{\omega Sb}, \widehat{\omega Sc}$

on a, successivement :

$$(1) \quad \frac{x_b}{\cos V_b} = \frac{y_b}{\sin V_b} = d_b,$$

$$(2) \quad \frac{f}{\cos \varphi_b} = \frac{d_b}{\sin \varphi_b} = \rho_b,$$

$$(3) \quad \frac{x_c - x_b}{\cos V_{bc}} = \frac{y_c - y_b}{\sin V_{bc}} = d_{bc}.$$

Posons :

$$2 \rho_{bc} = \rho_b + \rho_c + d_{bc};$$

on a :

$$(4) \quad \operatorname{tg} \frac{\widehat{cSb}}{2} = \sqrt{\frac{(p_{bc} - \rho_b)(p_{bc} - \rho_c)}{\rho_{bc}(p_{bc} - d_{bc})}}.$$

Ce calcul peut être évité si l'on possède un instrument capable de mesurer directement les angles S avec une précision de l'ordre de 20" centésimales. Cet instrument peut avoir plusieurs aspects :

1° *Instrument de mesure donnant directement l'angle \widehat{cSb} .*

Cet appareil (*fig. 2*), dont le principe est celui de l'ancien cercle de Borda, doit comporter un instrument de pointage, lunette, fonctionnant comme microscope à long foyer, mobile autour du point S. Cette lunette est solidaire d'un limbe gradué, dont le plan est mobile autour du point S.

L'opération consiste donc d'abord à placer l'ensemble limbe-lunette parallèlement au plan bSc , quelconque mais passant par S. Un microscope de lecture avec vis micrométrique, solidaire de la lunette dans son déplacement, doit ensuite permettre d'effectuer les lectures du pointé sur b et sur c avec une précision de 20" centésimales.

Il est certain que le système d'articulation en S est un ensemble complexe : l'imprécision de ce mécanisme, ainsi que le coulisage de la lunette pour la mise au point compromettront la valeur de la mesure elle-même.

Nous préférons à ce système un dispositif plus simple composé de limbes fixes, soit :

2° *Un instrument de mesure donnant les angles de chaque vecteur par rapport aux plans $S \omega X$ et $S \omega Y$ (*fig. 3*).*

Un tel instrument de mesure de ces angles existe : c'est le « Bildmesstheodolit ». Le principe est de replacer la plaque dans la chambre de prise de vue (ou une chambre

identique avec objectif identique), puis d'explorer les faisceaux de rayons parallèles correspondant chacun à un point du cliché, au moyen de la lunette d'un « théodolite à centre dégagé ». Il suffit que les axes de ce théodolite se rencontrent à peu près et que ce point d'intersection soit placé au centre de la pupille d'entrée de l'objectif (image du diaphragme dans l'espace objet).

Ce principe a été utilisé dans deux modèles, déjà réalisés en 1918 :

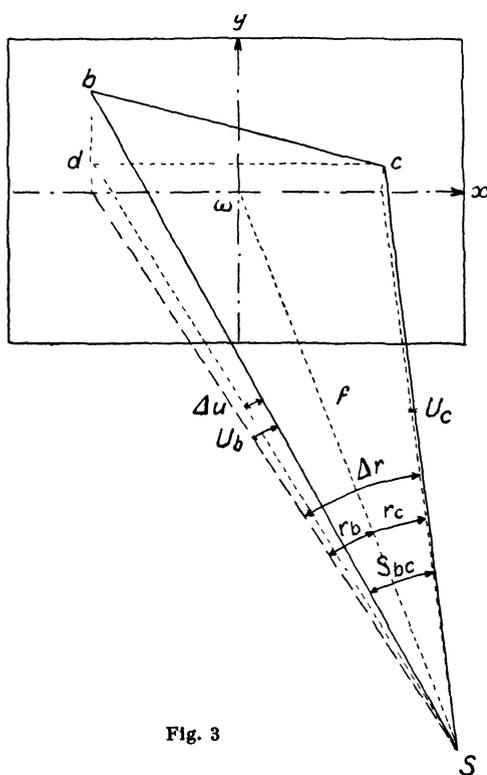


Fig. 3

a) L'un provient de la firme Zeiss. Dans cet instrument, la chambre photographique est portée sur une cardan dont les axes se croisent à peu près au centre de la pupille de l'objectif; cette cardan est, comme un théodolite, munie de deux limbes divisés et elle est emboîtée au centre d'un véritable théodolite à « centre dégagé » portant aussi deux limbes divisés;

b) L'autre, plus simple, a été réalisé par la firme Heyde (Dresde) sur les indications de HUGERSHOF. Un bâti fixe porte deux supports sur lesquels la chambre photographique tourne autour d'un axe horizontal avec limbe gradué vertical; l'axe horizontal passe par le centre de la pupille d'entrée de l'appareil photographique. Le bâti porte aussi un limbe tournant autour d'un axe vertical et supportant, sur une colonne excentrée, une lunette de visée à axe horizontal.

Finalement, que l'on se réfère à l'un de ces schémas ou à toute autre réalisation, on peut directement mesurer, pour chaque direction Sb , les deux angles suivants : r dans le plan $S\omega X$ et u dans le plan perpendiculaire à $S\omega X$. On considère $r_b - r_c = \Delta r$ et $u_b - u_c = \Delta u$. L'angle \widehat{bSc} cherché est lié à Δu et à Δr par la relation :

$$\cos \widehat{bSc} = \cos \Delta r \cdot \cos u_b \cdot \cos u_c + \sin u_b \cdot \sin u_c,$$

d'où

$$\cos \widehat{bSc} = \cos \Delta r \cdot \cos \Delta u + \sin u_b \cdot \sin u_c (1 - \cos \Delta r),$$

ou encore :

$$\cos \widehat{bSc} = \cos \Delta u - \cos u_b \cdot \cos u_c (1 - \cos \Delta r).$$

Ce calcul s'effectue rapidement avec une table de valeurs naturelles et une machine à calcul.

b) ÉVALUATION DE L'ANGLE
CALCULÉ D'APRÈS LES ÉLÉMENTS D'UNE PREMIÈRE APPROXIMATION (fig. 4)

Considérons maintenant le trièdre perspectif de l'espace.

Soit S_a la position approchée du point de vue (point nodal d'émergence de l'objectif);

H_0 le plan horizontal de référence;

N_a le nadir de S_a (pied de la verticale de S_a sur H_0);

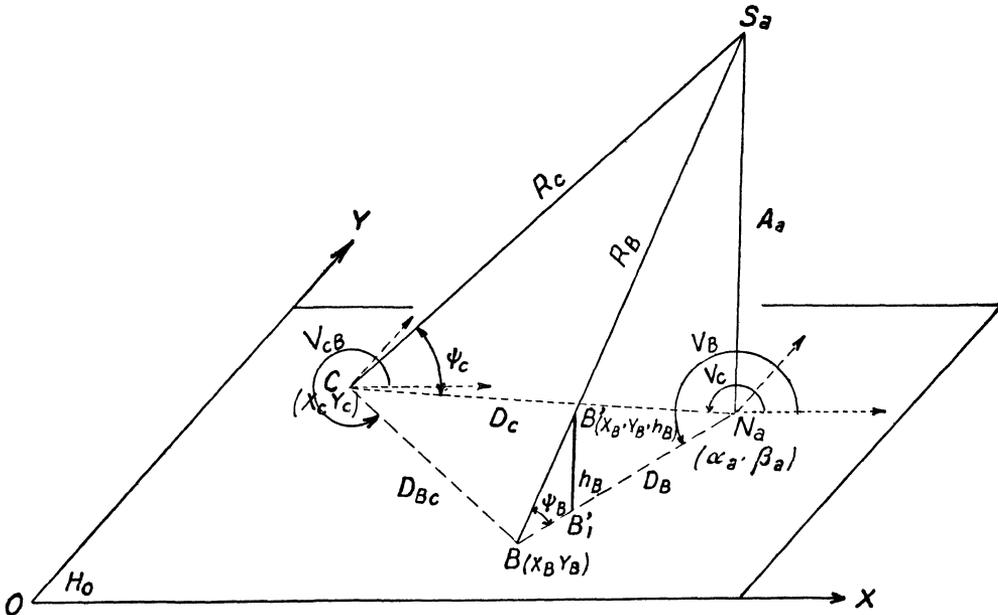


Fig. 4

A_a l'altitude approchée $N_a S_a$;

α_a, β_a les coordonnées de N_a dans un système d'axes rectangulaires OXY ;

$B' (X_{B'}, Y_{B'}, h_{B'})$ un repère quelconque du terrain;

$B (X_B, Y_B, 0)$ un point du plan H_0 , qui aurait sur le cliché la même image photographique que B' ;

B'_1 la projection orthogonale de B' sur le plan H_0 ;

$C (X_C, Y_C, 0)$ un repère situé dans le plan H_0 et définissant par conséquent l'altitude de ce plan.

Les équations de la droite $S_a B'B$ donnent :

$$X_B - X_{B'} = (X_{B'} - \alpha_a) \frac{h_b}{A_a - h_b},$$

$$Y_B - Y_{B'} = (Y_{B'} - \beta_a) \frac{h_b}{A_a - h_b},$$

et ces expressions nous donnent les coordonnées X_B, Y_B de la projection conique B de B', qui seules interviendront dans les calculs, B se substituant à B' après cette *correction d'altitude*.

Soient alors :

D_B, D_C, D_{BC} les longueurs N_aB, N_aC, BC ,

V_B, V_C, V_{BC} leurs gisements,

R_B, R_C les longueurs S_aB, S_aC ,

ψ_b, ψ_c leurs angles avec N_aB, N_aC .

On a successivement :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{X_B - \alpha_a}{\cos V_B} = \frac{Y_B - \beta_a}{\sin V_B} = D_B, \\ \frac{X_C - \alpha_a}{\cos V_C} = \frac{Y_C - \beta_a}{\sin V_C} = D_C. \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{D_B}{\cos \psi_b} = \frac{A_a}{\sin \psi_b} = R_B, \\ \frac{D_C}{\cos \psi_c} = \frac{A_a}{\sin \psi_c} = R_C. \end{array} \right.$$

$$(7) \quad \frac{X_C - X_B}{\cos V_{BC}} = \frac{Y_C - Y_B}{\sin V_{BC}} = D_{BC}.$$

Si l'on pose :

$$2 P_{BC} = R_B + R_C + D_{BC},$$

il vient :

$$(8) \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \widehat{CSB} = \sqrt{\frac{(P_{BC} - R_B)(P_{BC} - R_C)}{P_{BC}(P_{BC} - D_{BC})}}.$$

Par suite de l'erreur de position du point approché S_a , l'angle observé \widehat{cSb} (formule 4) diffère de l'angle calculé \widehat{CSB} (formule 8) d'une quantité de premier ordre donnée par :

$$(9) \quad dS = \widehat{cSb} - \widehat{CSB}.$$

c) CALCUL DU SEGMENT CAPABLE (fig. 5)

Reprenons le schéma de la fig. 4 : dans le plan de la face S_aBC (qui n'est qu'approximativement la face du polyèdre photographique $SB C$), on connaît deux points du *vrai* segment capable de l'angle observé \widehat{cSb} .

La construction géométrique de ces deux points b, c (v. *fig. 5*) est simple ($cBb = dS_{BC}$), elle permet de calculer leurs coordonnées. Si la différence dS est petite et exprimée en secondes on a, en effet, dans le triangle $S_a bC$:

$$\frac{S_a b}{dS_{(BC)} \sin 1''} = \frac{R_c}{\sin S_0}.$$

Soient alors :

$x_c y_c z_c$ les coordonnées de c ,

$x_b y_b z_b$ les coordonnées de b .

$$\frac{x_b - \alpha_a}{X_B - \alpha_a} = \frac{y_b - \beta_a}{Y_B - \beta_a} = \frac{z_b - A_a}{-A_a} = \frac{S_a b}{R_B} = \frac{R_c}{R_B} \cdot \frac{dS_{(BC)} \sin 1''}{\sin S_0},$$

d'où l'on sort les coordonnées de b :

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} b \left\{ \begin{array}{l} x_b - \alpha_a = (X_B - \alpha_a) \frac{R_c}{R_B} \cdot \frac{dS_{(BC)} \sin 1''}{\sin S_0}, \\ y_b - \beta_a = (Y_B - \beta_a) \frac{R_c}{R_B} \cdot \frac{dS_{(BC)} \sin 1''}{\sin S_0}, \\ z_b - A_a = -A_a \frac{R_c}{R_B} \cdot \frac{dS_{(BC)} \sin 1''}{\sin S_0}. \end{array} \right. \\ \\ \text{Par permutation de } b \text{ en } c, \text{ on a les coordonnées de } c : \\ \\ c \left\{ \begin{array}{l} x_c - \alpha_a = (X_c - \alpha_a) \frac{R_B}{R_C} \cdot \frac{dS_{(BC)} \sin 1''}{\sin S_0}, \\ y_c - \beta_a = (Y_c - \beta_a) \frac{R_B}{R_C} \cdot \frac{dS_{(BC)} \sin 1''}{\sin S_0}, \\ z_c - A_a = -A_a \cdot \frac{R_B}{R_C} \cdot \frac{dS_{(BC)} \sin 1''}{\sin S_0}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Nous savons que, dans l'espace, le segment capable de l'angle S_0 engendre un *tore*. Dans la région voisine de S_a , le plan tangent au tore au premier ordre près si bc est petit, peut être remplacé par le plan sécant passant par les normales en b et c au plan S_aBC .

Or l'équation du plan S_aBC (passant par S_a et parallèle à S_aB et BC), est donnée par le déterminant :

$$\begin{vmatrix} X - \alpha_a & Y - \beta_a & Z - A_a \\ X_B - \alpha_a & Y_B - \beta_a & -A_a \\ X_C - X_B & Y_C - Y_B & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

soit

$$1 (X - \alpha_a) + m (Y - \beta_a) + n (Z - A_a) = 0,$$

en posant :

$$\frac{1}{A_a (Y_c - Y_B)} = \frac{m}{-A_a (X_c - X_B)} = \frac{n}{(X_B - \alpha_a) (Y_c - Y_B) - (Y_B - \beta_a) (X_c - X_B)}.$$

D'où, en raison des équations (7), (6) et (5), et en divisant par D_{BC} :

$$\frac{1}{A_a \sin V_{BC}} = \frac{m}{-A_a \cos V_{BC}} = \frac{n}{D_c \sin (V_{BC} - V_c)}.$$

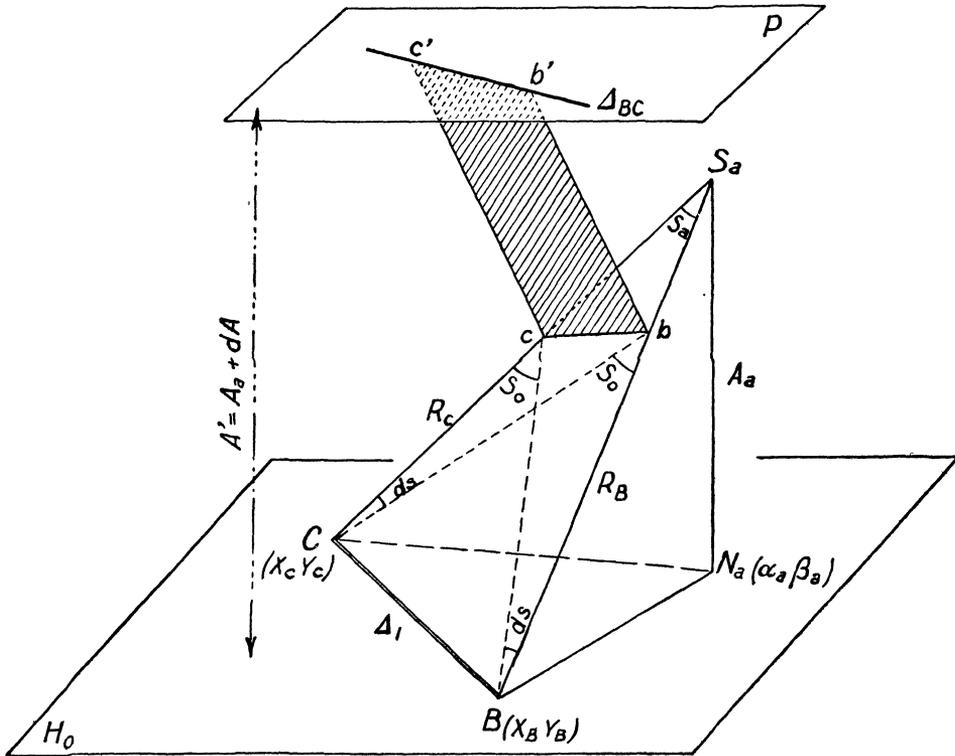


Fig. 5

Les normales au plan S_aBC passant par les points c et b ont donc pour équations (XYZ point courant) :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{X - x_b}{A \cdot \sin V_{BC}} = \frac{Y - y_b}{-A_a \cdot \cos V_{BC}} = \frac{Z - z_a}{D_c \cdot \sin (V_{BC} - V_c)}, \\ \frac{X - x_c}{A_a \sin V_{BC}} = \frac{Y - y_c}{-A_a \cdot \cos V_{BC}} = \frac{Z - z_c}{D_c \cdot \sin (V_{BC} - V_c)}. \end{array} \right.$$

Ces deux normales définissent le plan Π_{bc} , assimilable au plan tangent au tore segment capable de l'angle $S_{0(bc)}$.

d) ÉTABLISSEMENT DU GRAPHIQUE A GRANDE ÉCHELLE

Considérons un plan P (v. fig. 5) de cote $A' = A_a + dA$ qui coupe les deux normales considérées en b et c aux points b' et c' . Les coordonnées $x_{b'}$, $y_{b'}$, $z_{b'}$, du point b' sont obtenues en les substituant dans (11) à XYZ (puisque $z_{b'} = A_a + dA$) :

$$\frac{x_{b'} - x_b}{A_a \cdot \sin V_{BC}} = \frac{y_{b'} - y_b}{-A_a \cdot \cos V_{BC}} = \frac{A_a + dA - z_b}{D_c \cdot \sin (V_{BC} - V_c)}$$

Remplaçons en fonction des équations (10) x_b , y_b , z_b , par leurs valeurs, on obtient :

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_{b'} - \alpha_a = \left[X_B - \alpha_a + \frac{A_a^2 \cdot \sin V_{BC}}{D_c \sin (V_{BC} - V_c)} \right] \frac{R_c \sin 1''}{R_B \sin S_{0(bc)}} dS_{BC} \\ \quad + \frac{A_a \sin V_{BC}}{D_c \sin (V_{BC} - V_c)} dA, \\ y_{b'} - \beta_a = \left[Y_B - \beta_a - \frac{A_a^2 \cdot \cos V_{BC}}{D_c \sin (V_{BC} - V_c)} \right] \frac{R_c \sin 1''}{R_B \sin S_{0(bc)}} dS_{BC} \\ \quad - \frac{A_a \cos V_{BC}}{D_c \sin (V_{BC} - V_c)} dA. \end{array} \right\} \\ \\ \left. \begin{array}{l} \text{De même, on aurait pour } c' : \\ \\ x_{c'} - \alpha_a = \left[X_c - \alpha_a + \frac{A_a^2 \sin V_{BC}}{D_c \sin (V_{BC} - V_c)} \right] \frac{R_B \sin 1''}{R_c \sin S_{0(bc)}} dS_{BC} \\ \quad + \frac{A_a \sin V_{BC}}{D_c \sin (V_{BC} - V_c)} dA, \\ y_{c'} - \beta_a = \left[Y_c - \beta_a - \frac{A_a^2 \cos V_{BC}}{D_c \sin (V_{BC} - V_c)} \right] \frac{R_B \sin 1''}{R_c \sin S_{0(bc)}} dS_{BC} \\ \quad - \frac{A_a \cos V_{BC}}{D_c \sin (V_{BC} - V_c)} dA. \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

Ces coordonnées définissent, dans le plan P, la droite Δ_{BC} , trace du segment capable correspondant aux repères BC du terrain.

En posant :

$$F_b = X_B - \alpha_a + \frac{A_a^2 \cdot \sin V_{BC}}{D_c \cdot \sin (V_{BC} - V_c)}, \quad F_c = X_c - \alpha_a + \frac{A_a^2 \cdot \sin V_{BC}}{D_c \sin (V_{BC} - V_c)},$$

$$G_b = Y_B - \beta_a - \frac{A_a^2 \cdot \cos V_{BC}}{D_c \cdot \sin (V_{BC} - V_c)}, \quad G_c = Y_c - \beta_a - \frac{A_a^2 \cdot \cos V_{BC}}{D_c \cdot \sin (V_{BC} - V_c)},$$

$$\begin{aligned}
 L_b &= F_b \cdot \frac{R_C \sin 1''}{R_B \sin S_{0(bc)}}, & L_c &= F_c \cdot \frac{R_B \sin 1''}{R_C \sin S_{0(bc)}}, \\
 N_b &= G_b \cdot \frac{R_C \sin 1''}{R_B \sin S_{0(bc)}}, & N_c &= G_c \cdot \frac{R_B \sin 1''}{R_C \sin S_{0(bc)}}, \\
 M_b = M_c &= \frac{A_a \cdot \sin V_{BC}}{D_c \cdot \sin(V_{BC} - V_c)}, & P_b = P_c &= \frac{-A_a \cdot \cos V_{BC}}{D_c \cdot \sin(V_{BC} - V_c)}.
 \end{aligned}$$

On peut écrire finalement :

$$(12') \quad \left\{ \begin{array}{l} b' \left\{ \begin{array}{l} x_{b'} - \alpha_a = L_b dS_{BC} + M_b dA, \\ y_{b'} - \beta_a = N_b dS_{BC} + P_b dA. \end{array} \right. \\ c' \left\{ \begin{array}{l} x_{c'} - \alpha_a = L_c dS_{BC} + M_c dA, \\ y_{c'} - \beta_a = N_c dS_{BC} + P_c dA. \end{array} \right. \\ b' \left\{ \begin{array}{l} Z_{b'} - A_a = dA. \end{array} \right. \\ c' \left\{ \begin{array}{l} Z_{c'} - A_a = dA. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

REMARQUE. — Si dS_{bc} est petit, b est proche de c , mais en multipliant $(x_b - x_c)$ et $(y_b - y_c)$ par un coefficient on peut toujours tracer la droite Δ_{bc} ; on porte le point c et on utilise les paramètres directeurs.

Considérons maintenant ce qui se passe avec un plan P' de cote $A'' = A_a + dA'$, ne différant de A' que d'un nombre m de mètres. Nous obtiendrons deux autres points b'' et c'' dont, d'après les formules (12'), les coordonnées différeront des coordonnées de b et c pour chacun des points de :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} m M_b \text{ pour } x, \\ m P_b \text{ pour } y, \\ m \text{ pour } z \end{array} \right.$$

(puisque F, G, L, N, M, P sont indépendants de dA).

Le calcul de b'' et de c'' est donc particulièrement simple.

En conclusion, nous dessinerons sur un graphique (au 1/200 par exemple) les droites Δ'_{bc} et Δ''_{bc} . Puis, considérant un autre segment capable, d'un autre angle $S_{(cd)}$ ayant fait l'objet des mêmes calculs précédents, nous porterons $\Delta'_{c'd'}$ et $\Delta''_{c'd'}$. Les graphiques relatifs aux plans P et P' sont homothétiques, et au deuxième ordre près, le centre d'homothétie est le point vrai S cherché.

En effet (v. fig. 6), le point vrai S , qui est le point d'intersection commun des tores engendrés par les segments capables, peut être considéré comme le point d'intersection des plans tangents aux tores et par conséquent comme le point commun aux droites d'intersection des plans tangents pris deux à deux.

Une droite $\Delta'_{b'c'}$ représente l'intersection du plan tangent $\Pi_{(bc)}$ au tore capable de $S_{0_{(BC)}}$ sur BC, avec le plan P. Une droite $\Delta'_{(c'd')}$ représente l'intersection du plan $\Pi_{(cd)}$ avec le même plan P. Le point commun J' est sur la droite d'intersection de $\Pi_{(b'c')}$ et de $\Pi_{(c'd')}$. Le point J'' est de même la projection d'un point de cette droite commune à $\Pi_{(c'b')}$ et $\Pi_{(c'd')}$. Donc $J'J''$ est l'un des lieux du point S.

Si l'on superpose les plans PP' sur le même graphique, le point S sera donc le « point moyen d'intersection » des droites $J'J''$ joignant les points homologues des deux graphiques (Δ') (Δ'') .

Il suffit alors de mesurer sur le graphique la correction $d\alpha_a$ et $d\beta_a$ à appliquer à α_a et à β_a pour avoir α et β , coordonnées de S.

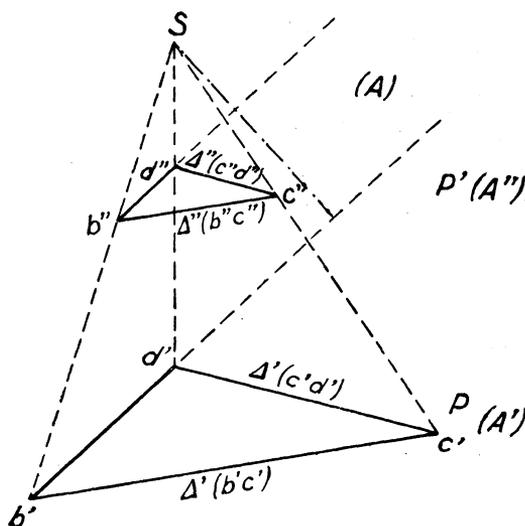


Fig. 6

On calculera ensuite la correction dA_a d'altitude à apporter à A_a pour avoir l'altitude A, en considérant sur ce graphique les distances λ' et λ'' de S à une droite Δ' et à son homologue Δ'' .

On a évidemment :

$$\frac{A - A'}{\lambda'} = \frac{A - A''}{\lambda''} = \frac{A'' - A'}{\lambda' - \lambda''},$$

d'où

$$A = A' + (A'' - A') \frac{\lambda'}{\lambda' - \lambda''}.$$

On disposera d'autant de valeurs qu'il y a de couples $\Delta' \Delta''$.

Si le point S_a est insuffisamment approché, il sera nécessaire d'effectuer une deuxième approximation par le calcul ; mais si α_a , β_a , A_a ont été obtenus à l'aide d'un appareil de redressement, la deuxième approximation est pratiquement inutile.

B. — CALCUL DES AUTRES ÉLÉMENTS DE LA PRISE DE VUE : θ ET i

Le calcul des éléments θ et i de la prise de vue :

θ = gisement de la projection de l'axe optique sur le plan H_0 ;

i = inclinaison de la ligne de plus grande pente du cliché, ou angle de l'axe optique avec la verticale NS,

peut être considéré comme se résumant à la détermination des coordonnées xy du point Ω , trace de l'axe optique ωS sur le plan de référence $z = 0$.

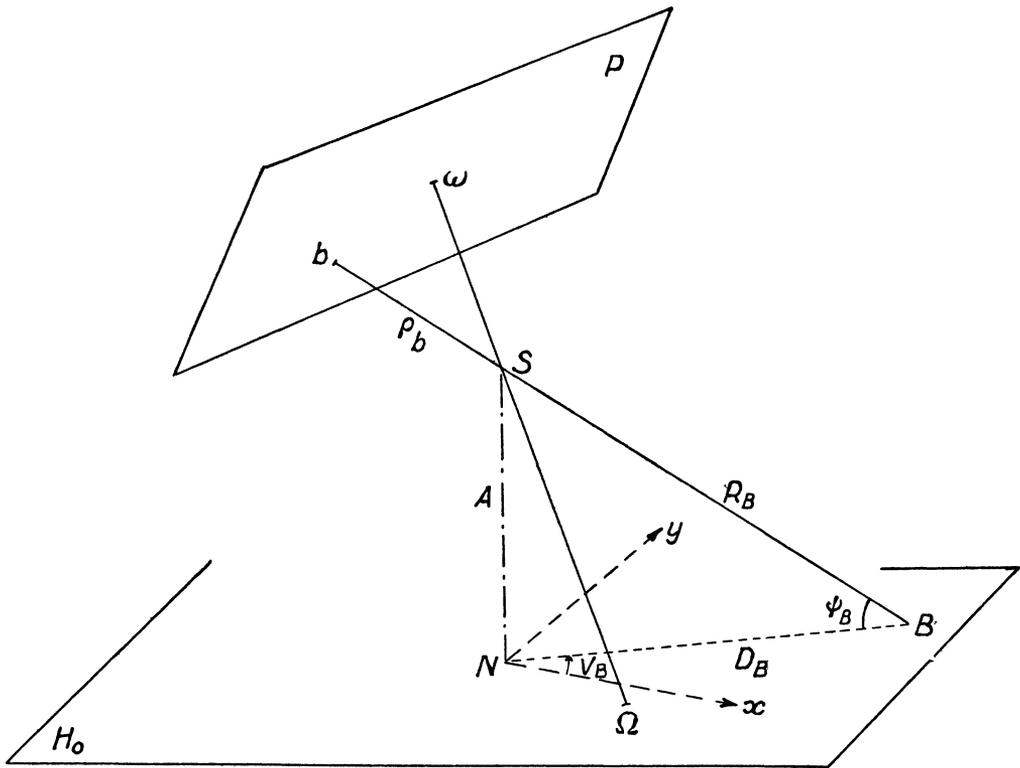


Fig. 7

Ce calcul pourrait être effectué *directement*.

En effet, en partant des coordonnées définitives du point S ($\alpha \beta A$), on peut recalculer les longueurs vraies $D_B R_B$ et les angles vrais $V_B \psi_B$.

Les longueurs ρ_b du polyèdre perspectif $Sbcd\dots$ ayant déjà été calculées (formules 1 et 2), les coordonnées $X_b Y_b Z_b$ du point b dans l'espace sont données par :

$$\frac{X_b - \alpha}{X_B - \alpha} = \frac{Y_b - \beta}{Y_B - \beta} = \frac{Z_b - A}{-A} = \frac{\rho_b}{R_B}.$$

On peut donc établir l'équation du plan P (*trois points nécessaires*) et en déduire :

- 1° Les équations de S ω ;
- 2° Les coordonnées xy de Ω ;
- 3° Les angles θ et i .

Je vais montrer qu'on obtient plus rapidement les mêmes résultats, en effectuant quelques *calculs différentiels* simples à partir du point approché Ω_a , dont les coordonnées sont connues dès qu'on connaît les valeurs approchées de θ et i : θ_a et i_a . En prenant N comme origine de coordonnées, on a en effet :

$$\begin{cases} X_a = A \cdot \operatorname{tg} i_a \cdot \cos \theta_a, \\ Y_a = A \cdot \operatorname{tg} i_a \cdot \sin \theta_a. \end{cases}$$

Divers procédés sont possibles.

a) Procédé analytique.

Considérons un repère B (X_B Y_B O), son image b sur le cliché P, et soit φ_b l'angle observé ω Sb du polyèdre perspectif. Si les coordonnées dans le plan H_0 sont rapportées au système d'axes NxyS, on a, en appelant xy les coordonnées du point Ω :

$$(14) \quad \begin{cases} SB = R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + A^2}, \\ S\Omega = \frac{A}{\cos i} = \sqrt{x^2 + y^2 + A^2}. \end{cases}$$

Or les cosinus directeurs de SB et S Ω sont respectivement :

$$\frac{X_B}{R_B}, \quad \frac{Y_B}{R_B}, \quad \frac{-A}{R_B}$$

et

$$\frac{x}{A}, \quad \frac{y}{A}, \quad \frac{-A}{A \cos i},$$

$$\cos \varphi_b = \frac{xX_B + yY_B + A^2}{R_B \frac{A}{\cos i}}.$$

L'angle φ_b étant connu, la droite S Ω engendre un cône de révolution d'axe SB, dont la trace sur le plan $z = 0$, lieu géométrique du point Ω , a pour équation :

$$(15) \quad F(xy) \equiv R_B^2 \cdot \cos^2 \varphi_b (x^2 + y^2 + A^2) - (xX_B + yY_B + A^2)^2 = 0.$$

Soient alors $\Omega_a (x_a y_a)$ la position approchée du point Ω , et $\Omega' (x' y')$ un point de la conique situé dans le plan vertical $SN\Omega_a$: nous l'appellerons le *point rapproché* ou *point déterminatif* (v. fig. 8).

Il est facile de calculer les coordonnées $x' y'$. Posons :

$$\begin{cases} x' = x_a + dx, \\ y' = y_a + dy. \end{cases}$$

En différentiant l'équation (15) et en négligeant les termes d'ordre 2, il vient :

$$(16) \quad F(x_a y_a) + dx F'_{x_a} + dy F'_{y_a} = 0.$$

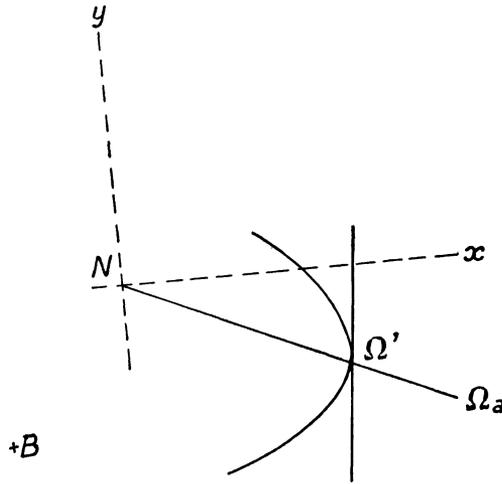


Fig. 8

La droite $N\Omega_a$ donne, d'autre part :

$$(17) \quad \frac{x_a + dx}{x_a} = \frac{y_a + dy}{y_a} = 1 + t,$$

et la valeur seule convenable pour t est donnée par :

$$(18) \quad F(x_a y_a) + t(x_a F'_{x_a} + y_a F'_{y_a}) = 0.$$

On a d'ailleurs :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x_a y_a) \equiv R_B^2 \cdot \cos^2 \varphi_b \cdot (x_a^2 + y_a^2 + A^2) - (x_a X_B + y_a Y_B + A^2)^2, \\ F'_{x_a} \equiv 2 x_a R_B^2 \cdot \cos^2 \varphi_b - 2 X_B (x_a X_B + y_a Y_B + A^2), \\ F'_{y_a} \equiv 2 y_a R_B^2 \cdot \cos^2 \varphi_b - 2 Y_B (x_a X_B + y_a Y_B + A^2), \\ x_a F'_{x_a} + y_a F'_{y_a} \equiv 2 R_B^2 \cdot \cos^2 \varphi_b (x_a^2 + y_a^2) \\ \quad - 2 (x_a X_B + y_a Y_B) (x_a X_B + y_a Y_B + A^2). \end{array} \right.$$

La détermination de t peut être obtenue facilement au moyen du calcul de cinq facteurs simples.

On remarque que $F(x_a y_a)$ est une quantité du premier ordre de petitesse, Ω_a étant situé par hypothèse près de la conique.

On a alors, pour le *point déterminatif* Ω' :

$$(20) \quad \begin{cases} x' = x_a + tx_a, \\ y' = y_a + ty_a. \end{cases}$$

Il reste à déterminer la *tangente* au lieu géométrique de Ω au point Ω' . Elle a évidemment pour équation :

$$(X - x') F'_{x'} + (Y - y') F'_y = 0.$$

Son coefficient angulaire est donc $-\frac{F'_{x'}}{F'_y}$, ou encore, puisque les points $\Omega_a \Omega'$ sont très voisins : $-\frac{F'_{x_a}}{F'_{y_a}}$.

Le problème est résolu : à chaque repère B correspond un lieu géométrique de Ω , droite de position Δ' . Il suffit alors de construire, à une échelle convenable, toutes les droites analogues, et d'en prendre le point moyen (compensation de calcul ou graphique).

La méthode est rigoureusement analogue à celle des *droites de hauteur* en astronomie et en navigation.

b) Procédé géométrique.

On peut aussi conduire le calcul différentiel en considérant l'*angle vrai* du cône relatif au repère B, φ_b , et l'*angle approché* φ'_b , déduit de la position Ω_a (v. *fig. 9*).

Dans la région voisine de Ω_a , les traces de ces deux cônes sur le plan $z = 0$ sont parallèles, et il suffit d'en calculer :

1° Le coefficient angulaire;

2° La distance δ comptée par exemple sur $B\Omega_a$, et fonction simple de la différence $d\varphi = \varphi_b - \varphi'_b$.

Le plan tangent au cône capable de l'angle φ'_b passe par S, par Ω_a , et est perpendiculaire au plan $SB\Omega_a$. Or ce dernier a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z - A \\ x_a & y_a & -A \\ X_B & Y_B & -A \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$XA(Y_B - y_a) - YA(X_B - x_a) + (Z - A)(x_a Y_B - y_a X_B) = 0.$$

Le plan tangent au cône le long de l'arête $S\Omega_a$ est donc défini par :

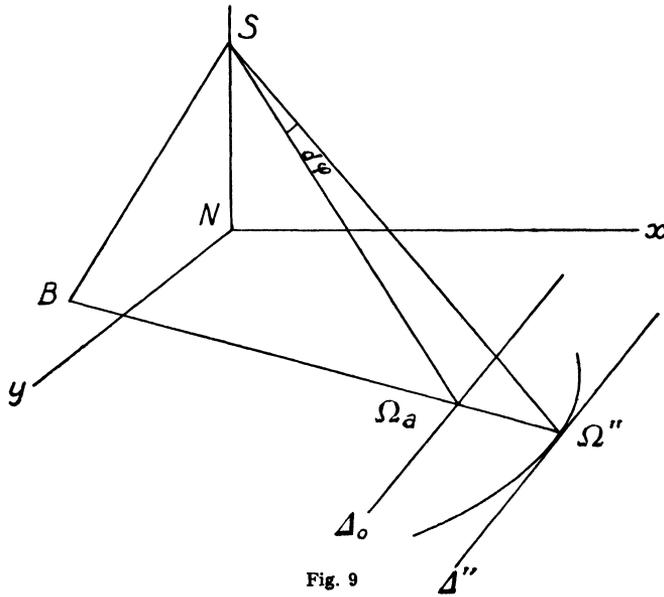
$$\rho X + mY + n(Z - A) = 0,$$

$$\rho x_a + my_a - nA = 0,$$

$$\rho A (Y_B - y_a) - mA (X_B - x_a) + n (x_a Y_B - y_a X_B) = 0.$$

Son équation est donc :

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z - A \\ x_a & y_a & -A \\ A (Y_B - y_a) & -A (X_B - x_a) & x_a Y_B - y_a X_B \end{vmatrix} = 0.$$



Par suite, la droite Δ_0 , trace de ce plan tangent sur $Z = 0$, a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X & Y & -A \\ x_a & y_a & -A \\ A (Y_B - y_a) & -A (X_B - x_a) & x_a Y_B - y_a X_B \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore :

$$\begin{vmatrix} X - x_a & Y - y_a & 0 \\ x_a & y_a & -A \\ A (Y_B - y_a) & -A (X_B - x_a) & x_a Y_B - y_a X_B \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(21) \quad (X - x_a) [y_a (x_a Y_B - y_a X_B) - A^2 (X_B - x_a)] \\ = (Y - y_a) [x_a (x_a Y_B - y_a X_B) + A^2 (Y_B - y_a)].$$

Le coefficient angulaire de Δ_0 et Δ'' est donc :

$$(22) \quad K = \frac{y_a (x_a Y_B - y_a X_B) - A^2 (X_B - x_a)}{x_a (x_a Y_B - y_a X_B) + A^2 (Y_B - y_a)}.$$

D'autre part, dans le triangle $S\Omega_a\Omega''$:

$$(23) \quad \frac{\delta}{d \varphi \sin 1''} = \frac{S\Omega_a}{\sin S\Omega''B},$$

ou (en négligeant les infiniment petits d'ordre 2) :

$$= \frac{S\Omega_a}{\sin S\Omega_aB}.$$

Or

$$\overline{S\Omega_a}^2 = D^2 = x_a^2 + y_a^2 + A^2.$$

D'autre part, en appelant D_0 la longueur $\overline{\Omega_aB}$, on a :

$$D_0^2 = (X_B - x_a)^2 + (Y_B - y_a)^2,$$

et les cosinus directeurs de Ω_aS et de Ω_aB sont :

$$\frac{x_a}{D}, \quad \frac{y_a}{D}, \quad \frac{-A}{D} \quad \text{et} \quad \frac{X_B - x_a}{D_0}, \quad \frac{Y_B - y_a}{D_0} \quad \text{et} \quad 0.$$

On a donc :

$$\sin^2 \widehat{S\Omega_aB} = \frac{[y_a (X_B - x_a) - x_a (Y_B - y_a)]^2 + A^2 D_0^2}{D^2 \cdot D_0^2}, \\ = \frac{(y_a X_B - x_a Y_B)^2 + A^2 \cdot D_0^2}{D^2 \cdot D_0^2}.$$

D'où la valeur de δ .

A chaque repère B correspond donc un lieu géométrique du point Ω , droite Δ'' , de coefficient angulaire K, et passant, sur la droite $B\Omega_a$, à la distance :

$$\delta = d \varphi \sin 1'' \frac{D}{\sin S\Omega_aB}.$$

La suite du calcul et du graphique est la même qu'au paragraphe a).

Calcul de i et de θ .

Les coordonnées $x'y'$ du point Ω vrai étant calculées, on a :

$$S\Omega = \frac{A}{\cos i} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + A^2}.$$

D'où la valeur de i .

D'autre part, la droite $N\Omega$ a pour équation :

$$\frac{X}{x'} = \frac{Y}{y'}.$$

Le coefficient angulaire de cette droite donne donc :

$$\text{tg } \theta = \frac{y'}{x'}.$$

Le problème est complètement résolu.

C. — CALCUL DE L'ANGLE μ , ORIENTATION DU CLICHÉ DANS SON PLAN

Considérons un système d'axes rectangulaires $x' \omega y'$, $\omega x'$ étant l'horizontale du cliché, décalé d'un angle μ du système de référence $x \omega y$.

Nous calculerons d'abord les coordonnées de ω et de b par rapport aux axes $NXYZ$ (*fig.* 10). Puis nous écrirons l'équation de la droite horizontale $\omega x'$ et nous calculerons sa distance au point b qui n'est autre que y' . Nous en sortirons ψ qui, comparé à φ (angle du rayon ωb avec l'axe des x de la plaque, primitivement mesuré), nous donnera μ . Nous aurons donc autant de déterminations de μ que nous aurons de points b . Les écarts de μ trouvés seront fonction de l'imprécision des mesures primitives sur le cliché et enfin des erreurs de calculs faites jusqu'alors. De toutes façons, ils donneront de précieuses indications sur la précision finale des résultats obtenus.

Coordonnées de ω .

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{\omega} = -f \cdot \sin i \cdot \cos \theta, \\ Y_{\omega} = -f \cdot \sin i \cdot \sin \theta, \\ Z_{\omega} = A + f \cdot \cos i. \end{array} \right.$$

Etant entendu que les angles θ sont pris dans le sens direct à partir de NX et que l'origine des axes est en N .

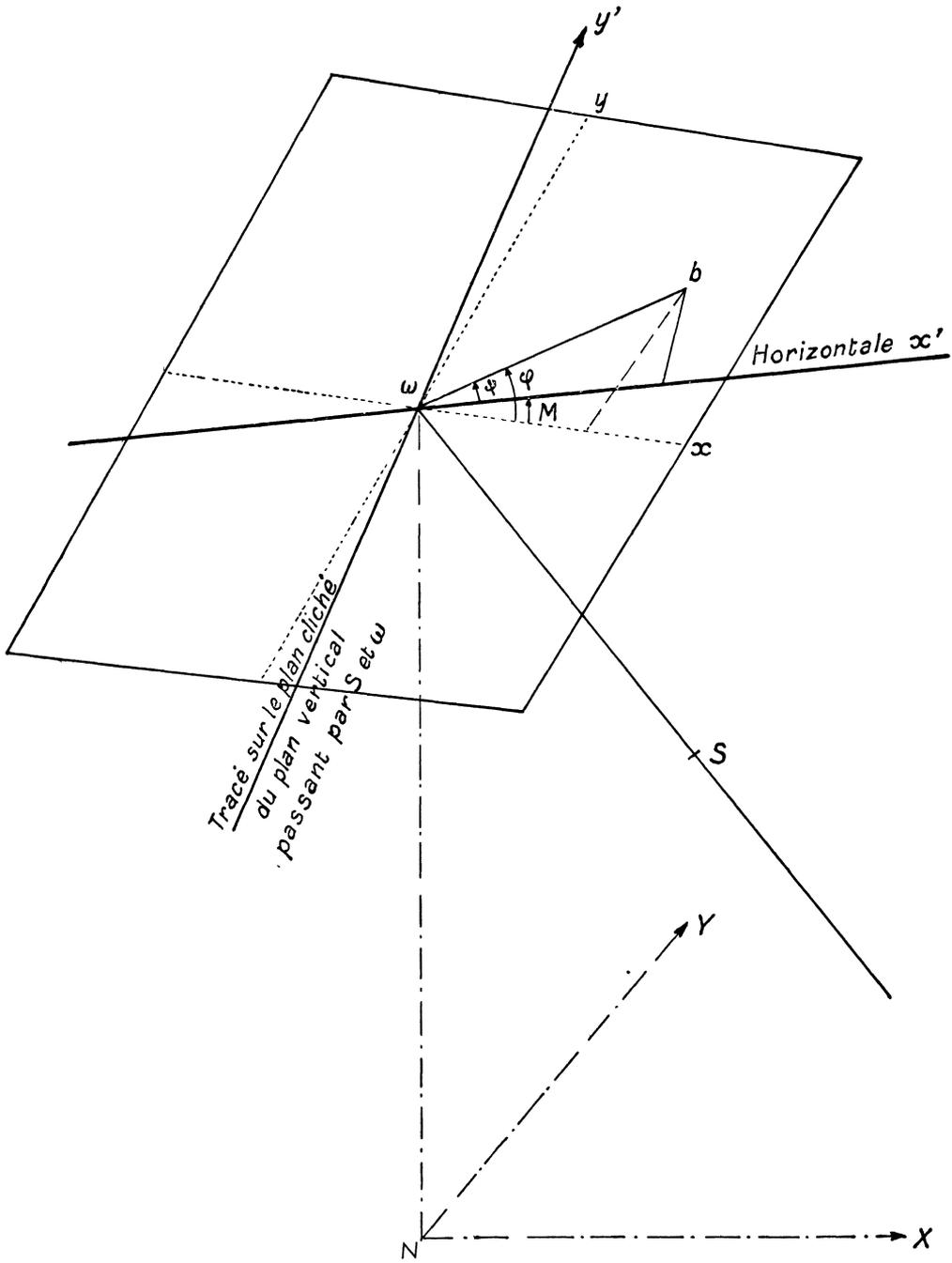


Fig. 10

Coordonnées de b .

Calculons l'angle $\widehat{BSN} = i_B$ (voir fig. 7) :

$$(25) \quad \cos i_B = \frac{A}{\pm \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + A^2}}.$$

Calculons le gisement de NB :

$$\sin V_B = \frac{Y_B}{\pm \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}} \quad \text{et} \quad \cos V_B = \frac{X_B}{\pm \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}}.$$

Nous avons, d'autre part :

$$\overline{Sb} = \frac{f}{\cos \widehat{bS\omega}},$$

d'où les coordonnées de b :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_b = -\overline{Sb} \cdot \sin i_B \cdot \cos V_B = -f \cdot \frac{\sin i_B \cos V_B}{\cos \widehat{bS\omega}}, \\ Y_b = -\overline{Sb} \cdot \sin i_B \sin V_B = -f \cdot \frac{\sin i_B \sin V_B}{\cos \widehat{bS\omega}}, \\ Z_b = A + \overline{Sb} \cdot \cos i_B = A + f \cdot \frac{\cos i_B}{\cos \widehat{bS\omega}}. \end{array} \right.$$

Equation de $\omega x'$.

C'est une horizontale $Z = A + f \cdot \cos i$:

$$\frac{X - X_\omega}{\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{Y - Y_\omega}{\sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)},$$

y'_b est la distance de b à $\omega x'$.

Je pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha' = X_\omega - X_b, \\ \beta' = Y_\omega - Y_b, \\ \gamma' = Z_\omega - Z_b, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \\ b = \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \end{array} \right.$$

mais

$$y'_b{}^2 = \frac{(b\gamma')^2 + (a\gamma')^2 + (a\beta' - b\alpha')^2}{a^2 + b^2} = \gamma'^2 + \frac{(a\beta' - b\alpha')^2}{a^2 + b^2},$$

ou bien :

$$y'_b{}^2 = \gamma'^2 + (a\beta' - b\alpha')^2.$$

Calcul de la distance $b \omega$.

$$b \omega = \sqrt{(X_b - X_\omega)^2 + (Y_b - Y_\omega)^2 + (Z_b - Z_\omega)^2}.$$

Calcul de ψ .

$$\sin \psi = \frac{y'}{b \omega}.$$

Calcul de φ .

$$\sin \varphi = \frac{y}{b \omega},$$

y étant l'ordonnée sur le cliché, mesurée à l'origine de tout calcul.

Calcul de μ .

D'où

$$\mu = \varphi - \psi,$$

μ étant compté positivement dans le sens de ωx vers ωy .

II. — PRÉCISION DES RÉSULTATS

Les instruments actuels permettent de mesurer soit les angles S à $20''$ près, soit les coordonnées x et y sur les plaques à $1/100$ mm près.

Il y a trois sources essentielles d'erreurs dans la mesure de l'angle S .

La première dépend du pouvoir de résolution des émulsions utilisées : c'est la première difficulté pour une telle exploitation d'un cliché aérien.

Nous distinguerons dans cette étude :

1° L'état actuel normal de l'émulsion photographique courante pour cliché aérien, dont le pouvoir de résolution est de l'ordre de $1/20$ mm, ce qui rend illusoire la précision de mesure du $1/100$;

2° La finesse idéale vers laquelle on tend de plus en plus : $1/100$ mm (celle même des clichés de photogrammétrie terrestre);

3° Puis nous envisagerons la très importante répercussion, sur la présente méthode, d'une communication récente (20 décembre 1937) faite à la Section Laussedat de la Société Française de Photographie par M. André CHARRIOU et M^{lle} Suzanne VALETTE, relativement au pouvoir de résolution des émulsions négatives. D'après cette communication, le $1/20$ mm, qui est jusqu'alors la finesse moyenne des émulsions utilisées « industriellement » en photographie aérienne, peut être, grâce à certaines précautions et à certaines formules de révélateurs, portée aux valeurs suivantes :

a) Émulsions *orthochromatiques* : $1/40$ à $1/50$ mm avec des révélateurs normaux; $1/50$ à $1/60$ mm avec des révélateurs spéciaux;

b) Émulsions *panchromatiques* : $1/32$ à $1/40$ mm avec des révélateurs normaux; $1/50$ mm avec des révélateurs spéciaux;

c) Émulsions sensibles à l'*infra-rouge* : $1/25$ mm avec des révélateurs normaux; $1/32$ mm avec des révélateurs spéciaux.

Nous laisserons de côté les émulsions sensibles à l'infra-rouge qui, jusqu'à présent du moins, ont des applications spéciales étrangères au problème cartographique courant.

Les résultats indiqués aux paragraphes a) et b), qui résultent d'expériences nombreuses, sont des *moyennes*, et l'on peut compter dès *maintenant* que le pouvoir résolvant des émulsions peut être porté à $1/60$ mm, sous réserve de faibles modifications dans le traitement en laboratoire des plaques ou pellicules. Nous verrons, à la fin du présent chapitre, que cette possibilité rend dès maintenant applicable la méthode, objet du présent travail, avec un gain important de précision sur les méthodes actuellement en usage.

La seconde erreur dans le calcul de l'angle S provient de la précision même des points de repère de redressement déterminés au sol en xyz , par les procédés normaux de la géodésie et de la topométrie.

Nous admettrons, par exemple, que le rayon d'indécision planimétrique d'un point est de l'ordre de 0,2 m. C'est d'ailleurs un résultat qui demande déjà de grandes précautions opératoires.

La troisième erreur correspond à l'approximation de la valeur de la focale f et à ses variations dues à la distorsion.

A. — CAS NORMAL ACTUEL AVEC LES PROCÉDÉS INDUSTRIELS COURANTS POUR LE TRAITEMENT DES ÉMULSIONS

a) Mesure de l'angle S.

Prenons d'abord l'exemple d'un cliché obtenu sur plaque avec une chambre 13×18 , focale de 0,20 m. Admettons schématiquement que l'image des repères sur la plaque constitue un carré de 11 cm de côté.

Si l'on élimine les angles sous-tendus par les diagonales du carré, les angles S ont pour valeur :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} S = \frac{525}{2.077} = 0,25, \quad \text{d'où} \quad S = 31,52 \text{ gr.}$$

Prenons ensuite un exemple de cliché obtenu avec un appareil de focale 0,50 m, sur plaque 18×24 et avec des repères formant un carré de 16 cm de côté; on a :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} S = \frac{80}{500} = 0,16, \quad \text{d'où} \quad S = 20,20 \text{ gr.}$$

α) Evaluons l'erreur sur l'angle S :

$$d \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} S = \frac{dS \cdot \sin \frac{1''}{S}}{2 \cos^2 \frac{S}{2}}.$$

Par ailleurs, si l'on estime les positions des points du cliché à 1/20 mm (loupe, micromètre ou comparateur simple), la base d sous-tendant l'angle S est connue à la précision suivante (*fig. 1*) :

$$d \cdot d = \frac{1}{20} \sqrt{2} \text{ mm};$$

la demi-base sous-tendant $\frac{S}{2}$ a donc la précision de :

$$d \cdot \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \sqrt{2} \text{ mm},$$

d'où une autre évaluation approximative de l'erreur sur la $\text{tg } \frac{1}{2}$ de S :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} \sqrt{2} \frac{1}{200},$$

dans le premier cas envisagé ($f = 0,20$ m).

On posera donc :

$$\frac{dS \cdot \sin 1''}{2 \cos^2 \frac{1}{2} S} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 20 \times 200} = \frac{\sqrt{2}}{8.000},$$

d'où

$$dS = \frac{\sqrt{2}}{8.000} \cdot \frac{2 \cos^2 15,75 \text{ gr}}{\sin 1''} = \underline{211''}.$$

Dans le deuxième cas envisagé, pour un format 18×24 et une focale de 50 cm, avec des repères en carré distants sur la plaque de 16 cm, on aurait :

$$dS = \underline{86''}.$$

β) Evaluons l'erreur sur S' , angle calculé d'après les éléments du terrain; les repères pouvant être entachés d'une erreur de 0,20 m (soit 1/10 mm sur un plan au 1/2 000), considérons, pour un cliché, à peu près horizontal, les deux cas déjà envisagés :

1° Pour un plan au 1/5 000 exécuté avec des vues prises à 2.000 mètres d'altitude avec une focale de 20 cm, des repères au terrain distants d'environ 1,100 km, avec SN égal à 2,150 km environ :

$$\text{tg } \frac{1}{2} S' = \frac{550}{2.150} \quad \text{soit} \quad S' = 31,90 \text{ gr};$$

l'erreur sur $\text{tg } \frac{1}{2} S'$ est alors :

$$d \cdot \text{tg } \frac{1}{2} S' = \frac{dS' \cdot \sin 1''}{2 \cos^2 \frac{1}{2} S'} = \frac{0,20 \sqrt{2}}{2 \times 2.150},$$

d'où

$$dS' = \frac{0,20 \sqrt{2}}{2 \times 2.150} \cdot \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} S'}{\sin 1''} = \underline{79''}.$$

2° Pour un plan au 1/2 000 établi avec des vues prises à 2.400 mètres d'altitude avec une focale de 0,50 m, des repères distants sur le terrain d'environ 800 mètres, avec SN valant environ 2.500 mètres, on trouve :

$$\text{tg } \frac{1}{2} S' = \frac{400}{2.500} \quad \text{soit} \quad S' = 20,20 \text{ gr},$$

et

$$dS' = \frac{0,20 \sqrt{2}}{2 \times 2.500} \cdot \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} S'}{\sin 1''} = \underline{70''}.$$

γ) Enfin la troisième source d'erreur est l'imprécision de la connaissance de la focale que l'on peut estimer à 0,2 mm en raison de la distorsion.

Dans le premier exemple considéré, nous avons :

$$f = 55 \cotg \frac{1}{2} S \quad \text{avec} \quad \cotg \frac{1}{2} S = \frac{2,077}{525} = 3,95619,$$

puis

$$\frac{df}{55} = \frac{0,2}{55} = \frac{-dS \cdot \sin 1''}{2 \sin^2 \frac{1}{2} S},$$

$$|dS| = \frac{0,2 \times 2 \sin^2 \frac{1}{2} S}{55 \sin 1''} = \underline{278''}.$$

Dans le deuxième exemple nous avons :

$$f = 80 \cotg \frac{1}{2} S \quad \text{puis} \quad \frac{df}{80} = \frac{0,2}{80} = \frac{-dS \sin 1''}{2 \sin^2 \frac{1}{2} S},$$

d'où

$$|dS| = \frac{0,2 \times 2 \sin^2 \frac{1}{2} S}{80 \sin 1''} = 80'';$$

cette erreur est inversement proportionnelle à l'éloignement des points sur la plaque et proportionnelle au carré du sinus de l'angle sous-tendu par ces deux points, ce dernier facteur étant prépondérant.

δ) *Erreur totale résultante sur $dS = S - S'$.*

Dans le premier exemple considéré, l'erreur moyenne totale sera :

$$\epsilon = \sqrt{211^2 + 79^2 + 278^2} = \underline{358''}.$$

Dans le deuxième cas :

$$\epsilon = \sqrt{86^2 + 70^2 + 80^2} = 137''.$$

Les deux cas que nous venons d'analyser sont volontairement, l'un défavorable du point de vue précision, l'autre relativement favorable. Remarquons que l'erreur sur l'angle S (mesure sur la plaque) et l'erreur sur la focale croissent rapidement de façon inversement proportionnelle à f et sensiblement proportionnellement au carré du sinus du champ utile, cette dernière influence étant prépondérante, tandis que l'erreur sur S' , fonction de la précision du canevas topographique, est très faiblement influencée par les caractéristiques de la prise de vue.

Dans l'ensemble, on peut assurer que le système plaque-objectif fonctionne avec la précision d'un bon tachéomètre, c'est-à-dire donne les angles à 1 ou 3 centigrades près, voire même 4 centigrades dans les cas très défavorables.

Notons que pour les deux exemples pris, l'altitude était sensiblement la même.

Remarquons enfin que la surface réelle photographiée dans le premier cas était de 234 hectares, alors que dans le second elle n'était que de 99 hectares.

De tout ceci, nous dégagons la loi approximative suivante pour la définition des conditions de prise de vue : « Dans l'état actuel de la pratique industrielle de la fabrication des objectifs et des émulsions, dans les limites pratiques des formules de vol, et à une altitude donnée, l'erreur de mesure des angles S depuis le système cliché-objectif est directement proportionnelle à la surface couverte par le cliché ».

Et comme corollaire : « A surface couverte égale, l'erreur de S sera d'autant plus faible que f sera grand et le champ utile faible, et par conséquent, l'altitude grande (sous les réserves habituelles bien entendu : limites usuelles envisagées et état actuel des choses) ».

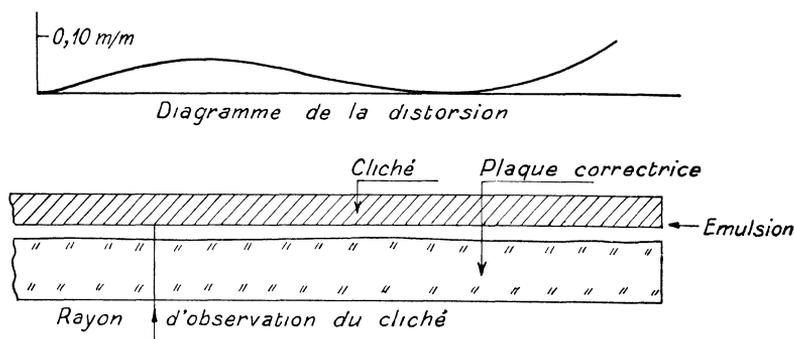


Fig. 11

La tendance actuelle outre-Rhin est néanmoins à l'objectif grand-champ, justifiée, dit-on, par une optique irréprochable. Nous ne discuterons pas sur les avantages réels que présente un cliché grand-champ, sur le résultat provenant d'appareils multichambres au point de vue de la pratique, de la simplification et de la diminution des risques d'incidents en vol, et du montant du capital investi dans ce matériel. Mais nous plaçant du point de vue topométrique, nous signalons le danger de la chambre grand-champ. D'ailleurs certain constructeur suisse a compris ce danger et, renonçant à corriger correctement ses objectifs grand-angulaires, juxtapose au cliché lui-même, dans l'autographe de restitution, une plaque correctrice des distorsions de l'objectif, au travers de laquelle le cliché est observé et apparaît dépourvu de cette distorsion. La fig. 11 représente cette très intéressante idée de réalisation susceptible, à notre sens, de provoquer de grosses répercussions sur les méthodes; mais aucun résultat pratique ne nous est connu en matière d'erreur résultante sur f , dans ce système.

Cette figure représente la courbe de distorsion : la distorsion est portée en ordonnée et les distances au point principal sont portées en abscisse. En dessous, est représentée la plaque de verre destinée à compenser cette distorsion.

Outre l'influence des erreurs analysées ci-dessus, l'image d'une chambre grand-champ présente des déformations dues à la perspective, et spécialement les déformations dues aux différences d'altitudes du terrain prennent de l'importance dans les zones marginales. Les angles morts qui résultent sont particulièrement redoutables dans les travaux mêmes où la photogrammétrie aérienne trouve sa pleine application : les plans de villes; en effet, les détails intérieurs des immeubles ne sont visibles que vers la verticale et la correction des dévers dus à la hauteur des constructions augmente dangereusement avec l'obliquité de la vision.

C'est pourquoi nous pensons que l'augmentation du rendement de la photogrammétrie aérienne doit être recherchée dans l'augmentation du coefficient d'agrandissement beaucoup plus que dans l'augmentation du champ. En d'autres termes : augmenter l'altitude, mais ne pas réduire les distances focales.

On peut objecter à cette conclusion que, si la plupart des difficultés des vols en haute altitude ont été résolues, il n'en est pas moins certain que le nombre des jours permettant de photographier en haute altitude décroît lorsque l'altitude croît. Cet argument est réel pour la France métropolitaine; il est inexistant pour une bonne partie de l'Empire français.

b) Précision résultante de α , β , A .

Evaluons la sensibilité d'un segment capable correspondant à l'erreur angulaire calculée.

Le déplacement différentiel sera, dans le cas du premier exemple considéré, avec $dS = 358''$:

$$p = \frac{2.150 \times 2.150 \times 358 \sin 1''}{1.100} = 2,40 \text{ m}$$

et, dans le cas du deuxième exemple, avec $dS = 137''$:

$$p = \frac{2.500 \times 2.500 \times 137 \sin 1''}{800} = 1,70 \text{ m.}$$

Considérons un cliché (*fig.* 12 et 13) avec ses quatre points de repères connus : 1, 2, 3, 4 et les tores engendrés par les angles 1-S-4, 4-S-3, 3-S-2, 1-S-2. Admettons S_a au point d'intersection des trois premiers tores et envisageons l'erreur résultante en α , β , A , de l'intersection de chacun d'eux avec le quatrième 1-S-2 qui a subi un déplacement différentiel d . Faisons simplement cette évaluation graphiquement en coupant par un plan P vertical $\lambda S \mu$. L'angle 1-S-2 est générateur d'un tore dont le plan tangent Π_4 a sa trace en M_3, M_1, M_2 distante de S_a de $\pm p$; l'angle 2-S-4, d'un tore dont le plan tangent Π_1 a sa trace en $S_a M_2$, de même que Π_3 , celui du tore 1-S-3. L'angle 4-S-3 est générateur du tore dont le plan tangent Π_2 a sa trace en $S_a M_1$.

Les *figures* 12 et 13 représentent les graphiques de ces intersections à une certaine échelle : la première est relative à l'exemple de prise de vue n° 1; la seconde, à l'exemple de prise de vue n° 2.

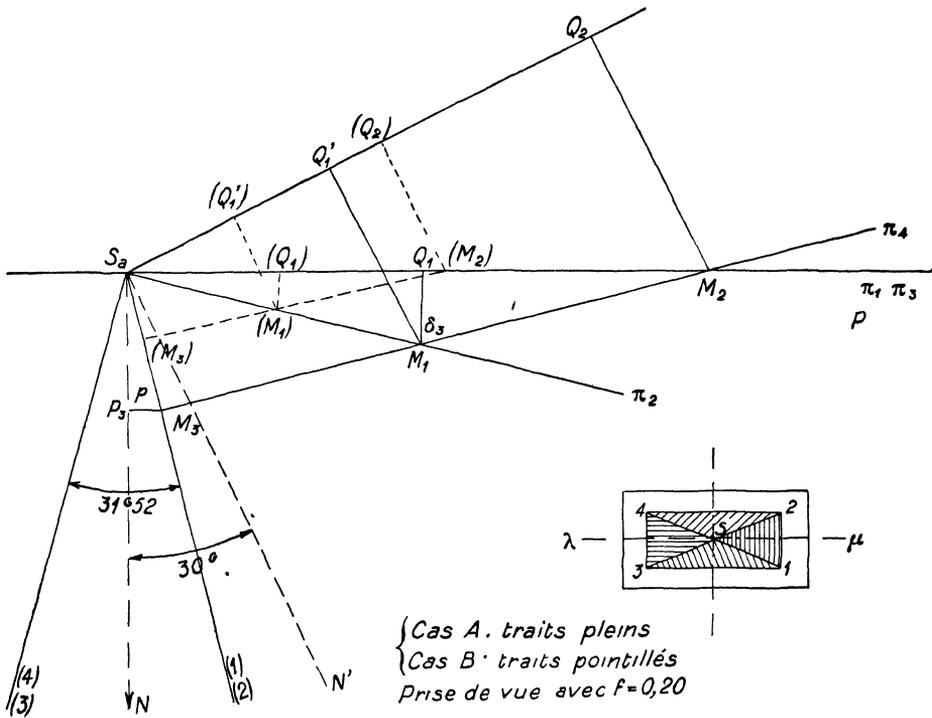


Fig. 12

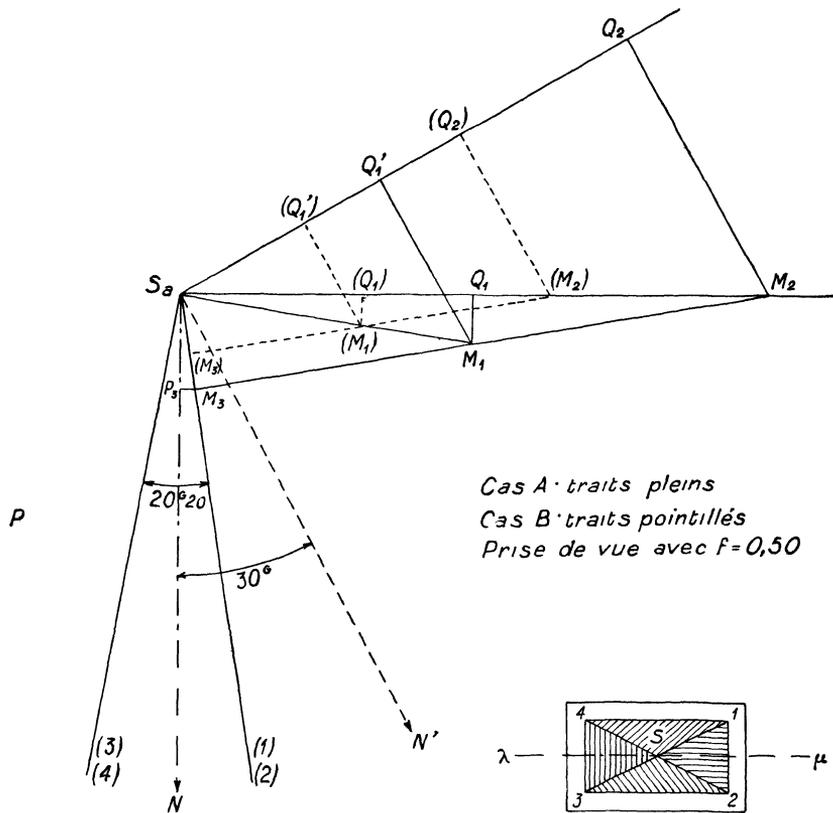


Fig 13

L'intersection de Π_2 et de Π_4 est une droite δ_3 de bout du plan P qui a sa trace en M_1 , et par conséquent la plus courte distance de ce lieu δ_3 à S_a est $S_a M_1$.

L'intersection de Π_4 avec Π_1 et Π_3 se fait en deux droites obliques se projetant sur la figure sur la trace du plan Π_4 et coupant le tableau P en M_2 : ce sont δ_1 et δ_2 . Les distances minima de ces deux lieux à S_a sont égales puisqu'il y a symétrie et chacune d'elles se trouve dans un plan perpendiculaire à Π_4 et a sa trace sur $S_a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: c'est $S_a M_3$. Ces distances ont, dans l'espace, pour valeur :

$$\sqrt{p^2 + \text{longueur équivalente à } \overline{M_3 M_2}^2}$$

(cette dernière longueur équivalente à $M_3 M_2$ étant une droite de bout à P en M_3) et ces distances sont donc équivalentes à $S_a M_2$.

En résumé, les distances de S_a aux trois lieux considérés sont : à δ_3 : $S_a M_1$; à δ_2 et δ_1 : longueur équivalente à $S_a M_2$.

Nous décomposerons ces deux vecteurs en deux composantes, suivant l'inclinaison de l'axe optique $S_a N$ sur la verticale : l'un sera l'erreur planimétrique sur S, l'autre son erreur d'altitude dA . Nous ferons cela pour deux positions : axe vertical et axe incliné à 30 grades sur la verticale, et cela pour les deux exemples considérés $p = 2,4$ et $p = 1,7$. Les graphiques des figures 12 et 13 nous fourniront le tableau suivant :

FORMULE DE VOL	AXE OPTIQUE VERTICAL				AXE OPTIQUE INCLINÉ A 30 gr			
	ERREUR DUE A δ_3		ERREUR DUE A δ_1 ET δ_2		ERREUR DUE A δ_3		ERREUR DUE A δ_1 OU δ_2	
	en plan	en alt.	en plan	en alt.	en plan	en alt.	en plan	en alt.
					max. si $S_a N'$ se déplace dans le plan P		max. si $S_a N'$ se déplace dans le plan $S_a M_3 \perp$ à P	
	$S_a Q_1$	$M_1 Q_1$	$\sqrt{P_3 M_1^2 + \overline{M_3 M_2}^2}$ $\neq S_a M_2$	$S_a P_3$ $= p$	$S_a Q'_1$	$M_1 Q'_1$	de l'ordre de $S_a Q_2$	de l'ordre de $M_2 Q_2$
Ex. n° 1 : $f = 0,20$ $A = 2\,000$ $p = 2,4$	5,10	1,30	10,20	2,40	4,00	3,50	9,10	4,50
Ex. n° 2 : $f = 0,50$ $A = 2\,400$ $p = 1,7$	5,10	0,80	10,20	1,70	4,00	3,30	8,90	5,00

Remarquons que le rayon moyen d'erreur de S dans l'espace est : $\frac{p}{\sqrt{3}}$ soit 1,40 m et 1 m dans les deux exemples choisis. D'autre part, jusqu'à présent nous avons considéré des erreurs moyennes, et si ε représente chacune des erreurs exprimées au tableau précédent, l'erreur maximum à redouter sur la position de S est : $\frac{\varepsilon \times 2}{\sqrt{3}}$ soit sensiblement ε .

Le tableau précédent représente donc des erreurs maxima sur la position de S.

Remarquons enfin que les deux solutions considérées donnent des résultats équivalents en α , β , A, ce qu'il était aisé de prévoir, puisque la précision du segment capable augmente avec la valeur de l'angle sous-tendu, si celui-ci est petit. Mais néanmoins, en vertu de la loi définie au paragraphe précédent au sujet de la précision de l'angle S lui-même, la différence de précision de ces deux exemples apparaît dans l'exploitation même du cliché c'est-à-dire lorsque l'on se sert du système cliché-objectif comme d'un théodolite faisant de l'intersection sur des points à restituer, chacune de ces visées étant alors entachée d'une erreur angulaire conforme à ladite loi.

CONCLUSION. — Dans les cas normaux, l'erreur maximum à craindre sur l'altitude de S varie de 0,80 m à 5,00 m; sur la position du pied de la verticale de S : de 4,00 m à 10,20 m.

c) **Précision de θ et i .**

Evaluons le rayon d'indécision de la détermination de Ω . Celui-ci est défini, dans le procédé géométrique, par l'intersection des droites Δ'' (fig. 9) et le rayon d'indécision cherché est de l'ordre de grandeur, dans les cas-types courants envisagés, de l'écart sur un segment Δ'' . Il est, en réalité, fonction : 1° de l'erreur sur δ et 2° de l'erreur sur le coefficient angulaire de Δ'' . Mais on peut considérer que si δ est un infiniment petit du premier ordre, l'erreur provenant du coefficient angulaire sur Δ'' est, dans les cas moyens, du deuxième ordre, et nous la négligerons dans l'évaluation de l'ordre de grandeur du rayon d'indécision.

Nous ramenons donc la question à l'évaluation de $d(\delta)$. Nous avons vu que

$$\delta = d\varphi \cdot \sin 1'' \frac{D}{\sin \widehat{S\Omega_a B}},$$

d'où nous tirons :

$$(27) \quad d(\delta) = \frac{d\varphi \sin 1''}{\sin \widehat{S\Omega_a B}} dD + \frac{D \cdot \sin 1''}{\sin \widehat{S\Omega_a B}} d(d\varphi) \\ - \frac{D \cdot d\varphi \sin 1'' \cos \widehat{S\Omega_a B}}{\sin^2 \widehat{S\Omega_a B}} d(\widehat{S\Omega_a B} \sin 1'').$$

Nous poserons $d\varphi = 0,37$ gr, soit sa valeur maximum égale à di obtenue à l'appareil de redressement.

Dans cette évaluation, on peut considérer $\delta(d\varphi)$ comme étant du même ordre que $\delta \cdot \widehat{S\Omega_a B}$; nous poserons : $\delta(d\varphi) \neq \delta \widehat{S\Omega_a B}$. Quant à $\delta(d\varphi)$, son maximum est

la somme de l'erreur de lecture sur le cliché, soit environ 70" et de l'erreur fonction de $\delta\alpha$, $\delta\beta$ et δA du point S, soit au total la même erreur que celle envisagée sur dS , c'est-à-dire :

Exemple n° 1

$$dS = 3'58''$$

Exemple n° 2

$$dS = 1'37''$$

Évaluons dD , nous avons :

$$D = \frac{A}{\sin \widehat{S\Omega_a B}},$$

d'où l'on tire :

$$dD = \frac{\sin \widehat{S\Omega_a B} \cdot dA + A \cdot \cos \widehat{S\Omega_a B} \cdot d(\widehat{S\Omega_a B} \sin 1'')}{\sin^2 \widehat{S\Omega_a B}}$$

qui, appliqué aux deux exemples, donne :

<p style="text-align: center;">avec $\alpha = 70$ gr :</p> $dD = \frac{0,89101 \times 4,5 + 2.000 \times 0,45399}{0,79390}$ $\times 358 \times 0,00000157 = 5,70 \text{ m}$		<p style="text-align: center;">avec $\alpha = 70$ gr :</p> $dD = \frac{0,89101 \times 5,00 + 2.400 \times 0,45399}{0,79390}$ $\times 137 \times 0,00000157 = 5,90 \text{ m}$
--	--	---

Avec $\widehat{S\Omega_a B} = 0$, nous aurions eu, bien entendu :

$$dD = 4,50 \text{ m}$$

|

$$dD = 5,00 \text{ m}$$

Dans cette évaluation de dD , nous avons envisagé le maximum de l'erreur, sa moyenne probable étant la moitié des chiffres ci-dessus.

Avec ces éléments, faisons le calcul de $d(\delta)$ dans les exemples envisagés avec $\widehat{S\Omega_a B} = 0$ et avec $\widehat{S\Omega_a B} = 30$ gr; les résultats sont exprimés dans le tableau suivant :

FORMULE DE VOL	AXE OPTIQUE VERTICAL		AXE OPTIQUE INCLINÉ A 30 gr	
	ERREUR DE $d(\delta)$ COMPRISE ENTRE :			
	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
Exemple n° 1...	1,13 m	1,15 m	1,44 m	1,46 m
Exemple n° 2...	0,52 m	0,55 m	0,67 m	0,70 m

Remarquons que notre loi de la proportionnalité de la précision de l'angle en S et des surfaces couvertes par les clichés est sensiblement vérifiée par la proportionnalité de la précision du pied de l'axe optique, comme de tout point intersecté au pseudo-théodolite cliché-objectif.

Notons enfin que dans l'expression (27), seul le second terme a de l'importance, les deux autres étant petits par rapport à lui.

En conclusion, dans les cas normaux envisagés, l'erreur à craindre sur la position de l'intersection de l'axe optique sur le plan $Z = 0$ varie de 0,52 m à 1,46 m.

Evaluons les répercussions de ces erreurs sur la précision de la détermination de i .

L'orientation du vecteur $S\Omega$ dans l'espace est susceptible d'une erreur angulaire, fonction des erreurs des points S et Ω eux-mêmes, soit, en considérant le cas le plus défavorable, de la somme de ces deux erreurs :

FORMULE DE VOL	CONDITIONS RELATIVEMENT FAVORABLES	CONDITIONS LES PLUS DÉFAVORABLES
Exemple n° 1	Ecart linéaire : 5,13 m Ecart résultant sur i : 14 cgr	Ecart linéaire : 11,66 m Ecart résultant sur i : 37 cgr
Exemple n° 2	Ecart linéaire : 4,52 m Ecart résultant sur i : 10 cgr	Ecart linéaire : 10,90 m Ecart résultant sur i : 29 cgr

CONCLUSION. — Dans les cas normaux, l'erreur à craindre par notre procédé de calcul, dans l'état actuel des choses, sur l'angle i varie de 3' à 37' et est en moyenne de l'ordre de 15'.

L'évaluation de la précision de θ ne peut se faire comme celle de i entre des limites moyennes, puisqu'elle passe de valeurs finies que nous allons évaluer pour $i > 0$, à l'infini pour $i = 0$; N et Ω se trouvant confondus, il y a indétermination. Exemples :

FORMULE DE VOL	CONDITIONS RELATIVEMENT FAVORABLES	CONDITIONS LES PLUS DÉFAVORABLES
Exemple n° 1'	Somme des erreurs linéaires de N et de Ω : 5,13 m	Somme des erreurs linéaires de N et de Ω : 11,66 m
	Si $i = 10$ gr, $N\Omega = 480$ m et erreur sur θ : 68'	Si $i = 10$ gr, $N\Omega = 480$ m et erreur sur θ : 1,54' gr
Exemple n° 2	Si $i = 30$ gr, $N\Omega = 1.019$ m et erreur sur θ : 32'	Si $i = 30$ gr, $N\Omega = 1.019$ m et erreur sur θ : 71'
	Somme des erreurs linéaires de N et de Ω : 4,52 m	Somme des erreurs linéaires de N et de Ω : 10,90 m
Exemple n° 2	Si $i = 10$ gr, $N\Omega = 576$ m et erreur sur θ : 50'	Si $i = 10$ gr, $N\Omega = 576$ m et erreur sur θ : 1,20' gr
	Si $i = 30$ gr, $N\Omega = 1.223$ m et erreur sur θ : 23'	Si $i = 30$ gr, $N\Omega = 1.223$ m et erreur sur θ : 57'

d) Précision de μ (fig. 10).

L'erreur sur μ est *très variable*. Elle se réfère à celle de la direction $\omega x'$ de l'horizontale du cliché, qui est variable avec i .

En effet, pour $i = 0$, le plan $x \omega y$ est horizontal et la direction $\omega x'$ est indéterminée, alors que la précision de sa détermination croît au fur et à mesure que i tend vers $\frac{\pi}{2}$.

L'étude de l'erreur sur μ *ne nous enseigne rien de pratiquement utile* : quel que soit i , seule la correspondance ponctuelle intervient avec une erreur d'orientation de l'ordre de 4', et cela seul nous intéresse.

**B. — CAS IDÉAL D'OPTIQUE ET D'ÉMULSION
VERS LEQUEL L'ON PEUT TENDRE**

Admettons, ce qui n'est pas encore réalisable, que :

a) L'on possède des émulsions photographiques ayant un grain de 1/100 mm- et que nous mesurons x et y d'un repère b , à cette précision;

b) Les coordonnées des points de repères connus au sol soient obtenues à 0,10 m près, ce qui est un résultat d'ores et déjà accessible avec de grandes précautions : cela représente les exigences d'un plan au 1/1 000.

c) La connaissance de f , sensiblement améliorée, atteigne la précision de 0,05 mm près.

Et envisageons à nouveau la précision résultante que cette méthode nous donne, rait.

a) Mesure de l'angle S.

α) Erreur résultant de la mesure de la base sous-tendant l'angle S :

$$d \cdot d = \frac{1}{100} \sqrt{2} \text{ mm.}$$

Cas du premier exemple ($f = 0,20$, $A = 2.000$) erreur sur $\text{tg } \frac{1}{2} S$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{200} \text{ d'où } dS = 42'';$$

Cas du deuxième exemple ($f = 0,50$, $A = 2.400$) : $dS = 17''$.

β) Erreur due à l'imprécision des repères du terrain :

Cas du premier exemple : $dS = 40''$;

Cas du deuxième exemple : $dS = 35''$.

γ) Erreur due à l'imprécision de la connaissance de la longueur focale :

Cas du premier exemple : $dS = 69''$;

Cas du deuxième exemple : $dS = 20''$.

δ) Erreur totale résultante sur S :

Cas du premier exemple :

$$dS = \sqrt{42^2 + 40^2 + 69^2} = 90'';$$

Cas du deuxième exemple :

$$dS = \sqrt{17^2 + 35^2 + 20^2} = 43''.$$

b) Précision résultante de α , β , A.

Le déplacement du segment capable devient, dans le cas du premier exemple : $p = 0,60$ m, et dans le cas du deuxième exemple : $p = 0,53$ m.

Il en résultera des possibilités d'erreurs en α , β , A que nous évaluerons à l'échelle des figures 12 et 13 sur le même graphique, où le cas présent est figuré par des traits pointillés auxquels correspondent des lettres entre parenthèses.

Nous extrayons les résultats consignés au tableau suivant :

FORMULE DE VOL.	AXE OPTIQUE VERTICAL				AXE OPTIQUE INCLINÉ A 30 gr			
	ERREUR DUE A δ_3		ERREUR DUE A δ_1 OU δ_2		ERREUR DUE A δ_3		ERREUR DUE A δ_1 OU δ_2	
	en plan	en alt.	en plan	en alt.	en plan	en alt.	en plan	en alt.
					max. si $S_a N'$ se déplace dans le plan P		max. si $S_a N'$ se déplace dans le plan $S_a M_3 \perp$ à P	
	$S_a Q_1$	$M_1 Q_1$	$\sqrt{P_3 M_3^2 + M_3 M_2^2}$ $\neq S_a M_2$	$S_a P_3$ soit = p	$S_a Q'_1$	$M_1 Q'_1$	de l'ordre de $S_a Q_2$	de l'ordre de $M_2 Q_2$
Ex. n° 1 : $f = 0,20$ $A = 2,000$ $p = 0,60$	1,26	0,32	2,60	0,60	1,00	0,87	2,32	1,16
Ex. n° 2 : $f = 0,50$ $A = 2,400$ $p = 0,53$	1,57	0,29	3,17	0,53	1,23	1,03	2,77	1,57

Comme dans l'étude du cas A, nous concluerons qu'avec trois séries de lieux géométriques, le tableau ci-dessus représente des erreurs maxima sur la position de S.

CONCLUSION. — Dans les conditions idéales définies, et dans les cas normaux, l'erreur maximum à craindre sur l'altitude de S varie de 0,30 m à 1,57 m et sur la position du pied de la verticale de S : de 1,00 m à 3,17 m.

c) **Précision de θ et i .**

Considérons l'expression (27) et posons $d \cdot \widehat{S\Omega_a B} = 0,37$ gr, puis évaluons l'erreur sur $d \delta$ (fig. 9). L'erreur maximum $d(d\varphi)$, qui n'est autre que dS varie de $90''$ à $43''$. La partie principale de l'expression de

$$d(\delta) = \frac{R \sin 1''}{\sin \widehat{S\Omega_a B}} \cdot d(d\varphi)$$

donne le résultat suivant :

FORMULE DE VOL	AXE OPTIQUE VERTICAL ERREUR $d(\delta)$	AXE OPTIQUE INCLINÉ A 30 gr ERREUR $d(\delta)$
Exemple n° 1	0,30 m	0,34 m
Exemple n° 2	0,16 m	0,18 m

Dans les cas normaux, l'erreur à craindre sur l'intersection de l'axe optique avec le plan de référence $z = 0$ varie de 0,16 m à 0,34 m.

L'erreur sur i provient donc de l'erreur sur S et Ω ; son maximum est la somme des erreurs de ces deux points, soit :

FORMULE DE VOL	CONDITIONS RELATIVEMENT FAVORABLES	CONDITIONS LES PLUS DÉFAVORABLES
Exemple n° 1	Ecart linéaire : 1,30 m Ecart sur i : 4 cgr	Ecart linéaire : 2,94 m Ecart sur i : 9 cgr
Exemple n° 2	Ecart linéaire : 1,39 m Ecart sur i : 4 cgr	Ecart linéaire : 3,35 m Ecart sur i : 8 cgr

Donc i est connu avec une erreur pouvant varier de 4 centigrades à 9 centigrades, son approximation moyenne est de l'ordre de 5 à 6 centigrades.

Il est aisé de conclure que pour θ et μ , de même que pour les autres éléments, dans des conditions identiques de prise de vue, les erreurs seront plus que trois fois inférieures à celles évaluées au chapitre A du « Cas actuel ».

**C. — CAS D'ÉMULSIONS ET D'OBJECTIFS
DÈS MAINTENANT RÉALISABLES SOUS CERTAINES RÉSERVES**

Nous avons relaté, au début du présent chapitre « Précision des résultats », l'importante communication de M. André CHARRIOU et de M^{lle} Suzanne VALETTE qui prouve qu'il est dès maintenant industriellement possible d'obtenir la finesse du $\frac{1}{60}$ mm dans la résolution des émulsions. Par ailleurs, nous avons énoncé le principe nouveau de la maison suisse WILD pour l'élimination de la distorsion de l'objectif : superposition sur la plaque d'un verre correcteur spécifique de l'objectif défini; il vient à l'esprit que l'adaptation de ce principe à la mesure de l'« angle observe » sur le cliché (exposée chapitre premier) serait de nature à améliorer de façon considérable la connaissance de la distance focale, et sa permanence sur tout le cliché.

Nous avons donc, dès maintenant réalisable, un ensemble de procédés qui va améliorer de façon appréciable les précisions évaluées au paragraphe A, en les faisant approcher des valeurs idéales du paragraphe B. Admettant que l'amélioration de la connaissance de f par le procédé ci-dessus décrit soit du même ordre que celle résultant de la finesse du grain, nous pouvons interpoler linéairement entre les deux cas A et B étudiés ci-dessus, et nous constaterons que l'erreur maximum à craindre :

- Sur l'altitude de S varie de 0,55 m à 3,30 m;
- Sur la position du pied de la verticale de S : de 2,50 m à 6,70 m;
- Sur la valeur de l'angle i de 3 cgr à 23 cgr, soit en moyenne 10 *centigrades*.

Donc, en résumé, nous avons la possibilité, dès maintenant, de *doubler* la précision de *toutes les mesures* des éléments de redressement d'un cliché, en employant, dans cette manière, la méthode du calcul par le point approché.

Notons que, dans cette conclusion, nous avons implicitement admis que l'erreur topographique des points de redressement connus au sol était de l'ordre de 0,15 m, ce qui est très réalisable, et que l'erreur sur la longueur focale due à la distorsion avait été ramenée à l'ordre de grandeur de 0,12 mm.

III. — APPLICATIONS

Nous avons déterminé une méthode d'exploitation totale de la précision possible d'un cliché, pour la détermination de ses éléments caractéristiques. Nous allons maintenant considérer ses applications dans les domaines où son emploi permettra d'améliorer les conditions d'utilisation des clichés photogrammétriques.

Entrant maintenant dans le domaine des applications nous aurons le souci de l'économie des résultats : nous ne perdons pas de vue que l'exécution du calcul de tous les éléments de base d'un cliché par la méthode du point approché, faite à la machine à calculer, et en utilisant la table de valeurs naturelles, demande dix heures de travail, alors que le redressement optico-géométrique à l'appareil Roussilhe, par exemple, ne nécessite qu'une heure ou deux au maximum. Par contre, le calage des couples de clichés dans les appareils restituteurs stéréotopographiques ou à double projection (Zeiss, Wild, Poivilliers, Ferber, Nistri ou autres) est chose fort délicate et peut demander suivant la chance, l'habileté du restituteur, la valeur et les dispositions des points de contrôle dont il dispose, de trois à six heures de travail, parfois davantage. Dans tous les appareils, d'ailleurs, la précision du calage des plaques n'atteint que le $\frac{1}{3}$ ou la $\frac{1}{2}$ au maximum de la précision obtenue au calcul dans le « Cas actuel, C ». Lorsque l'on considère les grandes possibilités de précision de ces stéréautographes lorsqu'ils fonctionnent en restituteurs de couples de vues terrestres à point de vue géodésiquement connu, on imagine tout l'intérêt que comporte l'augmentation de la précision du calage des couples stéréoscopiques aériens.

Dans l'introduction à la présente étude, nous avons rappelé les deux familles de méthodes utilisées en photogrammétrie : clichés isolés et couples de clichés (stéréoscopie et double-projection). Nous envisageons l'emploi de la méthode du calcul par le point approché dans toutes ces méthodes d'exploitation dans lesquelles elle est susceptible d'apporter un supplément de précision, un abaissement du prix de revient des travaux, ou une augmentation du champ des possibilités d'emploi.

A. — LEVERS RÉGULIERS A GRANDE ÉCHELLE (par aérotopographie)

Nous comprenons, dans cette désignation, les levés des plans à l'échelle du $\frac{1}{10\,000}$ et au-dessus : $\frac{1}{5\,000}$, $\frac{1}{4\,000}$, $\frac{1}{2\,500}$ et $\frac{1}{2\,000}$.

Nous posons d'abord comme principe que nous pensons ne jamais devoir traiter un plan régulier par photogrammétrie aérienne s'il est d'une échelle supérieure au $\frac{1}{2\,000}$ en raison des difficultés d'interprétation dues aux vers et aux ombres.

a) Méthode stéréoscopique ou à double projection.

Les suites de clichés se présentent sous forme de bandes suivant les lignes de vol; les clichés successifs se recouvrent d'une zone variant suivant les servitudes du matériel employé, de 50 à 75 %. Parfois même, dans certains matériels, les clichés sont pris alternativement sensiblement à la verticale et sensiblement suivant une pente donnée. Deux lignes de vol se recouvrent suivant un pourcentage moindre : 15 à 25 % en général.

Dans les restituteurs utilisant la stéréoscopie ou la double projection, on considère deux à deux les clichés successifs de la même ligne de vol, qui constituent les stéréogrammes envisagés.

Les principaux appareils modernes stéréoscopiques sont le stéréotopographe Poivilliers, types B et C (France), le stéréoplanigraphe Zeiss, type C/4 de Bauerfeld (Allemagne), l'autographe Wild, types A² et A⁵, (Suisse), le stéréocartographe Santoni (Italie).

Les principaux appareils à double projection sont : le photcartographe aéro-normal de Nistri (Italie) et le restituteur Ferber (France).

Une troisième série d'appareils utilisent la vision stéréoscopique binoculaire avec des clichés préalablement redressés : le restituteur mécanique Chrétien (France) et le stéréopantographe Schermerhorn (Hollande).

Dans tous ces appareils, la précision des résultats dépend de la longueur de la base, d'une part, et de la *précision du calage des clichés*, d'autre part. Ce calage s'effectue par des méthodes d'approximation qui sont propres aux constructeurs, aux appareils, et au tempérament des restituteurs; il consiste, en général, à 1^o effectuer l'orientation intérieure du couple en réalisant l'image plastique, et 2^o à orienter et régler cette image sur les points de repères connus, réalisant ainsi l'orientation extérieure.

A l'heure actuelle, aucune étude comparative sérieuse n'a été effectuée entre ces différents appareils, les plaçant dans des conditions semblables, en face d'un travail identique. Il est donc très difficile de chiffrer la précision de chacun d'eux, les résultats annoncés par inventeurs et constructeurs n'étant pas comparables. Néanmoins, d'une façon générale, on peut admettre qu'employés rationnellement dans des conditions qui leur sont propres, ces appareils donnent, pour la planimétrie, le maximum exigible pour le graphisme (1 à 4 dixièmes de millimètre); mais en ce qui concerne l'*altimétrie*, il est certain que la précision moyenne qu'ils permettent est de l'ordre de 0,50 m, c'est-à-dire que les écarts maxima normaux possibles peuvent atteindre 1,50 m. Or cette précision n'est même pas suffisante pour un plan normal à l'échelle 1/10 000 en région moyennement accidentée. Elle pourrait néanmoins suffire dans le cas de lever au 1/5 000 de région de hautes montagnes d'accès difficile, par exemple.

Nous rapprocherons ces résultats des précisions courantes obtenues par les procédés de la topométrie régulière terrestre, d'une part : soit 0,05 m à 0,20 m en altitude pour la tachéométrie, et de celles qu'assure la photogrammétrie terrestre, d'autre part : de l'ordre de 0,20 m à 0,25 m.

Nous pouvons donc établir que l'altimétrie donnée par l'aérotopographie dans les plans à grande échelle, destinés en général à des études de travaux publics ou militaires, est d'une précision *encore insuffisante* eu égard aux exigences courantes de l'Ingénieur-constructeur.

Mais la question change complètement d'aspect si, au lieu de procéder à des calages empiriques de couples photographiques dans les restituteurs, l'on introduit pour chaque cliché, pris individuellement, *les éléments de prise de vue calculés par la méthode du point approché*. Il ne resterait plus alors qu'à éliminer les erreurs résiduelles pour assurer le calage d'un couple.

L'emploi de la méthode exposée au chapitre premier permettant actuellement de multiplier par 2 la précision des points de prise de vue (et dans le cas idéal envisagé, par 3) on améliore, de ce fait, la précision de la base stéréoscopique aérienne, et il est certain que la restitution serait nettement améliorée.

Ainsi le nivellement par aérotopographie pourrait devenir applicable aux plans à grande échelle pour travaux publics.

b) Méthode du redressement des clichés isolés.

Les photographies aériennes sont toujours prises dans des conditions semblables à celles exposées au paragraphe précédent, c'est-à-dire dans une position inconnue, mais à axe optique aussi proche que possible de la verticale. On utilise les propriétés optico-géométriques de ces clichés pour les redresser à l'aide d'un appareil de projection. La théorie du redressement a été établie, mise au point et appliquée par M. ROUSSILHE, en France, qui a construit à cet effet un appareil de redressement universel. D'autres appareils existent : ceux de Zeiss et Aschenbrenner, de Clerc et Odencrants-Wild, de Wittich et Wisser, etc.

Nous n'exposerons pas ici la théorie du redressement optico-géométrique qui ne serait que la reproduction des calculs exposés dans les ouvrages spéciaux (1); nous précisons simplement la position de cette méthode du redressement par rapport à celle du calcul par le point approché, dans le domaine de la pratique.

Pour notre calcul du point approché, nous partons d'éléments obtenus par une première approximation, à l'aide de l'appareil de redressement. Les calculs décrits au chapitre premier étant effectués, nous pourrions caler une deuxième fois le redresseur, en introduisant les éléments résultant des calculs, et obtenir une image redressée beaucoup plus correcte. Il est facile de constater que dans ces conditions, on pourra utiliser la méthode du redressement sur des terrains plus accidentés.

D'autre part, si l'on peut améliorer la détermination des coordonnées x, y sur le cliché (finesse de l'émulsion, netteté de l'objectif, emploi d'un comparateur), il sera possible de faire travailler l'appareil de redressement avec un coefficient moyen d'agrandissement $K = 4$. La surface utile d'un cliché sera quatre fois supérieure à celle actuellement obtenue et le nombre des points de repère nécessaire sera quatre fois moins grand.

Or il est incontestable que le *temps consacré aux calculs* est nettement inférieur à celui que nécessiteraient la détermination et l'exploitation d'un nombre quadruple de points de repère.

(1) En particulier : *Emploi de la Photographie aérienne aux Levers topographiques à Grande Échelle*, de M. ROUSSILHE.

B. — LEVERS AUX PETITES ÉCHELLES. — LEVERS COLONIAUX

Ce que nous venons de dire pour les leviers réguliers aux grandes échelles s'applique évidemment aux leviers réguliers aux petites échelles.

Mais l'établissement des cartes « expédiées » à petite échelle est un problème essentiellement colonial que les développements économiques et, en particulier, celui des lignes aériennes, situent à l'ordre du jour.

La question de leur établissement économique par la photogrammétrie aérienne est complexe et comprend une suite d'assez nombreux problèmes :

a) Du point de vue strictement *aéronautique* d'abord : la recherche, l'établissement et l'aménagement des terrains de base et des terrains de secours; des servitudes climatériques spéciales; des questions diverses d'approvisionnements.

b) Du point de vue *photographique* même, des difficultés existent, d'abord pour la conservation des émulsions sous les climats chauds et humides et, ensuite, pour les traitements de ces émulsions. Des études sur ces questions sont en cours, et il est certain que, sous réserve de certaines servitudes importantes, des résultats équivalents à ceux obtenus en Europe peuvent être escomptés.

c) Enfin l'établissement du *canevas des points identifiables au sol* représente incontestablement les plus grosses difficultés. Qui a pratiqué la technique de la mesure sous certains climats sait quels délais, quelles dépenses et aussi quels efforts représentent ces travaux!

Il est tout naturellement venu à l'esprit d'utiliser les clichés eux-mêmes pour compléter les opérations au sol, et d'augmenter la surface couverte sur le terrain par chaque prise de vue :

1° Solution des multichambres ou des objectifs à grand-champ;

2° Triangulation radiale;

3° Cheminement photographique.

Ces trois solutions peuvent d'ailleurs être combinées.

Voyons comment réagit, sur ces trois solutions, la méthode de calcul du point de prise de vue par le point approché.

1° *La solution des multichambres ou des objectifs à grand-champ.*

Il s'agit d'abord d'élargir le champ couvert par un vol photographique en accouplant plusieurs chambres à axe convergent, liées entre elles par un support mécanique rigide. Les photographies sont prises simultanément par chacune de ces chambres. Un appareil redresseur spécial à chaque dispositif d'accouplement de chambres est nécessaire pour transformer ces multiples photographies en un cliché à vue unique perpendiculaire à l'axe moyen du groupe des chambres.

Depuis 1922 des efforts ont été faits dans cette voie par les constructeurs américains, allemands et français. Nous citerons, parmi ces réalisations, celles de MM. POIVILLIERS, FERBER et surtout la chambre panoramique d'ASCHENBRENNER.

Cette dernière construction est particulièrement intéressante : elle comprend un objectif central et huit objectifs à axes convergents. Des prismes déviateurs renvoient les rayons lumineux provenant des neuf objectifs sur une pellicule unique de format 18×18 . L'appareil a un champ total de 140° et photographie un carré dont le côté a 5,6 fois la hauteur de vol. Il existe, bien entendu, un appareil de transformation en *plaque unique*.

On peut évidemment estimer que le champ couvert est trop important, que la netteté des bords est imparfaite, que les déformations dues au dévers des dénivellations sont graves; il n'en est pas moins vrai qu'une telle réalisation est très précieuse pour le cas spécial des levés à échelle inférieure à $1/100\,000$ (Colonies). Dans la méthode Aschenbrenner, le cliché transformé peut donner une vue unique format 30×30 , à l'échelle du $1/100\,000$, couvrant par conséquent un carré de 30 km de côté.

Le cliché unique ainsi obtenu peut alors faire l'objet de l'application du procédé de calcul par le point approché : le supplément d'heures de calcul que cela comporte est amplement justifié par une augmentation de la précision finale, et surtout du rendement.

Ce procédé est encore plus précieux lorsqu'on l'applique à la triangulation radiale ou au cheminement photographique.

Actuellement, on semble abandonner les multichambres — sauf pour les levés à très petite échelle, où elles représentent la seule solution pratique — et se diriger vers l'emploi systématique d'objectifs convenablement corrigés mais donnant un champ utile de 90 à 100° .

L'emploi de ces objectifs — nécessairement à courte focale (entre 95 et 150 mm Perle-Boyer ou S.O.M.) — ne présente d'ailleurs aucun inconvénient majeur à la restitution, si l'on applique le principe connu du retour inverse des rayons lumineux, principe dit de Porro-Koppe, c'est-à-dire si l'on restitue les clichés au travers d'un objectif identique à celui de la prise de vue.

2° *La méthode de triangulation aérienne.*

Cette méthode consiste, étant donné un cliché simple ou la transformation d'un cliché de chambre multiple, à mesurer les angles d'une triangulation composée de points naturels, les points de stations pouvant être soit les nadirs de prise de vue, soit les points principaux de prise de vue, soit le centre interne d'homologie, appelé improprement « point focal », défini par une distance zénitale $\frac{i}{2}$.

On calcule ensuite le réseau triangulé comme s'il était plan et horizontal.

Quelles que puissent être les erreurs systématiques ou accidentelles qui interviennent dans ce calcul, il est incontestable que les résultats seront améliorés si l'on peut *calculer* les points de prise de vue des clichés recouvrant des bases d'arrivée, de départ ou de contrôle.

3° *Cheminement photographique.*

La triangulation aérienne, moyennant quelques précautions dans les constructions graphiques ou les calculs est capable de donner des positions planimétriques assez correctes sur une chaîne de 100 à 200 km, mais elle est inopérante pour la détermination des altitudes.

De nombreuses tentatives sont faites actuellement pour effectuer des *cheminements photographiques*, c'est-à-dire pour restituer une succession de clichés simples ou multiples, les points de repères nécessaires à la restitution d'un de ces clichés étant extraits graphiquement de la restitution du précédent.

Il convient d'observer, aussi bien pour la triangulation aérienne que pour le cheminement photographique, que le problème doit être envisagé (comme en topométrie normale) de trois façons différentes :

a) Chaîne ou cheminement plus ou moins tendu entre deux bases connues, avec ou sans point de contrôle intermédiaire;

b) Chaîne curviligne venant se fermer sur elle-même;

c) Chaîne rectiligne avec base de départ et sans aucun contrôle à l'arrivée.

Nous traiterons, dans le chapitre suivant, du problème du survol et du vol à focales multiples, qui s'apparente à la triangulation aérienne mais qui, pouvant être envisagé pour les grandes comme pour les petites échelles, est traité séparément.

Il est inutile d'insister sur l'intérêt capital de ces différents problèmes dans les reconnaissances de l'aviation militaire en pays ennemi.

C. — LEVER A GRANDE OU PETITE ÉCHELLE PAR ASSOCIATION DE DEUX SÉRIES DIFFÉRENTES DE CLICHÉS

(Méthode du survol et du vol à focales multiples)

La détermination d'un objet par l'association de deux séries différentes de clichés photogrammétriques est un problème relativement nouveau : il n'a été qu'ébauché et n'a fait l'objet que d'une application pratique, vers 1934, par les Allemands en Suède, cas particulier d'un pays relativement plat.

Ce problème répond à un désir de progrès par l'élimination d'une partie des opérations topométriques, et c'est là un très légitime souci.

La photogrammétrie aérienne est susceptible de rendements considérables en des temps réduits, mais elle est toujours freinée par cette nécessité d'attendre les résultats topométriques du topographe qui opère au sol. En outre, celui-ci a l'obligation de passer sur les lieux photographiés peu de temps après la prise de vues, sous risque d'avoir des difficultés pour l'identification des points de repères si l'aspect de la région a évolué (cultures, etc.).

Il est donc impossible d'effectuer en une seule fois des missions aériennes très importantes; il est nécessaire de les fractionner et d'en échelonner la réalisation dans le temps, en raison de ces servitudes.

La réduction des contingences terrestres de la photogrammétrie est donc, en principe, rationnelle si elle ne conduit qu'à une augmentation raisonnable des travaux de laboratoire.

a) Méthode du survol.

Cette méthode a été signalée par le Docteur-Ingénieur RAAB et utilisée en 1934 par la Société « Photogrammétrie » de Munich à des levés cadastraux en Suède.

Le procédé consiste à effectuer, outre le vol normal, un survol à haute altitude dont les clichés sont seuls rattachés au canevas topométrique de redressement.

L'échelle des images du survol est petite, de l'ordre du 1/30 000 par exemple; le redressement est effectué au 1/15 000; il est ensuite agrandi au 1/5 000 et sert de canevas de redressement et rattachement aux clichés du vol normal. Ceux-ci sont pris par exemple au 1/10 000 pour l'obtention d'un plan au 1/5 000.

Analysons cette méthode :

— Une photographie prise à l'échelle du 1/30 000 est ainsi agrandie *six fois* et sert de canevas après avoir subi deux transformations photographiques;

— Le plan au 1/5 000 résulte ensuite d'une transformation photographique de la deuxième série de clichés basée sur le résultat précédent : il s'agit donc d'une troisième transformation;

— En résumé, on est en droit d'être sceptique sur la valeur des résultats obtenus, même si l'on tient compte des corrections d'altitude.

Je pense néanmoins que la méthode contient en elle-même une idée juste de simplification des travaux topométriques, mais au lieu de traiter le problème par le graphique, les projections et les agrandissements successifs, si l'on effectue les calculs des déterminations, on doit approcher de très près et à moindre frais la précision classique.

Je conçois l'emploi prudent de cette méthode par le processus suivant (en conservant l'exemple du Docteur RAAB) :

a) Mission photographique normale donnant une image à l'échelle du 1/15 000, provenant par exemple d'un appareil de 200 mm de focale travaillant à 3.000 m d'altitude. Recouvrement longitudinal 55 % et transversal 55 %.

b) Mission photographique de *survol* en haute altitude avec échelle-image au 1/30 000 provenant du même appareil mais à 6.000 m d'altitude. Même recouvrement.

c) Définition d'un canevas au sol donnant quatre points par cliché de survol au 1/30 000.

d) Calcul complet des clichés au 1/30 000 par la méthode du point approché.

e) *Calcul d'un canevas de points complémentaires*, déterminés depuis ces clichés, suivant une méthode que nous allons exposer.

f) Redressement et restitution des clichés au 1/15 000 du vol normal sur :

1° Les points connus à terre;

2° Les points du canevas complémentaire calculés

ou, éventuellement, calcul de ces clichés normaux par la méthode du point approché.

Dans ce procédé, nous n'introduisons qu'une seule source d'erreurs : le calcul du canevas complémentaire ou auxiliaire.

La détermination du canevas complémentaire se ramène au problème suivant :

Etant donné un cliché dont tous les éléments sont numériquement connus ($\alpha, \beta, A, \theta, i, \mu$), déterminer les coordonnées d'un point quelconque de l'image, si le terrain est plan et horizontal, ou un *lieu* de sa projection horizontale, si le terrain photographié est accidenté. Dans ce cas, plusieurs de ces lieux permettront de définir la position du point cherché dans l'espace.

DÉTERMINATION DES POINTS DU CANEVAS AUXILIAIRE

1° *Par la méthode optico-géométrique ou mécanographique.*

Métrophotographie aérienne. — Un cliché est introduit dans un appareil de redressement avec ses éléments numériquement calculés. Le point cherché est déterminé par la méthode optico-géométrique, c'est-à-dire qu'un redressement détermine un vecteur passant par le pied de la verticale N et l'image du point de redressement : c'est un lieu du point cherché. Un deuxième vecteur issu de l'image d'un autre redressement voisin détermine le point cherché; un troisième vecteur le vérifie. On choisit le point moyen de ces trois vecteurs : ses coordonnées sont prises graphiquement. On mesure ensuite graphiquement la distance de ce point moyen à chacun des points-images des redressements, et on déduit trois déterminations de l'altitude du point cherché.

La précision, dans l'exemple du Docteur RAAB, est de l'ordre de 2,25 m en planimétrie et 5,45 m en altimétrie.

Stéréophotogrammétrie. — Les clichés sont introduits par couples dans l'appareil stéréorestituteur, à l'aide des éléments calculés par la méthode du point approché. Les coordonnées du « point auxiliaire » que l'on veut obtenir sur ce couple se lisent sur les échelles de l'autographe.

La complexité des organes mécaniques et optiques des matériels, et surtout la diversité de ceux-ci, rendent inutile et illusoire une étude mathématique détaillée de la question.

La précision pratique est de l'ordre de 4 à 5/10 mm en planimétrie et de l'ordre de 2,50 m en altimétrie.

2° *Détermination par le calcul des points du canevas auxiliaire.*

Nous avons déjà montré, dans des études précédentes, que plusieurs procédés existaient pour calculer un point visible sur trois clichés connus. Nous nous bornerons à les énumérer et à développer celui qui nous semble être le meilleur.

- A) Méthode radiale par le point approché, depuis le point focal;
- B) Méthode radiale par le point approché depuis le point principal;
- C) Méthode de calcul analytique;
- D) Méthode de calcul différentiel par le point approché à partir du point nadiral;
- E) Méthode de calcul différentiel par le point approché à partir du point principal.

Nous présenterons ici cette dernière méthode.

Méthode de calcul par le point approché, à partir du point principal (voir fig. 14).

Considérons le cliché et le plan H_0 de référence : N est le nadir de S et Ω l'image du point principal ω du cliché. Nous avons une valeur approchée des coordonnées du point B_0 : B_a dont l'image est en b , et qui a été obtenue graphiquement à l'appareil de redressement. B_0 est la projection conique de B , point de cote différente de H_0 , sur ce plan H_0 .

Nous mesurons au comparateur les coordonnées x et y du point b de la plaque.

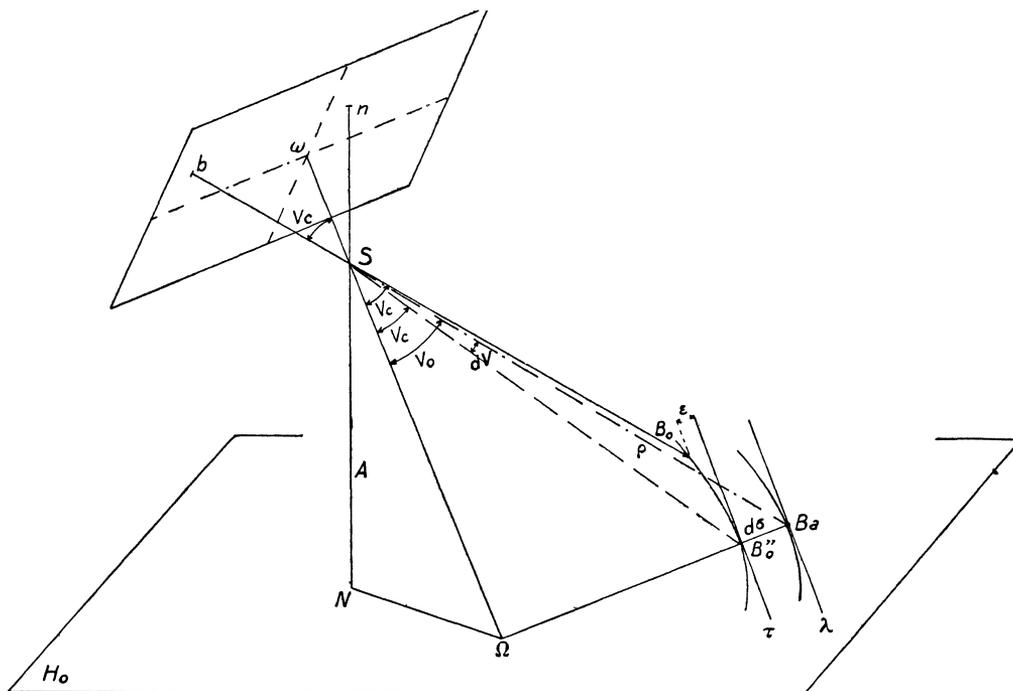


Fig. 14

Nous effectuerons les opérations suivantes (fig. 14) :

- 1° Calcul de l'angle $\widehat{\omega S b} = V_c$, dans le système cliché-objectif;
- 2° Calcul de l'angle $\widehat{B_a S \Omega} = V_0$, dans le système objectif-terrain;
- 3° Calcul de $dV = V_0 - V_c$.

Le lieu de B_0 est un cône décrit avec V_c pour angle autour de $S \Omega$. Mais B_0 n'est pas forcément dans le plan $\Omega S B_a$; néanmoins, si $\rho = S B_a$, nous calculerons $d\sigma$ comme suit :

4° On a :

$$d\sigma = \frac{\rho \cdot dV}{\sin \widehat{S B \Omega}} \simeq \frac{\rho \cdot dV}{\cos \widehat{N S b}} \simeq \frac{\rho dV}{\cos V}$$

(au deuxième ordre près) en supposant ω et n voisins et le point b suffisamment éloigné de ω et de n (voir plus loin au sujet de cette hypothèse).

Nous porterons cette longueur avec son signe sur ΩB_a : nous obtenons B''_0 . De ce point nous élevons une perpendiculaire \tilde{c} à ΩB_a , qui est le lieu de B_0 vrai à ε près (ε étant petit du deuxième ordre si B_a est suffisamment approché).

5° Je calcule les gisements de la droite $B_a\Omega$ et de B_aN . Par ailleurs, du fait de la différence altimétrique h , entre l'altitude de B et la cote du plan H_0 , nous avons :

$$\frac{h}{A} = \frac{C}{NB_0},$$

où C est la correction planimétrique due à la projection sur le plan H_0 , soit ici :

$$C_1 = \frac{(N_1 B_a + d \sigma_1)}{A_1} h$$

pour le premier cliché. Ceci n'est qu'approché, car $d \sigma_1$ n'est pas forcément dans la direction B_aN , mais en est généralement assez voisin.

Considérons les trois clichés contenant l'image du point B et posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{N_1 B_a + d \sigma_1}{A_1}, \\ R_2 = \frac{N_2 B_a + d \sigma_2}{A_2}, \\ R_3 = \frac{N_3 B_a + d \sigma_3}{A_3}, \end{array} \right.$$

d'où

$$h = \frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} = \frac{C_3}{R_3}.$$

Les corrections planimétriques C sont proportionnelles aux facteurs R de chaque cliché. Nous calculons donc le coefficient R_1 .

6° Nous construisons le graphique à grande échelle (*fig. 15*) rapporté à B_a pour origine. Nous traçons de B_a le vecteur λ_1 perpendiculaire au gisement $B_a\Omega$; sur cette dernière direction et avec le signe convenable, nous portons la longueur $d \sigma_1$ et nous obtenons B''_0 . De ce point nous menons \tilde{c}_1 parallèle à λ_1 . \tilde{c}_1 est le lieu de B_0 .

7° Nous pratiquons de la même façon pour deux ou trois autres clichés voisins, contenant l'image du point B, et nous reportons sur le même graphique les vecteurs $\tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4...$

8° Il reste à éliminer les influences des déformations dues à l'altitude pour avoir le point vrai. Nous avons vu que le coefficient R_n était proportionnel à la correction C_n . Considérant que *pratiquement* Ω_n n'est jamais très éloigné de N_n , nous procéderons donc simplement et *empiriquement* de la façon suffisante qui suit :

Si l'on considère trois clichés, les vecteurs $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ se coupent aux points e, f, g ; du point i , milieu de ef , nous menons une droite δ_1 perpendiculaire au vecteur B_aN_1 ; c'est (au deuxième ordre près) le lieu d'égale déformation due à l'altitude h , mené par la

position moyenne i du vecteur \bar{c}_1 . De même, de k , milieu de fg , menons δ_2 perpendiculaire à $B_a N_2$, et de j , milieu de eg , δ_3 perpendiculaire à $B_a N_3$.

Les droites $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ se coupent en trois points : 1, 2, 3. Prenons un coefficient t , quelconque, et calculons :

$$tR_1, tR_2, tR_3, \dots,$$

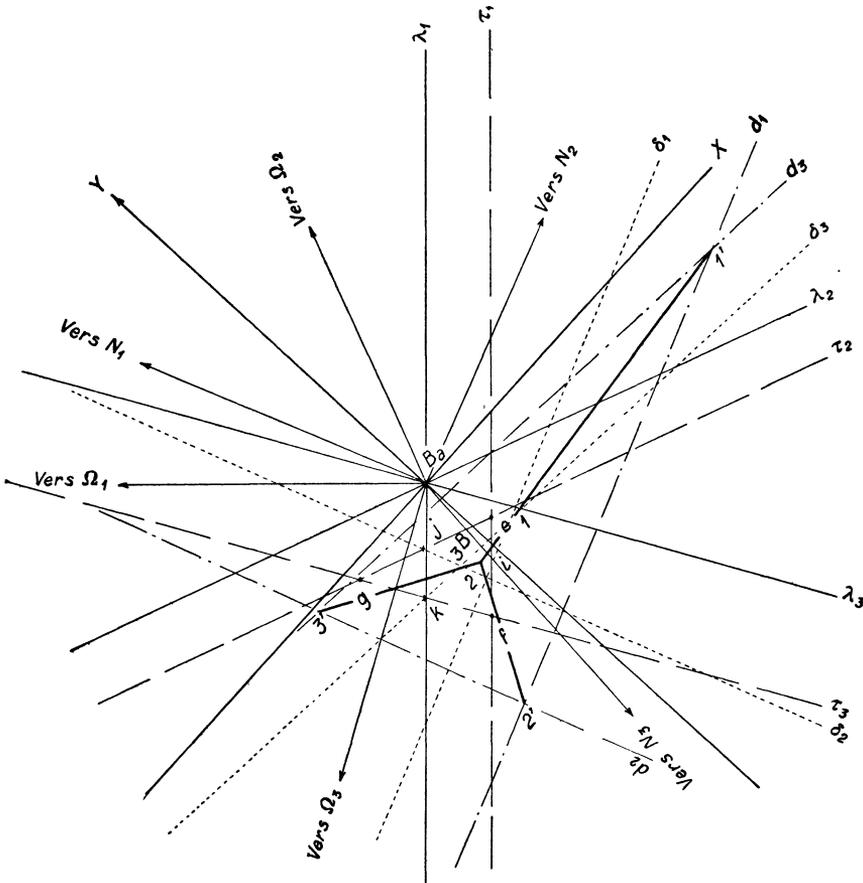


Fig. 15

et menons respectivement :

d_1 parallèle à δ_1 à une distance tR_1 vers le point N_1 (par exemple),

d_2 parallèle à δ_2 à une distance tR_2 vers le point N_2 ,

d_3 parallèle à δ_3 à une distance tR_3 vers le point N_3 ,

étant bien entendu que tous les clichés sont rapportés au même plan de comparaison H_0 .

Ces droites d_1, d_2, d_3 se coupent entre elles aux points $1', 2', 3'$.

Nous traçons alors les vecteurs $1' 1, 2' 2, 3' 3$, leur intersection définit le point **B vrai**.

Un quatrième cliché est nécessaire pour le contrôle et pour la définition de l'erreur moyenne.

9° Nous mesurons sur le graphique le complément des coordonnées à ajouter à X_{B_a} et Y_{B_a} pour obtenir X_B et Y_B .

10° On mesure sur ce graphique les distances C_1, C_2, C_3 , de B aux vecteurs $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$, et l'on a les multiples déterminations du complément d'altitude h de B :

$$h = \frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} = \dots,$$

d'où la moyenne et l'erreur moyenne. Puis : $Z_B = H_0 + h$.

Si B_a n'est qu'imparfaitement approché, et surtout si Ω est assez éloigné de N, il pourra être opportun d'effectuer une deuxième approximation, en recommençant ces calculs. Le problème est donc résolu.

Précision de cette méthode

Si l'on reprend toujours le même exemple d'application : $f = 0,20$ m et $A = 6.000$ m, d'où $e = 1/30\,000$, l'on trouve en analysant les diverses sources d'erreurs que l'erreur globale en *planimétrie* sur B est de 1,26 m (erreur moyenne) et en *altimétrie*, de 1,05 m à 2,00 m, dans les terrains moyennement accidentés.

Ce résultat signifie que l'on double ainsi la précision qu'il était possible d'atteindre avec un travail graphique très minutieux, ainsi que nous l'avons ci-dessus envisagé.

REMARQUE. — Si le survol et le vol normal sont effectués avec le même appareil, dans les mêmes conditions atmosphériques, et que l'on utilise pour la restitution le principe de Porro-Koppe, on pourrait être tenté de penser que l'on se place dans des circonstances favorables en égard à la distorsion de l'objectif. Ceci, à mon sens, est illusoire, car il n'est pas du tout certain que la chambre photographique travaille dans les mêmes conditions à 3.000 m et à 6.000 m d'altitude en raison des variations de température et de pression qui peuvent fort bien entraîner, outre des déformations de la chambre, des variations de l'indice de réfraction.

Cette remarque nous amène à concevoir, sur un principe semblable, une solution plus élégante, et d'un intérêt économique certain : la méthode du vol unique avec focales multiples.

b) Méthode du vol à focales multiples.

Ce procédé nécessite l'aménagement suivant :

1° *Matériel.* — L'avion est équipé avec deux appareils photographiques (ou davantage), de focales différentes f et f' , telles que : $f = M \cdot f'$, où, par exemple, $2 < M < 5$. Ces deux appareils sont liés invariablement l'un à l'autre, les deux axes optiques principaux étant *rigoureusement réglés en parallèle*.

Si possible, l'appareil de petite longueur focale a une obturation réglée en synchronisme avec celle du M^{ème} cliché de l'appareil à grande longueur focale, M' étant un nombre entier, immédiatement inférieur à M.

2° *Vol.* — L'appareil à grande longueur focale effectue la prise de vue normale en fonction du plan à établir, soit à une échelle de 1,5 à quatre fois plus petite que celle du plan. Toutes les fois qu'un nombre M' de vues a été pris à l'appareil à grande longueur focale, l'appareil à petite longueur focale se déclanche synchroniquement avec ce M^{ème} cliché. Si nous considérons la série des clichés provenant d'un appareil et de l'autre, sur une même ligne de vol, nous remarquons que :

a) Les conditions de recouvrement sont approximativement les mêmes dans les deux séries;

b) Si l'appareil à grande longueur focale a pris $R \times M'$ clichés, l'appareil à petite longueur focale en a pris R, et un nombre R de clichés du premier appareil a les mêmes éléments de prise de vue que ceux du second appareil;

c) Le recouvrement de $\frac{1}{2}$ en longueur et de $\frac{1}{2}$ en largeur nous est nécessaire pour la série de clichés à petite longueur focale. Les formats des deux appareils pouvant ne pas être absolument proportionnels aux longueurs focales, l'étude des lignes de vol parallèles devra faire l'objet d'un examen dans chaque cas particulier. Le plus souvent, il sera possible de débrayer totalement l'appareil à petite longueur focale durant le vol d'une bande sur deux (ou de deux bandes sur trois).

Cette méthode est rigoureuse, elle peut s'appliquer aussi bien aux levers à grande échelle qu'aux levers à petite échelle expédiés, militaires ou coloniaux.

3° *Exploitation de ce vol.* — On calcule d'abord, par la méthode du « point approché », tous les éléments des clichés de la chambre annexe, d'après les points connus au sol. Puis on définit les points du canevas auxiliaire nécessaires à la détermination des clichés « de lever » encore inconnus.

Puis on détermine les coordonnées de ces points auxiliaires d'après les clichés de la chambre annexe, suivant la méthode que nous avons exposée.

Enfin, on redresse, restitue et exploite ces « clichés de lever » avec un redresseur ou un autographe.

CONCLUSION. — Cette méthode du vol à focales multiples s'apparente à la méthode du survol précédemment traitée. Mais notre procédé conserve les avantages du survol en éliminant ses inconvénients :

a) Un seul vol est nécessaire à altitude normale;

b) Si n clichés ont été pris avec la chambre annexe, n clichés de « lever » sont connus en même temps que les clichés « de canevas », sans opérations supplémentaires;

c) Les précisions réalisées sont celles envisagées dans l'étude de la méthode du survol.

Enfin nous signalerons, sans les préciser, les applications militaires de ce procédé, dans les reconnaissances en pays ennemi, où il résoud le double problème suivant :

1° Examen de clichés lisibles parce que à grande échelle;

2° Détermination rapide de leur position, soit :

a) Par cheminement photographique des clichés de « canevas »;
soit :

b) Par identification certaine sur une carte préexistante grâce au *champ* couvert par les clichés de « canevas ».

D. — APPLICATION AU CONTROLE PHOTOGRAPHIQUE DES PERFORMANCES AÉRONAUTIQUES ET ÉTUDE DES INDICATEURS DE BORD

1° Considérations générales.

Les procédés de contrôle actuellement en usage consistent en mesures télémétriques et au photothéodolite, à terre, qui complètent les indications des appareils de navigation du bord. Ils sont peu précis et inopérants aux grandes altitudes.

Une solution très supérieure, qui a fait l'objet d'essais en Italie et récemment en Angleterre, a été signalée au Ministère de l'Air par MM. MAGNAN et SAINTE-LAGUE. Elle consiste à prendre des *photographies en avion* au-dessus d'un *polygone de contrôle* soigneusement déterminé au sol; ces clichés, calculés par la méthode du point approché, donnent les éléments de prise de vue suivants :

- L'altitude A du point de prise de vue S;
- L'angle i de l'axe optique avec la verticale;
- Le cap géographique de l'axe de vol;
- Le pied N de la verticale de la station S.

Si, en outre, le « top » de la prise de vue est enregistré de même que les lectures aux divers indicateurs de bord, la *trajectoire réelle de l'avion* peut être reconstituée.

En fait, cette méthode photographique est la seule qui permette de contrôler avec précision les instruments et procédés de navigation.

Nous envisageons les problèmes aéronautiques suivants :

- a) Vérification des altimètres et autres indicateurs de bord;
- b) Vérification des essais en vol des prototypes, portant sur :
 - Vitesses à altitude donnée;
 - Stabilité en vol;
 - Inclinaison longitudinale et transversale;
 - Tenue du cap.

Ces problèmes feront l'objet d'études en *vols à altitude constante*.

Nous envisagerons, ensuite, l'usage des vols photogrammétriques à *altitude variable* servant à :

- a) L'étude de la sensibilité des altimètres (hystérésis) et autres indicateurs de bord (compas, indicateurs de pentes);

- b) Vérification en vol des prototypes, portant sur :
 - Vitesse ascensionnelle;
 - Vitesse et précision du piqué sous un angle donné et à la verticale;
- c) Étude de la loi de répartition des pressions en fonction de l'altitude et de la température;
- d) Contrôle des records d'altitude.

2° Études en vol à altitude constante.

Ces vols nécessitent un polygone très étendu en longueur : véritable « *base de vitesse* » analogue à celle que l'on a pour les essais de vitesse des navires.

Il faudra disposer d'un minimum de *dix minutes de vol* en ligne droite, soit environ 110 à 130 *kilomètres*. Cette route-type pourrait être, par exemple, Le Bourget-Orléans. Il n'est pas indispensable que le polygone de contrôle couvre la totalité de la base, mais il suffit qu'un polygone suffisamment étendu et équipé à cet effet existe à chaque extrémité et qu'ils soient rattachés en coordonnées. En cours de route, entre ces polygones, l'emploi de la carte d'Etat-Major peut suffire au redressement des photographies aériennes.

La vérification et l'étalonnage des altimètres et autres indicateurs de bord se fait ainsi dans les conditions mêmes de leur emploi.

L'appareil photographique est gréé à la verticale, son calage est mesuré dans l'avion; les clichés déterminant les éléments de la position du système photographique définissent en même temps ceux de l'avion en : altitude, position, inclinaison longitudinale, et transversale, cap à l'instant du « top » de prise de vue.

Il est aisé de concevoir sur ce principe tout le jeu des contrôles qui permettront l'étude systématique du vol. En particulier, la vitesse moyenne sur base pourra être déduite de clichés pris à chacune des extrémités de cette base. La vitesse et la tenue du cap sur chaque tronçon de la base seront déduites des clichés intermédiaires.

Enfin, durant le survol du polygone extrême, il est possible d'enregistrer le vol de façon continue et de restituer ensuite, d'une part, toutes les oscillations de l'avion, d'autre part, le comportement simultané des divers indicateurs.

Dans la réalisation, il faut distinguer le record de vitesse en monoplace, de l'étude normale détaillée d'un prototype.

I. — AVION RECORD DE VITESSE

L'équipement photographique sera allégé au possible; il sera réduit à un appareil à main semi-automatique, ou simplement à main, muni de six plaques et dont le poids peut être de 10 kg. Cet appareil comportera néanmoins un dispositif particulier : l'enregistrement sur le cliché de l'image d'un chronomètre au 1/100 seconde. Le pilote déclanchera lui-même l'appareil à chaque survol du polygone extrême de la base.

II. — ÉTUDE NORMALE DÉTAILLÉE DU VOL D'UN PROTYTOPE

C'est le cas général; il comporte la résolution des points suivants :

- Équipement photographique de l'avion;
- Équipement du terrain de contrôle;
- Exploitation des clichés;
- Méthode d'essai en vol.

a) *Équipement photographique en avion.*

J'envisage l'utilisation d'un matériel *omnibus* pouvant s'adapter sur les prototypes d'essai par une simple perforation du plancher.

Pour permettre toutes les déterminations que nous désirons, il faut prévoir un accouplement de trois appareils :

α) Une chambre photographique à pellicules, légère (30 kg), Zeiss par exemple, à $f = 13,5$ de format 12×12 .

β) Un appareil de prise de vues cinématographiques type GW aviation (du Groupement des Industriels de Photographie Aérienne, par exemple), enregistrant l'image du terrain à la verticale sous l'avion, et en outre, l'indication d'un chronomètre au 1/20 de seconde. Cet appareil est couplé en parallèle avec la chambre photographique.

γ) Un appareil de prise de vues cinématographiques semblable au précédent mais dirigé sur le tableau de bord de l'avion, convenablement éclairé. Cet appareil enregistre également l'image du même chronomètre que précédemment.

En résumé, le but est d'aménager l'assemblage de trois appareils déjà existants, pesant en ordre de marche moins de 60 kg, et qu'il soit possible de placer dans tous les prototypes.

b) *Équipement du terrain de contrôle.*

Les vols à altitude constante s'effectuent à des altitudes variables entre 500 m et 5.000 m qui ne dépendent que des conditions météorologiques qu'il est impossible d'imposer préalablement. Les polygones de contrôle devront donc pouvoir répondre à tous les cas. Nous allons envisager les cas-limites :

α) L'altitude 5.000 m exige un polygone fort étendu afin qu'il recouvre certainement la photographie 11×11 à l'échelle du 1/37 000, soit environ $4 \text{ km} \times 4 \text{ km}$. En outre, il y a lieu de prévoir une inclinaison involontaire possible de l'axe optique sur la verticale de 15 grades; il convient donc d'augmenter le polygone sur les quatre dimensions d'une longueur de $6 \text{ km} \cdot \text{tg} \cdot 15 \text{ gr}$ soit environ 1,5 km. Le polygone devient ainsi de $7 \text{ km} \times 7 \text{ km}$. Enfin, comme le pilote d'un avion rapide risque de faire une erreur d'appréciation de la verticale, il convient de porter ce polygone à $10 \text{ km} \times 10 \text{ km}$.

β) A l'altitude 500 m, le cliché a pour échelle 1/3 700 et recouvre $400 \text{ m} \times 400 \text{ m}$. Il faudra donc redresser ces clichés à l'aide de quatre points connus distants de 300 m les uns des autres, soit onze points au km^2 . Ce terrain devrait être aussi plat que possible et

contenir une agglomération ou des détails nettement caractéristiques afin de faciliter la mission du pilote.

La variété des échelles des clichés, fonction de la diversité même des altitudes possibles, interdit de se servir d'un plan *omnibus* à échelle donnée pour les redressements. Je trouve préférable d'utiliser toute la précision que les clichés permettent en établissant pour les polygones de contrôle : 1° un plan photographique au 1/10 000 pour servir à l'identification des clichés de performances et 2° un canevas de points connus à la densité de onze points au km².

c) *Exploitation des clichés.* (v. fig. 16)

Les clichés des polygones de contrôle sont calculés par la méthode ci-dessus exposée et nous donnent la précision de 1,50 m sur l'altitude et 8 à 10 m sur la position

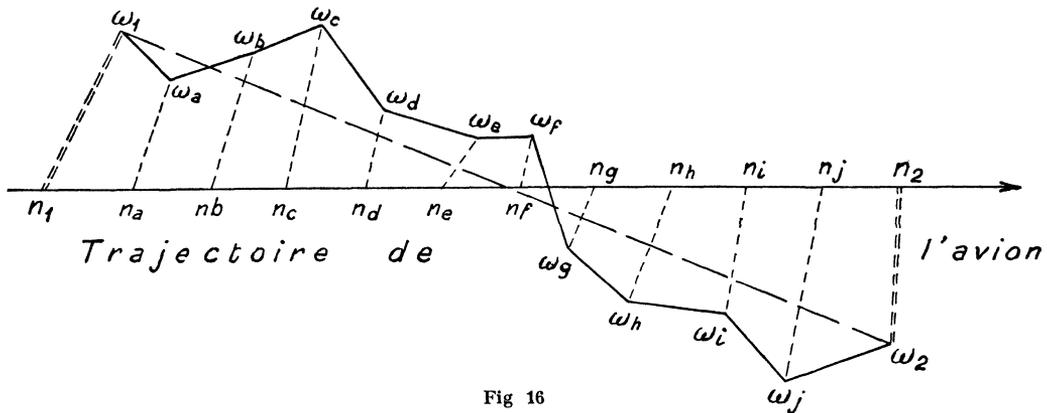


Fig 16

planimétrique du pied de la verticale. La base de vitesse ayant 130 km, l'erreur de longueur est de l'ordre de 1/8 125, ce qui, à une vitesse de 500 km/h, donne une *erreur possible* sur la vitesse de 0,061 km/h.

Lorsque l'on fait l'étude détaillée du vol d'un prototype, on voit que les clichés sont pris à des intervalles de temps de 3" (300 à 500 m de distance linéaire entre les points de vue). Les deux appareils cinématographiques, fonctionnant simultanément, donnent la trace de l'axe optique des appareils couplés sur l'image du sol et, en outre, les renseignements suivants :

- Heure au 1/20 seconde;
- Régime du moteur;
- Angle d'attaque;
- Direction de vol;
- Inclinaison de l'appareil (composante latérale et longitudinale);
- Altitude au barographe;
- Température (extérieure, intérieure);
- Cap au compas;
- Pression d'huile
- Pression d'admission

et toutes indications éventuelles sur le moteur, suivant la constitution du tableau de bord. Les clichés sont alors calculés et l'on utilise les images cinématographiques.

Nous admettrons sans discussion que le déplacement de l'avion est rectiligne entre deux clichés et se fait à vitesse constante. Soient n_1, n_2, \dots , les nadirs successifs des photographies, et $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ les traces de l'axe optique définies par les vues cinématographiques successives. La comparaison de la route vraie $n_1 n_2$, de la dérive et de l'indication de cap au compas donne d'abord la correction de celui-ci. Il est commode ensuite de graphiquer sur le redressement même d'un cliché et d'y identifier les images de chacun des points principaux des vues cinématographiques. Si, par ailleurs, nous admettons, puisque l'avion est de vitesse constante, que le vecteur $n_1 n_2$ puisse être divisé en fonction du temps, nous y situons les images des points de stations successifs des vues cinématographiques n_a, n_b, \dots (voir *fig. 16*). Il va de soi que la valeur et la situation des vecteurs $n_f \omega_f$ définissent *tous* les éléments de la position de l'avion au passage au point de vue f .

Il est donc aisé de suivre de façon *continue* l'évolution de l'appareil et des indicateurs.

3° Exécution des vols à altitude variable.

a) Équipement photographique en avion.

Il conviendra de prévoir l'emploi du groupement des trois appareils envisagés au paragraphe précédent, à condition toutefois de pouvoir débrayer l'appareil cinématographique lorsqu'il n'a pas d'objet, ou de ne le mettre en marche qu'à l'instant de chaque prise de cliché, comme simple enregistreur des indicateurs de bord.

Ce dispositif peut fonctionner ainsi jusqu'à 6.000 m d'altitude. Mais pour des essais à une altitude plus élevée, il conviendra d'adopter une longueur focale supérieure en raison :

1° Du champ excessif de l'appareil qui conduit à étendre exagérément le polygone de contrôle;

2° Du peu de précision fournie par une courte longueur focale.

Ainsi, pour des essais à haute altitude entre 7.000 et 20.000 m, il conviendrait de remplacer simplement cet appareil par un automatique Labrély-Ducommun à soixante plaques 18×24 , de longueur focale 0,50 m, toujours couplé avec les deux appareils cinématographiques.

Un seul magasin de plaques permet de prendre à la montée et à la descente : un cliché tous les 1.000 m en altitude entre 1.000 m et 10.000 m, et un cliché tous les 500 m entre 10.000 m et le plafond du prototype. L'étanchéité et le réchauffement devront être prévus pour éviter les buées.

Si le poids du matériel doit être limité, on se contentera d'un cône ordinaire de 0,50 m avec cinq magasins de douze plaques, l'observateur étant alors chargé de noter les temps et autres indications caractéristiques de chaque cliché.

b) *Équipement du terrain de contrôle.*

La variété des échelles des clichés nous fait préférer un canevas de points déterminés en x, y, z à tout autre plan préétabli à échelle donnée.

A 20.000 m le cliché est à l'échelle du 1/40 000 et couvre 6,8 km \times 9,2 km; il conviendra donc de prévoir un terrain plan de 20 km \times 30 km avec une densité, dans la partie centrale, de onze points de canevas au km². Cette densité pourra décroître sur les bords du terrain : par exemple un repère tous les 500 m pour une zone de 400 ha, puis un repère tous les kilomètres pour les 1.600 ha, enfin un point tous les 2 km suffira pour le reste du polygone.

c) *Méthode d'essai en vol.*

Un observateur est toujours nécessaire. Si l'on cherche à tarer les barographes, il faudra opérer l'avion étant à altitude constante, en palier durant quelques instants, et sans aucun changement de direction; l'avion passe au-dessus du polygone d'essai chaque fois qu'il se trouve à l'altitude voulue. Mais si, au contraire, c'est l'hystérésis que l'on veut définir, il faudra mettre en marche de façon continue les deux appareils cinématographiques.

Enfin, le même dispositif fonctionnera si l'on cherche à déterminer une vitesse « en piqué » sous un angle donné, sous la réserve que les axes optiques des appareils seront grésés sous un angle approprié.

d) *Exploitation des clichés.*

Ces clichés, traités par le calcul, s'ils sont d'émulsions convenables, nous assurent la précision en altitude de : 6 m à 6.000 m, 16 m à 16.000 m, 25 m à 20.000 m.

CONTROLE DE L'ALTITUDE MAXIMUM DE L'AVION RECORD

Le problème se simplifie : une seule photographie du polygone d'essai sera nécessaire, lorsque l'avion plafonnera. Il suffira d'un simple appareil à cône de 0,50 m avec magasin Gaumont muni d'une seule plaque 18 \times 24. L'obturateur sera armé au départ, sa commande de déclenchement sera à portée du pilote.

Le calcul d'un seul cliché évitera toute fraude possible et donnera une précision très supérieure à celle de tout autre procédé.

Nous ne pensons nullement avoir recensé toutes les possibilités d'application de la photogrammétrie aux essais aéronautiques, mais nous n'avons voulu que signaler certains problèmes insolubles avec une telle précision par d'autres procédés et auxquels la méthode du calcul des clichés, objet de notre thèse, donne des solutions nouvelles.

IV. — EXEMPLES DE CALCULS

A. — CALCUL DU POINT S DE PRISE DE VUE DANS L'ESPACE

Nous nous proposons de calculer les coordonnées du point de prise de vue du cliché *fig. 17* (hors-texte) pris aux abords de la ville de Tulle.

Nous possédons :

1° Les éléments topographiques des points connus :

NUMÉRO DU POINT	X	Y	Z
250	73,50	1.042,00	218,40
39	715,25	832,25	263,63
309	567,25	371,50	306,51
1.178	124,75	541,50	267,00

2° Les valeurs approchées des éléments du cliché :

$$f = 300 \text{ mm}; \quad A_a = 1.350 \text{ m}; \quad i = 5^\circ;$$
$$\alpha_a = 485,50; \quad \beta_a = 763,50.$$

3° Les valeurs des coordonnées des images des points mesurées dans le plan de la plaque, par rapport à deux axes diamétraux passant par le point principal :

NUMÉRO DU POINT	X	Y
250	— 95,53	+ 15,63
39	+ 44,96	+ 70,60
309	+ 85,98	— 34,63
1.178	— 18,21	— 65,05

Nous effectuons les calculs suivants :

TABLEAU I
Corrections d'altitude. — Plan de redressement $H_0 = 218,40$ m

POINTS N°	CALCUL DE X			
	250	39	309	1178
X_B	73,50	715,25	567,25	124,75
α_a	485,50	485,50	485,50	485,50
$X_{B'} - \alpha_a$	— 412,00	+ 229,75	+ 81,75	— 360,75
A_a		1.350,00	1.350,00	1.350,00
h	0	45,23	88,11	48,60
$A_a - h$		1.304,77	1.261,89	1.301,40
$\log (X_{B'} - \alpha_a)$		2,361255	1,912490	2,557210
$\log h$		1,655430	1,945030	1,686640
$\text{colog} (A_a - h)$		6,884466	6,898977	6,885588
Σ		0,901151	0,756497	1,129438
ΔX	0	+ 7,96	+ 5,71	— 13,47
$X_{B'} - \alpha_a$		+ 229,75	+ 81,75	— 360,75
$X - \alpha_a$	— 412,00	+ 237,71	+ 87,46	— 374,22

POINTS N°	CALCUL DE Y			
	250	39	309	1178
$Y_{B'}$	1.042,00	832,25	371,50	541,50
β_a	763,50	763,50	763,50	763,50
$Y_{B'} - \beta_a$	+ 278,50	+ 68,75	— 392,00	— 222,00
$\log (Y_{B'} - \beta_a)$		1,837270	2,593290	2,346350
$\log h$		1,655430	1,945030	1,686640
$\text{colog} (A_a - h)$		6,884466	6,898977	6,885588
Σ		0,377166	1,437297	0,918578
ΔY	0	+ 2,38	— 27,37	— 8,29
$Y_{B'} - \beta_a$		+ 68,75	— 392,00	— 222,00
$Y - \beta_a$	+ 278,50	+ 71,13	— 419,37	— 230,29

TABLEAU II

Calcul des distances $\rho_b = Sb$ (cliché)

POINTS	250	39	309	1178
x_n	— 95,53 mm	+ 44,96 mm	+ 85,98 mm	— 18,21 mm
y_n	+ 15,63 mm	+ 70,60 mm	— 34,63 mm	— 65,05 mm
$\log y_n$	1,193960	1,848800	1,539450	1,813250
$\log x_n$	1,980140	1,652830	1,934400	1,260310
$\log \operatorname{tg} V_n$	9,213820	0,195970	9,605050	0,552940
V_n	10,3244 gr	63,8993 gr	24,3753 gr	82,6235 gr
$\log y_n$	1,193960	1,848800	1,539450	1,813250
$\log \sin V_n$	9,208080	9,926076	9,572410	9,983617
$\log db$	1,985880	1,922724	1,967040	1,829633
$\log x_n$	1,980140	1,652830	1,934400	1,260310
$\log \cos V_n$	9,994266	9,730107	9,967354	9,430676
$\log db$	1,985874	1,922723	1,967046	1,829634
$\log db$	1,985877	1,922723	1,967043	1,829633
$\log f$	2,477120	2,477120	2,477120	2,477120
$\log \operatorname{tg} \varphi_b$	9,508757	9,445603	9,489923	9,352513
φ_b	19,8703 gr	17,3212 gr	19,0776 gr	14,0998 gr
$\log f$	2,477120	2,477120	2,477120	2,477120
$\log \cos \varphi_b$	9,978486	9,983719	9,980205	9,989260
$\log \rho_b$	2,498634	2,493401	2,496915	2,487960
ρ_b	315,23 mm	311,46 mm	313,99 mm	307,58 mm

TABLEAU III

Calcul des angles observés S_{bc}

ANGLES	250 — 39	250 — 309	250 — 1178	39 — 309	39 — 1178	309 — 1178
y_b	+ 15,63	+ 15,63	+ 15,63	+ 70,60	+ 70,60	— 34,63
y_c	+ 70,60	— 34,63	— 65,05	— 34,63	— 65,05	— 65,05
$\Delta y = y_b - y_c$	— 54,97	+ 50,26	+ 80,68	+ 105,23	+ 135,65	+ 30,42
x_b	— 95,53	— 95,53	— 95,53	+ 44,96	+ 44,96	+ 85,98
x_c	+ 44,96	+ 85,98	— 18,21	+ 85,98	— 18,21	— 18,21
$\Delta x = x_b - x_c$	— 140,49	— 181,51	— 77,32	— 41,02	+ 63,17	+ 104,19
$\log \Delta y$	1,740130	1,701220	1,906770	2,022143	2,132420	1,483160
$\log \Delta x$	2,147649	2,258904	1,888290	1,613000	1,800510	2,017828
$\log \operatorname{tg} v_{bc}$	9,592481	9,442316	0,018480	0,409143	0,331910	9,465332
v_{bc}	23,7435 gr	17,1969 gr	51,3543 gr	76,3371 gr	72,2550 gr	18,0845 gr
$\log \Delta y$	1,740130	1,701220	1,906770	2,022143	2,132420	1,483160
$\log \sin v$	9,561549	9,426276	9,858530	9,969281	9,957380	4,447568
$\log d_{bc}$	2,178581	2,274944	2,048240	2,052862	2,175040	2,035592
$\log \Delta x$	2,147649	2,258704	1,888290	1,613000	1,800510	2,017828
$\log \cos v$	9,969070	9,983956	9,840050	9,560142	9,625470	9,982241
$\log d_{bc}$	2,178579	2,274948	2,048240	2,052858	2,175040	2,035587
d_{bc}	150,86	188,34	111,75	112,94	149,64	108,54
ρ_b	315,23	315,23	315,23	311,46	311,46	313,99
ρ_c	311,46	313,99	307,58	313,99	307,58	307,58
$2 p_{bc}$	777,55	817,56	734,56	738,39	768,68	730,11
p_{bc}	388,77	408,78	367,28	369,19	384,34	365,05
$p_{bc} - d_{bc}$	237,91	220,44	255,53	256,25	234,70	256,51
$p_{bc} - \rho_b$	73,54	93,55	52,05	57,73	72,88	51,06
$p_{bc} - \rho_c$	77,31	94,79	59,70	55,20	76,76	57,47
$\log (p - \rho_b)$	1,866520	1,971040	1,716420	1,761400	1,862610	1,708080
$\log (p - \rho_c)$	1,888240	1,976760	1,775970	1,741940	1,885130	1,759440
Σ	3,754760	3,947800	3,492390	3,503340	3,747740	3,467520
$\log p_{bc}$	2,589694	2,611488	2,564996	2,567248	2,584714	2,562350
$\log (p_{bc} - d_{bc})$	2,376409	2,343290	2,407441	2,408665	2,370510	2,409107
	4,966103	4,954778	4,972437	4,975913	4,955224	4,971457
$\log \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} S$	8,788657	8,993022	8,519953	8,527427	8,792516	8,496063
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} S$	9,394328	9,496511	9,259976	9,263713	9,396258	9,248031
$\frac{1}{2} S_{bc}$	15,4717 gr	19,3517 gr	11,4586 gr	11,5555 gr	15,5379 gr	11,1541 gr
S_{bc}	30,9434 gr	38,7034 gr	22,9172 gr	23,1110 gr	31,0758 gr	22,3082 gr

TABLEAU IV

Calcul des distances $R_B = S_a B$

POINTS	250	39	309	1178
$Y_B - \beta_a$	+ 278,50	+ 71,13	— 419,37	— 230,29
$X_B - \alpha_a$	— 412,00	+ 237,71	+ 87,46	— 374,22
$\log (Y_B - \beta_a)$	2,444830	1,852050	2,622597	2,362272
$\log (X_B - \alpha_a)$	2,614900	2,376048	1,941810	2,573124
$\log \operatorname{tg} V_B$	9,829930	9,476002	0,680787	9,789148
V_B	137,8420 gr	281,4903 gr	386,9108 gr	64,8801 gr
$\log (Y_B - \beta_a)$	2,444830	1,852050	2,622597	2,362272
$\log \sin V$	9,748210	9,457386	9,990752	9,719419
$\log D_B$	2,696620	2,394664	2,631845	2,642853
$\log (X_B - \alpha_a)$	2,614900	2,376048	1,941810	2,573124
$\log \cos V$	9,918280	9,981381	9,309964	9,930261
$\log D_B$	2,696620	2,394667	2,631846	2,642863
$\log A_a$	3,130330	3,130330	3,130330	3,130330
$\log D_B$	2,696620	2,394666	2,631846	2,642858
$\log \operatorname{tg} \psi_B$	0,433710	0,735664	0,498484	0,487472
ψ_B	77,5305 gr	88,4283 gr	80,4377 gr	79,9675 gr
$\log A_a$	3,130330	3,130330	3,130330	3,130330
$\log \sin \psi$	9,972371	9,992788	9,979165	9,978135
$\log R_B$	3,157959	3,137542	3,151165	3,152195
R_B	1.438,63	1.372,60	1.416,34	1.419,69

TABLEAU V

Calcul des angles S_a et des différences $dS = S_{bc} - S_a$

ANGLES	250 — 39	250 — 309	250 — 1178	39 — 309	39 — 1178	309 — 1178
$Y_B - \beta_a$	+ 278,50	+ 278,50	+ 278,50	+ 71,13	+ 71,13	— 419,37
$Y_c - \beta_a$	+ 71,13	— 419,37	— 230,29	— 419,37	— 230,29	— 230,29
$\Delta Y = Y_B - Y_c$	+ 207,37	+ 697,87	+ 508,79	+ 490,50	+ 301,42	— 189,08
$X_B - \alpha_a$	— 412,00	— 412,00	— 412,00	+ 237,71	+ 237,71	+ 87,46
$X_c - \alpha_a$	+ 237,71	+ 87,46	— 374,22	+ 87,46	— 374,22	— 374,22
$\Delta X = X_B - X_c$	— 649,71	— 499,46	— 37,78	+ 150,25	+ 611,93	+ 461,68
log ΔY	2,316747	2,843772	2,706541	2,690640	2,479170	2,276644
log ΔX	2,812717	2,698504	1,577260	2,176815	2,786701	2,664342
log tg V_{BC}	9,504030	0,145268	1,129281	0,513825	9,692469	9,612302
V_{BC}	19,6687 gr	60,4542 gr	95,2815 gr	81,0766 gr	29,1372 gr	24,7459 gr
log ΔY	2,316747	2,843772	2,706541	2,690640	2,479170	2,276644
log sin V	9,482963	9,910191	9,998810	9,980523	9,645301	9,578630
log D	2,833784	2,933581	2,707731	2,710117	2,833869	2,698014
log ΔX	2,812717	2,698504	1,577260	2,176815	2,786701	2,664342
log cos V	9,978935	9,764922	8,869522	9,466705	9,952828	9,966332
log D_{BC}	2,833782	2,933582	2,707738	2,710110	2,833873	2,698010
D_{BC}	682,02	858,18	510,19	512,99	682,13	498,92
R_B	1.438,63	1.438,63	1.438,63	1.372,60	1.372,60	1.416,34
R_C	1.372,60	1.416,34	1.419,69	1.416,34	1.419,69	1.419,69
$2 P_{BC}$	3.493,25	3.713,15	3.368,51	3.301,93	3.474,42	3.334,95
P_{BC}	1.746,62	1.856,57	1.684,25	1.650,96	1.737,21	1.667,47
$P_{BC} - D_{BC}$	1.064,60	998,39	1.174,06	1.137,97	1.055,08	1.168,55
$P_{BC} - R_B$	307,99	417,94	245,62	278,36	364,61	251,13
$P_{BC} - R_C$	374,02	440,23	264,56	234,62	317,52	247,78
log ($P_{BC} - R_B$)	2,488536	2,621114	2,390266	2,444606	2,561832	2,399901
log ($P_{BC} - R_C$)	2,572914	2,643680	2,422529	2,370366	2,501768	2,394066
Σ	5,061450	5,264794	4,812795	4,814972	5,063600	4,793967
log P_{BC}	3,242195	3,268717	3,226405	3,217739	3,239852	3,222062
log ($P_{bc} - D_{bc}$)	3,027186	2,999296	3,069692	3,056129	3,023283	3,067643
Σ	6,269381	6,268013	6,296097	6,273868	6,263135	6,289705
log tg ² $\frac{1}{2} S_a$	8,792069	8,996781	8,516698	8,541104	8,800465	8,504262
log tg $\frac{1}{2} S_a$	9,396034	9,498390	9,258349	9,270552	9,400232	9,252131
$\frac{1}{2} S_a$	15,5301 gr	19,0142 gr	11,4166 gr	11,7348 gr	15,6751 gr	11,2577 gr
S_a	31,0602 gr	38,0284 gr	22,8332 gr	23,4696 gr	31,3502 gr	22,5154 gr
$dS_{BC} = S_{bc} - S_a$	— 1.168"	+ 6.750"	+ 840"	— 3.586"	— 2.744"	— 2.072"

TABLEAU VI

Calcul des coefficients F et G

ANGLES	250 — 39	250 — 309	250 — 1178	39 — 309	39 — 1178	309 — 1178
$\log \sin 1^i$	4,196120	4,196120	4,196120	4,196120	4,196120	4,196120
$\log \sin S_{bc}$	9,669454	9,756784	9,546860	9,550358	9,671155	9,535658
$\log \frac{\sin 1'}{\sin S_{cb}}$	4,526666	4,439336	4,649260	4,645762	4,524965	4,660462
$\log R_C$	3,137542	3,151165	3,152194	3,151165	3,152194	3,152194
$\log R_B$	3,157959	3,157949	3,157949	3,137542	3,137542	3,151165
$\log \frac{R_C}{R_B}$	9,979583	9,993216	9,994245	0,013623	0,014652	9,901029
$\log q_{cB} = \log \frac{R_B \sin 1'}{R_C \sin S_{bc}}$	4,506249	4,432552	4,643505	4,659385	4,539617	4,561491
$\log q_{cB} = \log \frac{R_C \sin 1'}{R_B \sin S_{bc}}$	4,547083	4,446120	4,655015	4,632139	4,510313	4,759433
V_{BC}	119,6687	160,4542	195,2815	218,9234	270,8628	324,7459
V_B	137,8420	137,8420	137,8420	281,4903	281,4903	386,9108
$V_{BC} - V_B$	381,8267	22,6122	57,4395	337,4331	389,3725	337,8351
$\log A_a$	3,130330	3,130330	3,130330	3,130330	3,130330	3,130330
$\log \cos V_{BC}$	9,482963 —	9,910191 —	9,998810 —	9,980523 —	9,645301 —	9,578630 +
$\log \sin V_{BC}$	9,978935 +	9,764922 +	8,869522 +	9,466705 —	9,952828 —	9,966332 —
$\log A_a \cos V_{BC}$	2,613293 —	3,040521 —	3,129140 —	3,110853 —	2,775631 —	2,708960 +
$\log A_a \sin V_{BC}$	3,109265 +	2,895252 +	2,999852 +	2,597035 —	3,083158 —	3,096662 —
$\log D_B$	2,696620	2,696620	2,696620	2,394667	2,394667	2,631846
$\log \sin (V_{BC} - V_B)$	9,449636 —	9,541292 +	9,894717 +	9,920154 —	9,220535 —	9,918310 —
$\log h_{BC}$	2,146256 —	2,237912 +	2,591337 +	2,314821 —	1,615202 —	2,550156 —
$\log r_{BC}$	0,963009 —	0,657340 +	0,408515 +	0,282214 +	1,467956 +	0,546506 +
$\log s_{BC}$	0,467037 +	0,802609 —	0,537803 —	0,796032 +	1,160429 +	0,158804 —
$\log A_a \cdot r_{BC}$	4,093339 —	3,787670 +	3,538845 +	3,412544 +	4,598286 +	3,676836 +
$\log A_a \cdot s_{BC}$	3,597367 +	3,932939 —	3,668133 —	3,926362 +	4,290759 +	3,289134 —
$A_a \cdot r_{BC}$	—12.397,68	+ 6.133,00	+ 3.458,16	+ 2.585,49	+39.654,18	+ 4.751,51
$X_B - \alpha_a$	— 412,00	— 412,00	— 412,00	+ 237,71	+ 237,71	+ 87,46
F_b	—12.809,68	+ 5.721,00	+ 3.046,16	+ 2.823,20	+39.891,89	+ 4.838,97
$X_c - \alpha_a$	+ 237,71	+ 87,46	— 374,22	+ 87,46	— 374,22	— 374,22
F_c	—12.159,97	+ 6.220,46	+ 3.083,94	+ 2.672,95	+39.279,96	+ 4.377,29
$-A_a \cdot s_{BC}$	+ 3.956,97	— 8.569,18	— 4.657,25	+ 8.440,44	+19.532,68	— 1.945,97
$Y_B - \beta_a$	+ 278,50	+ 278,50	+ 278,50	+ 71,13	+ 71,13	— 419,37
G_b	+ 4.235,47	— 8.290,68	— 4.378,75	+ 8.511,57	+19.603,81	— 2.365,34
$Y_c - \beta_a$	+ 71,13	— 419,37	— 230,29	— 419,37	— 230,29	— 230,29
G_c	+ 4.028,10	— 8.988,55	— 4.887,54	+ 8.021,07	+19.302,39	— 2.176,26

TABLEAU VII. — Calcul des coordonnées des points caractéristiques des segments capables

A' = 1.347	250 - 39		250 - 1178		39 - 309		39 - 1178		309 - 1178	
	b', b''	c', c''	b', b''	c', c''	b', b''	c', c''	b', b''	c', c''	b', b''	c', c''
A* = 1.350										
log F _b	4,107539-	4,084929-	3,757470+	3,793822+	3,483752+	3,489104+	3,426992+	4,594171+	3,684757+	3,641209+
log q _{bc}	4,506249	4,547083	4,432552	4,446120	4,643505	4,655015	4,632139	4,510313	4,561491	4,759433
L _{b,c}	8,613788-	8,632012-	8,190022+	8,239942+	8,127257+	8,144119+	8,059131+	9,140484+	8,246248+	8,400642+
log dS _{bc}	3,067440-	3,067440-	3,829300+	3,829300+	2,924280+	2,924280+	3,554610-	3,438380-	3,316390-	3,316390-
log L _{b,c} dS _{bc}	1,681228+	1,699452+	2,019322+	2,069242+	1,051537+	1,068399+	1,613741-	2,542864-	1,562638-	1,717032-
L _{bc} dS _{bc}	+ 48,00	+ 50,05	+ 104,55	+ 117,28	+ 11,26	+ 11,70	- 41,09	- 379,26	- 36,53	- 52,12
M _{b,c}	- 9,184	+ 4,543	+ 2,561	+ 2,561	+ 2,561	+ 2,561	+ 1,915	+ 29,37	+ 3,520	+ 3,520
dA'	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3
M _{b,c} dA'	+ 27,55	+ 27,55	- 13,63	- 13,63	- 7,68	- 7,68	- 5,74	- 88,11	- 10,56	- 10,56
x' b', c' - α _a	+ 75,55	+ 77,60	+ 90,92	+ 103,65	+ 3,58	+ 4,02	- 51,95	- 467,37	- 47,09	- 62,68
log G _b	3,626902+	3,605101+	3,918591-	3,953687-	3,641347-	3,689089-	3,904233+	4,292344+	3,373891-	3,337712-
log q _{bc}	4,506249	4,547083	4,432552	4,446120	4,643505	4,655015	4,632139	4,539617	4,561491	4,759433
log N _{b,c}	8,133151+	8,152184+	8,351143-	8,399807-	8,284852-	8,344104-	8,536372+	8,831961+	7,935382-	8,097145-
log dS _{bc}	3,067440-	3,067440-	3,829300+	3,829300+	2,924280+	2,924280+	3,554610-	3,438380-	3,316390-	3,316390-
log N _{b,c} dS _{bc}	1,200591-	1,219620-	2,180443-	2,229107-	1,209132-	1,268384-	2,090982-	2,270341-	1,251772+	1,413535+
N _{bc} dS _{bc}	- 15,87	- 16,58	- 151,51	- 169,47	- 16,18	- 18,55	- 139,32	- 186,35	+ 17,85	+ 25,91
P _{b,c}	+ 2,931	- 6,348	- 6,348	- 6,348	- 3,450	- 3,450	+ 6,252	+ 14,47	- 1,441	- 1,441
dA'	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3
P _{bc} dA'	- 8,79	- 8,79	+ 19,04	+ 19,04	+ 10,35	+ 10,35	- 18,71	- 43,41	+ 4,32	+ 4,32
y' b', c' - β _a	- 24,66	- 25,37	- 132,47	- 150,43	- 5,83	- 820	- 158,03	- 229,76	+ 22,17	+ 30,23
dA'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M _{b,c} dA'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x' b', c'' - α _a	+ 48,00	+ 50,05	+ 104,55	+ 117,28	+ 11,26	+ 11,70	- 46,21	- 379,26	- 36,53	- 52,12
P _{b,c} dA'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y' b', c'' - β ₀	- 15,87	- 16,58	- 151,51	- 169,47	- 16,18	- 18,55	- 139,32	- 186,35	+ 17,85	+ 25,91

GRAPHIQUE A GRANDE ÉCHELLE

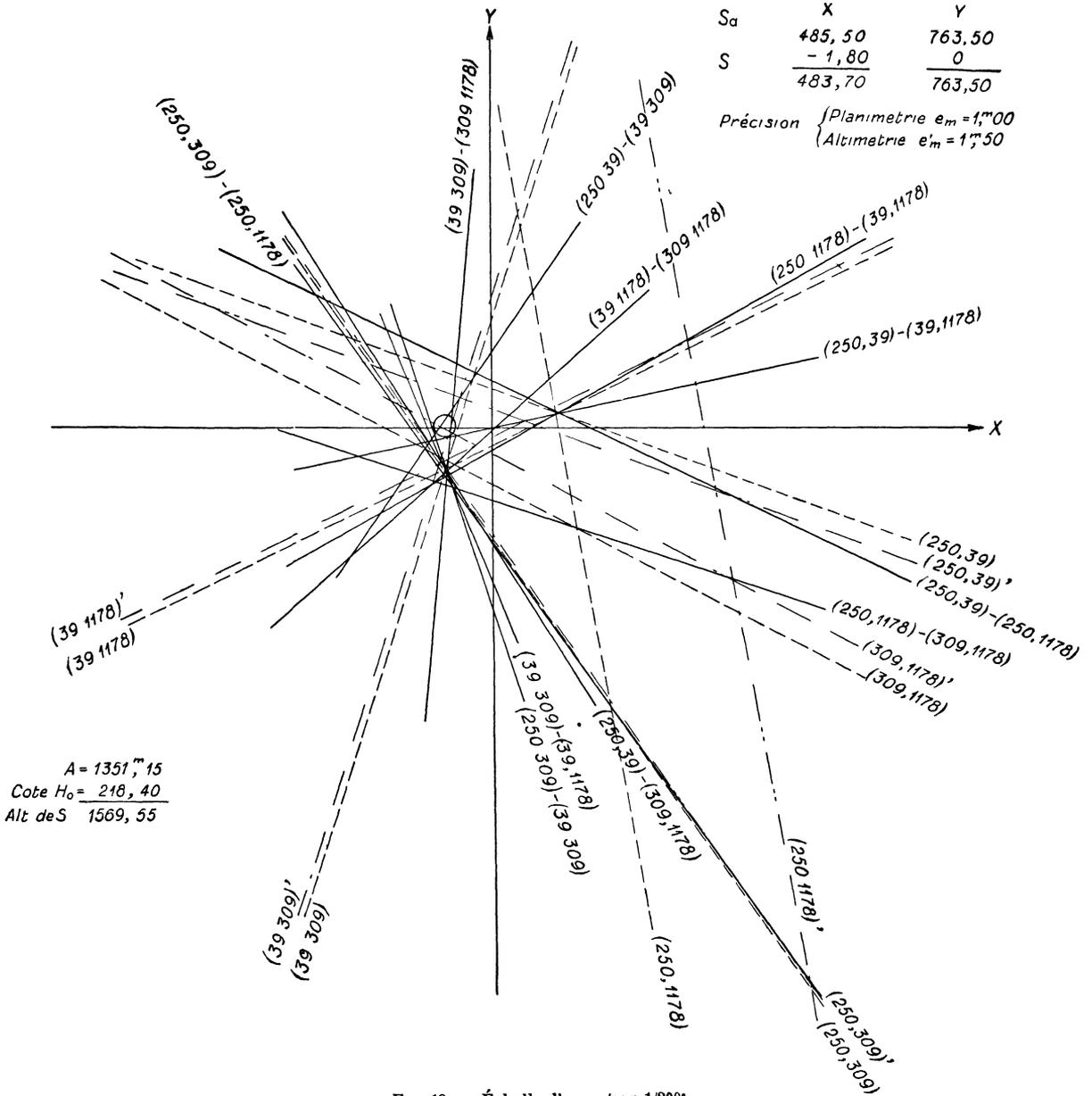


Fig. 18 — Échelle d'exécution 1/200°
Échelle approximative de reproduction 1/270°

Remarquons que le point approché était très proche du point vrai et que néanmoins les écarts angulaires dS , obtenus au calcul, étaient d'une certaine importance. Il s'agit d'une influence de l'erreur sur la connaissance de la longueur focale.

B. — RESTITUTION, PAR LE CALCUL, D'UN POINT B COMMUN A PLUSIEURS CLICHÉS

Considérons la restitution d'un point, par le calcul, dans l'application du principe de la méthode du survol. Dans la région du village de Grau du Roi, nous considérons :

1° Un survol dont les caractéristiques sont : $A = 4.200$ m, $f = 338$ mm, échelle des clichés : 1/12000 ou 1/13000 (clichés n^{os} 227 232, 233, des *fig.* 20, 21, 22) (hors-texte).

2° Un vol principal dont les éléments sont : $A = 1.400$ m, $f = 338$ mm, échelle des clichés : environ 1/4000 (clichés n^{os} 176, 177, 178 des *fig.* 23, 24, 25) (hors-texte).

Le but final poursuivi est l'établissement du plan cadastral à l'échelle 1/2500.

Nous possédons les coordonnées du nombre de points au sol strictement nécessaire au redressement des clichés au 1/13000; il faut déterminer *les points complémentaires du canevas qui permettront de redresser et d'exploiter les clichés au 1/4000*. A titre d'exemple, nous allons montrer le calcul des coordonnées d'un point B. (v. *fig.* 19)

Les opérations comportent :

1° La détermination par le calcul des éléments de prise de vue des clichés n^{os} 227, 232, 233 dont les résultats ont été les suivants :

CLICHÉS	INCLINAISON	ALTITUDE	COORDONNÉES DU POINT PRINCIPAL		COORDONNÉES DU NADIR	
			X	Y	X	Y
227	$i = 5^\circ$	4200 m	229,0	562,0	583,5	483,0
232	$i = 4^\circ$	4200 m	1004,5	1885,5	1282,5	1877,0
233	$i = 2^\circ$	4200 m	2193,5	1147,0	2232,5	1303,0

2° La définition des valeurs des coefficients de calage dans l'appareil de redressement et la projection de l'image de chaque cliché original sur l'écran comportant les points de repères connus (échelle 1/5000); puis, après mise en coïncidence, remplacement de l'écran par un papier sensible donnant l'image des redressements à l'échelle du 1/5000.

3° Le choix des points de repères complémentaires nécessaires aux redressements du vol « principal »; parmi eux, se trouve le point B que nous allons calculer.

Le point B a d'ailleurs été choisi au pied d'un pont à la cote d'altitude 0, dans un but de simplification.

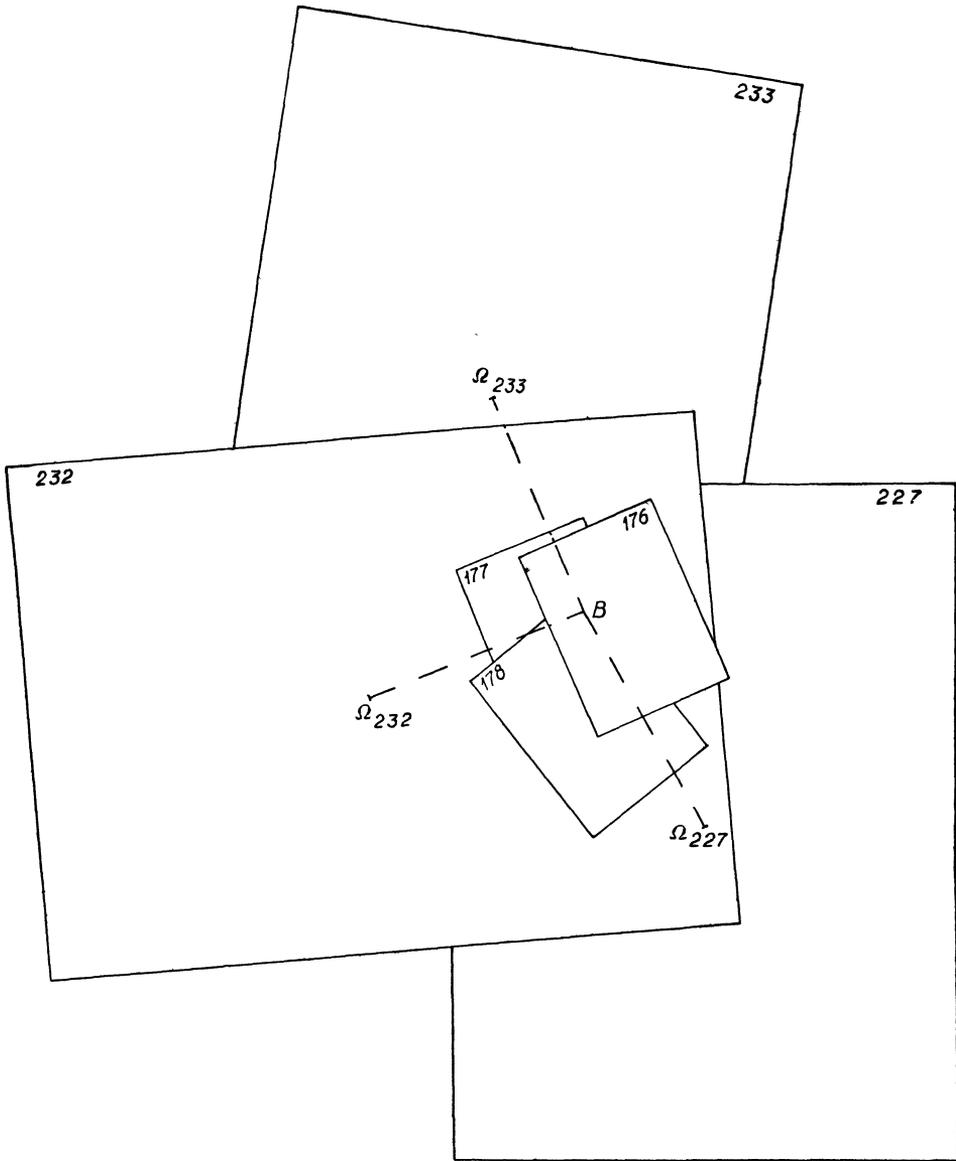


Fig 19

4° Le report graphique de B sur le schéma des points connus qui nous donne les coordonnées approchées :

$$X_{B_a} = 1.152,0, \quad Y_{B_a} = 895,5.$$

5° La mesure sur chaque cliché original de la distance de l'image de B au point principal, à la précision du 1/50 mm : $\omega_{227} b_{227} = 79,50$ mm; $\omega_{232} b_{232} = 80,65$ mm; $\omega_{233} b_{233} = 85,95$ mm.

6° Enfin, les calculs suivants :

PREMIER TABLEAU

Calcul de $Sb = V_c$

	CLICHÉ 227	CLICHÉ 232	CLICHÉ 233
$\log \omega b$	1,90037	1,90660	1,93425
$\text{colog } f$	7,47108	7,47108	7,47108
$\log \text{tg } V_c$	9,37145	9,37768	9,40533
V_c	14,706 gr	14,911 gr	15,853 gr

DEUXIÈME TABLEAU

Calcul de $\widehat{B_a S \Omega} = V_o$ et dV

	CLICHÉ 227	CLICHÉ 232	CLICHÉ 233
N	X 583,5 Y 483,0	X 1.282,5 Y 1.877,0	X 2.232,5 Y 1.303,0
B_a	1.152,0 895,5	1.152,0 895,5	1.152,0 895,5
dX dY	568,5 412,5	130,5 981,5	1.080,5 407,5
$\log dX$	2,75473	2,11561	3,03362
$\log dY$	2,61542	2,99189	2,61013
$\log \text{tg}$	0,13931	9,12372	9,57651
	38,96 gr	8,415 gr	22,96 gr
$\log dX$ $\log dY$	2,75473 2,61542	2,11561 2,99189	2,61013 3,03362
$\log \sin$ $\log \cos$	9,90816 9,76884	9,11990 9,99619	9,54764 9,97112
$\log B_a N$	2,84657 2,84658	2,99571 2,99570	3,06249 3,06250
$B_a N$	702,4	990,2	1.154,8

DEUXIÈME TABLEAU (Suite)

	CLICHÉ 227	CLICHÉ 232	CLICHÉ 233
log NB _a	2,84657	2,99571	3,06250
log A	3,62325	3,62325	3,62325
log tg \widehat{NSB}_a	9,22332	9,37246	9,43925
\widehat{NSB}_a	10,548 gr	14,74 gr	17,082 gr
log NB _a	2,84657	2,99571	3,06250
log sin \widehat{NSB}_a	9,21730	9,36073	9,42344
log SB _a	3,62927	3,63498	3,63906
SB _a	4.258,6	4.315,0	4.355,7
log A	3,62325	3,62325	3,62325
log cos <i>i</i>	9,99834	9,99894	9,99974
log S Ω	3,62491	3,62431	3,62351
S Ω	4.216,1	4.210,3	4.202,5
Ω	λ 229,0 \ 562,0	λ 1.004,5 \ 1.885,5	λ 2.193,5 \ 1.147,0
B _a	1.152,0 895,5	1.152,0 895,5	1.152,0 895,5
<i>dX</i> <i>dY</i>	923,0 333,5	147,5 990,0	1.041,5 251,5
log <i>dX</i>	2,96520	2,16879	3,01766
log <i>dY</i>	2,52310	2,99564	2,40054
log tg	0,44210	9,17315	9,38288
	22,073 gr	9,415 gr	15,084 gr
log <i>dX</i> log <i>dY</i>	2,96520 2,52310	2,16879 2,99564	2,40054 3,01766
log sin log cos	9,97335 9,53125	9,16835 9,99524	9,37056 9,98769
log Ω B _a	2,99185 2,99185	3,00044 3,00040	3,02998 3,02997
Ω B _a	981,4	1.001,0	1.071,4
SB _a	4.258,6	4.315,0	4.355,7
S Ω	4.216,1	4.210,3	4.202,5
Ω B _a	981,4	1.001,0	1.071,4
2 <i>p</i>	9.456,1	9.526,3	9.629,6
<i>p</i>	4.728,0	4.763,1	4.814,8
<i>p</i> — SB _a	469,4	448,1	459,1
<i>p</i> — S Ω	511,9	552,8	612,3
<i>p</i> — Ω B _a	3.746,6	3.762,1	3.743,4

DEUXIÈME TABLEAU (suite)

	CLICHÉ 227	CLICHÉ 232	CLICHÉ 233
$\log (p - S \Omega)$	2,70919	2,74257	2,78696
$\log (p - SB_a)$	2,67154	2,65137	2,66191
$\operatorname{colog} p$	6,32532	6,32211	6,31741
$\operatorname{colog} (p - \Omega B_a)$	6,42636	6,42457	6,42673
$\log \operatorname{tg}^2 \frac{V_0}{2}$	8,13241	8,14062	8,19301
$\log \operatorname{tg} \frac{V_0}{2}$	9,06620	9,07031	9,09650
$\frac{V_0}{2}$	7,381 gr	7,451 gr	7,909 gr
\hat{V}_0	14,762 gr	14,902 gr	15,818 gr
V_0	14,762 gr	14,902 gr	15,818 gr
V_c	14,706 gr	14,911 gr	15,853 gr
dV	+ 0,056 gr	— 0,009 gr	— 0,035 gr

TROISIÈME TABLEAU

Calcul de d

	CLICHÉ 227	CLICHÉ 232	CLICHÉ 233
$\log SB_a$	3,62927	3,63498	3,63906
$\log \sin dV$	6,94260	6,16602	6,73569
$\operatorname{colog} \cos \widehat{NSB}_a$	0,00599	0,01175	0,01582
$\log d\sigma$	0,57786	9,81275	0,39057
$d\sigma$	+ 3,78 m	— 0,65 m	— 2,46 m

Le graphique à grande échelle (v. *fig.* 26) donne le point B. S'il n'était à la cote 0, il faudrait un quatrième cliché à titre de contrôle.

GRAPHIQUE A GRANDE ÉCHELLE

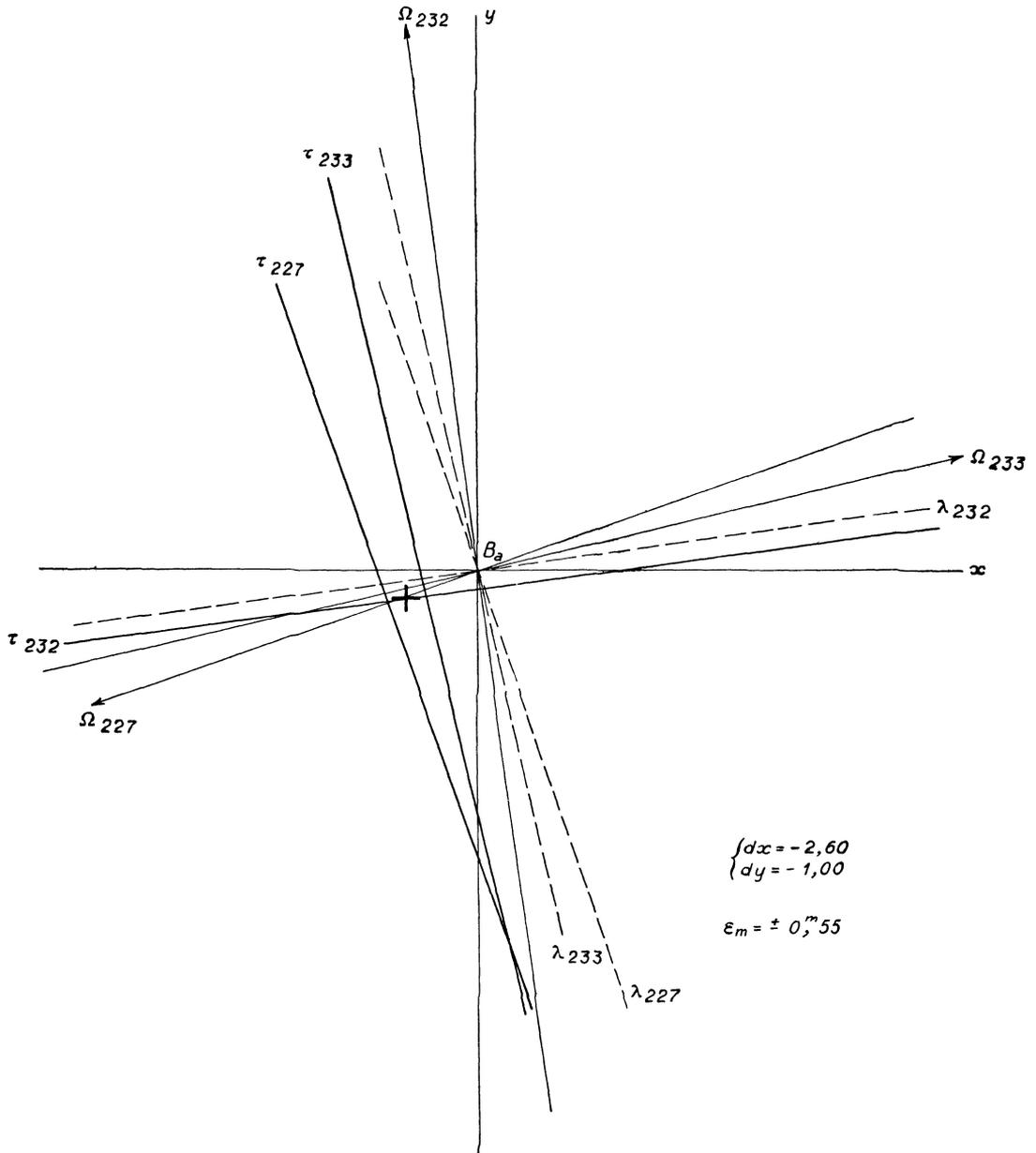


Fig 26 — Échelle d'exécution 1/200°
Échelle approximative de la reproduction : 1/270°

CONCLUSION

Nous avons donc assuré, par le calcul :

- 1° La détermination des éléments d'un cliché;
- 2° La restitution d'un point d'après une série de clichés, à propos d'une méthode nouvelle : le vol à focales multiples;
- 3° Quelques autres applications.

A l'origine de la métrophotographie, le calcul était le seul procédé d'exploitation des clichés. Par la suite, les méthodes mécanographiques et optiques ont été créées et substituées aux procédés anciens. Or, dans notre thèse, nous réintroduisons le calcul dans la photogrammétrie — sous forme de calcul différentiel — pour permettre l'extension du champ d'application de ces méthodes optico-graphiques.

Nous aurions d'ailleurs pu intituler cette étude : « *Établissement d'un réseau géodésique complémentaire par la photogrammétrie aérienne* ». Si l'on conçoit l'utilisation des points de deuxième et troisième ordre pour la détermination par le calcul des éléments des clichés, la restitution calculée nous permet de déterminer tout simplement *des points de quatrième ordre et de triangulation complémentaire*. De tels points peuvent servir à établir des levés, mêmes réguliers, par méthode quelconque, et avec une précision bien souvent suffisante.

Nous sommes persuadé que des recherches doivent permettre d'augmenter la précision des résultats grâce à des applications nouvelles (infra-rouge, etc.).

Enfin, l'emploi de ces méthodes au redressement parfait de clichés destinés à une utilisation par couples dans des autographes simplifiés, ouvre des possibilités industrielles nouvelles.

Par ailleurs, la précarité ou l'inexistence des mesures de base dans la cartographie coloniale ou *dans certains travaux géographiques en période de guerre*, mettent au plan des nécessités immédiates l'utilisation totale de la précision des clichés, en vue d'une exploitation étendue.

Nous sommes convaincu que les résultats de recherches effectuées dans cette voie doivent apporter à la géographie et à la topométrie une aide de grande valeur.
