P. SÉMIROT

Chocs et solutions périodiques dans le problème des trois corps

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1943

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1943__253__1_0>

SÉRIE A, Nº 2.020
Nº D'ORDRE : 2.887

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

P. SÉMIROT
AIDE ASTRONOME A L'OBSERVATOIRE DE BORDEAUX

Ire THÈSE

CHOCS ET SOLUTIONS PÉRIODIQUES DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le · devant la Commission d'examen.

MM. **ESCLANGON,** *Président.*
CHAZY
TREMBLOT } *Examinateurs.*

ORLÉANS
IMPRIMERIE NOUVELLE
8 *ter*, RUE DU FAUBOURG-MADELEINE
—
1943

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyens honoraires .... M. MOLLIARD.
M. CH. MAURAIN.

Doyen .... M. P. MONTEL, *Professeur*, Théorie des fonctions.

Professeurs honoraires

Léon BRILLOUIN.	G. BERTRAND.	CAULLERY.
AUGER.	Ch. FABRY.	CARTAN.
DANGEARD.	Léon BERTRAND.	E. BOREL.
LESPIEAU.	WINTREBERT.	A. COTTON.
VESSIOT.	DUBOSCQ.	J. DRACH.
PORTIER.	BOHN.	M. GUICHARD.
LAPICQUE.	RABAUD.	LABROUSTE.

PROFESSEURS

Charles PÉREZ	T	Zoologie.
L. BLARINGHEM ..	T	Botanique.
G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.
A. DENJOY	T	Géométrie supérieure.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
G. BRUHAT	T	Physique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE	T	Physique générale et Radioactivité.
L. DUNOYER......	T	Chimie physique.
M. JAVILLIER	T	Chimie biologique.
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET	T	Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. ESCLANGON ...	T	Astronomie.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER	T	Recherches physiques.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY..........		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Application de l'analyse à la géométrie.
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
GAULT	T	Chimie (P. C. B.).
CROZE............	T	Physique théorique et physique céleste.
DUPONT	T	Théories chimiques.
VALIRON	T	Calcul différentiel et intégral.
BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON...........	T	Analyse et mesures chimiques.
G. DARMOIS	T	Mathématiques générales.
CHATTON	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
J. BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL		Biologie végétale (P. C. B.).
CABANNES........	T	Recherches physiques.
GRASSÉ...........	T	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
PRÉVOST		Chimie organique.
BOULIGAND		Mathématiques.
CHAUDRON........		Chimie (P. C. B.).
WYART...........		Minéralogie.
TEISSIER.........		Zoologie.
MANGENOT........		Biologie végétale (P. C. B.).
P. AUGER		Physique.
MONNIER		Physiologie générale.
PIVETEAU		Géologie.
ROCARD		Physique.
H. CARTAN.......		Calcul différentiel.
SCHAEFFER	T	Physiologie générale.
LAFFITTE		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire .... A. PACAUD.
Secrétaire honoraire............ D. TOMBECK.

A Monsieur Jean CHAZY,

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
Membre de l'Académie des Sciences,
Membre d'honneur de l'Institut des Sciences de Roumanie.

Hommage de respectueuse reconnaissance.

A Messieurs Luc PICART,

Membre de l'Académie des Sciences,
Doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux,
Directeur honoraire de l'Observatoire de Bordeaux,

et Gilbert ROUGIER,

Directeur de l'Observatoire de Bordeaux.

Hommage très respectueux.

A mes filles

ANNIE,

CHRISTIANE.

INTRODUCTION

Par définition, il y a choc, à un instant, dans le problème des trois corps si une ou plusieurs distances mutuelles s'annulent à cet instant. A partir de conditions initiales réelles, le choc est réel ou imaginaire suivant que les projections sur les axes de coordonnées des distances qui s'annulent sont nulles ou non en même temps que ces distances. Parmi les chocs imaginaires, le *choc simple*, le *choc double* et le *choc triple* correspondent aux cas où une, deux ou trois distances mutuelles s'annulent mais non leurs projections sur les axes de coordonnées. Dans un choc, les conditions d'application du théorème de Cauchy Picard sur l'existence des intégrales holomorphes du système d'équations différentielles du mouvement ne sont plus satisfaites : les chocs correspondent à des points singuliers des solutions de ces équations. MM. Sundman et Levi-Civita ont régularisé ce système différentiel, et, en un choc réel et simple, M. Chazy l'a ramené à un système de forme classique qui généralise le système à partir duquel Poincaré a défini les nœuds, les cols et les foyers. L'étude des chocs réels a fait l'objet d'importants travaux dont nous donnons les résultats principaux pour les comparer aux résultats que nous obtenons dans l'étude des chocs imaginaires.

M. Sundman (1) a démontré que dans le choc réel de deux corps, la droite joignant ces deux corps tend vers une position limite ; au voisinage de l'instant du choc, soit $t = t_0$, les coordonnées cartésiennes des trois corps sont représentées par des séries entières en $(t - t_0)^{\frac{1}{3}}$ qui dépendent au total de dix constantes arbitraires, si le mouvement est rapporté au centre de gravité, et qui permettent de définir un prolongement analytique du mouvement au delà de l'instant du choc. La solution générale dépendant de douze constantes arbitraires, un mouvement des trois corps qui aboutit à un choc réel de deux d'entre eux satisfait à deux conditions qui ont été étudiées par Painlevé et par MM. Bisconcini (2), Chazy (3), Kiveliovitch (4) et Rosenblatt (5). Painlevé et M. Chazy ont démontré que ces conditions sont transcendantes et non algébriques par rapport aux coordonnées et vitesses initiales, et même par rapport aux vitesses seules.

M. Sundman (6) a étudié d'autre part le choc réel des trois corps, et a démontré que ce choc ne se

(1) *Acta Mathematica*, t. 36, p. 105-179.

(2) *Acta Mathematica*, t. 42, 1920, p. 99-144.

(3) *Bulletin astronomique*, t. 35,1918, p. 321-389 ; *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 56, 1932, p. 79-104.

(4) *Bulletin astronomique*, t. 7, 1931, p. 75-127.

(5) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 52, 1928.

(6) *Loc. cit.*

présente que si le vecteur des aires dans le mouvement autour du centre de gravité est nul ; par suite le mouvement est plan ou rectiligne. La figure des trois corps tend quant à la forme, soit vers le triangle équilatéral de Lagrange, soit vers la configuration d'Euler. M. Chazy (1) a démontré qu'au voisinage de l'instant du choc, soit $t = t_0$, l'orientation de la figure des trois corps tend aussi vers une limite, et que les neuf coordonnées cartésiennes sont développables en séries ordonnées suivant des puissances croissantes du temps t, dont les premiers termes sont en $(t - t_0)^{\frac{2}{3}}$ pour une direction arbitraire des axes et dont les exposants dépendent en général des rapports des masses. Dans le cas du triangle équilatéral, le mouvement des trois corps supposé plan doit satisfaire à trois conditions dont l'une est la nullité de la constante des aires.

L'existence des chocs imaginaires a été considérée pour la première fois en 1913 par M. Chazy (2) qui a constaté que les équations différentielles cartésiennes du problème des trois corps sont satisfaites si l'on substitue aux coordonnées des développements en séries entières en $(t - t_0)^{\frac{1}{2}}$ convergents et dépendant de douze paramètres arbitraires. L'une des distances mutuelles s'annule tandis que ses projections sur les axes de coordonnées ne sont pas nulles.

L'intérêt de ces chocs imaginaires est en évidence dans le problème des deux corps. Considérons les équations classiques du mouvement elliptique :

$$x = a(\cos u - e), \qquad y = a\sqrt{1 - e^2}\sin u, \qquad r = a(1 - e\cos u),$$
$$u - e\sin u = n(t - t_0) = \zeta.$$

Toute fonction de u dépend de e et de ζ et peut s'exprimer par un développement en série procédant suivant les puissances entières de e dont les coefficients sont des fonctions de ζ. Cette série cesse d'être convergente lorsque u cesse d'être une fonction holomorphe de e, c'est-à-dire pour les valeurs imaginaires u_1 de u satisfaisant à l'équation

$$1 - e\cos u_1 = 0.$$

Désignons par t_1 la valeur du temps correspondant à une telle valeur u_1 ; en développant le premier membre de l'équation de Képler suivant les puissances de $(u - u_1)$ nous tirons :

$$e\sin u_1 \frac{(u - u_1)^2}{2} + \ldots = n(t - t_1).$$

Par inversion, $(u - u_1)$ et par suite x, y, r, s'expriment en séries entières en $(t - t_1)^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, les valeurs de u qui limitent le développement de ces fonctions suivant les puissances de e sont également celles pour lesquelles se produit un choc imaginaire. Or, l'on sait que plusieurs de ces développements sont classiques et importants. Comme l'écrit M. Chazy (3) « ce rapprochement montre comment la considération des valeurs complexes d'une variable qui ne semble pas au premier abord devoir conduire à une application pratique, peut avoir des conséquences lointaines et donner des renseignements sur les circonstances et l'allure d'un mouvement ».

---

(1) *Bulletin astronomique*, t. 35, 1918, p. 321-389. Voir également H. Block (*Ark. for Math. Astr.*, t. 5, 1909).

(2) *Comptes rendus*, t. 157, 1913, p. 1398.

(3) *Notice sur ses travaux scientifiques* (1935).

M. Belorizky (1) en 1933 et M. Uno (2) en 1935 ont retrouvé les résultats de M. Chazy dans le cas du choc imaginaire simple. M. Uno a étudié également le choc imaginaire double et a signalé qu'il y aurait intérêt à étudier le choc triple. En 1939, M. Belorizky (3) a repris l'étude du choc double et a étudié le choc triple ; enfin, en 1941, M. Belorizky (4) a mis en évidence le *choc de deuxième espèce* : deux distances s'annulent, mais non leurs projections sur les axes de coordonnées, et d'autre part, la troisième distance et ses projections s'annulent.

Nous nous proposons, par l'emploi d'une méthode simple et rigoureuse, de présenter une étude systématique des chocs imaginaires. Prenons d'abord pour variable indépendante une distance mutuelle qui s'annule, soit r, et transformons le système différentiel classique en fonction de r, des six coordonnées x_i et des six dérivées $\frac{dx_i}{dr}$. Par plusieurs changements de variables successifs, nous formons un nouveau système différentiel comportant l'égalité de rapports dont les numérateurs sont les différentielles des nouvelles variables et dont les dénominateurs sont holomorphes et nuls pour r nul et pour des valeurs convenablement choisies des autres variables définissant une multiplicité singulière. Selon le nombre des racines positives, négatives et nulles de l'équation caractéristique, nous appliquons le théorème fondamental que M. Chazy (5) a obtenu par extension des résultats classiques de Poincaré relatifs aux nœuds, cols et foyers et aux lignes de nœuds, de cols et de foyers.

L'application de ce théorème fondamental à l'étude des chocs imaginaires nous a permis de préciser la forme des développements des coordonnées, la présence ou l'absence de logarithmes dans les développements et le nombre de constantes arbitraires dont ils dépendent au total. Les résultats acquis dans le problème général des trois corps sont encore valables dans le problème restreint. Mais en raison de l'importance de ce dernier problème en Mécanique Céleste, nous avons donné une étude directe et sommaire des chocs imaginaires simple et double en rapportant le mouvement de la masse nulle aux axes mobiles.

Le tableau suivant résume les résultats obtenus dans l'étude des chocs réels et imaginaires, en supposant toujours le mouvement rapporté au centre de gravité du système des trois corps, de sorte que la solution générale dépend de douze constantes arbitraires :

NATURE DU CHOC	LES DÉVELOPPEMENTS SONT DES SÉRIES ENTIÈRES EN	NOMBRE DE CONSTANTES ARBITRAIRES
Choc réel de 2 corps	$t^{\frac{1}{3}}$	10
Choc triple réel	les exposants dépendent en général des rapports des masses	5
Choc imaginaire simple	$t^{\frac{1}{2}}$	12
Choc imaginaire double	$t^{\frac{1}{5}}$	10
Choc imaginaire triple	$t^{\frac{1}{2}}$ et $t^{\frac{1}{2}} \log t$	10
Choc imaginaire de deuxième espèce	$t^{\frac{1}{3}}$ et $t^{\frac{1}{3}} \log t$	10

(1) *Journal des Observateurs*, vol. XVI, p. 207, remarque.
(2) *Annali di Matematica*, t. XIV, 1935.
(3) *Comptes rendus*, t. 208, 1939, p. 558-560 et p. 966-969.
(4) *Comptes rendus*, t. 213, 1941, p. 558-560.
(5) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 56, 1932.

L'instant du choc est donc un point critique algébrique dans un choc réel de deux corps et dans un choc imaginaire simple ou double et c'est un point critique transcendant dans un choc triple réel ou imaginaire et dans un choc de deuxième espèce.

La deuxième partie de notre travail est consacrée à l'étude du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes. Nous appliquons la transformation de Sundman au système différentiel du mouvement et nous retrouvons les formules d'intégration classiques. A partir de ces formules nous mettons en évidence les conditions de périodicité du mouvement dans l'espace et l'instabilité des solutions périodiques du problème.

Dans la troisième partie, nous avons étudié les solutions du problème des trois corps que Poincaré appelle solutions périodiques de deuxième espèce (1). Soient trois corps de masses m_0, m_1, m_2 ; soit m_2 la masse principale, et posons $m_0 = \varepsilon M_0$, $m_1 = \varepsilon M_1$; M_0 et M_1 étant des quantités finies. Poincaré considère pour ε assez petit des orbites décrites autour de la masse m_2 par les masses m_0 et m_1 et qui comportent des approches ou des chocs de ces deux masses. Pour ε nul chaque masse m_0, m_1 décrit deux ou plusieurs ellipses et les solutions considérées par Poincaré se réduisent, à la limite, à ces ellipses. Les solutions périodiques de deuxième espèce sont parmi les solutions ainsi considérées celles qui sont périodiques.

Pour étudier l'orbite au voisinage d'un choc de deux corps de masses m_0 et m_1 nous utilisons les variables de Sundman qui ont l'avantage d'être simples, et nous établissons les formules de récurrence donnant les coefficients des développements de ces variables suivant les puissances de la variable indépendante u définie par la relation $dt = r du$. L'étude des propriétés de ces coefficients nous a permis de retrouver des résultats déjà énoncés par MM. Chazy et Kiveliovitch et nous avons déduit également des résultats nouveaux :

1° A l'instant du choc le plan osculateur à la trajectoire relative de la masse m_1 par rapport à la masse m_0 contient la troisième masse m_2.

2° A l'instant du choc cette trajectoire relative présente un point de rebroussement de deuxième espèce dans le cas du problème plan des trois corps.

3° Si les masses m_0 et m_1 qui se choquent sont infiniment petites les coordonnées relatives x, y, z de la masse m_1 par rapport à la masse m_0 sont de la forme :

$$x = \varepsilon P(u) + \varepsilon^4 I(u), \qquad y = \varepsilon P(u) + \varepsilon^4 I(u), \qquad z = \varepsilon P(u) + \varepsilon^4 I(u),$$

où $P(u)$ et $I(u)$ sont des séries entières en u convergentes et contenant seulement des termes pairs ou seulement des termes impairs.

A partir de ces développements et à l'approximation admise par Poincaré nous construisons des orbites à chocs pour ε infiniment petit. Cette construction est arbitraire parce que nous supposons avec Poincaré l'existence d'une sphère d'activité hors de laquelle les deux petites masses sont sans action mutuelle. Nous montrons rigoureusement qu'il n'existe pas, pour de petites valeurs de ε, des solutions périodiques se réduisant, pour ε nul, à des solutions périodiques où les trajectoires de chaque petit corps sont représentées par deux ou plusieurs ellipses. Nous concluons à l'inexistence des solutions périodiques de deuxième espèce telles qu'elles sont définies par Poincaré.

L'étude des solutions périodiques dans le problème des trois corps a pour point de départ des solutions périodiques connues : soient les solutions de Lagrange, soient les solutions correspondant

(1) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, 1899, p. 362-371.

à une valeur nulle du paramètre ε. Or, de l'existence de solutions périodiques pour $\varepsilon = 0$, ces solutions étant représentées par deux ellipses qui se coupent et le mouvement étant périodique, nous ne pouvons pas déduire l'existence de solutions périodiques, avec chocs ou sans chocs, pour de petites valeurs du paramètre ε par l'application du théorème fondamental de Poincaré sur les intégrales infiniment voisines. Par conséquent, il ne nous a pas été possible de mettre en évidence l'existence de nouvelles solutions périodiques du problème des trois corps.

Le sujet de ce travail m'a été proposé par M. Chazy qui, dans la rédaction, m'a souvent aussi donné des encouragements précieux et a toujours accueilli mes résultats avec bienveillance. Qu'il me soit permis de lui adresser ici le témoignage de ma plus vive gratitude. Je dois également remercier M. Picart et M. Rougier, Directeurs successifs de l'Observatoire de Bordeaux, qui m'ont toujours donné toutes les facilités pour accroître mes connaissances et qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail.

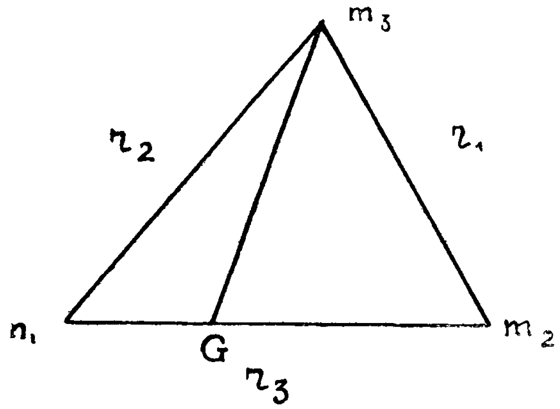
PREMIÈRE PARTIE

CHOCS IMAGINAIRES

CHAPITRE PREMIER

CHOC IMAGINAIRE SIMPLE

Définition. — Soient trois corps de masses m_1, m_2, m_3 dont les distances sont respectivement r_1, r_2, r_3.



Il existe entre ces trois corps un choc imaginaire simple si une distance, r *par exemple, s'annule sans que ses projections sur les axes de coordonnées soient nulles.*

Équations différentielles du problème des trois corps. — Désignons par x_1, x_2, x_3 les coordonnées de la masse m_2 par rapport à la masse m_1, par x_4, x_5, x_6 les coordonnées de la masse m_3 par rapport au centre de gravité G des masses m_1, m_2 et par K la constante des forces vives.

Posons :

$$M = m_1 + m_2 + m_3, \qquad \lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

$$g = \frac{M}{m_3(m_1 + m_2)}, \qquad h = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2},$$

$$r_3 \equiv r, \qquad r^2 = \sum_1^3 x_i^2, \qquad r_1^2 = (x_4 - \mu x_1)^2 + (x_5 - \mu x_2)^2 + (x_6 - \mu x_3)^2, \qquad r_2^2 = (x_4 + \lambda x_1)^2 + (x_5 + \lambda x_2)^2 + (x_6 + \lambda x_3)^2$$

Le mouvement des trois corps est défini par les six équations :

$$
\text{(I)} \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\,x_1 - m_3\left(\frac{\mu}{r_1^3}+\frac{\lambda}{r_2^3}\right)x_1 + m_3\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)x_4,\\
\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\,x_2 - m_3\left(\frac{\mu}{r_1^3}+\frac{\lambda}{r_2^3}\right)x_2 + m_3\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)x_5,\\
\frac{d^2x_3}{dt^2} &= -\frac{(m_1+m_2)}{r^3}\,x_3 - m_3\left(\frac{\mu}{r_1^3}+\frac{\lambda}{r_2^3}\right)x_3 + m_3\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)x_6,\\
\frac{d^2x_4}{dt^2} &= -\mathrm{M}\left(\frac{\lambda}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right)x_4 + \lambda\mu\mathrm{M}\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)x_1,\\
\frac{d^2x_5}{dt^2} &= -\mathrm{M}\left(\frac{\lambda}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right)x_5 + \lambda\mu\mathrm{M}\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)x_2,\\
\frac{d^2x_6}{dt^2} &= -\mathrm{M}\left(\frac{\lambda}{r_1^3}+\frac{\mu}{r_2^3}\right)x_6 + \lambda\mu\mathrm{M}\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)x_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Les six équations différentielles (I) admettent l'intégrale des forces vives :

$$
g\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right]+h\left[\left(\frac{dx_4}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_5}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_6}{dt}\right)^2\right]-2\mathrm{M}\left[\frac{1}{m_1r_1}+\frac{1}{m_2r_2}+\frac{1}{m_3r}\right]=\mathrm{K}.
$$

1. **Premier changement de variables.** — Prenons pour variable la distance r qui s'annule au lieu du temps t et posons :

$$
\frac{dx_1}{dr}=y_1,\qquad \frac{dx_2}{dr}=y_2,\qquad \frac{dx_3}{dr}=y_3,\qquad \frac{dx_4}{dr}=y_4,\qquad \frac{dx_5}{dr}=y_5,\qquad \frac{dx_6}{dr}=y_6.
$$

Nous aurons ainsi douze variables :

$$
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \qquad \text{et} \qquad y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6
$$

dont nous calculerons les dérivées par rapport à r. Nous obtiendrons entre ces douze variables un système différentiel Σ d'ordre 12 :

$$
(\Sigma) \qquad \frac{dr}{r}=\frac{dx_i}{ry_i}=\frac{dy_i}{r\left(\dfrac{dt}{dr}\right)^2\left[\dfrac{d^2x_i}{dt^2}-y_i\,\dfrac{d^2r}{dt^2}\right]}\cdot (i=1,2,3,4,5,6).
$$

Les dénominateurs de ces rapports s'expriment en fonction des dérivées secondes des variables x_i données par le système (I) et ils contiennent la quantité $\left(\dfrac{dt}{dr}\right)^2$ que nous tirerons de l'équation des forces vives. Si nous posons :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= g(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+h(y_4^2+y_5^2+y_6^2),\\
\mathrm{B} &= 2\mathrm{M}\left[\frac{r}{m_1r_1}+\frac{r}{m_2r_2}+\frac{1}{m_3}\right]+\mathrm{K}r,
\end{aligned}
$$

l'intégrale des forces vives se transforme en une équation dont on déduit immédiatement :

$$
\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}.
$$

2. **Système différentiel** Σ_1. — Posons :

$$E = -\left[(m_1 + m_2) + m_3\left(\frac{\mu}{r_1^3} + \frac{\lambda}{r_2^3}\right) r^3\right] + m_3\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6)r,$$

$$\alpha = m_3\left(\frac{\mu}{r_1^3} + \frac{\lambda}{r_2^3}\right), \qquad \beta = m_3\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right), \qquad \gamma = M\left(\frac{\lambda}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right), \qquad \delta = \lambda\mu M\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)$$

$$\sigma = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Le système différentiel Σ exprimé en fonction des variables r, x_i, y_i se transforme en un système différentiel Σ_1' :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{ry_1} = \frac{dx_2}{ry_2} = \frac{dx_3}{ry_3} = \frac{dx_4}{ry_4} = \frac{dx_5}{ry_5} = \frac{dx_6}{ry_6}$$

$$= \frac{dy_1}{y_1 - \sigma y_1 + \frac{A}{B}\left[-(m_1 + m_2)\frac{x_1}{r} - \alpha x_1 r^2 + \beta x_4 r^2 - y_1 E\right]}$$

$$= \frac{dy_2}{y_2 - \sigma y_2 + \frac{A}{B}\left[-(m_1 + m_2)\frac{x_2}{r} - \alpha x_2 r^2 + \beta x_5 r^2 - y_2 E\right]}$$

$$= \frac{dy_3}{y_3 - \sigma y_3 + \frac{A}{B}\left[-(m_1 + m_2)\frac{x_3}{r} - \alpha x_3 r^2 + \beta x_6 r^2 - y_3 E\right]}$$

$$= \frac{dy_4}{y_4 - \sigma y_4 + \frac{A}{B}[-\gamma x_4 r^2 + \delta x_1 r^2 - y_4 E]}$$

$$= \frac{dy_5}{y_5 - \sigma y_5 + \frac{A}{B}[-\gamma x_5 r^2 + \delta x_2 r^2 - y_5 E]}$$

$$= \frac{dy_6}{y_6 - \sigma y_6 + \frac{A}{B}[-\gamma x_6 r^2 + \delta x_3 r^2 - y_6 E]}.$$

3. **Second changement de variables.** — Le second changement de variables que nous allons effectuer a pour but d'éliminer le facteur $\frac{1}{r}$ des dénominateurs correspondant aux différentielles dy_1, dy_2, dy_3. A cet effet, définissons trois nouvelles variables z_1, z_2, z_3 au moyen des équations :

(1) $$y_1 = \frac{z_1}{r}, \qquad y_2 = \frac{z_2 + x_2y_1}{x_1}, \qquad y_3 = \frac{z_3 + x_3y_1}{x_1}.$$

Les nouvelles variables seront donc :

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \qquad \text{et} \qquad z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$$

et il existe entre elles deux relations obtenues à partir de l'expression de r en fonction des coordonnées x_1, x_2, x_3 et de sa dérivée par rapport à r :

(2) $$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

(3) $$x_2z_2 + x_3z_3 = r(x_1 - z_1).$$

En fonction de ces nouvelles variables :

$$\sigma = \frac{2z_1}{x_1} + \frac{(-z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)}{x_1^2},$$

$$A = 2g\frac{z_1}{x_1} + g\frac{(-z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)}{x_1^2} + h(y_4^2 + y_5^2 + y_6^2).$$

4. **Système différentiel** Σ_2. — A ce second changement de variables correspond le système différentiel Σ_2 :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{z_1} = \frac{dx_2}{\dfrac{x_2z_1 + z_2r}{x_1}} = \frac{dx_3}{\dfrac{x_3z_1 + z_3r}{x_1}} = \frac{dx_4}{ry_4} = \frac{dx_5}{ry_5} = \frac{dx_6}{ry_6}$$

$$= \frac{dz_1}{2z_1 - \sigma z_1 + \dfrac{A}{B}[-(m_1 + m_2)x_1 - \alpha x_1 r^3 + \beta x_4 r^3 - z_1 E]}$$

$$= \frac{dz_2}{z_2 - \sigma z_2 + \dfrac{A}{B}[\beta(x_5x_1 - x_4x_2)r^2 - z_2 E]}$$

$$= \frac{dz_3}{z_3 - \sigma z_3 + \dfrac{A}{B}[\beta(x_6x_1 - x_4x_3)r^2 - z_3 E]}$$

$$= \frac{dy_4}{y_4 - \sigma y_4 + \dfrac{A}{B}[-\gamma x_4 r^2 + \delta x_1 r^2 - y_4 E]}$$

$$= \frac{dy_5}{y_5 - \sigma y_5 + \dfrac{A}{B}[-\gamma x_5 r^2 + \delta x_2 r^2 - y_5 E]}$$

$$= \frac{dy_6}{y_6 - \sigma y_6 + \dfrac{A}{B}[-\gamma x_6 r^2 + \delta x_3 r^2 - y_6 E]}.$$

5. **Étude des dénominateurs du système** Σ_2. — A l'instant du choc et du fait même de sa définition, les coordonnées x_1, x_2, x_3 peuvent prendre toute valeur sauf la valeur zéro. Nous traiterons le problème dans l'hypothèse suivante : le point figuratif de chaque coordonnée considérée comme variable complexe reste à l'intérieur d'une couronne ayant l'origine pour centre. Si nous donnons aux variables x_i des valeurs arbitraires x_{i0} satisfaisant à cette hypothèse et aux variables r, z_1, z_2, z_3, y_4, y_5, y_6 des valeurs nulles, tous les dénominateurs du système Σ_2 sont nuls et sont des fonctions holomorphes des variables. En les développant au voisinage du système de valeurs :

$$r = z_1 = z_2 = z_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0, \qquad x_i - x_{i0} = X_{i0} = 0.$$

et en remarquant que le coefficient de z_1 dans le dénominateur correspondant à dz_1 est :

$$2 - \frac{2g(m_1 + m_2)}{B_0} = 1,$$

nous obtiendrons le système différentiel Σ_2' :

$$\frac{dr}{r}=\frac{dx_1}{z_1}=\frac{dx_2}{\frac{x_{20}}{x_{10}}z_1+\frac{X_2z_1}{x_{10}}-\frac{x_{20}}{x_{10}^2}X_1z_1+\frac{rz_2}{x_{10}}+\dots}=\frac{dx_3}{\frac{x_{30}}{x_{10}}z_1+\frac{X_3z_1}{x_{10}}-\frac{x_{30}}{x_{10}^2}X_1z_1+\frac{rz_3}{x_{10}}+\dots}$$
$$=\frac{dx_4}{ry_4}=\frac{dx_5}{ry_5}=\frac{dx_6}{ry_6}=\frac{dz_1}{z_1+\dots}=\frac{dz_2}{z_2+\dots}=\frac{dz_3}{z_3+\dots}=\frac{dy_4}{y_4+\dots}=\frac{dy_5}{y_5+\dots}=\frac{dy_6}{y_6+\dots}.$$

Les termes non écrits dans les dénominateurs correspondant aux différentielles dz_1, dz_2, dz_3, dy_4, dy_5, dy_6 sont au moins du second degré par rapport aux variables r, z_1, z_2, z_3, y_4, y_5, y_6, X_i.

6. **Application du théorème fondamental au système** Σ_2'. — Le système Σ_2' satisfait aux conditions d'application du théorème fondamental. Le système Σ_2' admet la multiplicité singulière :

$$r=z_1=z_2=z_3=y_4=y_5=y_6=0.$$

Le long de cette multiplicité l'équation caractéristique du système Σ_2' a sept racines positives égales à 1 correspondant aux variables r, z_1, z_2, z_3, y_4, y_5, y_6, six racines nulles correspondant aux variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, mais elle n'a pas de racines négatives. Par conséquent, en chaque point x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60} de cette multiplicité passe une seule famille de caractéristiques.

Les caractéristiques de cette famille sont définies par six équations non différentielles de la forme :

$$x_i-x_{i0}=X_i=S_1(r,z_1,z_2,z_3,y_4,y_5,y_6\mid x_{i0}),\ (1) \tag{4}$$

et après substitution des fonctions S_1 dans le système Σ_2' par le système différentiel d'ordre six :

$$r\frac{dz_1}{dr}=z_1+\dots,\quad r\frac{dz_2}{dr}=z_2+\dots,\quad r\frac{dz_3}{dr}=z_3+\dots,\quad r\frac{dy_4}{dr}=y_4+\dots,\quad r\frac{dy_5}{dr}=y_5+\dots,\quad r\frac{dy_6}{dr}=y_6+\dots \tag{5}$$

7. **Étude des équations non différentielles.** — L'application de la méthode des coefficients indéterminés au calcul des coefficients des séries entières S_1 donne, en nous bornant aux termes qui nous seront utiles ultérieurement :

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1-x_{10}=X_1=z_1, & x_4-x_{40}=X_4=\frac{ry_4}{2} \\ x_2-x_{20}=X_2=\frac{x_{20}}{x_{10}}z_1+\frac{rz_2}{2x_{10}}+\dots, & x_5-x_{50}=X_5=\frac{ry_5}{2} \\ x_3-x_{30}=X_3=\frac{x_{30}}{x_{10}}z_1+\frac{rz_3}{2x_{10}}+\dots, & x_6-x_{60}=X_6=\frac{ry_6}{2} \end{array}\right. \tag{6}$$

8. **Étude des équations différentielles.** — Le système différentiel (5) admet la multiplicité singulière :

$$r=z_1=z_2=z_3=y_4=y_5=y_6=0.$$

---

(1) $\mathfrak{S}_n(x\mid z)$ est une fonction des variables x, holomorphe pour la valeur zéro donnée à ces variables et dans le développement de laquelle les coefficients dépendent des variables z et sont nuls jusqu'à l'ordre $n-1$ au moins. Pour $n=0$, nous supposons que le terme constant de la fonction $\mathfrak{S}(x\mid z)$ est différent de zéro. Nous désignerons également par $\mathfrak{S}_n(x)$ une série entière par rapport aux variables x commençant par des termes de degré n et par $\mathfrak{S}(x)$ une série ayant un terme constant différent de zéro.

Les racines de l'équation caractéristique sont égales à 1 et la solution de ce système pourrait contenir des logarithmes. Cette solution fait cependant exception.

Substituons aux variables z_1, z_2, z_3, y_4, y_5, y_6 des développements à coefficients indéterminés suivant les puissances de r sans termes constants. D'après l'étude que nous avons faite des équations non différentielles, les développements des variables X_i commenceront au moins par des termes du premier degré en r. Par suite, les seconds membres des équations différentielles (5) ne contiendront pas d'autres termes du premier degré en r que ceux introduits par les termes du premier degré z_1, z_2, z_3, y_4, y_5, y_6. Par conséquent, on ne sera pas arrêté dans le calcul des coefficients et les variables z, y s'exprimeront par des séries entières en r dont les premiers termes seront respectivement :

$$C_1 r,\ C_2 r,\ C_3 r,\ C_4 r,\ C_5 r,\ C_6 r,$$

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 désignent des constantes arbitraires.

Pour ce cas simple où toutes les racines de l'équation caractéristique sont égales à 1 on peut confirmer le résultat qui précède en faisant le changement de variables :

$$z_1 = rZ_1, \qquad z_2 = rZ_2, \qquad z_3 = rZ_3, \qquad y_4 = rZ_4, \qquad y_5 = rZ_5, \qquad y_6 = rZ_6.$$

Le système transformé se compose de six équations qui expriment les six dérivées $\frac{dZ_i}{dr}$ en fonction de r, Z_i, holomorphes pour :

$$r = 0$$

et pour six valeurs arbitraires des Z_i. D'après le théorème classique de Cauchy, au voisinage des valeurs ainsi considérées, les Z_i s'expriment en fonctions holomorphes de r et par suite les variables z_1, z_2, z_3, y_4, y_5, y_6 admettent des développements de la forme indiquée.

Les variables x_i s'expriment par des développements en séries entières de la forme :

$$\text{(7)} \qquad \left\{ \begin{array}{lll} x_1 = x_{10} + C_1 r + \dots, & x_2 = x_{20} + \frac{x_{20}}{x_{10}} C_1 r + \dots, & x_3 = x_{30} + \frac{x_{30}}{x_{10}} C_1 r + \dots, \\ x_4 = x_{40} + \frac{C_4}{2} r^2 + \dots, & x_5 = x_{50} + \frac{C_5}{2} r^2 + \dots, & x_6 = x_{60} + \frac{C_6}{2} r^2 + \dots. \end{array} \right.$$

9. **Du nombre et du choix des constantes.** — La résolution du système Σ_2' introduit douze constantes arbitraires :

$$x_{10},\ x_{20},\ x_{30},\ x_{40},\ x_{50},\ x_{60},\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6.$$

Deux relations déduites de (2) et de (3) existent entre ces constantes :

$$\text{(8)} \qquad x_{10}^2, + x_{20}^2 + x_{30}^2 = 0, \qquad C_2 x_{20} + C_3 x_{30} = x_{10}.$$

Le nombre de constantes arbitraires est ainsi réduit à dix ; mais, pour passer à la solution du système (I) il faut ajouter la constante des forces vives K et la constante, soit t_0, introduite par l'intégration de l'expression en r de la dérivée $\frac{dt}{dr}$. Le nombre de constantes arbitraires devient égal à douze et nous pourrons choisir :

$$x_{10},\ x_{20},\ x_{40},\ x_{50},\ x_{60},\ C_1,\ C_2,\ C_4,\ C_5,\ C_6,\ t_0,\ K.$$

10. **Expression des coordonnées en fonction du temps.** — La dérivée $\frac{dt}{dr}$ s'exprime en fonction de r sous la forme :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r\frac{A}{B} = r^2 S(r).$$

En posant $t_0 = 0$, nous obtiendrons successivement :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right) = rS(r), \qquad t = r^2 S(r)$$

puis :

$$t^{\frac{1}{2}} = rS(r)$$

et enfin par inversion :

$$r = t^{\frac{1}{2}} S(t^{\frac{1}{2}}). \tag{9}$$

Par conséquent les coordonnées s'exprimeront par des développements en séries entières en $t^{\frac{1}{2}}$ de la forme :

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_{10} + k^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}\,C_1 t^{\frac{1}{2}} + at + \ldots, \quad x_2 = x_{20} + k^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}\,C_1 \frac{x_{20}}{x_{10}} t^{\frac{1}{2}} + bt, \quad x_3 = x_{30} + k^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}\,C_1 \frac{x_{30}}{x_{10}} t^{\frac{1}{2}} + ct + \ldots \\ x_4 = x_{40} + k^{\frac{1}{2}} C_4 t + \ldots, \quad x_5 = x_{50} + k^{\frac{1}{2}} C_5 t + \ldots, \quad x_6 = x_{60} + k^{\frac{1}{2}} C_6 t + \ldots \end{array}\right.$$

avec :

$$k = \frac{m_1 + m_2}{C_1} x_{10}.$$

Les coefficients a, b, c sont des fonctions des constantes x_{i0}, C_i.

CONCLUSION. — Après deux changements successifs de variables :

1° $$\frac{dx_i}{dr} = y_i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

2° $$z_1 = ry_1, \qquad z_2 = x_1y_2 - x_2y_1, \qquad z_3 = x_1y_3 - x_3y_1,$$

les nouvelles variables étant x_i, z_1, z_2, z_3, y_4, y_5, y_6 nous obtenons un système différentiel auquel le théorème fondamental est applicable. Nous démontrons que les coordonnées x_i s'expriment par des développements en séries entières en $t^{\frac{1}{2}}$; le développement de la distance qui s'annule commence par un terme en $t^{\frac{1}{2}}$ et les développements dépendent au total, comme l'intégrale générale, de douze paramètres arbitraires y compris l'instant du choc t_0.

CHAPITRE II

CHOC IMAGINAIRE DE DEUXIÈME ESPÈCE

Par définition, il existe, entre trois corps, un choc de deuxième espèce si, à un instant, deux distances s'annulent mais non leurs projections sur les axes de coordonnées et si d'autre part, la troisième distance et ses projections s'annulent.

Les équations différentielles du mouvement étant les mêmes que celles utilisées dans l'étude du choc simple, nous supposerons que c'est la distance r des masses m_1, m_2 qui s'annule ainsi que ses projections.

1. **Premier changement de variables.** — Prenons r pour variable et posons :

$$\frac{dx_i}{dr} = y_i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \qquad \frac{dr_1}{dr} = u_1, \qquad \frac{dr_2}{dr} = u_2.$$

Nous considérerons les seize variables :

$$x_i,\ y_i,\ r_1,\ r_2,\ u_1,\ u_2$$

et nous calculerons leurs dérivées par rapport à r. Nous obtiendrons entre ces seize variables un système différentiel Σ d'ordre seize :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_i}{ry_i} = \frac{dy_i}{r\left(\frac{dt}{dr}\right)^2\left[\frac{d^2x_i}{dt^2} - y_i\frac{d^2r}{dt^2}\right]} = \frac{dr_1}{ru_1} = \frac{dr_2}{ru_2} = \frac{du_1}{r\left(\frac{dt}{dr}\right)^2\left[\frac{d^2r_1}{dt^2} - u_1\frac{d^2r}{dt^2}\right]} = \frac{du^2}{r\left(\frac{dt}{dr}\right)^2\left[\frac{d^2r_2}{dt^2} - u_2\frac{d^2r}{dt^2}\right]}.$$

2. **Système différentiel** Σ_1. — A, B, E, α, β, γ, δ, σ, ayant la même signification que dans le chapitre I, le système Σ explicité se transforme en un système Σ_1 :

$$\begin{aligned}
&\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{ry_1} = \frac{dx_2}{ry_2} = \frac{dx_3}{ry_3} = \frac{dx_4}{ry_4} = \frac{dx_5}{ry_5} = \frac{dx_6}{ry_6} = \frac{dr_1}{ru_1} = \frac{dr_2}{ru_2} \\
&= \frac{dy_1}{y_1 - \sigma y_1 + \frac{A}{B}\left[-(m_1+m_2)\frac{x_1}{r} - \alpha x_1 r^2 + \beta x_4 r^2 - y_1 E\right]} \\
&= \frac{dy_2}{y_2 - \sigma y_2 + \frac{A}{B}\left[-(m_1+m_2)\frac{x_2}{r} - \alpha x_2 r^2 + \beta x_5 r^2 - y_2 E\right]}
\end{aligned}$$

$$= \frac{dy_3}{y_3 - \sigma y_3 + \frac{A}{B}\left[-(m_1+m_2)\frac{x_3}{r} - \alpha x_3 r^2 + \beta x_6 r^2 - y_3 E\right]}$$

$$= \frac{dy_4}{y_4 - \sigma y_4 + \frac{A}{B}[-\gamma x_4 r^2 + \delta x_1 r^2 - y_4 E]}$$

$$= \frac{dy_5}{y_5 - \sigma y_5 + \frac{A}{B}[-\gamma x_5 r^2 + \delta x_2 r^2 - y_5 E]}$$

$$= \frac{dy_6}{y_6 - \sigma y_6 + \frac{A}{B}[-\gamma x_6 r^2 + \delta x_3 r^2 - y_6 E]}$$

$$= \frac{du_1}{\begin{array}{l} u_1 - \sigma u_1 + [\Sigma(y_4 - \mu y_1)^2 - u_1^2]\frac{r}{r_1} + \frac{A}{B}\frac{r^2}{r_1}\Big\{-(\gamma+\mu\beta)(x_4^2+x_5^2+x_6^2) \\ \qquad -\left[\mu\delta + \mu^2\frac{(m_1+m_2)}{r^3} + \mu^2\alpha\right]r^2 + \left[\delta + \mu\frac{(m_1+m_2)}{r^3} + \mu(\alpha+\gamma) + \mu^2\beta\right]\Sigma x_1 x_4 - \frac{r_1 u_1}{r^2}E\Big\}\end{array}}$$

$$= \frac{du_2}{\begin{array}{l} u_2 - \sigma u_2 + [\Sigma(y_4 + \lambda y_1)^2 - u_2^2]\frac{r}{r_2} + \frac{A}{B}\frac{r^2}{r_2}\Big\{-(\gamma-\lambda\beta)(x_4^2+x_5^2+x_6^2) \\ \qquad -\left[-\lambda\delta + \lambda^2\frac{(m_1+m_2)}{r^2} + \lambda^2\alpha\right]r^2 + \left[\delta - \lambda\frac{(m_1+m_2)}{r^3} - \lambda(\alpha+\gamma) + \lambda^2\beta\right]\Sigma x_1 x_4 - \frac{r_2 u_2}{r^2}E\Big\}\end{array}}.$$

3. **Second changement de variables.** — Ce second changement de variables a pour but d'éliminer le facteur $\frac{1}{r^n}$ des dénominateurs précédents. En tenant compte de ce que l'on a :

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

à l'instant du choc, nous définirons de nouvelles variables :

$$s, \rho_1, \rho_2, \xi_1, \xi_2, \xi_3, Y_1, Y_2, Y_3, V_1, V_2,$$

au moyen des équations :

$$r = s^2, \quad r_1 = s\rho_1, \quad r_2 = s\rho_2, \quad x_1 = s^2\xi_1, \quad x_2 = s^2\xi_2, \quad x_3 = s^2\xi_3,$$
$$\frac{dr_1}{ds} = U_1, \quad \frac{dr_2}{ds} = U_2, \quad U_1 - \rho_1 = V_1, \quad U_2 - \rho_2 = V_2,$$
$$y_1 - \xi_1 = Y_1, \quad y_2 - \xi_2 = Y_2, \quad y_3 - \xi_3 = Y_3.$$

Les seize nouvelles variables étant :

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, x_4, x_5, x_6, \rho_1, \rho_2 \quad \text{et} \quad Y_1, Y_2, Y_3, y_4, y_5, y_6, V_1, V_2,$$

nous les exprimerons en fonction de la variable s. A partir des équations :

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad r_1^2 = \Sigma(x_4 - \mu x_1)^2, \quad r_2^2 = \Sigma(x_4 + \lambda x_1)^2$$

et de leurs dérivées par rapport à la variable s nous déduisons six relations entre les nouvelles variables :

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1, \tag{1}$$

$$\xi_1 Y_1 + \xi_2 Y_2 + \xi_3 Y_3 = 0, \tag{2}$$

$$(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) - 2\mu s^2 \Sigma \xi_1 x_4 + \mu^2 s^4 = s^2 \rho_1^2, \tag{3}$$

$$2\Sigma(x_4 - \mu s^2 \xi_1)[y_4 - \mu(Y_1 + \xi_1)] = \rho_1(\rho_1 + V_1), \tag{4}$$

$$(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) + 2\lambda s^2 \Sigma \xi_1 x_4 + \lambda^2 s^4 = s^2 \rho_2^2, \tag{5}$$

$$2\Sigma(x_4 + \lambda s^2 \xi_1)[y_4 + \lambda(Y_1 + \xi_1)] = \rho_2(\rho_2 + V_2). \tag{6}$$

En fonction des nouvelles variables :

$$\sigma = 1 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2,$$
$$A = g + g(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2) + h(y_4^2 + y_5^2 + y_6^2).$$
$$B = \frac{2M}{m_3}\left[1 + m_3\left(\frac{1}{m_1\rho_1} + \frac{1}{m_2\rho_2}\right)s - \frac{m_3}{2M}s^2\right],$$
$$E = -(m_1 + m_2) - m_2\left(\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{\lambda}{\rho_2^3}\right)s^3 + m_3\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right)s\Sigma\xi_1 x_4.$$

4. **Système** Σ_2. — Posons :

$$\alpha_1 = \alpha s^3, \qquad \beta_1 = \beta s^3, \qquad \gamma_1 = \gamma s^3, \qquad \delta_1 = \delta s^3.$$

En remarquant que l'on a :

$$\frac{dr}{r} = \frac{ds}{\frac{s}{2}}, \qquad \frac{s}{2}\frac{dV_1}{ds} = \frac{\rho_1}{2} + 2sr\frac{du_1}{dr}, \qquad \frac{s}{2}\frac{dV_2}{ds} = \frac{\rho_2}{2} + 2sr\frac{du_2}{dr},$$

le système Σ_2 correspondant au second changement de variables se déduit aisément du système Σ_1 et nous obtenons :

$$\frac{ds}{\frac{s}{2}} = \frac{d\xi_1}{Y_1} = \frac{d\xi_2}{Y_2} = \frac{d\xi_3}{Y_3} = \frac{dx_4}{s^2 y_4} = \frac{dx_5}{s^2 y_5} = \frac{dx_6}{s^2 y_6} = \frac{d\rho_1}{\frac{V_1}{2}} = \frac{d\rho_2}{\frac{V_2}{2}}$$
$$= \frac{dY_1}{-Y_1 - (\xi_1 + Y_1)\sum_1^3 Y_i^2 + \frac{A}{B}[\beta_1(x_4 - \xi_1\Sigma\xi_1 x_4)s - Y_1 E]}$$
$$= \frac{dY_2}{-Y_2 - (\xi_2 + Y_2)\sum_1^3 Y_i^2 + \frac{A}{B}[\beta_1(x_5 - \xi_2\Sigma\xi_1 x_4)s - Y_2 E]}$$
$$= \frac{dY_3}{-Y_3 - (\xi_3 + Y_3)\sum_1^3 Y_i^2 + \frac{A}{B}[\beta_1(x_6 - \xi_3\Sigma\xi_1 x_4)s - Y_3 E]}$$
$$= \frac{dy_4}{-y_4\sum_1^3 Y_i^2 + \frac{A}{B}[-\gamma_1 x_4 s + \delta_1\xi_1 s^3 - y_4 E]}$$

$$= \frac{dy_5}{-y_5 \sum_1^3 Y_i^2 + \frac{A}{B}[-\gamma_1 x_5 s + \delta_1 \xi_2 s^3 - y_5 E]}$$

$$= \frac{dy_6}{-y_6 \sum_1^3 Y_i^2 + \frac{A}{B}[-\gamma_1 x_6 s + \delta_1 \xi_3 s^3 - y_6 E]}$$

$$= \frac{dV_1}{\begin{array}{l} -V_1 - \frac{V_1^2}{2\rho_1} - (V_1 + \rho_1)\sum_1^3 Y_i^2 + \Sigma[y_4 - \mu(Y_1 + \xi_1)] \cdot \frac{2s^2}{\rho_1} + \frac{2}{\rho_1}\frac{A}{B}\Big\{ -\mu^2(m_1 + m_2)s^2 - (\mu\delta_1 + \mu^2\alpha_1)s^5 \\ \qquad + [\mu(m_1 + m_2) + (\delta_1 + \mu\alpha_1 + \mu\gamma_1 + \mu^2\beta_1)s^3]\Sigma\xi_1 x_4 - [\gamma_1 + \mu\beta_1]\sum_4^6 x_i^2 \cdot s - \frac{\rho_1}{2}(V_1 + \rho_1)E \Big\} \end{array}}$$

$$= \frac{dV_2}{\begin{array}{l} -V_2 - \frac{V_2^2}{2\rho_2} - (V_2 + \rho_2)\sum_1^3 Y_i^2 + \Sigma[y_4 + \lambda(Y_1 + \xi_1)] \cdot \frac{2s^2}{\rho_2} + \frac{2}{\rho_2} \cdot \frac{A}{B}\Big\{ -\lambda^2(m_1 + m_2)s^2 + (\lambda\delta_1 - \lambda^2\alpha_1)s^5 \\ \qquad + [-\lambda(m_1 + m_2) + (\delta_1 - \lambda\alpha_1 - \lambda\gamma_1 + \lambda^2\beta_1)s^3]\Sigma\xi_1 x_4 + [-\gamma_1 + \lambda\beta_1]\sum_4^6 x_i^2 s - \frac{\rho_2}{2}(V_2 + \rho_2)E \Big\} \end{array}}$$

5. **Étude des dénominateurs du système** Σ_2. — Dans les dénominateurs correspondant aux différentielles dV_1, dV_2, les quantités qui multiplient $\frac{2}{\rho_1} \cdot \frac{A}{B}$ et $\frac{2}{\rho_2} \cdot \frac{A}{B}$, contiennent des termes indépendants de s et des termes du premier degré en s et en V :

$$\frac{m_1 + m_2}{2}[\rho_1^2 + 2\mu\Sigma\xi_1 x_4] - \left[(\gamma_1 + \mu\beta_1)\sum_4^6 x_i^2 + \frac{\rho_1^2}{2}\beta_1\Sigma\xi_1 x_4\right]s + \frac{m_1 + m_2}{2}\rho_1 V_1,$$

$$\frac{m_1 + m_2}{2}[\rho_2^2 - 2\lambda\Sigma\xi_1 x_4] - \left[(\gamma_1 - \lambda\beta_1)\sum_4^6 x_i^2 + \frac{\rho_2^2}{2}\beta_1\Sigma\xi_1 x_4\right]s + \frac{m_1 + m_2}{2}\rho_2 V_2.$$

Nous remplacerons dans ces deux expressions, $\rho_1^2 + 2\mu\Sigma\xi_1 x_4$ et $\rho_2^2 - 2\lambda\Sigma\xi_1 x_4$ par leurs valeurs tirées des deux équations (4) et (6) :

$$\rho_1^2 + 2\mu\Sigma\xi_1 x_4 = -\rho_1 V_1 + 2\Sigma x_4 y_4 - 2\mu\Sigma x_4 Y_1 - 2\mu\Sigma\xi_1 y_4 \cdot s^2 + 2\mu^2 s^2, \tag{7}$$

$$\rho_2^2 - 2\lambda\Sigma\xi_1 x_4 = -\rho_2 V_2 + 2\Sigma x_4 y_4 + 2\lambda\Sigma x_4 Y_1 + 2\lambda\Sigma\xi_1 y_4 \cdot s^2 + 2\lambda^2 s^2. \tag{8}$$

Par conséquent, pour des valeurs arbitraires des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4, x_5, x_6, ρ_1, ρ_2 et pour des valeurs nulles des variables s, Y_1, Y_2, Y_3, y_4, y_5, y_6, V_1, V_2 tous les dénominateurs du système Σ_2 sont holomorphes et nuls. Nous pourrons donc développer ces dénominateurs au voisinage du système des valeurs :

$$\xi_1 - \xi_{10} = \Xi_1 = 0, \qquad \xi_2 - \xi_{20} = \Xi_2 = 0, \qquad \xi_3 - \xi_{30} = \Xi_3 = 0,$$
$$x_4 - x_{40} = X_4 = 0, \qquad x_5 - x_{50} = X_5 = 0, \qquad x_6 - x_{60} = X_6 = 0,$$
$$\rho_1 - \rho_{10} = P_1 = 0, \qquad \rho_2 - \rho_{20} = P_2 = 0,$$
$$V_1 = V_2 = s = Y_1 = Y_2 = Y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0.$$

Pour ces valeurs arbitraires des variables on a, en particulier :

$$\left(\frac{A}{B}\right)_0 = \frac{1}{2(m_1 + m_2)}, \qquad x_{40}^2 + x_{50}^2 + x_{60}^2 = 0.$$

Par suite, en nous bornant aux termes du premier degré le système Σ_2 se transforme en un système Σ_2' :

$$\frac{ds}{\frac{s}{2}} = \frac{d\xi_1}{Y_1} = \frac{d\xi_2}{Y_2} = \frac{d\xi_3}{Y_3} = \frac{dx_4}{sy_4} = \frac{dx_5}{sy_5} = \frac{dx_6}{sy_6} = \frac{d\rho_1}{\frac{V_1}{2}} = \frac{d\rho_2}{\frac{V_2}{2}}$$

$$= \frac{dY_1}{-\frac{Y_1}{2} + \frac{\beta_{10}(x_4 - \xi_1\Sigma\xi_1x_4)_0}{2(m_1+m_2)}s + \ldots} = \frac{dY_2}{-\frac{Y_2}{2} + \frac{\beta_{10}(x_5 - \xi_2\Sigma\xi_1x_4)_0}{2(m_1+m_2)}s + \ldots} = \frac{dY_3}{-\frac{Y_3}{2} + \frac{\beta_{10}(x_6 - \xi_3\Sigma\xi_1x_4)_0}{2(m_1+m_2)}s + \ldots}$$

$$= \frac{dy_4}{\frac{y_4}{2} - \frac{\gamma_{10}x_{40}}{2(m_1+m_2)}s + \ldots} = \frac{dy_5}{\frac{y_5}{2} - \frac{\gamma_{10}x_{50}}{2(m_1+m_2)}s + \ldots} = \frac{dy_6}{\frac{y_6}{2} - \frac{\gamma_{10}x_{60}}{2(m_1+m_2)}s + \ldots}$$

$$= \frac{dV_1}{-V_1 + \frac{\Sigma x_{40}y_4}{\rho_{10}} - \frac{\mu}{\rho_{10}}\Sigma x_{40}Y_1 - \frac{\beta_{10}\rho_{10}\Sigma\xi_{10}x_{40}}{2(m_1+m_2)}s + \ldots} = \frac{dV_2}{-V_2 + \frac{\Sigma x_{40}y_4}{\rho_{20}} + \frac{\lambda}{\rho_{20}}\Sigma x_{40}Y_1 - \frac{\beta_{10}\rho_{20}\Sigma\xi_{10}x_{40}}{2(m_1+m_2)}s + \ldots}.$$

6. **Troisième changement de variables.** — Les dénominateurs correspondant aux différentielles dY_1, dY_2, dY_3, dV_1, dV_2 contenant au premier degré plusieurs des variables, nous ferons deux changements successifs de variables :

1°
$$Z_1 = Y_1 - \frac{\beta_{10}(x_4 - \xi_1\Sigma\xi_1x_4)_0}{2(m_1+m_2)}s, \qquad Z_2 = Y_2 - \frac{\beta_{10}(x_5 - \xi_2\Sigma\xi_1x_4)_0}{2(m_1+m_2)}s,$$

$$Z_3 = Y_3 - \frac{\beta_{10}(x_6 - \xi_3\Sigma\xi_1x_4)_0}{2(m_1+m_2)}s.$$

2°
$$W_1 = V_1 - \frac{2}{3}\frac{\Sigma x_{40}y_4}{\rho_{10}} + \frac{2\mu}{\rho_{10}}\Sigma x_{40}Z_1 - \frac{\beta_{10}}{3(m_1+m_2)}\cdot\frac{\Sigma\xi_1x_{40}}{\rho_{10}}[\mu\Sigma\xi_1x_4 - \rho_1^2]_0 s,$$

$$W_2 = V_2 - \frac{2}{3}\frac{\Sigma x_{40}y_4}{\rho_{20}} - \frac{2\lambda}{\rho_{20}}\Sigma x_{40}Z_1 + \frac{\beta_{10}}{3(m_1+m_2)}\cdot\frac{\Sigma\xi_1x_{40}}{\rho_{20}}[\lambda\Sigma\xi_1x_4 + \rho_2^2]_0 s.$$

7. **Système différentiel** Σ_3. — Après avoir multiplié par 2 tous les dénominateurs, nous obtenons entre les nouvelles variables :

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ \rho_1,\ \rho_2 \qquad \text{et} \qquad Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6,\ W_1,\ W_2$$

le système différentiel d'ordre seize Σ_3 :

$$\frac{ds}{s} = \frac{d\xi_1}{2Z_1 + \frac{\beta_{10}(x_4 - \xi_1\Sigma\xi_1x_4)_0}{m_1+m_2}s} = \frac{d\xi_2}{2Z_2 + \frac{\beta_{10}(x_5 - \xi_2\Sigma\xi_1x_4)_0}{m_1+m_2}s} = \frac{d\xi_3}{2Z_3 + \frac{\beta_{10}(x_6 - \xi_3\Sigma\xi_1x_4)_0}{m_1+m_2}s}$$

$$\frac{dx_4}{2s^2y_4} = \frac{dx_5}{2s^2y_5} = \frac{dx_6}{2s^2y_6}$$

$$= \frac{d\rho_1}{W_1 + \frac{2}{3}\frac{\Sigma x_{40}y_4}{\rho_{10}} - \frac{2\mu}{\rho_{10}}\Sigma x_{40}Z_1 + \frac{\beta_{10}}{3(m_1+m_2)}\frac{\Sigma\xi_1x_{40}}{\rho_{10}}[\mu\Sigma\xi_1x_4 - \rho_1^2]_0 s}$$

$$= \frac{d\rho_2}{W_2 + \frac{2}{3}\frac{\Sigma x_{40}y_4}{\rho_{20}} + \frac{2\lambda}{\rho_{20}}\Sigma x_{40}Z_1 - \frac{\beta_{10}}{3(m_1+m_2)}\frac{\Sigma\xi_1x_{40}}{\rho_{20}}[\lambda\Sigma\xi_1x_4 + \rho_2^2]_0 s}$$

$$= \frac{dZ_1}{-Z_1 + \ldots} = \frac{dZ_2}{-Z_2 + \ldots} = \frac{dZ_3}{-Z_3 + \ldots}$$

$$= \frac{dy_4}{y_4 - \frac{\gamma_{10} x_{40}}{m_1 + m_2} s + \ldots} = \frac{dy_5}{y_5 - \frac{\gamma_{10} x_{50}}{m_1 + m_2} s + \ldots} = \frac{dy_6}{y_6 - \frac{\gamma_{10} x_{60}}{m_1 + m_2} s + \ldots} = \frac{dW_1}{-2W_1 + \ldots} = \frac{dW_2}{-2W_2 + \ldots}.$$

8. **Application du théorème fondamental au système** Σ_3. — Le système différentiel Σ_3 admet la multiplicité singulière :

$$s = Z_1 = Z_2 = Z_3 = y_4 = y_5 = y_6 = W_1 = W_2 = 0.$$

Le long de cette multiplicité singulière, l'équation caractéristique du système Σ_3 a quatre racines positives égales à 1 qui correspondent aux variables s, y_4, y_5, y_6 ; cette équation a d'autre part cinq racines négatives : deux égales à 2 qui correspondent aux variables W_1, W_2 et trois égales à 1 qui correspondent aux variables Z_1, Z_2, Z_3 ; enfin cette équation a huit racines nulles qui correspondent aux variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4, x_5, x_6, ρ_1, ρ_2. En chaque point :

$$\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60}, \rho_{10}, \rho_{20}$$

de la multiplicité singulière passent deux familles de caractéristiques. L'une d'elles s'obtient en exprimant les variables s, y_4, y_5, y_6 en séries entières s'annulant avec les variables W_1, W_2, Z_1, Z_2, Z_3. L'une de ces équations qui est résolue par rapport à la variable s se réduit à :

$$s = 0.$$

et par conséquent aucun mouvement ne correspond à cette famille.

Les caractéristiques de l'autre famille sont déterminées d'une part, par treize équations non différentielles :

$$\text{(9)} \quad \begin{cases} \Xi_i = S_1(s, y_4, y_5, y_6 \mid \xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60}, \rho_{10}, \rho_{20}), & (i = 1, 2, 3), \\ X_i = S_1(\quad - \quad \mid \quad - \quad), & (i = 1, 2, 3), \\ P_i = S_1(\quad - \quad \mid \quad - \quad), & (i = 1, 2), \end{cases}$$

$$\text{(10)} \quad Z_i = S_2(\quad - \quad \mid \quad - \quad), \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\text{(11)} \quad W_i = S_2(\quad - \quad \mid \quad - \quad), \quad (i = 1, 2),$$

et d'autre part, après substitution des développements précédents dans le système Σ_3 par trois équations différentielles :

$$\text{(12)} \quad s\frac{dy_4}{ds} = y_4 - \frac{\gamma_{10} x_{40}}{m_1 + m_2} s + \ldots, \qquad s\frac{dy_5}{ds} = y_5 - \frac{\gamma_{10} x_{50}}{m_1 + m_2} s + \ldots, \qquad s\frac{dy_6}{ds} = y_6 - \frac{\gamma_{10} x_{60}}{m_1 + m_2} s + \ldots$$

Après cette substitution les termes non écrits dans les seconds membres du système différentiel (12) sont au moins du second degré par rapport aux variables s, y_4, y_5, y_6. Le système différentiel (12) admet la multiplicité singulière :

$$s = y_4 = y_5 = y_6 = 0.$$

et les racines de l'équation caractéristique sont égales à 1. Les équations (12) seront satisfaites si l'on substitue aux variables y_4, y_5, y_6 des développements en séries entières en :

$$s, \qquad s \log s$$

dépendant de trois constantes arbitraires C_4, C_5, C_6 :

$$y_4 = C_4 s - \frac{\gamma_{10} x_{40}}{m_1 + m_2} s \log s + \dots, \qquad y_5 = C_5 s - \frac{\gamma_{10} x_{50}}{m_1 + m_2} s \log s, \qquad y_6 = C_6 s - \frac{\gamma_{10} x_{60}}{m_1 + m_2} s \log s + \dots$$

9. **De la disparition des logarithmes.** — En se reportant au système différentiel (12) on constate que les logarithmes disparaissent si les coefficients de s sont nuls. Par conséquent l'une ou l'autre des deux relations suivantes doit être satisfaite :

$$\lambda \rho_{20}^3 + \mu \rho_{10}^3 = 0 \tag{13}$$

$$x_{40} = x_{50} = x_{60} = 0. \tag{14}$$

Le premier cas ne peut pas se présenter car des équations (7) et (8) nous déduisons :

$$\rho_{10}^2 + 2\mu \Sigma \xi_{10} x_{40} = 0 \tag{15}$$

$$\rho_{20}^2 - 2\lambda \Sigma \xi_{10} x_{40} = 0 \tag{16}$$

et il est impossible de satisfaire aux trois égalités (13), (15), (16). Enfin le second cas est à éliminer, puisque nous n'envisageons pas dans cette étude le choc triple réel.

10. **Expression des coordonnées en fonction de** s. — En tenant compte des équations (9), (10), (11) l'étude du système différentiel Σ_3 permet d'obtenir immédiatement les premiers termes des développements des variables suivant les puissances de s et de $s \log s$:

$$\tag{17} \left\{ \begin{aligned} x_4 &= x_{40} + \frac{1}{3}\left[2C_4 + \frac{2}{3}\frac{\gamma_{10} x_{40}}{(m_1 + m_2)}\right] s^3 - \frac{2}{3}\frac{\gamma_{10} x_{40}}{(m_1 + m_2)} s^3 \log s + \dots, \\ \xi_1 &= \xi_{10} + \frac{\beta_{10}}{(m_1 + m_2)} (x_4 - \xi_1 \Sigma \xi_1 x_4)_0 s + \dots, \\ \rho_1 &= \rho_{10} + \left[\frac{\beta_{10} \rho_{10}^3}{4\mu(m_1 + m_2)} + \frac{2}{3\rho_{10}} \Sigma C_4 x_{40}\right] s + \dots, \end{aligned} \right.$$

Le développement des variables ξ_1, ρ_1 ne contient pas le terme $s \log s$.

11. **Expression des coordonnées en fonction du temps.** — Posons $t_0 = 0$. De l'égalité :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r \frac{A}{B}$$

nous déduisons successivement :

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = s^4 \frac{A}{B} = s^4 S(s \log s), \qquad \frac{dt}{ds} = s^2 S(s, s \log s), \qquad t = s^3 S(s, s \log s),$$

$$t^{\frac{1}{3}} = sS(s, s \log s), \qquad \log t = 3 \log s + S(s, s \log s), \qquad t^{\frac{1}{3}} \log t = s \log s\, S(s, s \log s) + sS(s, \log s).$$

Si nous considérons les deux expressions de $t^{\frac{1}{3}}$ et de $t^{\frac{1}{3}} \log t$ comme des équations implicites en s et $s \log s$, nous obtenons par inversion :

$$s = S_1(t^{\frac{1}{3}}, t^{\frac{1}{3}} \log t), \qquad s \log s = S_1(t^{\frac{1}{3}}, t^{\frac{1}{3}} \log t). \ (1)$$

Par conséquent, les coordonnées s'expriment par des développements en séries entières en :

$$t^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad t^{\frac{1}{3}} \log t$$

et l'instant du choc est un point critique transcendant.

Le premier terme en logarithme contenu dans A étant $s^2 \log s$, il s'ensuit que le premier terme en logarithme du développement de s suivant les puissances de $t^{\frac{1}{3}}$ et de $t^{\frac{1}{3}} \log t$ est $t \log t$. Par suite, en se reportant aux développements (17) nous obtenons pour premiers termes des développements des coordonnées suivant les puissances de $t^{\frac{1}{3}}$ et de $t^{\frac{1}{3}} \log t$:

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_2 \xi_{10} t^{\frac{2}{3}} + a_3 t + a_4 t^{\frac{4}{3}} + a_5 t^{\frac{4}{3}} \log t + \ldots, \\ x_4 = x_{40} + b_3 t + b_4 t \log t + \ldots. \end{array} \right.$$

a_i et b_i désignant des constantes.

12. **Du nombre et du choix des constantes.** — La résolution du système Σ_3 introduit onze paramètres : les huit valeurs arbitraires données aux variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4, x_5, x_6, ρ_1, ρ_2 et les trois constantes d'intégration C_4, C_5, C_6. Ces paramètres satisfaisant à trois relations déduites des équations (1), (3) et (5) :

$$\xi_{10}^2 + \xi_{20}^2 + \xi_{30}^2 = 1, \qquad x_{40}^2 + x_{50}^2 + x_{60}^2 = 0, \qquad \frac{\rho_{10}}{\rho_{20}} = \left(-\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

leur nombre se réduit ainsi à huit. Pour passer à la solution du système différentiel (I) il faut ajouter la constante des forces vives K et la constante t_0 introduite par l'intégration de l'expression en s de la dérivée $\frac{dt}{ds}$. Finalement cette solution dépendra de dix constantes arbitraires et nous pourrons choisir :

$$\xi_{10}, \xi_{20}, x_{40}, x_{50}, \rho_{10}, C_4, C_5, C_6, K, t_0.$$

13. **Conditions de choc.** — La solution générale du système différentiel (I) dépendant de douze constantes arbitraires, le mouvement des trois corps aboutissant à un choc de deuxième espèce satisfait donc à deux conditions. Ces deux conditions peuvent s'obtenir par l'élimination des dix paramètres entre les développements (18) des coordonnées et leurs dérivées par rapport au temps. D'après une remarque de M. Chazy (2) : « ces deux conditions s'obtiennent par un calcul qui à partir du système

(1) Chazy, *Sur le problème rectiligne des trois corps.* Bulletin de la Société Mathématique, t. 57, 1927, p. 259-260.
(2) Chazy, *Sur les multiplicités singulières du problème des trois corps.* Bulletin des Sciences mathématiques, t. 56, 1932, p. 79-104.

différentiel Σ_3 d'ordre seize est l'extension du calcul par lequel on forme en un col d'un système différentiel d'ordre 2 la surface lieu des caractéristiques mise en évidence par Poincaré ». Dans l'étude du choc imaginaire de deuxième espèce, ce calcul conduit aux cinq équations (10) et (11). En ayant égard aux relations (2), (4) et (6), deux de ces équations donnent les conditions de choc et par symétrie nous choisirons :

$$W_i = S_2(s, y_4, y_5, y_6 \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3, x_4, x_5, x_6, \rho_1, \rho_2), \qquad (i = 1, 2).$$

Ces deux conditions de choc sont transcendantes. En effet, si elles étaient algébriques, d'après le théorème de Bruns complété par Painlevé elles seraient des combinaisons des quatre intégrales des forces vives et des aires et il existerait alors une relation entre les quatre constantes correspondantes. Or, si dans les intégrales des aires dont la première est :

$$g\left[x_1\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dx_1}{dt}\right] + h\left[x_4\frac{dx_5}{dt} - x_5\frac{dx_4}{dt}\right]$$

nous remplaçons les variables par leurs valeurs en fonction de s, les constantes des aires ont pour expressions les produits du coefficient $h\sqrt{2(m_1+m_2)}$ par :

$$[x_{40}C_5 - x_{50}C_4], \qquad [x_{60}C_4 - x_{40}C_6], \qquad [x_{50}C_6 - x_{60}C_5]$$

et ces quantités sont bien indépendantes de la constante des forces vives.

Conclusion. — Après trois changements successifs de variables :

1° $$\frac{dx_i}{dr} = y_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad \frac{dr_1}{dr} = u_1, \quad \frac{dr_2}{dr} = u_2,$$

2° $$r = s^2, \quad r_1 = s\rho_1, \quad r_2 = s\rho_2, \quad x_1 = \xi_1 s^2, \quad x_2 = \xi_2 s^2, \quad x_3 = \xi_3 s^2,$$

$$\frac{dr_1}{ds} = V_1 + \rho_1, \quad \frac{dr_2}{ds} = V_2 + \rho_2, \quad y_1 - \xi_1 = Y_1, \quad y_2 - \xi_2 = Y_2, \quad y_3 - \xi_3 = Y_3,$$

3° $$Z_1 = Y_1 - \frac{\beta_{10}(x_4 - \xi_1\Sigma\xi_1x_4)_0}{2(m_1+m_2)}s, \quad Z_2 = Y_2 - \frac{\beta_{10}(x_5 - \xi_2\Sigma\xi_1x_4)}{2(m_1+m_2)}s, \quad Z_3 = Y_3 - \frac{\beta_{10}(x_6 - \xi_3\Sigma\xi_1x_4)_0}{2(m_1+m_2)}s,$$

$$W_1 = V_1 - \frac{2}{3}\frac{\Sigma x_{40}y_4}{\rho_{10}} + \frac{2\mu}{\rho_{10}}\Sigma x_{40}Z_1 - \frac{\beta_{10}}{3(m_1+m_2)}\frac{\Sigma\xi_1x_{40}}{\rho_{10}}[\mu\Sigma\xi_1x_4 - \rho_1^2]_0 s,$$

$$W_2 = V_2 - \frac{2}{3}\frac{\Sigma x_{40}y_4}{\rho_{20}} - \frac{2\lambda}{\rho_{10}}\Sigma x_{40}Z_1 + \frac{\beta_{10}}{3(m_1+m_2)}\frac{\Sigma\xi_1x_{40}}{\rho_{20}}[\lambda\Sigma\xi_1x_4 + \rho_2^2]_0 s,$$

nous obtenons entre les variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4, x_5, x_6, Z_1, Z_2, Z_3, y_4, y_5, y_6 et les variables auxiliaires ρ_1, ρ_2, W_1, W_2 un système différentiel Σ_3 auquel le théorème fondamental est applicable. Les coordonnées s'expriment par des développements en séries entières en $t^{\frac{1}{3}}$ et $t^{\frac{1}{3}}\log t$. Le développement de la distance qui s'annule en même temps que ses projections sur les axes de coordonnées commence par un terme en $t^{\frac{2}{3}}$ et le développement des autres distances commence par un terme en $t^{\frac{1}{3}}$. Les développements dépendent de dix constantes arbitraires y compris l'instant du choc.

NOTE SUR LE CHOC BINAIRE RÉEL

En prenant la distance r qui s'annule pour variable indépendante nous obtenons un système différentiel analogue à celui que M. Chazy a formé dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* pour l'étude du choc binaire réel et l'étude des trajectoires hyperboliques et hyperboliques-paraboliques.

Considérons le système d'équations différentielles (I), (chapitre I, choc imaginaire simple) et faisons les deux changements de variables successifs :

1° $$\frac{dx_i}{dr} = y_i$$

2° $$x_1 = r\xi_1, \quad x_2 = r\xi_2, \quad x_3 = r\xi_3, \quad y_1 - \xi_1 = z_1, \quad y_2 - \xi_2 = z_2, \quad y_3 - \xi_3 = z_3.$$

A partir de l'expression $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et de sa dérivée par rapport à r nous obtenons les deux relations :

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \tag{1}$$

$$\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 = 0 \tag{2}$$

En fonction des nouvelles variables on a :

$$\sum_1^3 y_i^2 = \sum_1^3 z_i^2 + 1, \qquad A = g + g\sum_1^3 z_i^2 + h\sum_4^6 y_i^2.$$

A partir du système différentiel Σ_1 (chapitre I, choc imaginaire simple) et en faisant le second changement de variables indiqué nous obtiendrons entre les variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4, x_5, x_6, z_1, z_2, z_3, y_4, y_5 y_6 le système différentiel Σ_1' :

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\xi_1}{z_1} = \frac{d\xi_2}{z_2} = \frac{d\xi_3}{z_3} = \frac{dx_4}{ry_4} = \frac{dx_5}{ry_5} = \frac{dx_6}{ry_6} = \frac{dz_2}{\dots} = \frac{dz_3}{\dots} = \frac{dy_5}{\dots} = \frac{dy_6}{\dots}$$

$$= \frac{dz_1}{-z_1 - (z_1+\xi_1)\sum_1^3 z_i^2 + \dfrac{g + g\sum_1^3 z_i^2 + h\sum_4^6 y_i^2}{2M\left[\dfrac{r}{m_1 r_1} + \dfrac{r}{m_2 r_2} + \dfrac{1}{m_3}\right] + Kr}\left\{(m_1+m_2)z_1 - m_3\left(\dfrac{\mu}{r_1^3} + \dfrac{\lambda}{r_2^3}\right)\xi_1 r^3 + m_3\left(\dfrac{1}{r_1^3} - \dfrac{1}{r_2^3}\right)x_4 r^2 + (z_1+\xi_1)\left[m_3\left(\dfrac{\mu}{r_1^3} + \dfrac{\lambda}{r_2^3}\right)r^3 - m_3\left(\dfrac{1}{r_1^3} - \dfrac{1}{r_2^3}\right)(\xi_1 x_4 + \xi_2 x_5 + \xi_3 x_6)r^2\right]\right\}}$$

$$= \frac{dy_4}{-y_4\sum_1^3 z_i^2 + \dfrac{g + g\sum_1^3 z_i^2 + h\sum_4^6 y_i^2}{2M\left[\dfrac{r}{m_1 r_1} + \dfrac{r}{m_2 r_2} + \dfrac{1}{m_3}\right] + Kr}\left\{(m_1+m_2)y_4 - M\left(\dfrac{\lambda}{r_1^3} + \dfrac{\mu}{r_2^3}\right)x_4 r^2 + \lambda\mu M\left(\dfrac{1}{r_1^3} - \dfrac{1}{r_2^3}\right)\xi_1 r^3 + y_4\left[m_3\left(\dfrac{\mu}{r_1^3} + \dfrac{\lambda}{r_2^3}\right)r^3 - m_3\left(\dfrac{1}{r_1^3} - \dfrac{1}{r_2^3}\right)(\xi_1 x_4 + \xi_2 x_5 + \xi_3 x_6)r^2\right]\right\}}$$

Pour des valeurs nulles des variables r, z_1, z_2, z_3, y_4, y_5, y_6 et pour des valeurs arbitraires des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4, x_5, x_6 tous les dénominateurs sont nuls et l'on a :

$$\left[\frac{g + g\sum_1^3 z_i^2 + h\sum_4^6 y_i^2}{2\mathrm{M}\left[\frac{r}{m_1 r_1} + \frac{r}{m_2 r_2} + \frac{1}{m_3}\right] + \mathrm{K}r}\right]_0 = \frac{1}{2(m_1 + m_2)}.$$

Par conséquent, le long de la multiplicité singulière :

$$r = z_1 = z_2 = z_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$$

l'équation caractéristique du système considéré aura trois racines négatives égales à $\frac{1}{2}$ correspondant aux variables z_1, z_2, z_3, quatre racines positives dont trois égales à $\frac{1}{2}$ correspondant aux variables y_4, y_5, y_6 et une égale à 1 correspondant à la variable r ; enfin, cette équation aura six racines nulles correspondant aux variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4, x_5, x_6. En chaque point ξ_{10}, ξ_{20}, ξ_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60} de cette multiplicité singulière passent deux familles de caractéristiques dont l'une est à éliminer. Les caractéristiques de la famille que nous considérerons sont définies par neuf équations non différentielles de la forme :

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi_i - \xi_{i0} = \mathrm{S}_1(r, y_4, y_5, y_6 \mid \xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60}), & (i = 1, 2, 3), \\ x_i - x_{i0} = \mathrm{S}_1(r, y_4, y_5, y_6 \mid \xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60}), & (i = 4, 5, 6), \end{cases}$$

$$(4)\qquad z_i = \mathrm{S}_2(r, y_4, y_5, y_6 \mid \xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60}), \quad (i = 1, 2, 3),$$

et après substitution des fonctions S dans le système différentiel Σ_1' par le système différentiel d'ordre trois :

$$(5)\qquad r\frac{dy_4}{dr} = \frac{y_4}{2} + \ldots, \qquad r\frac{dy_5}{dr} = \frac{y_5}{2} + \ldots, \qquad r\frac{dy_6}{dr} = \frac{y_6}{2} + \ldots,$$

où les termes non écrits sont du second degré par rapport aux variables r, y_4, y_5, y_6. Le système différentiel (5) admet la multiplicité singulière :

$$r = y_4 = y_5 = y_6 = 0,$$

et l'équation caractéristique admet une racine égale à 1 correspondant à la variable r et trois racines égales à $\frac{1}{2}$ correspondant aux variables y_4, y_5, y_6. Substituons aux variables y_4, y_5, y_6 des développements à coefficients indéterminés suivant les puissances de $r^{\frac{1}{2}}$ sans termes constants. La détermination des coefficients est possible et par suite les variables y_i s'expriment par des développements en séries entières en $r^{\frac{1}{2}}$ dont les premiers termes sont :

$$\mathrm{C}_4 r^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathrm{C}_5 r^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathrm{C}_6 r^{\frac{1}{2}},$$

C_4, C_5, C_6 désignant des constantes arbitraires.

Nous déterminerons l'expression des coordonnées en fonction du temps à partir de l'égalité :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r\frac{A}{B} \cdot$$

de laquelle nous déduirons successivement en posant $t_0 = 0$:

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = rS(r^{\frac{1}{2}}), \qquad \frac{dt}{dr} = r^{\frac{1}{2}}S(r^{\frac{1}{2}}), \qquad t = r^{\frac{3}{2}}S(r^{\frac{1}{2}}), \qquad t^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{2}}S(r^{\frac{1}{2}})$$

et par inversion :

$$r = t^{\frac{2}{3}}S(t^{\frac{1}{3}}).$$

La résolution du système Σ_1' introduit neuf paramètres : les six constantes arbitraires ξ_{10}, ξ_{20}, ξ_{30}, x_{40}, x_{50}, x_{60} et les trois constantes d'intégration C_4, C_5, C_6. En ayant égard à la relation (1) de laquelle on déduit $\xi_{10}^2 + \xi_{20}^2 + \xi_{30}^2 = 1$ le nombre des paramètres se réduit à huit. Pour passer à la solution du système différentiel (I) il faut ajouter la constante des forces vives K et la constante t_0 introduite par l'intégration de l'expression en $r^{\frac{1}{2}}$ de la dérivée $\frac{dt}{dr}$. Finalement cette solution dépendra de dix constantes et nous pourrons choisir ξ_{10}, ξ_{20}, x_{40}, x_{50}, x_{60}, C_4, C_5, C_6, K, t_0.

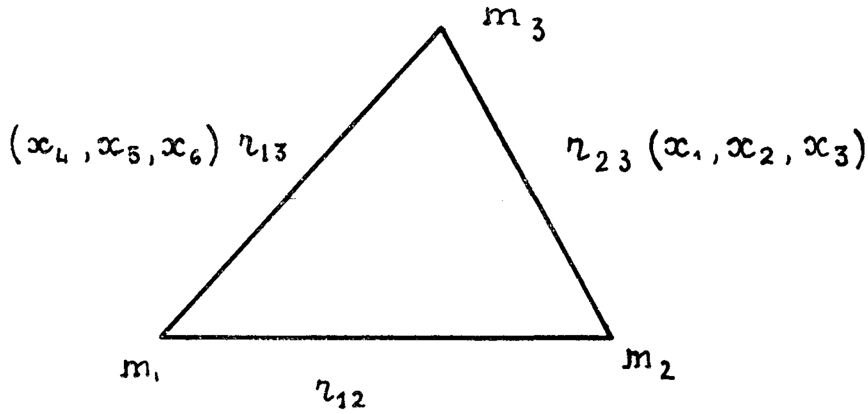
La solution générale du système différentiel (I) dépendant de douze constantes arbitraires, le mouvement des trois corps aboutissant à un choc binaire réel satisfait donc à deux conditions. Deux des équations (4) : $z_i = S(r, y_4, y_5, y_6 \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3, x_4, x_5, x_6)$ représentent les conditions de choc ; les trois variables z_1, z_2, z_3 ne sont pas en effet indépendantes puisqu'il existe entre elles la relation (2) : $\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 = 0$.

Nous retrouvons ainsi des résultats déjà énoncés, mais nous avons refait cette étude sous une forme nouvelle qui nous sera utile dans la suite de ce travail.

CHAPITRE III

CHOC IMAGINAIRE DOUBLE

Définition. — Soient trois corps de masses m_1, m_2, m_3 dont les distances sont respectivement r_{12}, r_{13}, r_{23}.



Il existe entre ces trois corps un choc imaginaire double si deux distances, r_{13} *et* r_{23} *par exemple, s'annulent sans que leurs projections sur les axes de coordonnées soient nulles.*

Équations différentielles du mouvement. — Rapportons le mouvement des deux masses m_1, m_2 à la troisième masse m_3. Désignons par x_1, x_2, x_3 et par x_4, x_5, x_6 les coordonnées respectives des masses m_2, m_1 par rapport à la masse m_3 ; par K la constante des forces vives et par :

$$r_{13} = \sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}, \qquad r_{23} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \qquad r_{12} = \sqrt{\Sigma(x_4 - x_1)^2}$$

les distances mutuelles des trois masses. Le mouvement des trois corps est défini par le système différentiel (I) d'ordre douze :

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -(m_3 + m_2)\frac{x_1}{r_{23}^3} - m_1 \frac{(x_1 - x_4)}{r_{12}^3} - m_1 \frac{x_4}{r_{13}^3}, \\ \frac{d^2x_4}{dt^2} &= -(m_3 + m_1)\frac{x_4}{r_{13}^3} - m_2 \frac{(x_4 - x_1)}{r_{12}^3} - m_2 \frac{x_1}{r_{23}^3}. \end{aligned} \right.$$

Il faut ajouter à ces équations quatre équations analogues relatives aux variables x_2, x_3, x_5, x_6. Les équations différentielles (I) admettent l'intégrale des forces vives :

$$m_3\left[m_1\frac{dx_4^2+dx_5^2+dx_6^2}{dt^2}+m_2\frac{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}{dt^2}\right]+m_1m_2\left[\frac{(dx_4-dx_1)^2+(dx_5-dx_2)^2+(dx_6-dx_3)^2}{dt^2}\right]$$
$$-2(m_1+m_2+m_3)\left[\frac{m_2m_3}{r_{23}}+\frac{m_2m_1}{r_{12}}+\frac{m_1m_3}{r_{13}}\right]=\mathrm{K}.$$

1. **Premier changement de variables.** — Prenons pour variable indépendante une distance qui s'annule, soit $r_{23}=r$, et posons :

$$\frac{dx_1}{dr}=y_1,\quad \frac{dx_2}{dr}=y_2,\quad \frac{dx_3}{dr}=y_3,\quad \frac{dx_4}{dr}=y_4,\quad \frac{dx_5}{dr}=y_5,\quad \frac{dx_6}{dr}=y_6,$$
$$r_{13}=r\rho_1,\quad r_{12}=\frac{r}{\rho_2},\quad \frac{dr_{13}}{dr}=u_1,\quad \frac{dr_{12}}{dr}=u_2.$$

Les nouvelles variables sont :

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \qquad \text{et} \qquad y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$$

et nous y joindrons les quatre variables auxiliaires :

$$\rho_1, \rho_2 \qquad \text{et} \qquad u_1, u_2.$$

A partir des expressions des distances en fonction des coordonnées et de leurs dérivées par rapport à r nous obtenons six relations entre les nouvelles variables :

(1) $$r^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$
(2) $$r^2\rho_1^2=x_4^2+x_5^2+x_6^2,$$
(3) $$r^2=\rho_2^2[r^2+r^2\rho_1^2-2\,\Sigma x_1x_4],$$
(4) $$r=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3,$$
(5) $$r\rho_1u_1=x_4y_4+x_5y_5+x_6y_6,$$
(6) $$ru_2=\rho_2[r+r\rho_1u_1-(x_1y_4+x_2y_5+x_3y_6+x_4y_1+x_5y_2+x_6y_3)].$$

2. **Système différentiel** Σ_1. — Posons :

$$\mathrm{A}=m_3[m_1(y_4^2+y_5^2+y_6^2)+m_2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)]+m_1m_2[(y_4-y_1)^2+(y_5-y_2)^2+(y_6-y_3)^2],$$
$$\mathrm{B}=2(m_1+m_2+m_3)\left[m_2m_3+m_1m_2\rho_2+\frac{m_1m_3}{\rho_1}\right]+\mathrm{K}r,$$
$$\sigma=y_1^2+y_2^2+y_3^2,\qquad \mathrm{D}=x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6,$$
$$\mathrm{E}=-[m_2+m_3+m_1\rho_2^3]r^2+m_1\left[\rho_2^3-\frac{1}{\rho_1^3}\right]\mathrm{D}.$$

L'intégrale des forces vives se transforme en une équation dont on déduit immédiatement :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2=r\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}.$$

Nous obtenons entre les variables le système différentiel Σ_1 d'ordre seize :

$$\frac{dr}{r}=\frac{dx_1}{ry_1}=\frac{dx_2}{ry_2}=\frac{dx_3}{ry_3}=\frac{dx_4}{ry_4}=\frac{dx_5}{ry_5}=\frac{dx_6}{ry_6}=\frac{d\rho_1}{u_1-\rho_1}=\frac{d\rho_2}{\rho_2-\rho_2u_3}$$

$$=\frac{dy_1}{y_1-\sigma y_1-\frac{A}{B}\left\{\frac{1}{r}\left[(m_2+m_3)x_1+m_1(x_1-x_4)\rho_2^3+m_1\frac{x_4}{\rho_1^3}\right]+\frac{y_1}{r^2}E\right\}}$$

$$=\frac{dy_2}{y_2-\sigma y_2-\frac{A}{B}\left\{\frac{1}{r}\left[(m_2+m_3)x_2+m_1(x_2-x_5)\rho_2^3+m_1\frac{x_5}{\rho_1^3}\right]+\frac{y_2}{r^2}E\right\}}$$

$$=\frac{dy_3}{y_3-\sigma y_3-\frac{A}{B}\left\{\frac{1}{r}\left[(m_2+m_3)x_3+m_1(x_3-x_6)\rho_2^3+m_1\frac{x_6}{\rho_1^3}\right]+\frac{y_3}{r^2}E\right\}}$$

$$=\frac{dy_4}{y_4-\sigma y_4-\frac{A}{B}\left\{\frac{1}{r}\left[(m_1+m_3)\frac{x_4}{\rho_1^3}+m_2x_1+m_2(x_4-x_1)\rho_2^3\right]+\frac{y_4}{r^2}E\right\}}$$

$$=\frac{dy_5}{y_5-\sigma y_5-\frac{A}{B}\left\{\frac{1}{r}\left[(m_1+m_3)\frac{x_5}{\rho_1^3}+m_2x_2+m_2(x_5-x_2)\rho_2^3\right]+\frac{y_5}{r^2}E\right\}}$$

$$=\frac{dy_6}{y_6-\sigma y_6-\frac{A}{B}\left\{\frac{1}{r}\left[(m_1+m_3)\frac{x_6}{\rho_1^3}+m_2x_3+m_2(x_6-x_3)\rho_2^3\right]+\frac{y_6}{r^2}E\right\}}$$

$$=\frac{du_1}{u_1-\sigma u_1+\frac{A}{Br^2}\left\{m_2(\rho_2^3-1)\frac{D}{\rho_1}-\left[\frac{m_1+m_3}{\rho_1^3}+m_2\rho_2^3\right]\rho_1r^2-u_1E\right\}+\frac{\sum_4^6 y_i^2-u_1^2}{\rho_1}}$$

$$=\frac{du_2}{u_2-\sigma u_2+\left[\sum_1^6 y_i^2-2\Sigma y_1y_4-u_2^2\right]\rho_2+\frac{A}{B}\left\{-\left[\frac{m_3}{\rho_1^3}+(m_1+m_2)\rho_2^3\right]\rho_1^3\rho_2-[m_3+(m_1+m_2)\rho_2^3]\rho_2+\left[m_3+\frac{m_3}{\rho_1^3}+2(m_1+m_2)\rho_2^3\right]\frac{\rho_2D}{r^2}-\frac{u_2}{r^2}E\right\}}$$

3. **Second changement de variables.** — Afin d'éliminer le facteur $\frac{1}{r^n}$ des dénominateurs précédents, définissons sept nouvelles variables z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, U_1 au moyen des équations :

$$y_1=rz_1,\quad y_2=rz_2,\quad y_3=rz_3,\quad y_4=rz_4,\quad y_5=rz_5,\quad y_6=rz_6,\quad u_1-\rho_1=U_1.$$

Posons :

$$A_1=m_1m_3\sum_4^6 z_i^2+m_3m_2\sum_1^3 z_i^2+m_1m_2\Sigma(z_4-z_1)^2,\qquad \sigma_1=\sum_1^3 z_i^2.$$

Nous obtenons entre les nouvelles variables r, x_i, z_i et les variables auxiliaires ρ_1, ρ_2, U_1, u_2 le système différentiel Σ_2 d'ordre seize :

$$\frac{dr}{r}=\frac{dx_1}{r^2z_1}=\frac{dx_2}{r^2z_2}=\frac{dx_3}{r^2z_3}=\frac{dx_4}{r^2z_4}=\frac{dx_5}{r^2z_5}=\frac{dx_6}{r^2z_6}=\frac{d\rho_1}{U_1}=\frac{d\rho_2}{\rho_2-\rho_2^2u_2}$$

$$=\frac{dz_1}{-\sigma_1z_1r^2-\frac{A_1}{B}\left[(m_2+m_3)x_1+m_1(x_1-x_4)\rho_2^3+m_1\frac{x_4}{\rho_1^3}+z_1E\right]}$$

$$= \frac{dz_2}{-\sigma_1 z_2 r^2 - \frac{A_1}{B}\left[(m_2+m_3)x_2 + m_1(x_2-x_5)\rho_2^3 + m_1\frac{x_5}{\rho_1^3} + z_2 E\right]}$$

$$= \frac{dz_3}{-\sigma_1 z_3 r^2 - \frac{A_1}{B}\left[(m_2+m_3)x_3 + m_1(x_3-x_6)\rho_2^3 + m_1\frac{x_6}{\rho_1^3} + z_3 E\right]}$$

$$= \frac{dz_4}{-\sigma_1 z_4 r^2 - \frac{A_1}{B}\left[(m_1+m_3)\frac{x_4}{\rho_1^3} + m_2 x_1 + m_2(x_4-x_1)\rho_2^3 + z_4 E\right]}$$

$$= \frac{dz_5}{-\sigma_1 z_5 r^2 - \frac{A_1}{B}\left[(m_1+m_3)\frac{x_5}{\rho_1^3} + m_2 x_2 + m_2(x_5-x_2)\rho_2^3 + z_5 E\right]}$$

$$= \frac{dz_6}{-\sigma_1 z_6 r^2 - \frac{A_1}{B}\left[(m_1+m_3)\frac{x_6}{\rho_1^3} + m_2 x_3 + m_2(x_6-x_3)\rho_2^3 + z_6 E\right]}$$

$$= \frac{dU_1}{-2U_1 - \frac{U_1^2}{\rho_1} + (U_1+\rho_1)\sigma_1 r^2 + \frac{\overset{4}{\underset{6}{\Sigma}} z_i^2}{\rho_1} r^2 + \frac{A_1}{B}\left[m_2(\rho_2^3-1)\frac{D}{\rho_1} - \left(\frac{m_1+m_3}{\rho_1^3} + m_2\rho_2^3\right)\rho_1 r^2 - (U_1+\rho_1)E\right]}$$

$$= \frac{du_2}{u_2 - \sigma_1 u_2 r^2 + \left[\sum_1^6 z_i^2 - 2\Sigma z_1 z_4\right]\rho_2 r^2 - u_2^2\rho_2 + \frac{A_1}{B}\left\{-\left[\frac{m_3}{\rho_1^3} + (m_1+m_2)\rho_2^3\right]\rho_1^3\rho_2 r^2 - [m_3 + (m_1+m_2)\rho_2^3]\,\rho_2 r^2 + \left[m_3 + \frac{m_3}{\rho_1^3} + 2(m_1+m_2)\rho_2^3\right]\rho_2 D - u_2 E\right\}}$$

4. **Étude des dénominateurs du système** Σ_2. — Pour des valeurs arbitraires des variables x_i, z_i, ρ_1 et pour des valeurs nulles des variables r, ρ_2, U_1, u_2, les dénominateurs correspondant aux différentielles dr, dx_i, $d\rho_1$, $d\rho_2$, du_2 sont nuls. Les autres dénominateurs sont nuls si les valeurs arbitraires données aux variables x_i, z_i, ρ_1 satisfont aux relations suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} z_{10} &= \left[\frac{(m_2+m_3)x_1\rho_1^3 + m_1 x_4}{m_1 D}\right]_0, & z_{20} &= \left[\frac{(m_2+m_3)x_2\rho_1^3 + m_1 x_5}{m_1 D}\right]_0, & z_{30} &= \left[\frac{(m_2+m_3)x_3\rho_1^3 + m_1 x_6}{m_1 D}\right]_0 \\ z_{40} &= \left[\frac{m_2 x_1\rho_1^3 + (m_1+m_3)x_4}{m_1 D}\right]_0, & z_{50} &= \left[\frac{m_2 x_2\rho_1^3 + (m_1+m_3)x_5}{m_1 D}\right]_0, & z_{60} &= \left[\frac{m_2 x_3\rho_1^3 + (m_1+m_3)x_6}{m_1 D}\right]_0 \end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad \rho_{10} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Développons les dénominateurs au voisinage du système de valeurs :

$$r = \rho_2 = U_1 = u_2 = 0, \qquad x_i - x_{i0} = X_i = 0, \qquad z_i - z_{i0} = Z_i = 0, \qquad \rho_1 - \rho_{10} = P_1 = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Posons :

$$F = \frac{m_1}{\rho_{10}^3}[x_4X_1 + x_5X_2 + x_6X_3 + x_1X_4 + x_2X_5 + x_3X_6] - \frac{3m_1D_0}{\rho_1^4}P_1$$

et remarquons que l'on a :

$$\left(\frac{A_1}{B}\right)_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\rho_{10}^3}{m_1 D_0}.$$

Après développement des dénominateurs, le système Σ_2 se transforme en un système Σ_2' :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{(z_{10}+Z_1)r^2} = \frac{dx_2}{(z_{20}+Z_2)r^2} = \frac{dx_3}{(z_{30}+Z_3)r^2} = \frac{dx_4}{(z_{40}+Z_4)r^2} = \frac{dx_5}{(z_{50}+Z_5)r^2} = \frac{dx_6}{(z_{60}+Z_6)r^2} = \frac{d\rho_1}{U_1} = \frac{d\rho_2}{\rho_2 - \rho_2^2 u_2}$$

$$= \frac{dZ_1}{\frac{Z_1}{2} + \frac{\rho_{10}^3}{2m_1 D_0}\left[-(m_2+m_3)X_1 - \frac{m_1}{\rho_{10}^3}X_4 + \frac{3m_1 x_{40}}{\rho_{10}^4}P_1 + z_{10}F\right] + S_2}$$

$$= \frac{dZ_2}{\frac{Z_2}{2} + \frac{\rho_{10}^3}{2m_1 D_0}\left[-(m_2+m_3)X_2 - \frac{m_1}{\rho_{10}^3}X_5 + \frac{3m_1 x_{50}}{\rho_{10}^4}P_1 + z_{20}F\right] + S_2}$$

$$= \frac{dZ_3}{\frac{Z_3}{2} + \frac{\rho_{10}^3}{2m_1 D_0}\left[-(m_2+m_3)X_3 - \frac{m_1}{\rho_{10}^3}X_6 + \frac{3m_1 x_{60}}{\rho_{10}^4}P_1 + z_{30}F\right] + S_2}$$

$$= \frac{dZ_4}{\frac{Z_4}{2} + \frac{\rho_{10}^3}{2m_1 D_0}\left[-\frac{(m_1+m_3)}{\rho_{10}^3}X_4 - m_2 X_1 + \frac{3(m_1+m_3)}{\rho_{10}^4}x_{40}P_1 + z_{40}F\right] + S_2}$$

$$= \frac{dZ_5}{\frac{Z_5}{2} + \frac{\rho_{10}^3}{2m_1 D_0}\left[-\frac{(m_1+m_3)}{\rho_{10}^3}X_5 - m_2 X_2 + \frac{3(m_1+m_3)}{\rho_{10}^4}x_{50}P_1 + z_{50}F\right] + S_2}$$

$$= \frac{dZ_6}{\frac{Z_6}{2} + \frac{\rho_{10}^3}{2m_1 D_0}\left[-\frac{(m_1+m_3)}{\rho_{10}^3}X_6 - m_2 X_3 + \frac{3(m_1+m_3)}{\rho_{10}^4}x_{60}P_1 + z_{60}F\right] + S_2}$$

$$= \frac{dU_1}{-\frac{3}{2}U_1 - \frac{P_1}{2} + S_2}$$

$$= \frac{du_2}{\frac{3}{2}u_2 + \frac{m_3}{2m_1}(1+\rho_{10}^3)\rho_2 - 3\left(\frac{A_1 D}{B\rho_1^4}\right)_0 [m_3\rho_2 + m_1 u_2]P_1 + \left[\frac{m_3(1+\rho_{10}^3)}{\rho_{10}^3}\rho_2 + \frac{m_1}{\rho_{10}^3}u_2\right] \left\{\left(\frac{A_1}{B}\right)_0 \sum_1^6 \left(\frac{\partial D}{\partial x_i}\right)_0 X_i + \left(\frac{D}{B}\right)_0 \Sigma \left(\frac{\partial A_1}{\partial z_i}\right)_0 Z_i - \left(\frac{A_1 D}{B^2}\right)_0 \left[\left(\frac{\partial B}{\partial \rho_1}\right)_0 P_1 + \left(\frac{\partial B}{\partial \rho_2}\right)_0 \rho_2 + \left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)_0 r\right]\right\} + S_3}.$$

S_n désigne par abréviation les fonctions $S_n(r, \rho_2, U_1, u_2, X_i, Z_i, P_1)$.

5. **Système différentiel** Σ_3. — Les dénominateurs correspondant aux différentielles dU_1 et du_2 contenant au premier degré les variables U_1, P_1 et u_2, ρ_2, définissons deux nouvelles variables V_1 et U_2 au moyen des deux équations :

$$(a) \qquad V_1 = U_1 + P_1$$

$$(b) \qquad U_2 = u_2 + \frac{m_3}{m_1}(1+\rho_{10}^3)\rho_2.$$

Après ce changement de variables, nous obtenons entre les variables r, x_i, Z_i et les quatre variables auxiliaires ρ_1, ρ_2, V_1, U_2 un système différentiel Σ_3 qui se déduit du système Σ_2' en remplaçant U_1 et u_2 par leurs valeurs tirées de (a) et de (b) et $\frac{dU_1}{\cdots}$, $\frac{du_2}{\cdots}$ par les rapports :

$$\frac{dV_1}{-\frac{V_1}{2} + S_2}$$

et :

$$\frac{dU_2}{\frac{3}{2}U_2 - 3\left(\frac{A_1D}{B\rho_1^4}\right)_0 [m_1U_2 - m_3\rho_{10}^2\rho_2]P_1 + \frac{m_1}{\rho_{10}^3}U_2\left\{\left(\frac{A_1}{B}\right)_0 \sum_1^6 \left(\frac{\partial D}{\partial x_i}\right)_0 X_i + \left(\frac{D}{B}\right)_0 \sum_1^6 \left(\frac{\partial A_1}{\partial z_i}\right)_0 Z_i - \left(\frac{A_1D}{B^2}\right)_0 \left[\left(\frac{\partial B}{\partial \rho_1}\right) P_1 + \left(\frac{\partial B}{\partial \rho_2}\right)_0 \rho_2 + \left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)_0 r\right]\right\} + S_3.}$$

6. **Application du théorème fondamental au système** Σ_3. — Le système différentiel Σ_3 admet la multiplicité singulière :

$$r = Z_i = V_1 = U_2 = \rho_2 = 0.$$

Le long de cette multiplicité singulière, l'équation caractéristique du système Σ_3 admet neuf racines positives : deux égales à 1 correspondant aux variables r, ρ_2, six égales à $\frac{1}{2}$ correspondant aux variables Z_i et une égale à $\frac{3}{2}$ correspondant à la variable U_2 ; cette équation a d'autre part sept racines nulles correspondant aux variables x_i, ρ_1 ; enfin elle a une racine négative correspondant à la variable V_1.

En chaque point x_{i0}, ρ_{10} de la multiplicité singulière passent deux familles de caractéristiques du système Σ_3. L'une d'elles est définie entre autres par des équations non différentielles qui expriment les variables r, ρ_2, Z_i, U_2 par des séries entières en V_1 s'annulant avec cette variable. L'équation résolue par rapport à r donne une valeur de r identiquement nulle et par conséquent aucun mouvement ne correspond à la famille considérée.

L'autre famille est définie d'une part, par huit équations non différentielles de la forme :

$$x_i - x_{i0} = X_i = S_1(r, Z_i, U_2, \rho_2 \mid x_{i0}, \rho_{10}) \tag{9}$$

$$\rho_1 - \rho_{10} = P_1 = S_1(r, Z_i, U_2, \rho_2 \mid x_{i0}, \rho_{10}) \tag{10}$$

$$V_1 = S_2(r, Z_i, U_2, \rho_2 \mid x_{i0}, \rho_{10}) \tag{11}$$

et d'autre part, après substitution des développements précédents dans le système Σ_3 par un système de huit équations différentielles :

$$r\frac{dZ_i}{dr} = \frac{Z_i}{2} + \dots, \qquad r\frac{d\rho_2}{dr} = \rho_2 + \dots, \qquad r\frac{dU_2}{dr} = \frac{3}{2}U_2 + \dots. \tag{12}$$

7. **Étude des équations non différentielles.** — L'application de la méthode des coefficients indéterminés au calcul des coefficients des développements des variables X_i, P_1, suivant les puissances de r, Z_i, U_2, ρ_2 donne pour premiers termes de ces développements :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 - x_{10} = X_1 = \frac{z_{10}}{2}r^2 + S_3, & x_2 - x_{20} = X_2 = \frac{z_{20}}{2}r^2 + S_3, & x_3 - x_{30} = X_3 = \frac{z_{30}}{2}r^2 + S_3, \\ x_4 - x_{40} = X_4 = \frac{z_{40}}{2}r^2 + S_3, & x_5 - x_{50} = X_5 = \frac{z_{50}}{2}r^2 + S_3, & x_6 - x_{60} = X_6 = \frac{z_{60}}{2}r^2 + S_3, \\ \rho_1 - \rho_{10} = P_1 = S_2(r, Z_i, U_2, \rho_2 \mid x_{i0}, \rho_{10}). & & \end{array}\right. \tag{13}$$

8. **Étude des équations différentielles.** — Le système différentiel (12) admet la multiplicité singulière :

$$r = Z_i = \rho_2 = U_2 = 0.$$

Le long de cette multiplicité singulière, l'équation caractéristique a six racines égales à $\frac{1}{2}$ correspondant aux variables Z_i, deux racines égales à 1 correspondant aux variables r et ρ_2 et enfin, une racine égale à $\frac{3}{2}$ correspondant à la variable U_2. Un système différentiel dont l'équation caractéristique possède des racines égales ou multiples les unes des autres admet généralement une solution contenant des logarithmes. Le système (12) fait cependant exception.

Substituons aux variables Z_i, ρ_2, U_2 des développements à coefficients indéterminés suivant les puissances de $r^{\frac{1}{2}}$:

$$Z_i = C_i r^{\frac{1}{2}} + \ldots \qquad \rho_2 = C_7 r + \ldots, \qquad U_2 = C_8 r^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

D'après l'étude que nous avons faite des équations non différentielles, les seuls termes en $r^{\frac{1}{2}}$, r, $r^{\frac{3}{2}}$ contenus dans les seconds membres des équations (12) développés suivant les puissances de $r^{\frac{1}{2}}$ seront :

$$\frac{C_i}{2} r^{\frac{1}{2}}, \qquad C_7 r, \qquad \frac{3}{2} C_8 r^{\frac{3}{2}}.$$

Par conséquent la détermination des coefficients sera possible (1) et les coordonnées x_i s'exprimeront par des développements en séries entières en $r^{\frac{1}{2}}$ dépendant de huit constantes C_i, C_7, C_8 :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{lll} x_1 = x_{10} + \frac{z_{10}}{2} r^2 + \frac{2}{5} C_1 r^{\frac{5}{2}} + \ldots, & x_2 = x_{20} + \frac{z_{20}}{2} r^2 + \frac{2}{5} C_2 r^{\frac{5}{2}} + \ldots, & x_3 = x_{30} + \frac{z_{30}}{2} r^2 + \frac{2}{5} C_3 r^{\frac{5}{2}} + \ldots, \\ x_4 = x_{40} + \frac{z_{40}}{2} r^2 + \frac{2}{5} C_4 r^{\frac{5}{2}} + \ldots, & x_5 = x_{50} + \frac{z_{50}}{2} r^2 + \frac{2}{5} C_5 r^{\frac{5}{2}} + \ldots, & x_6 = x_{60} + \frac{z_{60}}{2} r^2 + \frac{2}{5} C_6 r^{\frac{5}{2}} + \ldots. \end{array} \right.$$

9. **Du nombre et du choix des constantes.** — Nous avons introduit vingt et un paramètres dans l'étude du système différentiel Σ_2 : les treize valeurs arbitraires données aux variables x_i, z_i, ρ_1 et les huit constantes d'intégration C_i, C_7, C_8. Les constantes z_{i0} étant déterminées par les relations (7) et du fait que :

$$\rho_{10} = \frac{m_1}{m_2},$$

le nombre des paramètres se réduit à quatorze. En ayant égard aux relations (7) et en portant les valeurs des variables exprimées suivant les puissances de $r^{\frac{1}{2}}$ dans les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), nous obtiendrons six nouvelles relations entre les paramètres :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2 = 0, \qquad x_{40}^2 + x_{50}^2 + x_{60}^2 = 0, \qquad (x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6)_0 = -\frac{1}{2C_7^2}, \\ x_{10}C_1 + x_{20}C_2 + x_{30}C_3 = 0, \qquad x_{40}C_4 + x_{50}C_5 + x_{60}C_6 = 0, \\ x_{40}C_1 + x_{50}C_2 + x_{60}C_3 + x_{10}C_4 + x_{20}C_5 + x_{30}C_6 = -\frac{C_8}{C_7}. \end{array} \right.$$

---

(1) En prenant pour variable indépendante la variable s définie par l'équation $r = s^2$ nous formerions un système différentiel auquel le théorème de Cauchy serait applicable.

Le nombre des paramètres se réduit ainsi à huit et comme pour passer à la solution du système différentiel (I) il faut ajouter la constante des forces vives K et la constante t_0 provenant de l'intégration de l'expression en r de la dérivée $\frac{dt}{dr}$, les développements dépendront finalement de dix constantes arbitraires et nous pourrons choisir :

$$x_{10},\ x_{20},\ x_{40},\ x_{50},\ C_1,\ C_2,\ C_4,\ C_5,\ K,\ t_0.$$

10. **Expression des coordonnées en fonction du temps.** — Posons $t_0 = 0$. De l'expression

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r\frac{A}{B} = r^3 S(r^{\frac{1}{2}})$$

on déduit successivement :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right) = r^{\frac{3}{2}} S(r^{\frac{1}{2}}), \qquad t = r^{\frac{5}{2}} S(r^{\frac{1}{2}})$$

puis :

$$t^{\frac{1}{5}} = r^{\frac{1}{2}} S(r^{\frac{1}{2}})$$

et par inversion :

(16) $$r = t^{\frac{2}{5}} S(t^{\frac{1}{5}}).$$

Les coordonnées x_i s'expriment donc par des développements en séries entières en $t^{\frac{1}{5}}$ dont les premiers termes sont :

$$x_i = x_{i0} + a_4 t^{\frac{4}{5}} + a_5 t + \ldots,$$

les a_i étant des constantes.

11. **Conditions de choc.** — La solution générale dépendant de douze constantes arbitraires, le mouvement des trois corps aboutissant à un choc imaginaire double devra satisfaire à deux conditions. Les quatorze variables x_i, z_i, ρ_2, U_2 étant exprimées en fonction de r, les quantités z_{i0}, ρ_{10} étant remplacées par leurs valeurs (7) et (8) nous pourrons par inversion calculer les quatorze constantes x_{i0}, C_i, C_7, C_8 en fonction des variables considérées. Puisque :

$$\rho_{10} = \frac{m_1}{m_2},$$

l'une des conditions de choc s'obtient en remplaçant dans l'équation :

$$\rho_1 - \frac{m_1}{m_2} = S_1(r, Z_i, U_2, \rho_2 \mid x_{i0}, \rho_{10})$$

les constantes par leurs valeurs ainsi trouvées. L'équation (11) :

$$V_1 = U_1 + P_1 = S_2(r, Z_i, U_2, \rho_2 \mid x_i, \rho_1)$$

est la deuxième condition de choc. Nous démontrerions comme au chapitre II que ces conditions sont transcendantes.

12. **Étude d'un cas particulier** (1). — Si les trois corps forment à chaque instant un triangle isocèle, les deux masses placées aux angles égaux sont égales et l'on peut distinguer trois cas possibles du mouvement :

1° mouvement admettant un axe de symétrie ;
2° mouvement admettant un plan de symétrie ;
3° mouvement plan admettant un axe de symétrie.

La condition :

$$\frac{r_{13}}{r_{23}} = \rho_{10} = \frac{m_1}{m_2} = 1$$

est satisfaite et, comme d'autre part, il est inutile de considérer la variable u_1, nous en conclurons que les développements obtenus dans le cas général restent valables et que dans les trois cas le nombre de constantes arbitraires est égal à l'ordre du système différentiel (2).

Conclusion. — Après trois changements successifs de variables :

1° $$\frac{dx_i}{dr} = y_i, \qquad r_{13} = r\rho_1, \qquad r_{12} = \frac{r}{\rho_2}, \qquad \frac{dr_{13}}{dr} = u_1, \qquad \frac{dr_{12}}{dr} = u_2,$$

2° $$y_i = rz_i, \qquad u_1 - \rho_1 = \mathrm{U}_1$$

3° $$\mathrm{V}_1 = \mathrm{U}_1 + \rho_1 - \rho_{10}, \qquad \mathrm{U}_2 = u_2 + \frac{m_3}{m_1}(1 + \rho_{10}^2)\rho_2$$

nous obtenons entre les variables r, x_i, z_i et les variables auxiliaires ρ_1, ρ_2, V_1, U_2 un système différentiel auquel le théorème fondamental est applicable. Les coordonnées s'expriment par des développements en séries entières en $t^{\frac{1}{5}}$; les développements des deux distances qui s'annulent commencent par des termes en $t^{\frac{2}{5}}$. Les développements dépendent de dix constantes arbitraires y compris l'instant du choc t_0. A l'instant du choc le rapport des deux distances r_{13}, r_{23} qui s'annulent est égal au rapport des masses m_1 et m_2. Enfin, si à chaque instant les trois corps forment un triangle isocèle le nombre des constantes arbitraires est égal à l'ordre du système différentiel.

(1) Chazy, Bulletin astronomique, tome 1, 1921, pp. 171, 188. *Solutions isocèles du problème des trois corps.*

(2) Dramba, *Sur les singularités réelles et imaginaires dans le problème des trois corps* (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris le 5 mars 1940).

Uno, *loc. cit.*

CHAPITRE IV

CHOC IMAGINAIRE TRIPLE

Par définition, il existe entre trois corps un choc imaginaire triple si les trois distances s'annulent sans que leurs projections sur les axes de coordonnées soient nulles.

1. **Premier changement de variables.** — Rapportons le mouvement des deux masses m_1, m_2 à la troisième masse m_3 et prenons pour variable indépendante la distance r_{12} des deux masses m_1, m_2. Posons :

$$r_{12} = r, \qquad r_{23} = r\rho_1, \qquad r_{13} = r\rho_2, \qquad \frac{dr_{23}}{dr} = u_1, \qquad \frac{dr_{13}}{dr} = u_2,$$

$$\frac{dx_1}{dr} = y_1, \qquad \frac{dx_2}{dr} = y_2, \qquad \frac{dx_3}{dr} = y_3, \qquad \frac{dx_4}{dr} = y_4, \qquad \frac{dx_5}{dr} = y_5, \qquad \frac{dx_6}{dr} = y_6,$$

et prenons pour fonctions inconnues de r les seize variables :

$$x_i, y_i, \rho_1, \rho_2, u_1, u_2, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

A partir des expressions des distances mutuelles des trois corps en fonction des coordonnées et de leurs dérivées par rapport à r nous obtenons six relations entre ces variables :

$$r^2\rho_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{1}$$

$$r^2\rho_2^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2, \tag{2}$$

$$r^2 = (\rho_1^2 + \rho_2^2)r^2 - 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6), \tag{3}$$

$$r\rho_1u_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \tag{4}$$

$$r\rho_2u_2 = x_4y_4 + x_5y_5 + x_6y_6, \tag{5}$$

$$r = (\rho_1u_1 + \rho_2u_2)r - [x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 + x_4y_1 + x_5y_2 + x_6y_3]. \tag{6}$$

Afin d'exprimer les dérivées $\frac{dy_i}{dr}, \frac{du_1}{dr}, \frac{du_2}{dr}$ en fonction des dérivées $\frac{d^2x_i}{dt^2}$ nous poserons :

$$A = m_3[m_1(y_4^2 + y_5^2 + y_6^2) + m_2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)] + m_1m_2[(y_4 - y_1)^2 + (y_5 - y_2)^2 + (y_6 - y_3)^2],$$

$$B = 2(m_1 + m_2 + m_3)\left[m_1m_2 + \frac{m_2m_3}{\rho_1} + \frac{m_1m_3}{\rho_2}\right] + Kr,$$

$$R_1 = -(m_2 + m_3)\rho_2^3 - m_1\rho_1^3\rho_2^3, \qquad R_2 = m_1[\rho_2^3 - 1]\rho_1^3,$$
$$R_3 = -(m_1 + m_3)\rho_1^3 - m_2\rho_1^3\rho_2^3, \qquad R_4 = m_1[\rho_1^3 - 1]\rho_2^3,$$
$$E = \frac{1}{\rho_1^3\rho_2^3}\left[(R_4 - R_1 + R_2 - R_3)\frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 1)}{2} + (R_1 - R_4)\rho_1^2 + (R_3 - R_2)\rho_2^2\right],$$
$$F = \frac{1}{\rho_1^4\rho_2^3}\left[R_1\rho_1^2 + R_2\frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 1)}{2}\right], \qquad G = \frac{1}{\rho_1^3\rho_2^4}\left[R_3\rho_2^2 + R_4\frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 1)}{2}\right].$$

L'équation des forces vives se transforme en une équation de laquelle on déduit :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r\frac{A}{B}.$$

2. **Système différentiel** Σ_1. — Nous obtenons entre les variables r, x_i, y_i, ρ_1, ρ_2, u_1, u_2 un système différentiel d'ordre seize :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{ry_1} = \frac{dx_2}{ry_2} = \frac{dx_3}{ry_3} = \frac{dx_4}{ry_4} = \frac{dx_5}{ry_5} = \frac{dx_6}{ry_6} = \frac{d\rho_1}{u_1 - \rho_1} = \frac{d\rho_2}{u_2 - \rho_2}$$
$$= \frac{dy_1}{y_1 - y_1\Sigma(y_4 - y_1)^2 + \frac{A}{B}\left[\frac{R_1x_1 + R_2x_4}{\rho_1^3\rho_2^3 r} - y_1E\right]} = \frac{dy_2}{y_2 - y_2\Sigma(y_4 - y_1)^2 + \frac{A}{B}\left[\frac{R_1x_2 + R_2x_5}{\rho_1^3\rho_2^3 r} - y_2E\right]}$$
$$= \frac{dy_3}{y_3 - y_3\Sigma(y_4 - y_1)^2 + \frac{A}{B}\left[\frac{R_1x_3 + R_2x_6}{\rho_1^3\rho_2^3 r} - y_3E\right]} = \frac{dy_4}{y_4 - y_4\Sigma(y_4 - y_1)^2 + \frac{A}{B}\left[\frac{R_3x_4 + R_4x_1}{\rho_1^3\rho_2^3 r} - y_4E\right]}$$
$$= \frac{dy_5}{y_5 - y_5\Sigma(y_4 - y_1)^2 + \frac{A}{B}\left[\frac{R_3x_5 + R_4x_2}{\rho_1^3\rho_2^3 r} - y_5E\right]} = \frac{dy_6}{y_6 - y_6\Sigma(y_4 - y_1)^2 + \frac{A}{B}\left[\frac{R_3x_6 + R_4x_3}{\rho_1^3\rho_2^3 r} - y_6E\right]}$$
$$= \frac{du_1}{u_1 - u_1\Sigma(y_4 - y_1)^2 + \frac{\sum_1^3 y_i^2 - u_1^2}{\rho_1} + \frac{A}{B}[F - u_1E]} = \frac{du_2}{u_2 - u_2\Sigma(y_4 - y_1)^2 + \frac{\sum_1^3 y_i^2 - u_2^2}{\rho_2} + \frac{A}{B}[G - u_2E]}.$$

3. **Second changement de variables.** — Ce second changement de variables a pour but d'obtenir un nouveau système différentiel Σ_2 dans lequel les dénominateurs ne contiendront plus le facteur $\frac{1}{r}$. A cet effet, définissons dix nouvelles variables z_i, U_1, U_2, ξ_1, ξ_2 au moyen des équations :

$$y_1 = \frac{z_1}{r}, \qquad y_2 = \frac{z_2 + x_2y_1}{x_1}, \qquad y_3 = \frac{z_3 + x_3y_1}{x_1},$$
$$y_4 = \frac{z_4}{r}, \qquad y_5 = \frac{z_5 + x_5y_4}{x_4}, \qquad y_6 = \frac{z_6 + x_6y_1}{x_4},$$
$$u_1 - \rho_1 = U_1, \qquad u_2 - \rho_2 = U_2, \qquad x_5 = \frac{r\xi_1 + x_2x_4}{x_1}, \qquad x_6 = \frac{r\xi_2 + x_3x_4}{x_1}.$$

Au total, nous aurons les dix-huit variables :

$$x_i, z_i, \rho_1, \rho_2, U_1, U_2, \xi_1, \xi_2,$$

et à partir des six équations (1), (2), (3), (4), (5), (6) nous établirons entre elles les six relations :

$$r^2\rho_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{7}$$

$$r^2\rho_2^2 = \frac{1}{x_1^2}[(\rho_1^2x_4^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2)r^2 + 2x_4(\xi_1x_2 + \xi_2x_3)r], \tag{8}$$

$$r^2 = (\rho_1^2 + \rho_2^2)r^2 - \frac{2}{x_1}[(\xi_1x_2 + \xi_2x_3)r + x_4\rho_1^2r^2], \tag{9}$$

$$x_2z_2 + x_3z_3 = [x_1(U_1 + \rho_1) - \rho_1z_1]\rho_1r, \tag{10}$$

$$x_5z_5 + x_6z_6 = [x_4(U_2 + \rho_2) - \rho_2z_4]\rho_2r, \tag{11}$$

$$r = \left[\rho_1(U_1 + \rho_1) + \rho_2(U_2 + \rho_2) - \frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 1)}{2}\left(\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_4}{x_4}\right)\right]r + \frac{x_5z_2 + x_6z_3}{x_1} + \frac{x_2z_5 + x_3z_6}{x_4}. \tag{12}$$

Les dénominateurs du système Σ_2 contiendront les quantités, α_1, α_4, σ_1, σ_4, σ_{14}, φ que nous définirons par les équations suivantes :

$$\alpha_1 = 2\left[m_2(m_1 + m_3)\frac{\rho_1^2}{x_1} - m_1m_2\frac{\rho_2^2}{x_4}\right], \qquad \alpha_4 = 2\left[m_1(m_2 + m_3)\frac{\rho_2^2}{x_4} - m_1m_2\frac{\rho_1^2}{x_1}\right],$$

$$\sigma_1 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \qquad \sigma_4 = y_4^2 + y_5^2 + y_6^2, \qquad \sigma_{14} = \Sigma(y_4 - y_1)^2$$

$$\varphi = \frac{m_2(m_1 + m_3)}{x_1^2}[\rho_1^2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1(\rho_1x_1U_1 - \rho_1^2z_1)] + \frac{m_1(m_2 + m_3)}{x_4^2}[\rho_2^2z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + 2z_4(\rho_2x_4U_2 - \rho_2^2z_4)]$$
$$-2\frac{m_1m_2}{x_1x_4}\left\{(z_1z_4 + z_2z_5 + z_3z_6)\frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 1)}{2} + [\rho_1x_1x_4U_1 - \rho_1^2x_4z_1 + \xi_1z_2 + \xi_2z_3]\frac{z_4}{x_1} + [\rho_2x_1x_4U_2 - \rho_2^2x_1z_4 - \xi_1z_5 - \xi_2z_6]\frac{z_1}{x_4}\right\}$$

En fonction des nouvelles variables et en mettant en évidence les termes du premier degré par rapport aux variables z_1 et z_4, nous aurons :

$$A = \alpha_1z_1 + \alpha_4z_4 + \varphi$$

$$\sigma_1 = \frac{2\rho_1^2}{x_1}z_1 + \frac{1}{x_1^2}[\rho_1^2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1(\rho_1x_1U_1 - \rho_1^2z_1)]$$

$$\sigma_4 = \frac{2\rho_2^2}{x_4}z_4 + \frac{1}{x_4^2}[\rho_2^2z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + 2z_4(\rho_2x_4U_2 - \rho_2^2z_4)]$$

$$\sigma_{14} = 2\left[\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right](z_1 - z_4) + \frac{1}{x_1^2}[\rho_1^2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1(\rho_1x_1U_1 - \rho_1^2z_1)]$$
$$+ \frac{1}{x_4^2}[\rho_2^2z_4^2 + z_5^2 + z_6^2 + 2z_4(\rho_2x_4U_2 - \rho_2^2z_4)] - \frac{2}{x_1x_4}\left\{\frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 1)}{2}z_1z_4 + z_2z_5 + z_3z_6\right.$$
$$\left.+ \frac{z_1}{x_4}[\rho_2x_1x_4U_2 - \rho_2^2x_1z_4 - \xi_1z_5 - \xi_2z_6] + \frac{z_4}{x_1}[\rho_1x_1x_4U_1 - \rho_1^2x_4z_1 + \xi_1z_2 + \xi_2z_3]\right\}.$$

4. **Système différentiel** Σ_2. — Le système Σ_2 correspondant à ce second changement de variables s'écrira :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{z_1} = \frac{dx_2}{\frac{rz_2 + x_2z_1}{x_1}} = \frac{dx_3}{\frac{rz_3 + x_3z_1}{x_1}} = \frac{dx_4}{z_4} = \frac{dx_5}{\frac{rz_5 + x_5z_4}{x_4}} = \frac{dx_6}{\frac{rz_6 + x_6z_4}{x_4}}$$
$$= \frac{d\rho_1}{U_1} = \frac{d\rho_2}{U_2}$$

$$= \frac{dz_1}{2z_1 - \sigma_{14}z_1 + \frac{A}{B}\left[\frac{R_1x_1 + R_2x_4}{\rho_1^3\rho_2^3} - z_1E\right]} = \frac{dz_2}{z_2 - \sigma_{14}z_2 + \frac{A}{B}\left[\frac{R_2}{\rho_1^3\rho_2^3}\xi_1 - z_2E\right]}$$

$$= \frac{dz_3}{z_3 - \sigma_{14}z_3 + \frac{A}{B}\left[\frac{R_2}{\rho_1^3\rho_2^3}\xi_2 - z_3E\right]} = \frac{dz_4}{2z_4 - \sigma_{14}z_4 + \frac{A}{B}\left[\frac{R_3x_4 + R_4x_1}{\rho_1^3\rho_2^3} - z_4E\right]}$$

$$= \frac{dz_5}{z_5 - \sigma_{14}z_5 - \frac{A}{B}\left[\frac{R_4}{\rho_1^3\rho_2^3}\xi_1 + z_5E\right]} = \frac{dz_6}{z_6 - \sigma_{14}z_6 - \frac{A}{B}\left[\frac{R_4}{\rho_1^3\rho_2^3}\xi_2 + z_6E\right]}$$

$$= \frac{dU_1}{-2U_1 - (U_1 + \rho_1)\sigma_{14} + \frac{\sigma_1 - U_1^2}{\rho_1^2} + \frac{A}{B}[F - (U_1 + \rho_1)E]} = \frac{dU_2}{-2U_2 - (U_2 + \rho_2)\sigma_{14} + \frac{\sigma_4 - U_2^2}{\rho_2^2} + \frac{A}{B}[G - (U_2 + \rho_2)E]}$$

$$= \frac{d\xi_1}{-\xi_1 + \frac{x_1}{x_4}z_5 - \frac{x_4}{x_1}z_2 + \left[\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_4}{x_4}\right]\xi_1} = \frac{d\xi_2}{-\xi_2 + \frac{x_1}{x_4}z_6 - \frac{x_4}{x_1}z_3 + \left[\frac{z_1}{x_1} + \frac{z_4}{x_4}\right]\xi_2}.$$

5. **Système différentiel** Σ_2'. — Pour des valeurs arbitraires des variables x_i, ρ_1, ρ_1 et pour des valeurs nulles des variables r, z_i, U_1, U_2, ξ_1, ξ_2, tous les dénominateurs s'annulent et sont des fonctions holomorphes des variables si l'expression :

$$(B)_0 = m_1m_2 + \frac{m_2m_3}{\rho_{10}} + \frac{m_1m_3}{\rho_{20}}$$

est différente de zéro. En supposant $(B)_0 \neq 0$ et en développant les dénominateurs au voisinage du système de valeurs :

$$r = z_i = U_1 = U_2 = \xi_1 = \xi_2 = 0,$$
$$x_1 - x_{i0} = X_i, \qquad \rho_1 - \rho_{10} = P_1, \qquad \rho_2 - \rho_{20} = P_2,$$

le système différentiel Σ_2 se transforme en un système différentiel Σ_2' dans lequel nous avons posé :

$$a_1 = \frac{R_1x_1 + R_2x_4}{\rho_1^3\rho_2^3}, \qquad a_4 = \frac{R_3x_4 + R_4x_1}{\rho_1^3\rho_2^3}.$$

Nous aurons :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{z_1} = \frac{dx_2}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_0 z_1 - \left(\frac{x_2}{x_1^2}\right)_0 z_1X_1 + \frac{z_1X_2}{x_{10}} + \frac{rz_2}{x_{10}} + S_3} = \frac{dx_3}{\left(\frac{x_3}{x_1}\right)_0 z_1 - \left(\frac{x_3}{x_1^2}\right)_0 z_1X_1 + \frac{z_1X_3}{x_{10}} + \frac{rz_3}{x_{10}} + S_3}$$

$$= \frac{dx_4}{z_4} = \frac{dx_5}{\left(\frac{x_5}{x_4}\right)_0 z_4 - \left(\frac{x_5}{x_4^2}\right)_0 z_1X_4 + \frac{z_4X_5}{x_{40}} + \frac{rz_5}{x_{40}} + S_3} = \frac{dx_6}{\left(\frac{x_6}{x_4}\right)_0 z_4 - \left(\frac{x_6}{x_4^2}\right)_0 z_4X_6 + \frac{z_4X_6}{x_{40}} + \frac{rz_6}{x_{40}} + S_3} = \frac{d\rho_1}{U_1} = \frac{d\rho_2}{U_2}$$

$$= \frac{dz_1}{\begin{aligned}&2z_1 + a_{10}\frac{(\alpha_{10}z_1 + \alpha_{40}z_4)}{B_0} - 2\left[\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right](z_1 - z_4)z_1 + \frac{a_{10}}{B_0}\varphi - \frac{E_0}{B_0}(\alpha_{10}z_1 + \alpha_{40}z_4)z_1\\ &+ \sum_1^6\left[a_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_i} + \alpha_1\frac{\partial a_1}{\partial x_i}\right]_0\frac{z_1X_i}{B_0} + \sum_1^2\left[a_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial\rho_i} + \alpha_1\frac{\partial a_1}{\partial\rho_i}\right]_0\frac{z_1P_i}{B_0} + \sum_1^6\left[a_1\frac{\partial\alpha_4}{\partial x_i} + \alpha_4\frac{\partial a_1}{\partial x_i}\right]_0\frac{z_4X_i}{B_0}\\ &+ \sum_1^2\left[a_1\frac{\partial\alpha_4}{\partial\rho_i} + \alpha_4\frac{\partial a_1}{\partial\rho_i}\right]_0\frac{z_4P_i}{B_0} - \frac{a_{10}}{B_0^2}\left[\frac{\partial B}{\partial r}r + \frac{\partial B}{\partial\rho_1}P_1 + \frac{\partial B}{\partial\rho_2}P_2\right](\alpha_{10}z_1 + \alpha_{40}z_4) + S_3\end{aligned}}$$

$$= \frac{dz_2}{z_2 + S_2} = \frac{dz_3}{z_3 + S_3}$$

$$= \frac{dz_4}{\begin{aligned} 2z_4 + a_{40}\frac{(\alpha_{10}z_1 + \alpha_{40}z_4)}{B_0} - 2\left[\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right](z_1 - z_4)z_4 + \frac{a_{40}}{B_0}\varphi - \frac{E_0}{B_0}(\alpha_{10}z_1 + \alpha_{40}z_4)z_4 \\ + \sum_1^6\left[a_4\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_i} + \alpha_1\frac{\partial a_4}{\partial x_i}\right]_0\frac{z_1X_i}{B_0} + \sum_1^2\left[a_4\frac{\partial\alpha_1}{\partial\rho_i} + \alpha_1\frac{\partial a_4}{\partial\rho_i}\right]_0\frac{z_1P_i}{B_0} + \sum_1^6\left[a_4\frac{\partial\alpha_4}{\partial x_i} + \alpha_4\frac{\partial a_4}{\partial x_i}\right]_0\frac{z_4X_i}{B_0} \\ + \sum_1^2\left[a_4\frac{\partial\alpha_4}{\partial\rho_i} + \alpha_4\frac{\partial a_4}{\partial\rho_i}\right]_0\frac{z_4P_i}{B_0} - \frac{a_{40}}{B_0^2}\left[\frac{\partial B}{\partial r}r + \frac{\partial B}{\partial\rho_1}P_1 + \frac{\partial B}{\partial\rho_2}P_2\right](\alpha_{10}z_1 + \alpha_{40}z_4) + S_3 \end{aligned}}$$

$$= \frac{dz_5}{z_5 + S_2} = \frac{dz_6}{z_6 + S_2}$$

$$= \frac{dU_1}{-2U_1 - 2\rho_{10}\left[\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right]_0(z_1 - z_4) + 2\frac{\rho_{10}}{x_{10}}z_1 + \frac{(\alpha_{10}z_1 + \alpha_{40}z_4)}{B_0}[F - \rho_1E]_0 + S_2}$$

$$= \frac{dU_2}{-2U_2 - 2\rho_{20}\left[\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right]_0(z_1 - z_4) + 2\frac{\rho_{20}}{x_{40}}z_4 + \frac{(\alpha_{10}z_1 + \alpha_{40}z_4)}{B_0}[G - \rho_2E]_0 + S_2}$$

$$= \frac{d\xi_1}{-\xi_1 + \frac{x_{10}}{x_{40}}z_5 - \frac{x_{40}}{x_{10}}z_2 + S_2} = \frac{d\xi_2}{-\xi_2 + \frac{x_{10}}{x_{40}}z_6 - \frac{x_{40}}{x_{10}}z_3 + S_2}$$

S_n désigne la fonction $S_n(r, z_i, U_1, U_2, \xi_1, \xi_2, X_i, P_1, P_2)$.

6. **Troisième changement de variables.** — Les dénominateurs correspondant aux différentielles dz_1, dz_4, dU_1, dU_2, $d\xi_1$, $d\xi_2$ contiennent au premier degré plusieurs des variables. Un troisième changement de variables s'impose donc et nous remplacerons les variables z_1, z_4, U_1, U_2, ξ_1, ξ_2 par six nouvelles variables Z_1, Z_4, V_1, V_2, η_1, η_2 définies par les équations :

$$Z_1 = z_1 - \frac{a_{10}}{a_{40}}z_4, \qquad Z_4 = z_1 + \frac{\alpha_{40}}{\alpha_{10}}z_4, \tag{13}$$

$$V_1 = U_1 - \frac{\beta_{10}}{4}Z_1 - \frac{\beta_{40}}{3}Z_4, \qquad V_2 = U_2 - \frac{\gamma_{10}}{4}Z_1 - \frac{\gamma_{40}}{3}Z_4, \tag{14}$$

$$\eta_1 = \xi_1 - \frac{x_{10}}{2x_{40}}z_5 + \frac{x_{40}}{2x_{10}}z_2, \qquad \eta_2 = \xi_2 - \frac{x_{10}}{2x_{40}}z_6 + \frac{x_{40}}{2x_{10}}z_3, \tag{15}$$

Après avoir effectué le changement de variables (13), les dénominateurs correspondant aux différentielles dU_1, dU_2 contiennent les variables Z_1 et Z_4 au premier degré. Les quantités β_{10}, γ_{10} et β_{40}, γ_{40} sont les coefficients respectifs des variables Z_1 et Z_4 et ils ont pour expressions :

$$\left\{\begin{aligned} \beta_{10} &= \frac{2\rho_1 a_4}{\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4}\left[\frac{\alpha_4}{x_1} - (\alpha_1 + \alpha_4)\left(\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right)\right] \\ \gamma_{10} &= -\frac{2\rho_2 a_4}{\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4}\left[\frac{\alpha_1}{x_4} + (\alpha_1 + \alpha_4)\left(\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right)\right] \\ \beta_{40} &= -2\rho_1\left(\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right)\frac{\alpha_1(a_1 - a_4)}{(\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4)} + \frac{2\rho_1\alpha_1 a_1}{x_1(\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4)} + \frac{\alpha_1}{B}(F - \rho_1 E) \\ \gamma_{40} &= -2\rho_2\left(\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right)\frac{\alpha_1(a_1 - a_4)}{(\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4)} + \frac{2\rho_2\alpha_1 a_4}{x_4(\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4)} + \frac{\alpha_1}{B}(G - \rho_2 E) \end{aligned}\right. \tag{16}$$

7. **Système différentiel** Σ_3. — A la suite de ce troisième changement de variables, nous obtenons entre les variables r, x_i, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 et les variables auxiliaires ρ_1, ρ_2, V_1, V_2, η_1, η_2 un système différentiel d'ordre dix-huit :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{\dfrac{\alpha_{10}a_{10}Z_4 + \alpha_{40}a_{40}Z_1}{(\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4)_0}} = \frac{dx_2}{\dfrac{x_{20}}{x_{10}}\left[\dfrac{\alpha_{10}a_{10}Z_4 + \alpha_{40}a_{40}Z_1}{(\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4)_0}\right] + S_2}$$

$$= \frac{dx_3}{\dfrac{x_{30}}{x_{10}}\left[\dfrac{\alpha_{10}a_{10}Z_4 + \alpha_{40}a_{40}Z_1}{(\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4)_0}\right] + S_2} = \frac{dx_4}{\left(\dfrac{\alpha_1 a_4}{\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4}\right)_0 (Z_4 - Z_1)} = \frac{dx_5}{\dfrac{x_{50}}{x_{40}}\left(\dfrac{\alpha_1 a_4}{\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4}\right)_0 (Z_4 - Z_1) + S_2}$$

$$= \frac{dx_6}{\dfrac{x_{60}}{x_{40}}\left(\dfrac{\alpha_1 a_4}{\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4}\right)_0 (Z_4 - Z_1) + S_2} = \frac{d\rho_1}{V_1 + \frac{\beta_{10}}{4} Z_1 + \frac{\beta_{40}}{3} Z_4} = \frac{d\rho_2}{V_2 + \frac{\gamma_{10}}{4} Z_1 + \frac{\gamma_{40}}{3} Z_4}$$

$$= \frac{dZ_1}{2Z_1 + \dfrac{\alpha_{10}Z_4}{a_{40}B_0}\left\{\left[a_4 \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} - a_1 \dfrac{\partial a_4}{\partial x_1}\right]_0 X_1 + \left[a_4 \dfrac{\partial a_1}{\partial x_4} - a_1 \dfrac{\partial a_4}{\partial x_4}\right]_0 X_4 + \sum_1^2 \left[a_4 \dfrac{\partial a_1}{\partial \rho_i} - a_1 \dfrac{\partial a_4}{\partial \rho_i}\right]_0 P_i\right\} + S_3}$$

$$= \frac{dz_2}{z_2 + S_2} = \frac{dz_3}{z_3 + S_2} = \frac{dZ_4}{\left(2 + \dfrac{\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4}{B}\right)_0 Z_4 + S_2} = \frac{dz_5}{z_5 + S_2} = \frac{dz_6}{z_6 + S_2}$$

$$= \frac{dV_1}{-2V_1 + S_2} = \frac{dV_2}{-2V_2 + S_2} = \frac{d\eta_1}{-\eta_1 + S_2} = \frac{d\eta_2}{-\eta_2 + S_2}$$

S_n désigne la fonction $S_n\,(r, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6, P_1, P_2, V_1, V_2, \eta_1, \eta_2)$.

Calculons le coefficient de Z_4 dans le dénominateur correspondant à la différentielle dZ_4. En ayant égard à la relation :

(17) $$x_{40}^2\rho_{10}^2 + x_{10}^2\rho_{20}^2 = x_{10}x_{40}(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 1)_0$$

obtenue par l'élimination de la quantité $(\xi_1 x_2 + \xi_2 x_3)$ à partir des deux équations (8) et (9) nous trouvons pour valeur de l'expression $(\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4)_0$:

(18) $$(\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4)_0 = -B_0.$$

Par conséquent, le coefficient de Z_4 est égal à 1.

L'équation caractéristique du système Σ_3 a donc sept racines positives, quatre racines négatives et huit racines nulles.

8. **Application du théorème fondamental au système** Σ_3. — Le système Σ_3 admet la multiplicité singulière :

$$r = Z_1 = z_2 = z_3 = Z_4 = z_5 = z_6 = V_1 = V_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0.$$

Le long de cette multiplicité singulière, l'équation caractéristique a sept racines positives dont six égales à 1 correspondent aux variables r, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 et une égale à 2 correspond à la variable Z_1 ; cette équation a d'autre part quatre racines négatives correspondant aux variables V_1, V_2, η_1, η_2 et enfin elle a huit racines nulles correspondant aux variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, ρ_1, ρ_2.

En chaque point x_{i0}, ρ_{10}, ρ_{20} de cette multiplicité passent deux familles de caractéristiques du système Σ_3.

L'une d'elles est définie entre autres par des équations non différentielles qui expriment les variables r, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6, X_i, P_1, P_2 par des fonctions des variables V_1, V_2, η_1, η_2 s'annulant avec ces variables. L'équation résolue par rapport à r donne une valeur de r identiquement nulle. Par conséquent, aucun mouvement ne correspond à cette famille.

L'autre famille de caractéristiques est définie d'une part, par douze équations non différentielles qui, pour X_i et P_1, P_2 sont de la forme :

$$x_i - x_{i0} = X_i = S_1(r, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 \mid x_{i0}, \rho_{10}, \rho_{20}), \tag{19}$$

$$\rho_1 - \rho_{10} = P_1 = S_1(r, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 \mid x_{i0}, \rho_{10}, \rho_{20}), \tag{20}$$

$$\rho_2 - \rho_{20} = P_2 = S_1(r, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 \mid x_{i0}, \rho_{10}, \rho_{20}), \tag{21}$$

et pour V_1, V_2, η_1, η_2 sont de la forme :

$$S_2(r, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 \mid x_{i0}, \rho_{10}, \rho_{20}) ; \tag{22}$$

D'autre part, cette famille est définie après substitution des développements précédents dans le système Σ_3 par le système différentiel d'ordre six :

$$r\frac{dZ_1}{dr} = 2Z_1 + \ldots, \quad r\frac{dz_2}{dr} = z_2 + \ldots, \quad r\frac{dz_3}{dr} = z_3 + \ldots, \quad r\frac{dZ_4}{dr} = Z_4 + \ldots, \quad r\frac{dz_5}{dr} = z_5 + \ldots, \quad r\frac{dz_6}{dr} = z_6 + \ldots. \tag{23}$$

9. **Étude des équations non différentielles.** — L'application de la méthode des coefficients indéterminés au calcul des coefficients des développements des variables X_i, P_1, P_2 suivant les puissances de r, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6, donne, en nous bornant aux termes du premier degré :

$$\tag{24} \left\{ \begin{array}{ll} X_1 = -\frac{1}{B_0}\left[\alpha_{10}a_{10}Z_4 + \frac{\alpha_{40}a_{40}}{2}Z_1\right] + \ldots, & X_2 = -\frac{x_{20}}{B_0 x_{10}}\left[\alpha_{10}a_{10}Z_4 + \frac{\alpha_{40}a_{40}}{2}Z_1\right] + \ldots \\ X_3 = -\frac{x_{30}}{B_0 x_{10}}\left[\alpha_{10}a_{10}Z_4 + \frac{\alpha_{40}a_{40}}{2}Z_1\right] + \ldots, & X_4 = -\frac{\alpha_{10}a_{40}}{B_0}\left[Z_4 - \frac{Z_1}{2}\right] + \ldots \\ X_5 = -\frac{\alpha_{10}a_{40}}{B_0}\cdot\frac{x_{50}}{x_{40}}\left[Z_4 - \frac{Z_1}{2}\right] + \ldots, & X_6 = -\frac{\alpha_{10}a_{40}}{B_0}\cdot\frac{x_{60}}{x_{40}}\left[Z_4 - \frac{Z_1}{2}\right] + \ldots, \\ P_1 = \frac{\beta_{10}}{8}Z_1 + \frac{\beta_{40}}{3}Z_4 + \ldots, & P_2 = \frac{\gamma_{10}}{8}Z_1 + \frac{\gamma_{40}}{3}Z_4 + \ldots. \end{array} \right.$$

10. **Étude des équations différentielles.** — Le système différentiel (23) admet la multiplicité singulière :

$$r = Z_1 = z_2 = z_3 = Z_4 = z_5 = z_6 = 0.$$

Le long de cette multiplicité, l'équation caractéristique a cinq racines égales à 1 et une racine égale à 2.

Considérons pour Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 des développements à coefficients indéterminés suivant les puissances entières de r :

$$Z_1 = C_1 r^2 + \ldots, \quad z_2 = C_2 r + \ldots, \quad z_3 = C_3 r + \ldots, \quad Z_4 = C_4 r + \ldots, \quad z_5 = C_5 r + \ldots, \quad z_6 = C_6 r + \ldots, \tag{25}$$

les C_i étant des coefficients arbitraires.

En remplaçant dans le système différentiel Σ_3 les variables X_i, P_1, P_2 par leurs valeurs (24), puis Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 par leurs développements (25) suivant les puissances de r, il s'introduit, dans le second membre de $r\dfrac{dZ_1}{dr}$, en plus du terme $2C_1r^2$, un autre terme en r^2 dont nous désignerons le coefficient par Δ_1.

La possibilité des développements considérés dépend de la valeur de Δ_1.

11. **Étude du coefficient** Δ_1. — Δ_1 a pour expression :

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 = {} & \frac{\alpha_{10}C_4^2}{B_0 a_{40}} \Bigg\{ - \left[a_4\frac{\partial a_1}{\partial x_4} - a_1\frac{\partial a_4}{\partial x_4}\right]_0 \frac{\alpha_{10}a_{40}}{B_0} - \left[a_4\frac{\partial a_1}{\partial x_1} - a_1\frac{\partial a_4}{\partial x_1}\right]\frac{\alpha_{10}a_{10}}{B_0} + \left[a_4\frac{\partial a_1}{\partial \rho_1} - a_1\frac{\partial a_4}{\partial \rho_1}\right]_0\frac{\beta_{40}}{3} + \left[a_4\frac{\partial a_1}{\partial \rho_2} - a_1\frac{\partial a_4}{\partial \rho_2}\right]\frac{\gamma_{40}}{3}\Bigg\} \\
= {} & \frac{(m_1+m_2+m_3)\alpha_{10}^2C_4^2}{(x_1x_4\rho_1^8\rho_2^8B^2a_4)_0}\Bigg\{ \rho_1^2\rho_2^2x_1x_4(m_3+m_1\rho_1^3+m_2\rho_2^3)[R_4x_1^2+(R_3-R_1)x_1x_4-R_2x_4^2] \\
& + x_1\rho_2^2[m_2x_1\rho_2^3-m_2x_4\rho_2^3-m_3x_4]\bigg[2\rho_1^2[\rho_1^2x_4-\rho_2^2x_1][R_1x_1+R_2x_4-R_4x_1-R_3x_4] \\
& - 2\rho_1^2x_4(R_1x_1+R_2x_4)+R_1\rho_1^2x_1x_4+R_2\frac{(\rho_1^2x_4^2+\rho_2^2x_1^2)}{2} \\
& - \rho_1^2\bigg[(R_3-R_2)\rho_2^2x_1x_4+(R_1-R_4)\rho_1^2x_1x_4+(R_4-R_1+R_2-R_3)\frac{(\rho_1^2x_4^2+\rho_2^2x_1^2)}{2}\bigg]\bigg] \\
& + x_4\rho_1^2[m_1x_1\rho_1^3-m_1x_4\rho_1^3+m_3x_1]\bigg[2\rho_2^2[\rho_1^2x_4-\rho_2^2x_1][R_1x_1+R_2x_4-R_4x_1-R_3x_4] \\
& - 2\rho_2^2x_1(R_4x_1+R_3x_4)+R_3\rho_2^2x_1x_4+R_4\frac{(\rho_1^2x_4^2+\rho_2^2x_1^2)}{2} \\
& - \rho_2^2\bigg[(R_3-R_2)\rho_2^2x_1x_4+(R_1-R_4)\rho_1^2x_1x_4+(R_4-R_1+R_2-R_3)\frac{(\rho_1^2x_4^2+\rho_2^2x_1^2)}{2}\bigg]\bigg]\Bigg\}_0
\end{aligned}
$$

Pour effectuer le calcul de la quantité entre accolades, recherchons les coefficients respectifs des quantités R_1, R_2, R_3, R_4 et ordonnons-les par rapport aux puissances de ρ_1 et de ρ_2. Remplaçant ensuite ρ_{10}^2 par sa valeur tirée de (17) :

$$
\rho_{10}^2 = \left[\frac{x_1x_4-\rho_2^2x_1(x_4-x_1)}{x_4(x_1-x_4)}\right]_0
$$

nous obtenons finalement :

$$
\begin{aligned}
\text{(26)}\quad \Delta_1 = {} & \frac{(m_1+m_2+m_3)\alpha_1^2C_4^2}{2x_1x_4\rho_1^8\rho_2^8(x_1-x_4)^2}[\rho_2^2(x_1-x_4)^2-x_4^2]\Big\{x_4(x_1-x_4)[x_1x_4+\rho_2^2x_1(x_1-x_4)] \\
& \times[m_2x_1^2\rho_2^5+m_1x_1x_4\rho_2^2\rho_1^3][R_3-R_1]+\Big[-m_3x_1^2x_4^3(x_1-x_4)\rho_2^2-m_1x_4^2x_1(x_1-x_4)[x_1x_4+\rho_2^2x_1(x_1-x_4)]\rho_2^2\rho_1^3 \\
& - m_2x_1^2x_4(x_1-x_4)[\rho_2^2x_1(x_1-x_4)+x_4^2]\rho_2^5\Big]R_2 \\
& + [x_1x_4+\rho_2^2x_1(x_1-x_4)]\Big[-m_3x_1^2x_4^2+m_2x_1^2x_4(x_1-x_4)\rho_2^5+m_1x_4^2x_1(x_1-x_4)(\rho_2^2-1)\rho_1^3\Big]R_4\Big\}
\end{aligned}
$$

En posant :

$$
\begin{gathered}
M = -m_1\rho_2^2x_1^2x_4^2(x_1-x_4)[(x_1-x_4)\rho_2^2+x_4][m_2\rho_2+m_3], \\
N = m_1\rho_2^2x_1^2x_4^2(x_1-x_4)[(x_1-x_4)\rho_2^5+x_4][m_2\rho_2+m_3]-m_2m_3x_4x_1^3\rho_2^3[(x_1-x_4)\rho_2^2+x_4]^2, \\
L = m_2m_3\rho_2^3x_4x_1^3[(x_1-x_4)\rho_2^2+x_4][(x_1-x_4)\rho_2^5+x_4]
\end{gathered}
$$

la nouvelle quantité entre accolades dans laquelle on a remplacé R_1, R_2, R_3, R_4 par leurs valeurs se met sous la forme :

$$M\rho_1^6 + N\rho_1^3 + L.$$

Cette quantité est nulle si l'on a :

$$N^2\rho_1^6 = L^2 + 2LM\rho_1^6 + M^2\rho_1^{12} = 0$$

ou, en remplaçant ρ_1^2 par sa valeur tirée de (17) si la relation suivante est satisfaite :

$$x_4^3(x_1 - x_4)^3[(x_1 - x_4)\rho_2^5 + x_4]^2 - x_1^3[(x_1 - x_4)\rho_2^2 + x_4]^5 = 0. \tag{27}$$

Par conséquent, Δ_1 *n'est pas identiquement nul.* Il est donc impossible de déterminer les coefficients des développements de Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 suivant les puissances de r. Mais il est possible de former pour chacune de ces variables des séries ordonnées suivant les puissances de r et de $r^2 \log r$ et ces séries convergent pour des valeurs suffisamment petites de r.

Au voisinage de l'instant d'un choc imaginaire triple les coordonnées s'expriment par des développements en séries entières en :

$$r, \qquad r^2 \log r.$$

12. **Expression des coordonnées en fonction de** r. — En remplaçant dans le système différentiel Σ_3 toutes les variables par des développements à coefficients indéterminés nous pourrons par des identifications, calculer de proche en proche tous ces coefficients. Nous constaterons que les développements des variables z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 ne contiennent pas le terme $(r^2 \log r)$. Les coordonnées s'expriment par des développements de la forme :

$$\tag{28} \left\{ \begin{aligned}
x_1 &= x_{10} - \frac{\alpha_{10}a_{10}}{B_0} C_4 r + D_1 r^2 - \frac{\alpha_{40}a_{40}}{2B_0} \Delta_1 r^2 \log r + \dots, \\
x_2 &= x_{20} - \frac{x_{20}}{x_{10}} \cdot \frac{\alpha_{10}a_{10}}{B_0} C_4 r + D_2 r^2 - \frac{x_{20}}{x_{10}} \cdot \frac{\alpha_{40}a_{40}}{2B_0} \Delta_1 r^2 \log r + \dots, \\
x_3 &= x_{30} - \frac{x_{30}}{x_{10}} \cdot \frac{\alpha_{10}a_{10}}{B_0} C_4 r + D_3 r^2 - \frac{x_{30}}{x_{10}} \cdot \frac{\alpha_{40}a_{40}}{2B_0} \Delta_1 r^2 \log r + \dots, \\
x_4 &= x_{40} - \frac{\alpha_{10}a_{40}}{B_0} C_4 r + D_4 r^2 + \frac{\alpha_{10}a_{40}}{2B_0} \Delta_1 r^2 \log r + \dots, \\
x_5 &= x_{50} - \frac{x_{50}}{x_{40}} \cdot \frac{\alpha_{10}a_{40}}{B_0} C_4 r + D_5 r^2 + \frac{x_{50}}{x_{40}} \cdot \frac{\alpha_{10}a_{40}}{2B_0} \Delta_1 r^2 \log r + \dots, \\
x_6 &= x_{60} - \frac{x_{60}}{x_{40}} \cdot \frac{\alpha_{10}a_{40}}{B_0} C_4 r + D_6 r^2 + \frac{x_{60}}{x_{40}} \cdot \frac{\alpha_{10}a_{40}}{2B_0} \Delta_1 r^2 \log r + \dots;
\end{aligned} \right.$$

nous avons posé, en désignant par Δ_4 le coefficient du terme r^2 dans le développement de Z_4 :

$$D_1 = \frac{1}{2B_0}\left[\frac{\alpha_4 a_4}{2}\Delta_1 - \alpha_4 a_4 C_1 - \alpha_1 a_1 \Delta_4\right]_0, \qquad D_2 = \frac{1}{2x_{10}}[C_2 + 2D_1 x_{20}],$$

$$D_3 = \frac{1}{2x_{10}}[C_3 + 2D_1 x_{30}], \qquad D_4 = \frac{\alpha_{10}a_{40}}{2B_0}\left[C_1 - \Delta_4 - \frac{\Delta_1}{2}\right],$$

$$D_5 = \frac{1}{2x_{40}}[C_5 + 2D_4 x_{50}], \qquad D_6 = \frac{1}{2x_{40}}[C_6 + 2D_4 x_{60}].$$

13. **Du nombre et du choix des constantes.** — Les développements (28) dépendent de quatorze paramètres : des huit valeurs arbitraires données aux variables x_{i0}, ρ_1, ρ_2 et des six constantes d'intégration C_i. Le nombre des paramètres se réduit à huit si l'on tient compte des six relations obtenues en remplaçant dans les égalités (1), (2), (3), (4), (5), (6) les variables par leurs développements. Ces relations s'écrivent :

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2 = 0, \qquad x_{40}^2 + x_{50}^2 + x_{60}^2 = 0, \qquad x_{10}x_{40} + x_{20}x_{50} + x_{30}x_{60} = 0, \\ x_{40}\rho_{20}^2 = x_{50}C_5 + x_{60}C_6, \qquad x_{10}\rho_{10}^2 = x_{20}C_2 + x_{30}C_3, \\ x_{10}x_{40}[\rho_1^2 + \rho_2^2 - 1] = x_{40}[x_{20}C_5 + x_{30}C_6] + x_{10}[x_{50}C_2 + x_{60}C_3). \end{array}\right.$$

Les six équations (29) peuvent être simplifiées par l'introduction d'une variable θ telle que :

$$x_{20} = ix_{10}\cos\theta, \qquad x_{30} = ix_{10}\sin\theta, \qquad x_{50} = ix_{40}\cos\theta, \qquad x_{60} = ix_{40}\sin\theta, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Les trois premières équations (29) sont satisfaites et les trois dernières deviennent :

$$\rho_{20}^2 = i[C_5\cos\theta + C_6\sin\theta], \qquad \rho_{10}^2 = i[C_2\cos\theta + C_3\sin\theta],$$
$$2i[(C_2 + C_5)\cos\theta + (C_3 + C_6)\sin\theta] = 1.$$

Pour passer à la solution du système différentiel (I) il faut ajouter la constante des forces vives K et la constante t_0 provenant de l'intégration de l'expression en r de la dérivée $\frac{dt}{dr}$. Par conséquent, les développements dépendront de dix constantes arbitraires et nous pourrons choisir :

$$x_{10},\ x_{20},\ x_{40},\ C_1,\ C_2,\ C_4,\ C_5,\ C_6,\ K,\ t_0$$

14. **Expression des coordonnées en fonction du temps.** — Développons la quantité $\frac{A}{B}$ suivant les puissances de r et de $r^2 \log r$:

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_4 z_4 + \varphi}{B} = \frac{\alpha_{10}}{B_0} Z_4 + S_2(r, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6) = S_1(r, r^2\log r) = rS(r, r\log r)$$

Posons $t_0 = 0$; de l'expression :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r\frac{A}{B} = r^2 S(r, \log r)$$

nous déduisons successivement :

$$\frac{dt}{dr} = rS(r, r\log r), \qquad t = r^2S(r, r\log r), \qquad \log t = 2\log r + S(r, r\log r),$$

puis :

$$t^{\frac{1}{2}} = rS(r, r\log r), \qquad t^{\frac{1}{2}}\log t = r\log rS(r, r\log r) + rS(r, \log r).$$

En considérant les expressions de $t^{\frac{1}{2}}$ et de $t^{\frac{1}{2}}\log t$ comme deux fonctions implicites en r et $r\log r$, nous aurons par inversion :

$$r = t^{\frac{1}{2}}\mathrm{S}(t^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}\log t), \qquad r\log r = \mathrm{S}(t^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}\log t).$$

Les coordonnées s'expriment par des développements en séries entières en :

$$t^{\frac{1}{2}}, \qquad t^{\frac{1}{2}}\log t$$

de la forme :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= x_{10} + a_{10}t^{\frac{1}{2}} + a_{20}t + a_{11}\,t\log t + \dots + a_{ij}(t^{\frac{1}{2}})^i(t^{\frac{1}{2}}\log t)^j + \dots,\\
x_2 &= x_{20} + \frac{x_{20}}{x_{10}}\,a_{10}t^{\frac{1}{2}} + b_{20}t + \frac{x_{20}}{x_{10}}\,a_{11}t\log t + \dots + b_{ij}(t^{\frac{1}{2}})^i(t^{\frac{1}{2}}\log t)^j + \dots,\\
x_3 &= x_{30} + \frac{x_{30}}{x_{10}}\,a_{10}t^{\frac{1}{2}} + c_{20}t + \frac{x_{30}}{x_{10}}\,a_{11}t\log t + \dots + c_{ij}(t^{\frac{1}{2}})^i(t^{\frac{1}{2}}\log t)^j + \dots,\\
x_4 &= x_{40} + a'_{10}{}^{\frac{1}{2}}t + a'_{20}t + a'_{11}t\log t + \dots + a'_{ij}(t^{\frac{1}{2}})^i(t^{\frac{1}{2}}\log t)^j + \dots,\\
x_5 &= x_{50} + \frac{x_{50}}{x_{40}}\,a'_{10}t^{\frac{1}{2}} + b'_{20}t + \frac{x_{50}}{x_{40}}\,a'_{11}t\log t + \dots + b'_{ij}(t^{\frac{1}{2}})^i(t^{\frac{1}{2}}\log t)^j + \dots,\\
x_6 &= x_{60} + \frac{x_{60}}{x_{40}}\,a'_{10}t^{\frac{1}{2}} + c'_{20}t + \frac{x_{60}}{x_{40}}\,a'_{11}t\log t + \dots + c'_{ij}(t^{\frac{1}{2}})^i(t^{\frac{1}{2}}\log t)^j + \dots,
\end{aligned}\right.$$

a_{ij}, $b_{,ij}$ c_{ij}, a'_{ij}, b'_{ij}, c'_{ij} sont des coefficients qui s'expriment en fonction des constantes précédentes.

15. **Conditions de choc.** — La solution générale du système différentiel (I) dépend de douze constantes arbitraires. Le mouvement des trois corps aboutissant à un choc imaginaire triple dépendra donc de deux conditions. A partir des huit équations (19), (20), (21) nous pourrons, par inversion, calculer les huit constantes x_{i0}, ρ_{10}, ρ_{20} en fonction des variables x_i, ρ_1, ρ_2, r, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6. En portant les valeurs ainsi obtenues dans les quatre équations (22) et en tenant compte des deux relations :

$$\xi_1 = \frac{x_5x_1 - x_2x_4}{r}, \qquad \xi_2 = \frac{x_6x_1 - x_3x_4}{r},$$

les conditions de choc s'expriment par les deux équations :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{V}_1 &= \mathrm{S}_2(r, \mathrm{Z}_1, z_2, z_3, \mathrm{Z}_4, z_5, z_6 \mid x_i, \rho_1, \rho_2),\\
\mathrm{V}_2 &= \mathrm{S}_2(r, \mathrm{Z}_1, z_2, z_3, \mathrm{Z}_4, z_5, z_6 \mid x_i, \rho_1, \rho_2).
\end{aligned}\right.$$

16. **Discussion du cas** $\mathrm{B}_0 \neq 0$. — Reprenons le système différentiel Σ'_2 et considérons l'équation :

$$(32)\quad \frac{dz_1}{\left(2 + \frac{\alpha_{10}a_{10}}{\mathrm{B}_0}\right)z_1 + \frac{\alpha_{40}a_{10}}{\mathrm{B}_0}\,z_4} = \frac{dz_4}{\frac{\alpha_{10}a_{40}}{\mathrm{B}_0}\,z_1 + \left(2 + \frac{\alpha_{40}a_{40}}{\mathrm{B}_0}\right)z_4}.$$

En ayant égard à la relation (18) :

$$(\alpha_1a_1 + \alpha_4a_4)_0 = -\,\mathrm{B}_0,$$

les deux racines λ_1, λ_2 de l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} \left(2+\frac{\alpha_{10}a_{10}}{B_0}\right)-\lambda & \frac{\alpha_{40}a_{10}}{B_0} \\ \frac{\alpha_{10}a_{40}}{B_0} & \left(2+\frac{\alpha_{40}a_{40}}{B_0}\right)-\lambda \end{vmatrix}=0$$

sont égales à 1 et à 2, et nous pouvons faire un changement de variables linéaire de telle sorte que l'équation (32) devienne :

$$\frac{dZ_1}{2Z_1}=\frac{dZ_4}{Z_4}.$$

Le troisième changement de variables que nous avons effectué :

$$Z_1=z_1-\frac{a_{10}}{a_{40}}z_4, \qquad Z_4=z_1+\frac{\alpha_{40}}{\alpha_{10}}z_4$$

suppose que les quantités a_{40} et α_{10} sont différentes de zéro. D'après la relation (18) ces deux quantités ne peuvent être nulles à la fois. Par conséquent, pour a_{40} nul nous ferons le changement de variables :

$$Z_1=z_1+\frac{\alpha_{40}}{\alpha_{10}}z_4, \qquad z_4=z_4,$$

et pour α_{10} nul nous ferons le changement de variables :

$$Z_1=z_1-\frac{a_{10}}{a_{40}}z_4, \qquad z_4=z_4.$$

Nous obtiendrons ensuite un système différentiel analogue au système Σ_3 et nous démontrerions que les coordonnées s'expriment encore par des développements en séries entières en r et $r^2\log r$.

Dans le cas général où α_{10} et a_{40} sont différents de zéro, nous avons défini une quantité Δ_1 au moyen de l'équation (26) :

$$\Delta_1=\frac{(m_1+m_2+m_3)\alpha_{10}^2C_4^2}{2x_{10}x_{40}\rho_{10}^8\rho_{20}^8(x_1-x_4)_0^2}[\rho_2^2(x_1-x_4)^2-x_4^2]_0[M\rho_1^6+N\rho_1^3+L]_0$$

et nous avons démontré que la forme des développements dépend de la valeur de Δ_1. Pour des valeurs arbitraires des variables x_1, x_4, ρ_2 satisfaisant à l'une ou l'autre des deux relations :

$$\rho_{20}^2(x_1-x_4)_0^2-x_{40}^2=0, \tag{33}$$

$$\left[x_4^3(x_1-x_4)^3[(x_1-x_4)\rho_2^5+x_4)]^2-x_1^3[(x_1-x_4)\rho_2^2+x_4]^5\right]_0=0, \tag{34}$$

la quantité Δ_1 est nulle et les coordonnées s'expriment par des développements en séries entières en r. De l'équation :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2=r\frac{A}{B}=r\left[\frac{\alpha_{10}}{B_0}Z_4+S_2(r,Z_1,z_2,z_3,Z_4,z_5,z_6)\right]=rS_1(r)=r^2S(r)$$

nous déduisons successivement :

$$\frac{dt}{dr} = r\mathrm{S}(r), \qquad t = r^2\mathrm{S}(r), \qquad t^{\frac{1}{2}} = r\mathrm{S}(r),$$

et par inversion :

$$r = t^{\frac{1}{2}}\mathrm{S}(t^{\frac{1}{2}}).$$

Enfin, la quantité Δ_1 est nulle lorsque le coefficient C_4 est nul. Il faut alors, dans le système différentiel (23) substituer aux variables Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 des développements de la forme :

$$Z_1 = r^2\mathrm{S}(r), \qquad z_2 = r\mathrm{S}(r), \qquad z_3 = r\mathrm{S}(r), \qquad Z_4 = r^2\mathrm{S}(r), \qquad z_5 = r\mathrm{S}(r), \qquad z_6 = r\mathrm{S}(r).$$

La détermination des coefficients de ces développements est possible. De l'équation :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = r\left[\frac{\alpha_{10}}{\mathrm{B}_0}\,\mathrm{Z}_4 + \mathrm{S}_2(r, \mathrm{Z}_1, z_2, z_3, \mathrm{Z}_4, z_5, z_6)\right]$$

nous déduisons successivement :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r^3\mathrm{S}(r), \qquad \frac{dt}{dr} = r^{\frac{3}{2}}\mathrm{S}(r), \qquad t = r^{\frac{5}{2}}\mathrm{S}(r), \qquad t^{\frac{2}{5}} = r\mathrm{S}(r),$$

et par inversion :

$$r = t^{\frac{2}{5}}\mathrm{S}(t^{\frac{2}{5}}).$$

Cas du triangle équilatéral. — Le cas où les trois corps forment à chaque instant un triangle équilatéral, le mouvement se réduisant au mouvement de Lagrange, offre un exemple dans lequel la quantité Δ_1 est identiquement nulle. En effet, ρ_1 et ρ_2 sont identiques à 1 et en ayant égard à la relation (17), la condition (34) est bien vérifiée. Comme d'autre part il est inutile d'introduire les variables auxiliaires u_1, u_2, les développements des coordonnées dépendront d'un nombre de constantes arbitraires égal à l'ordre du système différentiel.

17. **Étude du cas** B = 0. — Rappelons que nous avons posé :

$$\mathrm{B} = 2(m_1 + m_2 + m_3)\left[m_1m_2 + \frac{m_2m_3}{\rho_1} + \frac{m_1m_3}{\rho_2}\right] + \mathrm{K}r = r\,[\mathrm{U} + \mathrm{K})\,;$$

U désignant la fonction des forces. Les valeurs arbitraires données aux variables ρ_1, ρ_2 sont choisies de telle sorte que :

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4)_0 = -\,\mathrm{B}_0 = 0.$$

Considérons le système différentiel Σ_2 et faisons le changement de variables :

$$z_i = r\mathrm{Z}_i, \qquad \mathrm{U}_1 = r\mathrm{V}_1, \qquad \mathrm{U}_2 = r\mathrm{V}_2, \qquad (i = 1, 2, 3, ,4\,5, 6)\,;$$

Z_i, V_1, V_2 ont une signification nouvelle. Nous ajouterons à ces variables la fonction des forces U et une variable W définie par l'équation :

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_4 a_4 = r\mathrm{W}.$$

En fonction des nouvelles variables et en désignant par τ et par φ_1 les coefficients de r^2, les quantités σ et φ ont pour expressions :

$$\sigma_1 = \frac{2\rho_2^1}{x_1} Z_1 r + \tau_1 r^2, \qquad \sigma_4 = \frac{2\rho_2^2}{x_4} Z_4 r + \tau_4 r^2, \qquad \sigma_{14} = 2\left[\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right](Z_1 - Z_4)r + \tau_{14} r^2,$$

$$\varphi = \varphi_1 r^2$$

A partir du système différentiel Σ_2, nous obtiendrons entre les variables :

$$r,\ x_i,\ \rho_i,\ \rho_2,\ Z_i,\ V_1,\ V_2,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \mathrm{U},\ \mathrm{W}$$

un système différentiel Σ_3 d'ordre vingt :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{rZ_1} = \frac{dx_2}{\frac{r}{x_1}[rZ_2 + x_2 Z_1]} = \frac{dx_3}{\frac{r}{x_1}[rZ_3 + x_3 Z_1]} = \frac{dx_4}{rZ_4} = \frac{dx_5}{\frac{r}{x_4}[rZ_5 + x_5 Z_4]} = \frac{dx_6}{\frac{r}{x_4}[rZ_6 + x_6 Z_4]} = \frac{d\rho_1}{rV_1} = \frac{d\rho_2}{rV_2}$$

$$= \frac{dZ_1}{Z_1 - \sigma_{14}Z_1 + \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_4 Z_4 + r\varphi_1}{\mathrm{B}}[a_1 - rZ_1\mathrm{E}]} = \frac{dZ_2}{-\sigma_{14}Z_2 + \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_4 Z_4 + r\varphi_1}{\mathrm{B}}\left[\frac{\mathrm{R}_2}{\rho_1^3\rho_2^3}\xi_1 - rZ_2\mathrm{E}\right]}$$

$$= \frac{dZ_3}{-\sigma_{14}Z_3 + \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_4 Z_4 + r\varphi_1}{\mathrm{B}}\left[\frac{\mathrm{R}_2}{\rho_1^3\rho_2^3}\xi_2 - rZ_3\mathrm{E}\right]} = \frac{dZ_4}{Z_4 - \sigma_{14}Z_4 + \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_4 Z_4 + r\varphi_1}{\mathrm{B}}[a_4 - rZ_4\mathrm{E}]}$$

$$= \frac{dZ_5}{-\sigma_{14}Z_5 - \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_4 Z_4 + r\varphi_1}{\mathrm{B}}\left[\frac{\mathrm{R}_4}{\rho_1^3\rho_2^3}\xi_1 + rZ_5\mathrm{E}\right]} = \frac{dZ_6}{-\sigma_{14}Z_6 - \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_4 Z_4 + r\varphi_1}{\mathrm{B}}\left[\frac{\mathrm{R}_4}{\rho_1^3\rho_2^3}\xi_2 + rZ_6\mathrm{E}\right]}$$

$$= \frac{dV_1}{-3V_1 - (rV_1 + \rho_1)\left[2\left(\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right)(Z_1 - Z_4) + \tau_{14} r\right] + \frac{1}{\rho_1^2}\left[\frac{2\rho_1^2}{x_1}Z_1 + \tau_1 r - rV_1^2\right] + \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_4 Z_4 + r\varphi_1}{\mathrm{B}}[\mathrm{F} - (rV_1 + \rho_1)\mathrm{E}]}$$

$$= \frac{dV_2}{-3V_2 - (rV_2 + \rho_2)\left[2\left(\frac{\rho_1^2}{x_1} - \frac{\rho_2^2}{x_4}\right)(Z_1 - Z_4) + \tau_{14} r\right] + \frac{1}{\rho_2^2}\left[\frac{2\rho_2^2}{x_4}Z_4 + \tau_4 r - rV_2^2\right] + \frac{\alpha_1 Z_1 + \alpha_4 Z_4 + r\varphi_1}{\mathrm{B}}[\mathrm{G} - (rV_2 + \rho_2)\mathrm{E}]}$$

$$= \frac{d\xi_1}{-\xi_1 + \frac{x_1}{x_4}rZ_5 - \frac{x_4}{x_1}rZ_2 + \xi_1\left[\frac{Z_1}{x_1} + \frac{Z_4}{x_4}\right]r} = \frac{d\xi_2}{-\xi_2 + \frac{x_1}{x_4}rZ_6 - \frac{x_4}{x_1}rZ_3 + \xi_2\left[\frac{Z_1}{x_1} + \frac{Z_4}{x_4}\right]r}$$

$$= \frac{d\mathrm{U}}{-\mathrm{U} - 2(m_1 + m_2 + m_3)m_3\left[\frac{m_2}{\rho_1^2}V_1 + \frac{m_1}{\rho_2^2}V_2\right]} = \frac{d\mathrm{W}}{-\mathrm{W} + \alpha_1\frac{\partial a_1}{\partial r} + a_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial r} + \alpha_4\frac{\partial a_4}{\partial r} + a_4\frac{\partial \alpha_4}{\partial r}}$$

La quantité B introduit dans les dénominateurs du système Σ_3 le facteur $\frac{1}{r}$ que nous éliminerons en posant :

$$\alpha_1 Z_1 + \alpha_4 Z_4 = r\zeta, \tag{36}$$

et en prenant ζ pour variable au lieu de Z_4. Nous obtiendrons un système différentiel Σ_4 qui se déduira du système Σ_3 en remplaçant Z_4 par sa valeur tirée de (36) et en remplaçant le rapport $\frac{dZ_4}{\dots}$ par le rapport :

$$\frac{d\zeta}{-\sigma_{14}\zeta + \frac{\zeta+\varphi_1}{U+K}[W - rE\zeta] + Z_1\frac{d\alpha_1}{dr} + \frac{(r\zeta - \alpha_1 Z_1)}{\alpha_4}\frac{d\alpha_4}{dr}}.$$

Donnons des valeurs arbitraires aux variables x_i, Z_2, Z_3, ζ, Z_5, Z_6, ρ_1, ρ_2 et des valeurs nulles aux variables r, Z_1, V_1, V_2, ξ_1, ξ_2, U, W. Tous les dénominateurs du système Σ_4 s'annulent si l'on a la relation :

$$(\zeta + \varphi_1)_0 = 0.$$

Le système Σ_4 admet donc la multiplicité singulière :

$$r = Z_1 = V_1 = V_2 = \xi_1 = \xi_2 = U = W = 0.$$

Le long de cette multiplicité l'équation caractéristique du système Σ_4 a deux racines positives égales à 1 correspondant aux variables r et Z_1, treize racines nulles correspondant aux variables x_i, Z_2, Z_3, ζ, Z_5, Z_6, ρ_1, ρ_2 et six racines négatives correspondant aux variables V_1, V_2, ξ_1, ξ_2, U, W.

Le théorème fondamental est applicable au système Σ_4 et nous démontrons que toutes les variables rencontrées successivement s'expriment par des développements en séries entières en r. Si, dans le système Σ_3 nous substituons aux variables des développements en séries entières en r, nous formerons immédiatement ces développements par le simple examen des dénominateurs. Nous trouverons :

$$x_i - x_{i0} = r^2S(r), \qquad \rho_1 - \rho_{10} = r^2S(r), \qquad \rho_2 - \rho_{20} = r^2S(r),$$
$$Z_1 = rS(r), \qquad Z_2 - Z_{20} = r^2S(r), \qquad Z_3 - Z_{30} = r^2S(r), \qquad \zeta - \zeta_0 = r^2S(r),$$
$$Z_5 - Z_{50} = r^2S(r), \qquad Z_6 - Z_{60} = r^2S(r), \qquad V_1 = rS(r), \qquad V_2 = rS(r),$$
$$\xi_1 = rS(r), \qquad \xi_2 = rS(r), \qquad U = rS(r), \qquad W = rS(r)_1.$$

et par suite :

$$\varphi_1 = \varphi_{10} + r^2S(r).$$

De l'expression :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r\frac{A}{B} = r^2\frac{(\zeta+\varphi)}{U+K} = r^4S(r),$$

nous tirons successivement :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right) = r^2S(r), \qquad t = r^3S(r), \qquad t^{\frac{1}{3}} = rS(r),$$

et par inversion :

$$r = t^{\frac{1}{3}}S(t^{\frac{1}{3}}).$$

Par conséquent, si à l'instant du choc les valeurs arbitraires données aux variables ρ_1 et ρ_2 satisfont la relation :

$$2(m_1 + m_2 + m_3)\left[m_1m_2 + \frac{m_2m_3}{\rho_1} + \frac{m_1m_3}{\rho_2}\right] = 0,$$

la fonction des forces est nulle à cet instant et les coordonnées s'expriment par des développements en séries entières en $t^{\frac{1}{3}}$.

Conclusion. — Après trois changements successifs de variables :

1°
$$\frac{dx_i}{dr} = y_i, \qquad r_{23} = r\rho_1, \qquad r_{13} = r\rho_2, \qquad \frac{dr_{23}}{dr} = u_1, \qquad \frac{dr_{13}}{dr} = u_2,$$

2°
$$y_1 = \frac{z_1}{r}, \qquad y_2 = \frac{z_2 + x_2 y_1}{x_1}, \qquad y_3 = \frac{z_3 + x_3 y_1}{x_1},$$
$$y_4 = \frac{z_4}{r}, \qquad y_5 = \frac{z_5 + x_5 y_4}{x_4}, \qquad y_6 = \frac{z_6 + x_6 y_4}{x_4},$$
$$u_1 - \rho_1 = \mathrm{U}_1, \qquad u_2 - \rho_2 = \mathrm{U}_2, \qquad x_5 = \frac{r\xi_1 + x_2 x_4}{x_1}, \qquad x_6 = \frac{r\xi_2 + x_3 x_4}{x_1},$$

3°
$$\mathrm{Z}_1 = z_1 - \left(\frac{a_1}{a_4}\right)_0 z_4, \qquad \mathrm{Z}_4 = z_1 + \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right)_0 z_4,$$
$$\mathrm{V}_1 = \mathrm{U}_1 - \frac{\beta_{10}}{4}\mathrm{Z}_1 - \frac{\beta_{40}}{3}\mathrm{Z}_4, \qquad \mathrm{V}_2 = \mathrm{U}_2 - \frac{\gamma_{10}}{4}\mathrm{Z}_1 - \frac{\gamma_{40}}{3}\mathrm{Z}_4,$$
$$\eta_1 = \xi_1 - \frac{x_{10}}{2x_{40}} z_5 + \frac{x_{40}}{2x_{10}} z_2, \qquad \eta_2 = \xi_2 - \frac{x_{10}}{2x_{40}} z_6 + \frac{x_{40}}{2x_{10}} z_3,$$

nous obtenons entre les variables r, x_i, Z_1, z_2, z_3, Z_4, z_5, z_6 et les variables auxiliaires ρ_1, ρ_2, V_1, V_2, η_1, η_2 un système différentiel auquel le théorème fondamental est applicable. Les coordonnées s'expriment par des développements en séries entières en :

$$t^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad t^{\frac{1}{2}} \log t$$

et les développements des trois distances qui s'annulent commencent par des termes en $t^{\frac{1}{2}}$.

L'instant du choc est donc un point critique transcendant. Le mouvement des trois corps aboutissant à un choc triple imaginaire satisfait à deux conditions. Dans quelques cas particuliers les développements des coordonnées ne contiennent pas de logarithmes. Nous donnons dans le tableau suivant les résultats que nous avons obtenus :

I. $\mathrm{B}_0 \neq 0$

a) $\Delta_1 \neq 0$ $\qquad r = t^{\frac{1}{2}}\mathrm{S}(t^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}} \log t)$

b) $\Delta_1 = 0$

1° $\rho_{20}^2(x_1 - x_4)_0^2 - x_{40}^2 = 0$

ou

$\left[x_4^3(x_1 - x_4)^3[(x_1 - x_4)\rho_2^5 + x_4]^2 - x_1^3[(x_1 - x_4)\rho_2^5 + x_4]^5\right] = 0$ $\qquad \Big\} \; r = t^{\frac{1}{2}}\mathrm{S}(t^{\frac{1}{2}})$

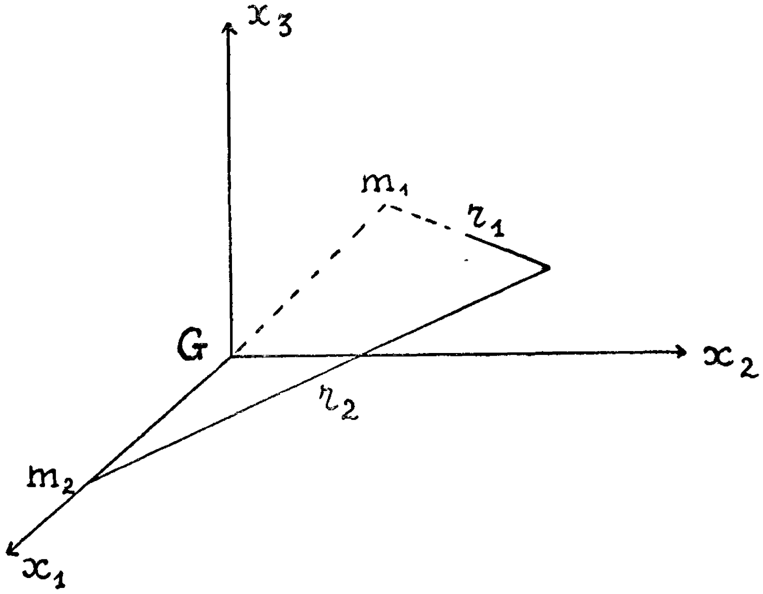
2° $\mathrm{C}_4 = 0$ $\qquad r = t^{\frac{2}{5}}\mathrm{S}(t^{\frac{2}{5}})$

II. $\mathrm{B}_0 = 0$ $\qquad r = t^{\frac{1}{3}}\mathrm{S}(t^{\frac{1}{3}})$

CHAPITRE V

CHOCS IMAGINAIRES DANS LE PROBLÈME RESTREINT

Rapportons le mouvement de la masse nulle au système d'axes mobiles ayant le centre de gravité G des deux massse m_1, m_2 pour origine. Prenons la distance de ces deux masses pour unité de longueur et leur somme pour unité de masse.



Désignons par x_1, x_2, x_3, les coordonnées de la masse nulle ; par

$$r_1 = \sqrt{(x_1 + m_2)^2 + x_2^2 + x_3^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x_1 - m_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

les distances de cette masse aux masses m_1, m_2 et par K la constante de Jacobi. Le mouvement de la masse nulle est défini par le système différentiel d'ordre six :

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= 2\frac{dx_2}{dt} + x_1 - m_1\frac{(x_1 + m_2)}{r_1^3} - m_2\frac{(x_1 - m_1)}{r_2^3}, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -2\frac{dx_1}{dt} + x_2 - m_1\frac{x_2}{r_1^3} - m_2\frac{x_2}{r_2^3}, \\ \frac{d^2x_3}{dt^2} &= -m_1\frac{x_3}{r_1^3} - m_2\frac{x_3}{r_2^3}. \end{aligned} \right.$$

Les équations (I) admettent l'intégrale de Jacobi :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2\right]=\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+\mathrm{K}.$$

Premier changement de variables. — Prenons r_1 pour variable indépendante et posons :

$$r_1=r,\qquad \frac{dx_i}{dr}=y_i,\qquad (i=1,2,3),\qquad \mathrm{A}=y_1^2+y_2^2+y_3^2,$$

$$\mathrm{B}=2\left[m_1+m_2\frac{r}{r_2}+\frac{(x_1^2+x_2^2)}{2}r+\mathrm{K}r\right],\qquad \mathrm{D}=(x_1+m_2)(x_1-m_1)+x_2^2+x_3^2,$$

$$\mathrm{E}=2\,[(x_1+m_2)y_2-x_2y_1]r\frac{dr}{dt}+(x_1+m_2)x_1r+x_2^2r-m_1-m_2\mathrm{D}\frac{r}{r_2^3}.$$

L'équation de Jacobi se transforme en une équation de laquelle on déduit immédiatement :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2=r\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}. \tag{1}$$

Définissons une nouvelle variable auxiliaire R au moyen de l'équation :

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=r\mathrm{R}^2. \tag{2}$$

De l'équation (1) nous tirons alors :

$$\frac{dt}{dr}=r\mathrm{R}. \tag{3}$$

Système différentiel Σ_1. — Nous obtenons entre les variables r, x_i, y_i et la variable auxiliaire R un système différentiel Σ_1 d'ordre sept :

$$\frac{dr}{r}=\frac{dx_1}{ry_1}=\frac{dx_2}{ry_2}=\frac{dx_3}{ry_3}=\frac{d\mathrm{R}}{-\mathrm{AR}-r\mathrm{R}^3\mathrm{E}}$$

$$=\frac{dy_1}{y_1-\mathrm{A}y_1+2y_2r^2\mathrm{R}+x_1r^3\mathrm{R}^2-m_1(x_1+m_2)\mathrm{R}^2-m_2(x_1-m_1)\mathrm{R}^2\frac{r^3}{r_2^3}-y_1r\mathrm{R}^2\mathrm{E}}$$

$$=\frac{dy_2}{y_2-\mathrm{A}y_2-2y_1r^2\mathrm{R}+x_2r^3\mathrm{R}^2-m_1x_2\mathrm{R}^2-m_2x_2\mathrm{R}^2\frac{r^3}{r_2^3}-y_2r\mathrm{R}^2\mathrm{E}}$$

$$=\frac{dy_3}{y_3-\mathrm{A}y_3-m_1\mathrm{R}^2x_3-m_2x_3\mathrm{R}^2\frac{r^3}{r_2^3}-y_3r\mathrm{R}^2\mathrm{E}}$$

Étude du choc simple. — Définissons trois nouvelles variables z_1, z_2, z_3 au moyen des équations :

$$y_1=\frac{z_1}{r},\qquad y_2=\frac{z_2+x_2y_1}{x_1+m_2},\qquad y_3=\frac{z_3+x_3y_1}{x_1+m_2}.$$

En fonction des nouvelles variables, A prend la valeur :

$$\mathrm{A}=\frac{2}{x_1+m_2}z_1+\frac{1}{(x_1+m_2)^2}(-z_1^2+z_2^2+z_3^2).$$

Nous obtenons entre les variables r, x_i, z_i, R le système différentiel Σ_2 d'ordre sept :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{z_1} = \frac{dx_2}{\dfrac{rz_2 + x_2 z_1}{x_1 + m_2}} = \frac{dx_3}{\dfrac{rz_3 + x_3 z_1}{x_1 + m_2}} = \frac{d\mathrm{R}}{-\mathrm{AR} - r\mathrm{R}^3\mathrm{E}}$$

$$= \frac{dz_1}{2z_1 - \mathrm{A}z_1 + 2\dfrac{rz_2 + x_2 z_1}{x_1 + m_2}\mathrm{R}r^2 + x_1\mathrm{R}^2 r^4 - m_1(x_1 + m_2)\mathrm{R}^2 r - m_2(x_1 - m_1)\mathrm{R}^2\dfrac{r^4}{r_2^3} - z_1 r\mathrm{R}^2\mathrm{E}}$$

$$= \frac{dz_2}{z_2 - \mathrm{A}z_2 - 2\left[\dfrac{[(x_1 + m_2)^2 + x_2^2]z_1 + x_2 z_2 r}{(x_1 + m_2)}\right]\mathrm{R}r + m_2 x_2\mathrm{R}^2 r^3 - m_2(m_1 + m_2)x_2\mathrm{R}^2\dfrac{r^3}{r_2^3} - z_2 r\mathrm{R}^2\mathrm{E}}$$

$$= \frac{dz_3}{z_3 - \mathrm{A}z_3 - 2\dfrac{(rz_2 + x_2 z_1)}{x_1 + m_2}x_3 r\mathrm{R} - x_1 x_3 r^3\mathrm{R}^2 - m_2(m_1 + m_2)x_3\mathrm{R}^2\dfrac{r^3}{r_2^3} - z_3 r\mathrm{R}^2\mathrm{E}}.$$

Pour des valeurs arbitraires des variables x_1, x_2, x_3, R et pour des valeurs nulles des variables r, z_1, z_2, z_3 tous les dénominateurs du système Σ_2 s'annulent. En développant les dénominateurs au voisinage du système de valeurs :

$$r = z_1 = z_2 = z_3 = 0, \qquad x_i - x_{i0} = \mathrm{X}_i = 0, \qquad \mathrm{R} - \mathrm{R}_0 = \mathrm{Y} = 0,$$

le système différentiel Σ_2 se transforme en un système Σ_2' :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{z_1} = \frac{dx_2}{\dfrac{x_{20}}{x_{10} + m_2}z_1 + \mathrm{S}_2} = \frac{dx_3}{\dfrac{x_{30}}{x_{10} + m_2}z_1 + \mathrm{S}_2} = \frac{d\mathrm{R}}{-\dfrac{2}{x_{10} + m_2}\mathrm{R}_0 z_1 + m_1\mathrm{R}_0^3 r + \mathrm{S}_2}$$

$$= \frac{dz_1}{2z_1 - m_1(x_{10} + m_2)\mathrm{R}_0^2 r - \dfrac{2}{(x_{10} + m_2)}z_1^2 - m_1[2(x_{10} + m_2)\mathrm{R}_0\mathrm{Y} + \mathrm{R}_0^2\mathrm{X}_1 - \mathrm{R}_0^2 z_1]r + \mathrm{S}_3} = \frac{dz_2}{z_2 + \mathrm{S}_2} = \frac{dz_3}{z_3 + \mathrm{S}_2};$$

S_n désigne la fonction $\mathrm{S}_n(r, z_1, z_2, z_3, \mathrm{X}_i\, \mathrm{Y})$.

Le dénominateur correspondant à la différentielle dz_1 contenant au premier degré les variables z_1 et r nous ferons le changement de variables :

$$\mathrm{Z}_1 = z_1 - ar$$

avec :

$$a = m_1(x_{10} + m_2)\mathrm{R}_0^2.$$

Entre les variables r, x_i, Z_1, z_2, z_3, R, nous obtiendrons le système différentiel Σ_3 :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{\mathrm{Z}_1 + ar} = \frac{dx_2}{\left(\dfrac{x_2}{x_1 + m_2}\right)_0(\mathrm{Z}_1 + ar) + \mathrm{S}_2} = \frac{dx_3}{\left(\dfrac{x_3}{x_1 + m_2}\right)_0(\mathrm{Z}_1 + ar) + \mathrm{S}_2}$$

$$= \frac{d\mathrm{R}}{-\left(\dfrac{\mathrm{R}}{x_1 + m_2}\right)_0(2\mathrm{Z}_1 + ar) + \mathrm{S}_2} = \frac{d\mathrm{Z}_1}{2\mathrm{Z}_1 - \dfrac{2}{(x_{10} + m_2)}a^2 r^2 - m_1[2(x_{10} + m_2)\mathrm{R}_0\mathrm{Y} + \mathrm{R}_0^2\mathrm{X}_1 - \mathrm{R}_0^2 ar]r + \mathrm{S}_3}$$

$$= \frac{dz_2}{z_2 + \mathrm{S}_2} = \frac{dz_3}{z_3 + \mathrm{S}_2};$$

S_n désigne la fonction $\mathrm{S}_n(r, \mathrm{Z}_1, z_2, z_3, \mathrm{X}_i, \mathrm{Y})$.

Le système différentiel Σ_3 admet la multiplicité singulière :

$$r = Z_1 = z_2 = z_3 = 0.$$

Le long de cette multiplicité l'équation caractéristique a quatre racines positives dont une égale à 2 correspond à la variable Z_1 et trois égales à 1 correspondent aux variables r, z_2, z_3 ; cette équation a quatre racines nulles correspondant aux variables x_1, x_2, x_3, R, mais elle n'a pas de racines négatives.

Le théorème fondamental est donc applicable au système Σ_3. En chaque point x_{i0}, R_0 de la multiplicité singulière passe une famille de caractéristiques.

Cette famille est définie d'une part, par quatre équations non différentielles :

$$x_i - x_{i0} = X_i = S_1(r, Z_1, z_2, z_3 \mid x_{i0}, R_0) \tag{4}$$

$$R - R_0 = Y = S_1(r, Z_1, z_2, z_3 \mid x_{i0}, R_0) \tag{5}$$

et d'autre part, après substitution des fonctions S_1 dans le système Σ_3, par un système différentiel d'ordre trois :

$$r\frac{dZ_1}{dr} = 2Z_1 + ..., \qquad r\frac{dz_2}{dr} = z_2 + ..., \qquad r\frac{dz_3}{dr} = z_3 + ... \tag{6}$$

L'étude des équations non différentielles donne pour premiers termes des développements de X_i et de Y suivant les puissances de r, Z_1, z_2, z_3 :

$$x_1 - x_{10} = X_1 = ar + \frac{Z_1}{2}, \qquad x_2 - x_{20} = X_2 = \left(\frac{x_2}{x_1 + m_2}\right)_0 \left(ar + \frac{Z_1}{2}\right) + S_2,$$

$$x_3 - x_{30} = X_3 = \left(\frac{x_3}{x_1 + m_2}\right)_0 \left(ar + \frac{Z_1}{2}\right) + S_2, \qquad R - R_0 = Y = -\left(\frac{R}{x_1 + m_2}\right)_0 (ar + Z_1) + S_2.$$

Le système différentiel (6) admet la multiplicité singulière :

$$r = Z_1 = z_2 = z_3 = 0.$$

Le long de cette multiplicité l'équation caractéristique a deux racines égales à 1 correspondant aux variables z_2, z_3 et une racine égale à 2 correspondant à la variable Z_1. Considérons pour les variables Z_1, z_2, z_3 des développements à coefficients indéterminés suivant les puissances entières de r :

$$Z_1 = C_1 r^2 + ..., \qquad z_2 = C_2 r + ..., \qquad z_3 = C_3 r + ..., \tag{7}$$

les C_i étant des coefficients arbitraires.

En remplaçant dans le système Σ_3 les variables X_i, Y par leurs valeurs (4), (5), puis Z_1, z_2, z_3 par leurs développements (7), il s'introduit dans le second membre de l'équation :

$$r\frac{dZ_1}{dr} = 2Z_1 + ...,$$

en plus du terme $2C_1r^2$, un autre terme en r^2 dont le coefficient est nul. Par conséquent, la détermination des coefficients des développements (7) sera possible et les variables x_i s'exprimeront par des développements en séries entières en r.

Finalement, les coordonnées s'exprimeront par des développements en séries entières en $t^{\frac{1}{2}}$ dépendant de six constantes arbitraires et nous pourrons choisir :

$$x_{10}, x_{20}, C_1, C_2, K, t_0.$$

Choc double. — Définissons deux nouvelles variables ρ et u au moyen des équations :

$$r_2 = r\rho, \qquad \frac{dr_2}{dr} = u,$$

et, au système Σ_1, joignons les deux rapports :

$$\frac{d\rho}{u - \rho}$$

et :

$$= \frac{du}{u - \mathrm{A}u + \dfrac{\mathrm{A} - u^2}{\rho} + 2[(x_1 - m_1)y_2 - x_2y_1]\dfrac{r\mathrm{R}}{\rho} + [x_1(x_1 - m_1) + x_2^2]\dfrac{r^2\mathrm{R}^2}{\rho} - m_1\mathrm{D}\dfrac{\mathrm{R}^2}{r\rho} - m_2\dfrac{r\mathrm{R}^2}{\rho^4} - r\mathrm{R}^2\mathrm{E}u}.$$

Définissons quatre nouvelles variables z_1, z_2, z_3, U au moyen des équations :

$$y_1 = rz_1, \qquad y_2 = rz_2, \qquad y_3 = rz_3, \qquad u - \rho = \mathrm{U}.$$

Nous obtenons entre les variables r, x_i, z_i et les variables auxiliaires R, ρ, U un système différentiel d'ordre neuf :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{r^2z_1} = \frac{dx_2}{r^2z_2} = \frac{dx_3}{r^2z_3} = \frac{d\rho}{\mathrm{U}} = \frac{d\mathrm{R}}{-\mathrm{R}r^2\Sigma z_i^2 - \mathrm{R}^3r\mathrm{E}}$$

$$= \frac{dz_1}{-z_1r^2\Sigma z_i^2 + 2z_2r^2\mathrm{R} + x_1r^2\mathrm{R}^2 - \left[m_1(x_1 + m_2) + \dfrac{m_2(x_1 - m_1)}{\rho^3}\right]\dfrac{\Sigma z_i^2}{\mathrm{B}} - r\mathrm{R}^2\mathrm{E}z_1}$$

$$= \frac{dz_2}{-z_2r^2\Sigma z_i^2 - 2z_1r^2\mathrm{R} + x_2r^2\mathrm{R}^2 - \left[m_1x_2 + \dfrac{m_2x_2}{\rho^3}\right]\dfrac{\Sigma z_i^2}{\mathrm{B}} - r\mathrm{R}^2\mathrm{E}z_2}$$

$$= \frac{dz_3}{-z_3r^2\Sigma z_i^2 - \left[m_1x_3 + \dfrac{m_2x_3}{\rho^3}\right]\dfrac{\Sigma z_i^2}{\mathrm{B}} - r\mathrm{R}^2\mathrm{E}z_3}$$

$$= \frac{d\mathrm{U}}{\begin{array}{l} -2\mathrm{U} - (\mathrm{U} + \rho)r^2\Sigma z_i^2 + \dfrac{r^2\Sigma z_i^2 - \mathrm{U}^2}{\rho} + 2[(x_1 - m_1)z_2 - x_2z_1]\dfrac{\mathrm{R}}{\rho}r^2 \\ \qquad + \left[[x_1(x_1 - m_1) + x_2^2]\dfrac{r^3}{\rho} - \dfrac{m_1\mathrm{D}}{\rho} - \dfrac{m_2r^2}{\rho^4}\right]\dfrac{\Sigma z_i^2}{\mathrm{B}} - (\rho + \mathrm{U})r\mathrm{R}^2\mathrm{E}. \end{array}}$$

En remarquant que l'on a :

$$r\mathrm{R}^2\mathrm{E} = 2[(x_1 - m_2)z_2 - x_2z_1]r^2\mathrm{R} + (x_1 + m_2)x_1r^2\mathrm{R}^2 + x_2^2r^2\mathrm{R}^2 - m_1r\mathrm{R}^2 - m_2\frac{\mathrm{D}}{\rho^3}\frac{\Sigma z_i^2}{\mathrm{B}}$$

nous constatons que tous les dénominateurs s'annulent pour des valeurs nulles des variables U, r, R et pour des valeurs arbitraires des variables x_{i0}, ρ, z_{i0} satisfaisant aux relations :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} z_{10} = \left[\dfrac{m_1(x_1 + m_2)\rho^3 + m_2(x_1 - m_1)}{m_2\mathrm{D}}\right]_0, & z_{20} = \left[\dfrac{m_1x_2\rho^3 + m_2x_2}{m_2\mathrm{D}}\right]_0, \\ z_{30} = \left[\dfrac{m_1x_3\rho^3 + m_2x_3}{m_2\mathrm{D}}\right]_0, & \rho_0 = \dfrac{m_2}{m_1}. \end{array} \right.$$

Après développement des dénominateurs au voisinage du système de valeurs :

$$r = U = R = 0, \qquad x_i - x_{i0} = X_i = 0, \qquad z_i - z_{i0} = Z_i = 0, \qquad \rho - \rho_0 = P = 0$$

nous obtenons le système différentiel :

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx_1}{r^2(z_{10} + Z_1)} = \frac{dx_2}{r^2(z_{20} + Z_2)} = \frac{dx_3}{r^2(z_{30} + Z_3)} = \frac{d\rho}{U} = \frac{dR}{\frac{R}{2} + S_2} = \frac{dZ_i}{\frac{Z_i}{2} + S_1} = \frac{dU}{-\frac{3}{2}U - \frac{P}{2} + S_2};$$

S_n désigne la fonction $S_n(r, U, R, X_i, Z_i, P)$.

Le dénominateur correspondant à la différentielle dU contenant au premier degré les variables U et P nous remplacerons la variable U par la variable V définie par l'équation :

$$V = U + P.$$

Le système différentiel obtenu, admet la multiplicité singulière :

$$r = Z_i = R = V = 0.$$

Le long de cette multiplicité l'équation caractéristique a cinq racines positives dont une égale à 1 correspond à la variable r et quatre égales à $\frac{1}{2}$ correspondent aux variables Z_i et R ; cette équation a quatre racines nulles correspondant aux variables x_i, ρ et enfin, elle a une racine négative égale à $\frac{1}{2}$ correspondant à la variable V. Le théorème fondamental est donc applicable au système différentiel Σ_3. En chaque point de la multiplicité x_{i0}, ρ_0 passent deux familles de caractéristiques. A l'une de ces familles ne correspond aucun mouvement. L'autre famille est définie d'une part, par cinq équations non différentielles :

$$\text{(9)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x_i - x_{i0} &= X_i = S_1(r, Z_i, R \mid x_{i0}, \rho_0), \\ \rho - \rho_0 &= P = S_1(r, Z_i, R \mid x_{i0}, \rho_0), \\ V &= S_2(r, Z_i, R \mid x_{i0}, \rho_0), \end{aligned} \right.$$

et d'autre part, après substitution des fonctions S dans le système Σ_3 par un système différentiel d'ordre quatre :

$$\text{(10)} \qquad r\frac{dZ_i}{dr} = \frac{Z_i}{2} + \ldots, \qquad r\frac{dR}{dr} = \frac{R}{2} + \ldots.$$

Les variables s'expriment par des développements en séries entières en $r^{\frac{1}{2}}$ et par suite, par des développements en séries entières en $t^{\frac{1}{5}}$ dépendant de quatre constantes arbitraires y compris l'instant du choc.

Nous n'insistons pas davantage sur cette étude qui, à partir des équations (9) et (10), est analogue à celle que nous avons faite pour le choc double dans le problème général des trois corps.

DEUXIÈME PARTIE

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS ATTIRÉ PAR DEUX CENTRES FIXES

Le problème du mouvement d'un corps attiré par deux centres fixes suivant la loi de Newton a été résolu pour la première fois par Euler dans le cas du mouvement plan et par Lagrange (1) dans le cas général du mouvement dans l'espace. Lagrange a ramené le problème aux quadratures par l'emploi de la méthode dite des équations de Lagrange et Jacobi a appliqué au même problème sa méthode d'intégration des systèmes canoniques. L'inversion des quadratures elliptiques qui figurent dans les intégrales a fait l'objet de plusieurs travaux et nous citerons particulièrement la thèse de M. Andrade (2) dont nous adopterons les notations. Enfin, Charlier (3) a donné une analyse très claire du mouvement plan en évitant la théorie des fonctions elliptiques.

Nous nous proposons d'appliquer la transformation de Sundman (4) à l'intégration des équations différentielles du mouvement et d'en étudier ensuite systématiquement les solutions périodiques.

(1) *Œuvres*, t. 12, pp. 101-114.

(2) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1890.

(3) *Die Mechanik des Himmels*, 1902, Erster Band. Bedingt periodische bewegungen (Zweiter abschnitt, pp. 97-114). Bewegung eines punktes, der von zwei festen centren nach dem Newton'schen gesetz attrahirt wird (Dritter abschnitt, pp. 117-163).

(4) *Loc. cit.*

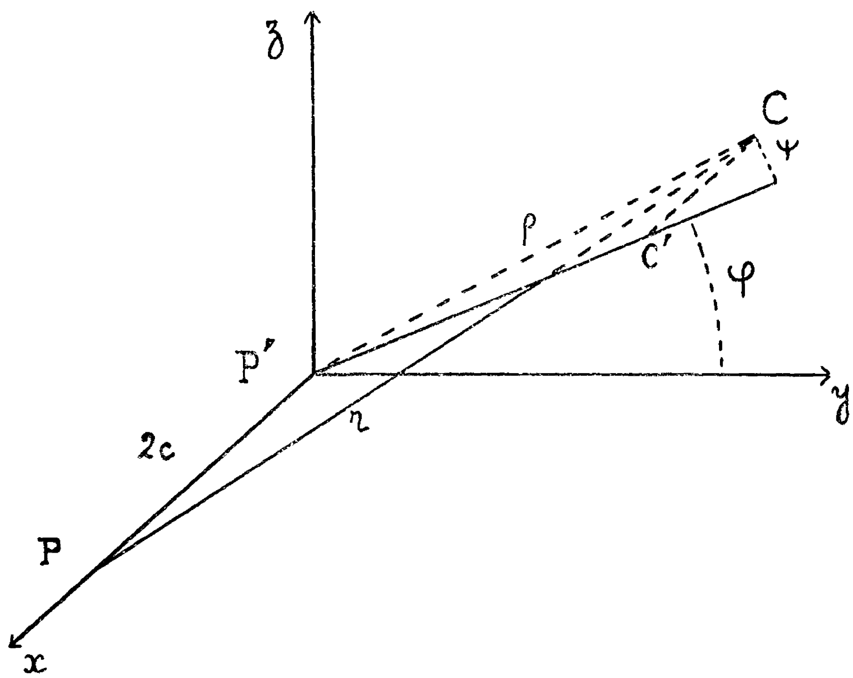
CHAPITRE PREMIER

APPLICATION DE LA TRANSFORMATION DE SUNDMAN

Le point matériel C est attiré par deux centres fixes P′ et P suivant la loi de Newton. Prenons P′ pour origine des coordonnées et dirigeons l'axe des x suivant P′P. Soient x, y, z les coordonnées de C ; $2c$ la distance P′P,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad r = \sqrt{\rho^2 + 4c^2 - 4cx},$$

les distances P′C et PC ; K'^2 et K^2 les coefficients attractifs des centres P′ et P. Désignons par C′ la projection de C sur le plan $y\mathrm{P}'z$ et, par φ et ψ les angles $\widehat{y\mathrm{P}'\mathrm{C}'}$ et $\widehat{\mathrm{C}'\mathrm{P}'\mathrm{C}}$.



Le mouvement du point matériel C est défini par le système différentiel d'ordre six :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{K^2}{r^3}(2c - x) - \frac{K'^2}{\rho^3}x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K^2}{r^3}y - \frac{K'^2}{\rho^3}y, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{K^2}{r^3}z - \frac{K'^2}{\rho^3}z.$$

Les trois équations différentielles (1) admettent les deux intégrales premières :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-\left[\frac{K^2}{r}+\frac{K'^2}{\rho}\right]=h, \tag{2}$$

$$y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=g, \tag{3}$$

h et g étant respectivement la constante des forces vives et la constante des aires.

Définissons une nouvelle variable u au moyen de la relation :

$$dt=\rho\, du.$$

En prenant comme fonctions inconnues de u :

$$x,\, y,\, z,\, \rho,\, t,\, x',\, y',\, z',\, \rho',$$

nous obtenons, par l'application de la transformation de Sundman, le nouveau système différentiel :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{du}=\rho', \quad \frac{d\rho'}{du}=\rho\left[\frac{K'^2}{\rho}+\frac{2K^2}{r}-\frac{K^2}{2r^3}(r^2+\rho^2-4c^2)+2h\right], \quad \frac{du}{dt}=\rho,\\
&\frac{dx}{du}=x', \quad \frac{dy}{du}=y', \quad \frac{dz}{du}=z',\\
&\frac{dx'}{du}=\frac{x'\rho'-K'^2x}{\rho}+\frac{K^2\rho^2}{r^3}(2c-x), \quad \frac{dy'}{du}=\frac{y'\rho'-K'^2y}{\rho}-\frac{K^2\rho^2}{r^3}y, \quad \frac{dz'}{du}=\frac{z'\rho'-K'^2z}{\rho}-\frac{K^2\rho^2}{r^3}z.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

En fonction des nouvelles variables x', y', z', les intégrales des forces vives et des aires deviennent :

$$\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{2\rho^2}-\left[\frac{K^2}{r}+\frac{K'^2}{\rho}\right]=h, \tag{5}$$

$$\frac{yz'-zy'}{\rho}=g. \tag{6}$$

En choisissant P pour origine des coordonnées et en introduisant de même la variable v définie par la relation :

$$dt=r\,dv,$$

on forme un système différentiel analogue au système (4) et en particulier l'équation différentielle analogue à l'équation en $\frac{d\rho'}{du}$:

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{dr}{dv}\right)=r\left[\frac{K^2}{r}+\frac{2K'^2}{\rho}-\frac{K'^2}{2\rho^3}(r^2+\rho^2-4c^2)+2h\right]. \tag{7}$$

Les six variables x, y, z, x', y', z' s'expriment en fonction des variables r, ρ, r', ρ' au moyen des deux égalités (5) et (6) et des quatre relations :

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2, \qquad r^2=\rho^2+4c^2-4cx,$$

$$\rho\rho'=xx'+yy'+zz', \qquad rr'=\rho\rho'-2cx'.$$

Par suite nous pourrons former un système de cinq équations différentielles entre les cinq fonctions r, ρ, r', ρ', t de la variable indépendante u, soit :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\rho}{du} = \rho', \qquad \frac{d\rho'}{du} = \rho\left[\frac{K'^2}{\rho} + \frac{2K^2}{r} - \frac{K^2}{2r^3}(r^2+\rho^2-4c^2) + 2h\right], \qquad \frac{dt}{du} = \rho, \\ &\frac{dr}{du} = r', \qquad \frac{d}{du}\left(\frac{rr'}{\rho}\right) = \rho\left[\frac{K^2}{r} + \frac{2K'^2}{\rho} - \frac{K'^2}{2\rho^3}(r^2+\rho^2-4c^2) + 2h\right]. \end{aligned}\right.$$

En fonction des nouvelles variables r, ρ, r', ρ', l'intégrale des forces vives se transforme en l'équation :

$$(9)\quad \rho^2 r^2 \rho'^2 + \rho^2 r^2 r'^2 - \rho r \rho' r'(r^2+\rho^2-4c^2) = \rho^2\left\{\frac{1}{2}[16c^2\rho^2 - (\rho^2+4c^2-r^2)^2]\left[\frac{K^2}{r} + \frac{K'^2}{\rho} + h\right] - 4c^2 g\right\}.$$

D'autre part, l'expression :

$$\frac{rr'}{\rho}\frac{d\rho'}{du} + \rho'\frac{d}{du}\left(\frac{rr'}{\rho}\right)$$

est une dérivée exacte et donne par intégration l'équation :

$$\rho r \rho' r' = \frac{\rho^2}{2}\left[K^2\frac{(3r^2+\rho^2-4c^2)}{r} + K'^2\frac{(3\rho^2+r^2-4c^2)}{\rho} + 2h(r^2+\rho^2) + a\right],$$

a désignant une constante arbitraire (1).

Si l'on fait abstraction dans les équations différentielles (8) de la variable t, les distances ρ et r satisfont, en fonction de u, à un système différentiel d'ordre quatre dont on obtient deux intégrales en résolvant les équations (9) et (10) par rapport aux constantes g et a. En combinant les deux équations (9) et (10) nous obtenons la double équation, valable soit avec les signes supérieurs, soit avec les signes inférieurs :

$$(11)\quad \begin{aligned} r^2(r' \pm \rho')^2 = {} & K'^2[(\rho \pm r)^3 + 4c^2(r \pm \rho)] + K^2[(r \pm \rho)^3 - 4c^2(r \pm \rho)] \\ & + \frac{h}{2}[(r \pm \rho)^4 - 16c^4] + \frac{a}{2}[(r \pm \rho)^2 - 4c^2] - 4c^2 g^2. \end{aligned}$$

La somme et la différence des variables r et ρ étant en évidence, introduisons les coordonnées elliptiques :

$$r + \rho = 2\lambda, \qquad r - \rho = 2\mu,$$

et posons :

$$a = 2(\alpha - 2hc^2),$$

$$R(\lambda) = (\lambda^2 - c^2)[2h\lambda^2 + 2(K^2+K'^2)\lambda + \alpha] - g^2c^2, \qquad S(\mu) = (\mu^2 - c^2)[2h\mu^2 + 2(K^2-K'^2)\mu + \alpha] - g^2c^2.$$

L'équation (11) se décompose alors en les deux équations :

$$(\lambda+\mu)^2\lambda'^2 = R(\lambda), \qquad (\lambda+\mu)^2\mu'^2 = S(\mu).$$

λ et μ étant des fonctions du temps, nous tirons des deux équations différentielles précédentes deux

---

(1) Lagrange, *loc. cit.*, p. 105.

nouvelles équations différentielles dans lesquelles il faut mettre le signe + ou — devant les radicaux suivant que les variables λ et μ croissent ou décroissent :

$$(\lambda^2-\mu^2)\frac{d\lambda}{dt}=\pm\sqrt{R(\lambda)}, \tag{12}$$

$$(\lambda^2-\mu^2)\frac{d\mu}{dt}=\pm\sqrt{S(\mu)}. \tag{13}$$

Nous déduisons ensuite :

$$\frac{d\lambda}{\pm\sqrt{R(\lambda)}}=\frac{d\mu}{\pm\sqrt{S(\mu)}}, \tag{14}$$

$$dt=\frac{\lambda^2 d\lambda}{\pm\sqrt{R(\lambda)}}-\frac{\mu^2 d\mu}{\pm\sqrt{S(\mu)}}. \tag{15}$$

Nous déterminerons l'angle φ en considérant l'intégrale des aires exprimée au moyen des fonctions φ, ψ, ρ sous la forme :

$$\rho^2\cos^2\psi\frac{d\varphi}{dt}=g$$

et dans cette équation nous remplacerons $\rho^2\cos^2\psi$ par son expression en fonction de λ et de μ :

$$\rho^2\cos^2\psi=\frac{16c^2\rho^2-(r^2-\rho^2-4c^2)^2}{16c^2}=\frac{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}{c^2}.$$

L'angle d'azimut φ sera alors donné par la quadrature résultant de l'expression :

$$d\varphi=gc^2\left[\frac{d\lambda}{\pm(\lambda^2-c^2)\sqrt{R(\lambda)}}+\frac{d\mu}{\pm(c^2-\mu^2)\sqrt{S(\mu)}}\right]. \tag{16}$$

Au total, nous retrouvons bien pour déterminer la trajectoire et la loi du mouvement les quadratures classiques.

CHAPITRE II

ÉTUDE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES

Rappelons quelques équations indispensables à cette étude. En désignant par T la demi-force vive, par U la fonction des forces et par H la fonction hamiltonienne, on a successivement :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda', \qquad \frac{d\mu}{dt} = \mu', \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi',$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}\lambda'^2 + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}\mu'^2 + \frac{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}{c^2}\varphi'^2\right], \qquad U = \frac{K^2}{\lambda + \mu} + \frac{K'^2}{\lambda - \mu},$$

$$p = \frac{\partial T}{\partial \lambda'} = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}\lambda', \qquad q = \frac{\partial T}{\partial \mu'} = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}\mu', \qquad s = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \frac{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}{c^2}\varphi',$$

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^2 - c^2}{\lambda^2 - \mu^2}p^2 + \frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - \mu^2}q^2 + \frac{c^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}s^2\right] - \frac{K^2}{\lambda + \mu} - \frac{K'^2}{\lambda - \mu} = h.$$

Les équations différentielles du mouvement prennent la forme canonique :

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, &&\frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, &&\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s},\\ &\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, &&\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mu}, &&\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}.\end{aligned}\right.$$

De l'étude que nous avons faite dans le chapitre I nous déduisons immédiatement la solution du système canonique (1) :

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{d\lambda}{\pm\sqrt{R(\lambda)}} - \int \frac{d\mu}{\pm\sqrt{S(\mu)}} = A, \qquad \int \frac{\lambda^2 d\lambda}{\pm\sqrt{R(\lambda)}} - \int \frac{\mu^2 d\mu}{\pm\sqrt{S(\mu)}} = t + \tau,\\ &\varphi = \int \frac{c^2 g\, d\lambda}{\pm(\lambda^2 - c^2)\sqrt{R(\lambda)}} + \int \frac{c^2 g\, d\mu}{\pm(c^2 - \mu^2)\sqrt{S(\mu)}} + G,\\ &p = \frac{\pm\sqrt{R(\lambda)}}{\lambda^2 - c^2}, \qquad q = \frac{\pm\sqrt{S(\mu)}}{c^2 - \mu^2}, \qquad s = g,\end{aligned}\right.$$

A, τ, G désignant des constantes arbitraires.

Il est facile de déduire trois intégrales du système (1) à partir des trois dernières équations (2).

Suivant que l'on tire la valeur de α de l'une ou l'autre des équations qui expriment p et q en fonction de λ et de μ, on obtient :

$$p^2(\lambda^2-c^2)+\frac{c^2g^2}{\lambda^2-c^2}-2(K^2+K'^2)\lambda-2\lambda^2h=\alpha \tag{3}$$

ou :

$$q^2(\mu^2-c^2)+\frac{c^2g^2}{\mu^2-c^2}-2(K^2-K'^2)\mu-2\mu^2h=\alpha. \tag{4}$$

Les expressions $H=h$, $s=g$ jointes à l'une ou l'autre des expressions (3), (4) dans lesquelles on a remplacé les constantes h et g par H et s forment trois intégrales du système différentiel (1).

I. — Étude des racines des polynômes $R(\lambda)$ et $S(\mu)$.

Nous supposerons, ce qui ne nuit en rien à la généralité du problème, que l'on a :

$$K^2 \geqq K'^2, \qquad c=1.$$

Les deux polynômes $R(\lambda)$ et $S(\mu)$ s'écriront alors :

$$R(\lambda)=2h\lambda^4+2(K^2+K'^2)\lambda^3+(\alpha-2h)\lambda^2-2(K^2+K'^2)\lambda-(\alpha+g^2), \tag{5}$$

$$S(\mu)=2h\mu^4+2(K^2-K'^2)\mu^3+(\alpha-2h)\mu^2-2(K^2-K'^2)\mu-(\alpha+g^2). \tag{6}$$

Pour que le mouvement soit périodique il est nécessaire que les variables λ et μ aient un mouvement d'oscillation (1). Chaque polynôme $R(\lambda)$ et $S(\mu)$ devra donc admettre au moins deux racines simples. Les racines simples r_1 et r_2 du polynôme $R(\lambda)$ et les racines simples ρ_1 et ρ_2 du polynôme $S(\mu)$ satisfont aux inégalités suivantes :

$$1<r_1<r_2, \qquad -1<\rho_1<\rho_2<1,$$

et, puisque les polynômes $R(\lambda)$ et $S(\mu)$ figurent sous des radicaux, ces polynômes devront prendre nécessairement des valeurs positives pour toutes les valeurs de λ et de μ comprises respectivement entre r_1, r_2 et ρ_1, ρ_2.

Nous examinerons successivement les cas $h>0$, $h=0$, $h<0$.

1. **Cas** $h>0$. — Les coefficients du polynôme $R(\lambda)$ présentant une ou deux variations suivant les signes de la quantité $(\alpha+g^2)$, ce polynôme peut, d'après le théorème de Descartes, avoir au plus deux racines positives. L'examen du tableau suivant qui donne les valeurs de $R(\lambda)$ pour les valeurs $-\infty$, -1, $+1$, r_1, r_2, $+\infty$ de λ :

λ	$-\infty$	-1	$+1$	r_1	r_2	$+\infty$
$R(\lambda)$	$+\infty$	$-g^2$	$-g^2$	0	0	$+\infty$

(1) Quand une variable varie entre deux limites alternativement dans l'un et l'autre sens, on dit encore qu'il y a mouvement de libration (Charlier).

montre que le polynôme R(λ) aurait en plus des racines r_1 et r_2, deux autres racines réelles : l'une comprise entre $-\infty$ et -1, et l'autre plus grande que r_2. Ce polynôme aurait donc trois racines positives ce qui est impossible. Par conséquent, il n'existe pas d'orbites périodiques lorsque la constante des forces vives h est positive.

2. **Cas** $h = 0$. — Formons comme précédemment le tableau donnant les différentes valeurs de R(λ) pour les valeurs $-\infty$, -1, $+1$, r_1, r_2, $+\infty$ de λ :

λ	$-\infty$	-1	$+1$	r_1	r_2	$+\infty$
R(λ)	$-\infty$	$-g^2$	$-g^2$	0	0	$+\infty$

Ce tableau montre encore que le polynôme R(λ) devrait admettre trois racines positives, ce qui est impossible, puisque ses coefficients présentent une ou deux variations. Par conséquent, il n'existe pas d'orbites périodiques lorsque la constante des forces vives est nulle.

3. **Cas** $h < 0$. — Considérons les polynômes R(x) et S(x) obtenus en remplaçant dans les expressions (5) et (6) λ et μ par la variable x. La position relative des deux courbes :

$$y = \mathrm{R}(x), \qquad y = \mathrm{S}(x),$$

dépend du signe de la quantité :

$$\mathrm{R}(x) - \mathrm{S}(x) = 4\mathrm{K}'^2 x(x^2 - 1), \tag{7}$$

et l'on a :

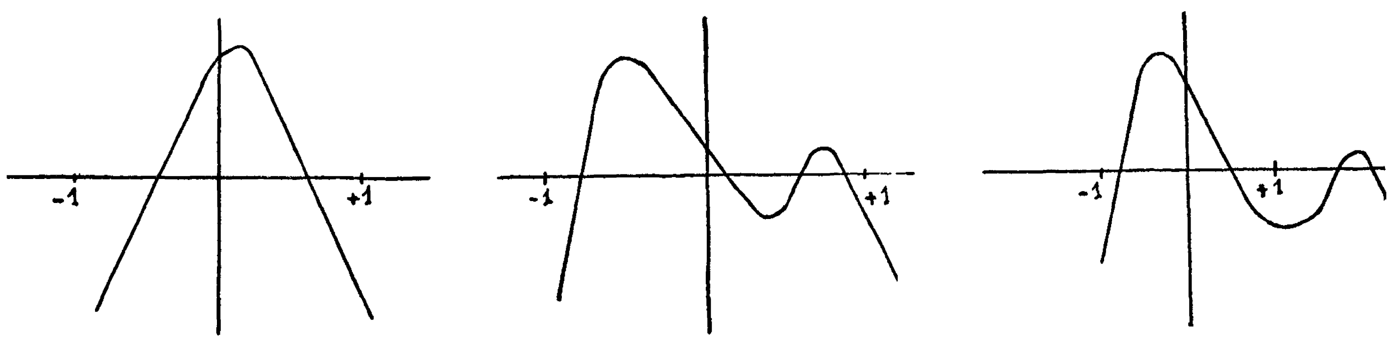
x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
R(x) — S(x)		$-$		$+$		$-$		$+$	

Imposons simultanément deux racines plus grandes que 1 au polynôme R(x) et deux racines comprises entre -1 et $+1$ au polynôme S(x). Les coefficients de ces polynômes présentent trois variations si la quantité ($\alpha + g^2$) est négative et deux variations si cette quantité est positive et les courbes :

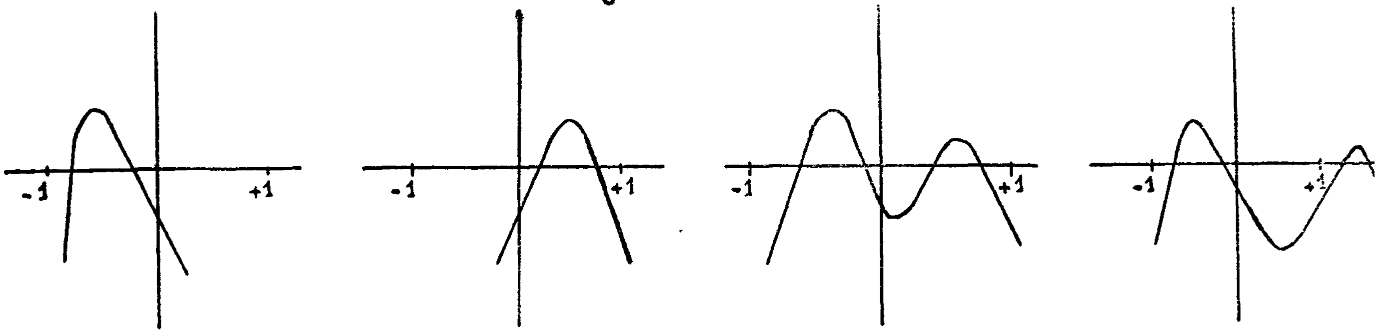
$$y = \mathrm{S}(x)$$

auront nécessairement l'une des allures suivantes quant au nombre et à la séparation des racines :

$\alpha + g^2 < 0$



$\alpha + g^2 > 0$



En tenant compte de la relation (7) et des courbes précédentes nous constatons que si le polynôme $S(x)$ a ses quatre racines réelles dont deux plus grandes que 1, le polynôme $R(x)$ aura également quatre racines réelles dont deux plus grandes que 1. Par conséquent, il y aura dans ce cas mouvement d'oscillation pour les variables λ et μ. Dans les autres cas, l'étude des racines des polynômes $R(x)$ et $S(x)$ pourra se faire par l'emploi de la méthode de Descartes ou de Ferrari sur la résolution générale de l'équation du quatrième degré et par l'application du théorème de Budan-Fourier sur la séparation des racines.

Par conséquent, il sera toujours possible de choisir les constantes arbitraires α, g, h, c'est-à-dire les conditions initiales du mouvement, de telle sorte que les variables λ et μ aient un mouvement d'oscillation et ces constantes ne devront satisfaire qu'à des inégalités. Les valeurs des variables λ et μ oscillant respectivement entre les racines simples r_1, r_2 et ρ_1, ρ_2, il s'ensuit que dans le mouvement relatif plan la trajectoire sera contenue dans l'aire comprise entre deux ellipses et deux hyperboles. La dérivée par rapport au temps de la variable φ étant constamment positive, la trajectoire du point matériel C dans l'espace sera contenue dans le volume compris entre deux ellipsoïdes et deux hyperboloïdes ayant pour axe de révolution la droite joignant les deux points fixes. Nous étudierons successivement les cas où le point matériel C se meut sur un ellipsoïde de révolution, sur un hyperboloïde de révolution ou sur un cercle.

4. **Mouvement sur l'ellipsoïde de révolution** $\lambda =$ const. (1). — Ce mouvement a lieu si le polynôme $R(\lambda)$ a une racine double plus grande que 1. Pour cette valeur de λ, soit λ_0, on aura :

$$\lambda'_0 = p_0 = 0,$$

$$R(\lambda_0) = 2h\lambda_0^4 + 2(K^2 + K'^2)\lambda_0^3 + (\alpha - 2h)\lambda_0^2 - (2K^2 + K'^2)\lambda_0 - (\alpha + g^2) = 0, \tag{8}$$

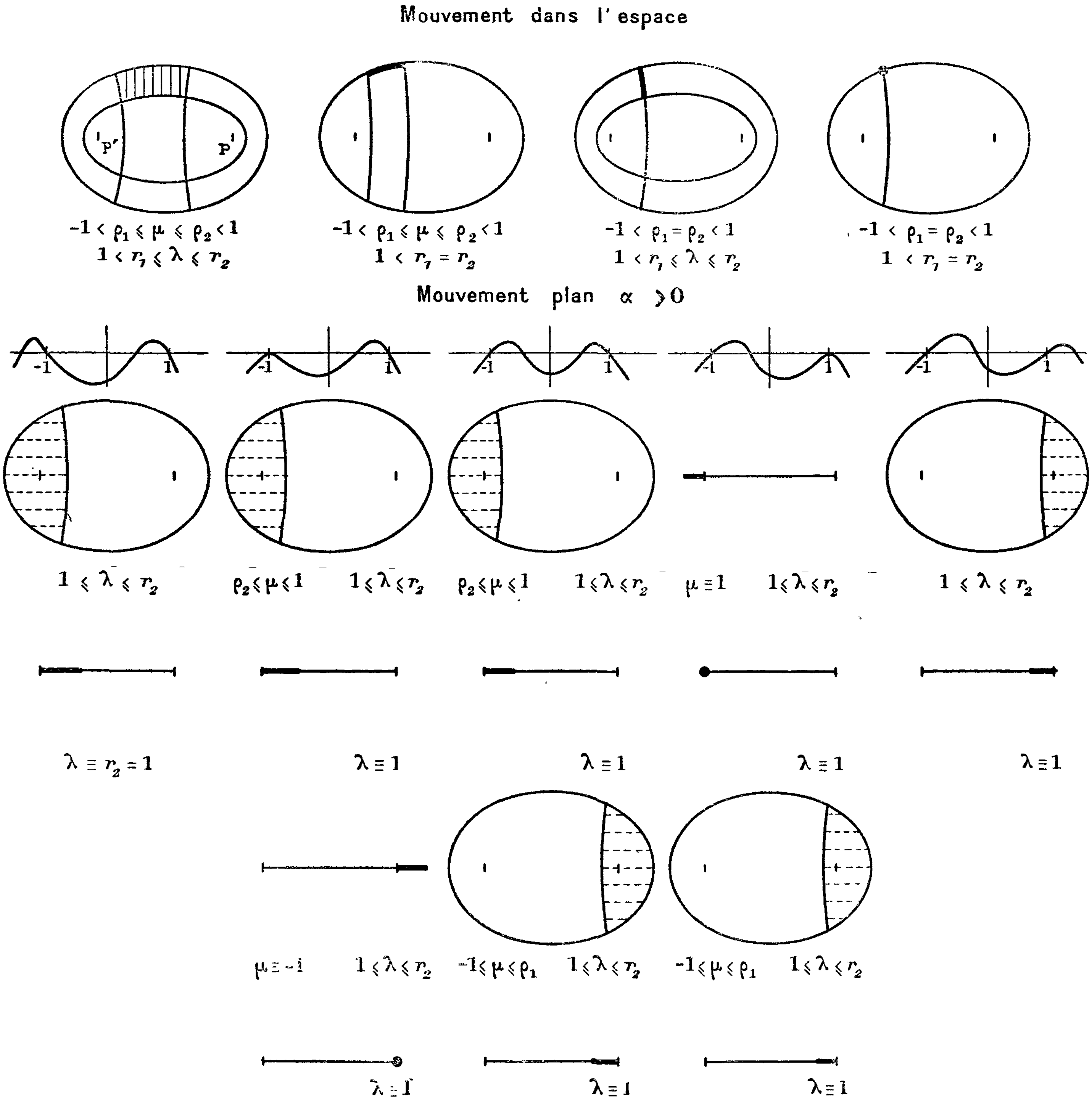
$$\left(\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}\right)_0 = 2[4h\lambda_0^3 + 3(K^2 + K'^2)\lambda_0^2 + (\alpha - 2h)\lambda_0^2 - (K^2 + K'^2)] = 0. \tag{9}$$

Des deux équations (8) et (9) tirons les valeurs de h et de α. On trouve :

$$h = -\frac{(K^2 + K'^2)}{2\lambda_0} - \frac{g^2}{2(\lambda_0^2 - 1)^2}, \qquad \alpha = \frac{g^2}{(\lambda_0^2 - 1)} - 2(K^2 + K'^2)\lambda_0 + 2\lambda_0^2\left[\frac{K^2 + K'^2}{2\lambda_0} + \frac{g^2}{2(\lambda_0^2 - 1)^2}\right].$$

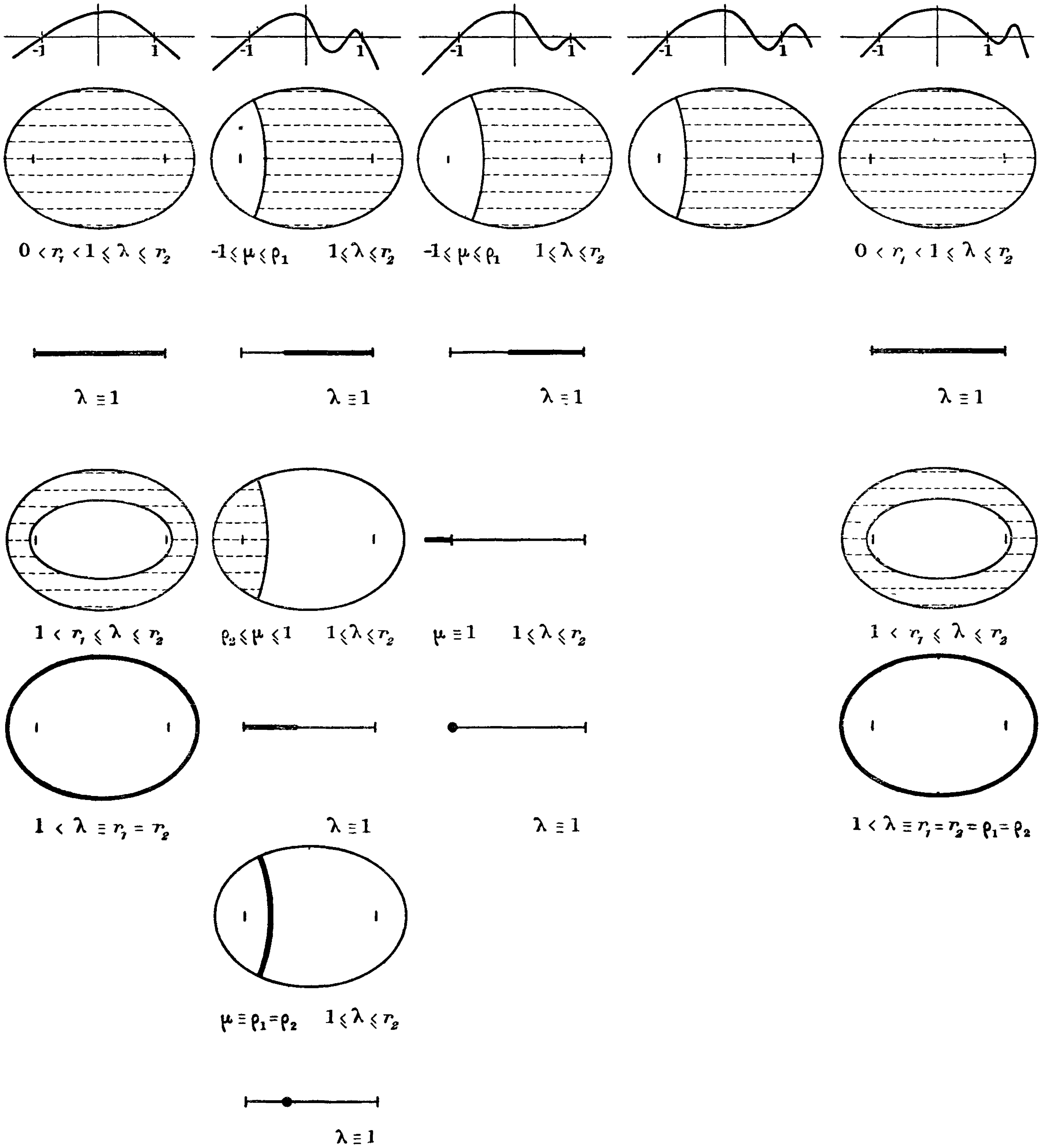
(Suite page 68.)

(1) Les conditions auxquelles doivent satisfaire les valeurs initiales des variables pour que le mouvement ait lieu sur un ellipsoïde ont été énoncées par ANDRADE, *loc. cit.*, p. 12.



Selon les valeurs des racines r_1, r_2 et ρ_1, ρ_2 des polynomes $R(\lambda)$ et $(S\mu)$ le mouvement a lieu dans une partie limitée de l'espace que nous représentons par des surfaces hachurées ou des traits renforcés. D'après la notation que nous avons choisie, pour les valeurs de μ égales à -1 et à $+1$ les hyperboles se réduisent respectivement au demi-axe positif P, $+\infty$ et au demi-axe négatif P', $-\infty$; enfin pour λ égal à 1 l'ellipse se réduit au segment P'P. Pour le mouvement plan nous donnons en tête de chaque colonne les courbes $y = S(\mu) = (\mu^2 - 1)\,[-2h_1\mu^2 + 2(K^2 - K'^2)\mu + \alpha]$.

Mouvement plan $\alpha < 0$



En ayant égard à l'intégrale première :

$$H = h,$$

le mouvement aura lieu sur un ellipsoïde de révolution si les valeurs initiales des variables λ, μ, p, q, s satisfont aux deux conditions suivantes :

$$(10)\qquad p_0 = 0,\qquad \frac{1}{2}\left[\frac{1-\mu_0^2}{\lambda_0^2-\mu_0^2}q_0^2 + \frac{s_0^2}{(\lambda_0^2-1)(1-\mu_0^2)}\right] - \frac{K^2}{\lambda_0+\mu_0} - \frac{K'^2}{\lambda_0-\mu_0} + \frac{K^2+K'^2}{2\lambda_0} + \frac{s_0^2}{2(\lambda_0^2-1)^2} = 0.$$

5. **Mouvement sur un hyperboloïde de révolution** μ = const. — μ_0 étant une racine double du polynôme $S(\mu)$ comprise entre -1 et $+1$, un raisonnement analogue au précédent montre que le mouvement aura lieu sur un hyperboloïde de révolution si les valeurs initiales des variables λ, μ, p, q, s satisfont aux deux conditions suivantes :

$$(11)\qquad q_0 = 0,\qquad \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_0^2-1}{\lambda_0^2-\mu_0^2}p_0^2 + \frac{s_0^2}{(\lambda_0^2-1)(1-\mu_0^2)}\right] - \frac{K^2}{\lambda_0+\mu_0} - \frac{K'^2}{\lambda_0-\mu_0} + \frac{K^2-K'^2}{2\mu_0} + \frac{s_0^2}{2(\mu_0^2-1)^2} = 0.$$

6. **Mouvement sur un cercle.** — Si les polynômes $R(\lambda)$ et $S(\mu)$ admettent simultanément une racine double, la trajectoire, dans le mouvement relatif plan, se réduit à un point et, dans l'espace cette trajectoire est une circonférence. Le mouvement aura donc lieu sur une circonférence si les valeurs initiales des variables satisfont aux quatre conditions :

$$\lambda_0' = p_0 = 0,\qquad \mu_0' = q_0 = 0,$$

$$(12)\qquad H = -\frac{(K^2+K'^2)}{2\lambda_0} - \frac{s_0^2}{2(\lambda_0^2-1)^2},\qquad H = -\frac{(K^2-K'^2)}{2\mu_0} - \frac{s_0^2}{2(\mu_0^2-1)^2}.$$

Les valeurs initiales λ_0 et μ_0 des variables λ et μ doivent donc satisfaire à la fois à la relation obtenue en éliminant s_0 des deux équations (12) et aux inégalités :

$$1 < \lambda_0,\qquad -1 < \mu_0 < 1.$$

Si nous désignons par $f(\mu)$ le résultat de cette élimination nous obtenons l'équation :

$$(13)\qquad f(\mu) = (K^2-K'^2)[-\lambda\mu^4 - 3\lambda(\lambda^2-1)\mu^2 + \lambda^3)] + (K^2+K'^2)[(3\lambda^2-1)\mu^3 + \lambda^2(\lambda^3-3)\mu] = 0.$$

et, à toute valeur de λ_0 correspond une racine μ_0 de cette équation comprise entre -1 et 0. On a en effet :

$$f(-1) < 0,\qquad f(0) > 0,$$

et par conséquent le mouvement étudié est possible. Le point matériel C ne peut pas décrire une circonférence équidistante des deux centres attractifs P′ et P si K^2 est different de K'^2. Dans ce cas, on doit avoir $\mu_0 = 0$ et en portant cette valeur dans l'équation (13) on a :

$$(K^2-K'^2)\lambda^3 = 0$$

et cette égalité ne peut être satisfaite que si les coefficients attractifs sont égaux.

7. **Mouvement plan** (1). — L'étude du mouvement d'oscillation des deux variables λ et μ se déduit immédiatement de l'étude du cas général du mouvement dans l'espace en annulant la constante des aires g et en faisant passer les courbes $S(x)$ par les points -1 et $+1$. La trajectoire est généralement contenue dans l'aire comprise entre une ellipse et une hyperbole ; cependant, cette trajectoire peut être contenue dans une ellipse. D'autre part, le mobile peut décrire une ellipse, un arc d'hyperbole, un segment de la droite P'P ayant pour extrémité P' ou P, ou, le segment P'P. Enfin, le mobile peut être en équilibre en un point du segment P'P.

CONCLUSION. — *Lorsque la constante des forces vives h est négative, il est possible de choisir les conditions initiales du mouvement de telle sorte que les variables λ et μ aient un mouvement d'oscillation.*

[Les planches (pp. 66-67) résument et illustrent les différents cas du mouvement périodique].

II. — **Conditions de périodicité du mouvement.**

Considérons les équations (2) et soient $\bar{I}$ les valeurs intégrales :

$$I_{11} = \int \frac{d\lambda}{\pm\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad I_{12} = \int \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\pm\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad I_{13} = \int \frac{c^2 g\, d\lambda}{\pm(\lambda^2 - c^2)\sqrt{R(\lambda)}},$$
$$I_{21} = \int \frac{d\mu}{\pm\sqrt{S(\mu)}}, \qquad I_{22} = \int \frac{\mu^2\, d\mu}{\pm\sqrt{S(\mu)}}, \qquad I_{23} = \int \frac{c^2 g\, d\mu}{\pm(c^2 - \mu^2)\sqrt{S(\mu)}}.$$

Si initialement, pour une valeur t_0 du temps, les variables λ et μ prennent des valeurs λ_0 et μ_0 satisfaisant aux inégalités :

$$1 < r_1 < \lambda_0 < r_2, \qquad -1 < \rho_1 < \mu_0 < \rho_2 < +1,$$

les intégrales I prendront des valeurs que nous désignerons par I^0. Les racines r_1, r_2 et ρ_1, ρ_2 des polynômes $R(\lambda)$ et $S(\mu)$ sont des points critiques réels de $\sqrt{R(\lambda)}$ et de $\sqrt{S(\mu)}$; par conséquent, si les variables λ et μ partant de la valeur λ_0 et de la valeur μ_0 décrivent respectivement des lacets entourant les points critiques r_1, r_2 d'une part et ρ_1, ρ_2 d'autre part, les valeurs I^0 des intégrales I s'accroîtront de quantités 2ω telles que :

$$(14) \qquad \begin{cases} 2\omega_{11} = 2\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, & 2\omega_{12} = 2\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \quad 2\omega_{13} = 2\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{c^2 g\, d\lambda}{(\lambda^2 - c^2)\sqrt{R(\lambda)}}, \\ 2\omega_{21} = 2\displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}, & 2\omega_{22} = 2\displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\mu^2\, d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}, \quad 2\omega_{23} = 2\displaystyle\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{c^2 g\, d\mu}{(c^2 - \mu^2)\sqrt{S(\mu)}}. \end{cases}$$

Si au temps $t_0 + 2T$ les variables λ et μ reprennent les mêmes valeurs λ_0 et μ_0 après avoir décrit respectivement m_1 et m_2 fois les contours fermés contenant les points critiques r_1, r_2 et les deux points critiques ρ_1, ρ_2, les intégrales I_{1i} et I_{2i} prendront pour cette valeur $t_0 + 2T$ du temps les valeurs :

$$I^1_{1i} = I^0_{1i} + 2m_1\omega_{1i}, \qquad I^1_{2i} = I^0_{2i} + 2m_2\omega_{2i}, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

m_1 et m_2 étant des nombres entiers arbitraires.

(1) L'étude des solutions périodiques dans le cas du mouvement plan a été faite par CHARLIER, *loc. cit.*

Pour que le mouvement dans l'espace soit périodique, il faut que pour un accroissement 2T du temps l'angle d'azimut φ s'accroisse d'un multiple de 2π, soit $2m_3\pi$, m_3 étant un nombre entier arbitraire. Les équations (2) valables pour toutes les valeurs du temps devront être satisfaites pour les valeurs t_0 et $t_0 + 2T$. Nous pourrons donc écrire :

$$\begin{array}{ll}
I_{11}^0 - I_{21}^0 = A, & I_{11}^1 - I_{21}^1 = (I_{11}^0 + 2m_1\omega_{11}) - (I_{21}^0 + 2m_2\omega_{21}) = A,\\
I_{12}^0 - I_{22}^0 = t_0 + r, & I_{12}^1 - I_{22}^1 = (I_{12}^0 + 2m_1\omega_{12}) - (I_{22}^0 + 2m_2\omega_{22}) = (t_0 + 2T) + \tau,\\
\varphi_0 = I_{13}^0 + I_{23}^0 + G, & (\varphi_0 + 2m_3\pi) = I_{13}^1 + I_{23}^1 + G = (I_{13}^0 + 2m_1\omega_{13}) + (I_{23}^0 + 2m_2\omega_{23}) + G,
\end{array}$$

et ces équations seront vérifiées si les quantités ω satisfont aux relations :

$$m_1\omega_{11} - m_2\omega_{21} = 0, \qquad m_1\omega_{12} - m_2\omega_{22} = T, \qquad m_1\omega_{13} + m_2\omega_{23} = m_3\pi.$$

Par conséquent, le mouvement du point matériel C *sera périodique si les variables* λ et μ *ont un mouvement d'oscillation et si les quantités* ω *définies par les intégrales* (14) *satisfont aux deux conditions :*

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{l} m_1\omega_{11} - m_2\omega_{21} = 0\\ m_1\omega_{13} + m_2\omega_{23} = m_3\pi \end{array}\right.$$

la demi-période T *étant définie par la relation :*

$$(16) \qquad T = m_1\omega_{12} - m_2\omega_{22}.$$

Étude des conditions de périodicité dans deux cas particuliers. — 1° Mouvement sur l'ellipsoïde de révolution $\lambda =$ const. Le mouvement est défini par les intégrales :

$$t + \tau = \int \frac{(\lambda_0^2 - \mu^2)\,d\mu}{\pm\sqrt{S(\mu)}}, \qquad \varphi = \int \frac{g(\lambda_0^2 - \mu^2)\,d\mu}{\pm(\lambda_0^2 - 1)(1 - \mu^2)\sqrt{S(\mu)}} + G,$$

et il sera périodique si l'on a la relation :

$$2m_3\pi = 2\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{g(\lambda_0^2 - \mu^2)\,d\mu}{(\lambda_0^2 - 1)(1 - \mu^2)\sqrt{S(\mu)}}.$$

La demi-période T sera définie par l'intégrale :

$$T = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{(\lambda_0^2 - \mu^2)\,d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}.$$

2° Mouvement sur l'hyperboloïde de révolution $\mu =$ const. Le mouvement sera périodique si l'on a la relation :

$$2m_3\pi = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{g(\lambda^2 - \mu_0^2)\,d\lambda}{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu_0^2)\sqrt{R(\lambda)}}$$

et la demi-période T sera définie par l'intégrale :

$$T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{(\lambda^2 - \mu_0^2)\, d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}.$$

III. — **Étude de la stabilité.**

Nous appliquerons les résultats classiques de Poincaré à l'étude de la stabilité des solutions périodiques du système d'équations canoniques (1). La fonction hamiltonienne étant indépendante de φ, considérons les deux systèmes d'équations différentielles :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \tag{17}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial s}. \tag{18}$$

Soit :

$$\lambda = f_\lambda(t, \alpha, g, h, A, \tau), \qquad \mu = f_\mu(t, \alpha, g, h, A, \tau), \qquad \varphi = \underline{f_\varphi(t, \alpha, g, h, A, G, \tau)},$$
$$p = f_p(t, \alpha, g, h, A, \tau), \qquad q = f_q(t, \alpha, g, h, A, \tau), \qquad s = g,$$

une solution des équations différentielles (17) et (18) telle que le mouvement du point matériel C soit périodique. Considérons cette solution comme solution génératrice et formons les équations aux variations des équations (17) et (18) en posant :

$$\lambda = f_\lambda(t) + \xi_\lambda, \qquad \mu = f_\mu(t) + \xi_\mu, \qquad \varphi = f_\varphi(t) = \xi_\varphi,$$
$$p = f_p(t) + \xi_p, \qquad q = f_q(t) + \xi_q, \qquad s = g + \xi_s.$$

Les variables ξ satisfont aux six équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\xi_\lambda}{dt} = \frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial \lambda}\xi_\lambda + \frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial \mu}\xi_\mu + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\xi_p, \qquad \frac{d\xi_\mu}{dt} = \frac{\partial^2 H}{\partial q\,\partial \lambda}\xi_\lambda + \frac{\partial^2 H}{\partial q\,\partial \mu}\xi_\mu + \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\xi_q.\\
&\frac{d\xi_p}{dt} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2}\xi_\lambda - \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda\,\partial \mu}\xi_\mu - \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda\,\partial p}\xi_p - \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda\,\partial q}\xi_q - \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda\,\partial s}\xi_s,\\
&\frac{d\xi_q}{dt} = -\frac{\partial^2 H}{\partial \mu\,\partial \lambda}\xi_\lambda - \frac{\partial^2 H}{\partial \mu^2}\xi_\mu - \frac{\partial^2 H}{\partial \mu\,\partial p}\xi_p - \frac{\partial^2 H}{\partial \mu\,\partial q}\xi_q - \frac{\partial^2 H}{\partial \mu\,\partial s}\xi_s, \qquad \frac{d\xi_s}{dt} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$\frac{d\xi_\varphi}{dt} = \frac{\partial^2 H}{\partial s\,\partial \lambda}\xi_\lambda + \frac{\partial^2 H}{\partial s\,\partial \mu}\xi_\mu + \frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\xi_s. \tag{20}$$

φ n'est pas une fonction périodique du temps, mais puisque la fonction hamiltonienne H est indépendante de φ, tous les coefficients des ξ sont des fonctions périodiques du temps de période 2T. Par conséquent, le système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques (19), (20) admettra des

(1) Poincaré, *Exposants caractéristiques* (*Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, 1892, p. 162-232).

solutions particulières qui, dans le cas général, sont de la forme $e^{\varkappa t}S$, $\varkappa$ étant l'exposant caractéristique et S une fonction périodique du temps de période 2T. Si n exposants caractéristiques sont égaux, les équations aux variations admettront une solution particulière de la forme :

$$e^{\varkappa t}[S_0 + S_1 t + \dots + S_{n-1}t^{n-1}] \tag{21}$$

Le polynôme en t dont les coefficients S sont des fonctions périodiques peut cependant être de degré inférieur à $(n - 1)$. Nous rechercherons successivement les exposants caractéristiques, puis les fonctions S.

1. **Exposants caractéristiques.** — Les équations différentielles (17) et (18) admettent trois intégrales uniformes :

$$H = h, \qquad s = g, \qquad p^2(\lambda^2 - 1) + \frac{s^2}{\lambda^2 - 1} - 2(K^2 + K'^2)\lambda - 2\lambda^2 H = q^2(\mu^2 - 1) + \frac{s^2}{\mu^2 - 1} - 2(K^2 - K'^2)\mu - 2\mu^2 H = \alpha$$

que nous écrirons d'après la notation de Poincaré :

$$F = h, \qquad F_1 = g, \qquad F_2 = \alpha.$$

Les deux crochets de Poisson $[F, F_1]$ et $[F, F_2]$ sont évidemment nuls ; et puisque F_2 est indépendant de la variable φ et que F_1 ne dépend que de la variable s, le troisième crochet :

$$[F_1, F_2] = \left[\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}\frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial p}\frac{\partial F_2}{\partial \lambda}\right] + \left[\frac{\partial F_1}{\partial \mu}\frac{\partial F_2}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q}\frac{\partial F_2}{\partial \mu}\right] + \left[\frac{\partial F_1}{\partial \varphi}\frac{\partial F_2}{\partial s} - \frac{\partial F_1}{\partial s}\frac{\partial F_2}{\partial \varphi}\right]$$

est également nul. D'autre part, tous les déterminants fonctionnels des intégrales F, F_1, F_2 par rapport à trois variables quelconques choisies parmi les six variables λ, μ, φ, p, q, s ne sont pas nuls à la fois en tous les points de la solution périodique. En effet, si nous considérons les deux déterminants fonctionnels :

$$\frac{D(F, F_1, F_2)}{D(p, q, s)} = 2pq\frac{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}{\lambda^2 - \mu^2},$$

$$\frac{D(F, F, F_2)}{D(\lambda, \mu, s)} = \left[2\lambda p^2 - \frac{2\lambda s^2}{(\lambda^2 - 1)^2} - 2(K^2 + K'^2) - 4\lambda H\right]\frac{\partial F}{\partial \mu} = \left[2\mu q^2 - \frac{2\mu s^2}{(\mu^2 - 1)^2} - 2(K^2 - K'^2) - 4\mu H\right]\frac{\partial F}{\partial \lambda},$$

nous constatons que pour les valeurs des variables $p = 0$, $q = 0$ qui annulent le premier déterminant, le second est différent de zéro.

Par conséquent, d'après l'étude classique de Poincaré, les six exposants caractéristiques seront nuls.

2. **Formation des fonctions** S. — La solution des équations différentielles (17) et (18) est connue et elle dépend de six constantes arbitraires α, g, h, A, G, τ. Les équations aux variations admettront donc les six systèmes de solutions particulières obtenues en dérivant les six fonctions $f(t, \alpha, g, h, A, G, \tau)$ par rapport à chacune des six constantes.

Mais pour étudier ces solutions particulières, il est plus simple de considérer d'abord les équations aux variations (19) qui correspondent aux équations différentielles (17). Ces cinq équations différentielles (17) admettent une solution dépendant de cinq constantes arbitraires, α, g, h, A, τ. Les équations aux variations (19) admettront par conséquent cinq systèmes de solutions particulières :

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\partial f_\lambda}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_\mu}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_p}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_q}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_s}{\partial \alpha} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial f_\lambda}{\partial \tau} & \frac{\partial f_\mu}{\partial \tau} & \frac{\partial f_p}{\partial \tau} & \frac{\partial f_q}{\partial \tau} & \frac{\partial f_s}{\partial \tau}
\end{array}$$

Ces cinq équations particulières forment un système fondamental parce que le déterminant Δ formé par les vingt-cinq fonctions du tableau précédent est différent de zéro. En effet, si nous dérivons par rapport à chaque paramètre α, g, h, A, τ les deux membres de l'intégrale première $H = h$ dans laquelle les variables λ, μ, p, q, s ont été remplacées par les fonctions $f(t, \alpha, g, h, A, \tau)$ nous obtiendrons un système de cinq équations du premier degré en :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial s}$$

dont le déterminant qui n'est autre que Δ ne peut être nul puisque les quantités $\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial s}$ ne sont ni infinies ni indéterminées.

Les seconds membres des équations différentielles (17) et (18) étant des fonctions holomorphes des variables λ, μ, p, q, s, les solutions $f_\lambda(t)$, $f_\mu(t)$, $f_p(t)$, $f_q(t)$, $f_s(t)$ de ces équations différentielles sont des fonctions de la variable t également holomorphes.

D'après un théorème de Poincaré (1) il résulte que les fonctions périodiques $f_\lambda(t)$, $f_\mu(t)$, $f_p(t)$, $f_q(t)$ pourront être développées en séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes. La période 2T ne dépendant que des constantes α, g, h, les trois systèmes de solutions particulières obtenus par dérivation des fonctions $f_\lambda(t)$, $f_\mu(t)$, $f_p(t)$, $f_q(t)$ par rapport à ces trois constantes seront de la forme :

$$St + S',$$

S et S′ étant des fonctions périodiques du temps de période 2T. Les deux systèmes de solutions particulières obtenus par dérivation des fonctions $f_\lambda(t)$, $f_\mu(t)$, $f_p(t)$, $f_q(t)$ par rapport aux paramètres A et τ seront des fonctions périodiques.

Si nous désignons par A_i des constantes, la solution générale des équations aux variations (19) sera représentée par les formules :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\xi_\lambda = A_1(S_{11} + S'_{11}t) + A_2(S_{12} + S'_{12}t) + A_3(S_{13} + S'_{13}t) + A_4S_{14} + A_5S_{15}, \\
\xi_\mu = A_1(S_{21} + S'_{21}t) + A_2(S_{22} + S'_{22}t) + A_3(S_{23} + S'_{23}t) + A_4S_{24} + A_5S_{25}, \\
\xi_p = A_1(S_{31} + S'_{31}t) + A_2(S_{32} + S'_{32}t) + A_3(S_{33} + S'_{33}t) + A_4S_{34} + A_5S_{35}, \\
\xi_q = A_1(S_{41} + S'_{41}t) + A_2(S_{42} + S'_{42}t) + A_3(S_{43} + S'_{43}t) + A_4S_{44} + A_5S_{45}, \\
\xi_s = A_2.
\end{array} \right.$$

(1) *Méthodes nouvelles*, t. I, p. 64.

Il faut remarquer que les fonctions S ne sont pas toutes indépendantes puisque certaines d'entre elles ne diffèrent de la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ qu'à un facteur constant près.

Les coefficients A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont respectivement multipliés par les dérivées des fonctions $f(t)$ par rapport aux constantes α, g, h, A, τ.

Considérons maintenant l'équation aux variations (20). Les coefficients des variables ξ étant des fonctions holomorphes des variables λ, μ, s seront par suite des fonctions périodiques et holomorphes du temps et, par conséquent, ils pourront être développés en séries trigonométriques. Remplaçant les ξ par leurs valeurs (22) la solution de l'équation aux variations (20) sera représentée par la formule :

$$\xi_\varphi = A_1(S_{61} + S'_{61}t) + A_2(S_{62} + S'_{62}t) + A_3(S_{63} + S'_{63}t) + A_4S_{64} + A_5S_{65} + A_6. \tag{23}$$

Ainsi les solutions particulières des équations aux variations (19) et (20) sont bien de la forme (21). Les exposants caractéristiques seront nuls comme nous l'avons déjà démontré et le polynôme en t ne sera pas du cinquième degré.

Les coefficients A_i seront déterminés en fonction des valeurs initiales ξ_0, c'est-à-dire en fonction des accroissements arbitraires qui seront donnés aux valeurs initiales des variables λ, μ, φ, p, q, s qui définissent le mouvement périodique du point matériel C. Les variables ξ seront alors déterminées en fonction du temps par les équations (22) et (23) et nous en conclurons que les variables λ, μ, φ, p, q, s sont instables.

3. **Discussion.** — Si le déterminant fonctionnel $\frac{D(F, F_1, F_2)}{D(p, q, s)}$ et le déterminant fonctionnel $\frac{D(F, F_1, F_2)}{D(\lambda, \mu, s)}$ écrit sous l'une des deux formes indiquées ne sont pas nuls à la fois en tous les points de la solution périodique, les six exposants caractéristiques sont nuls. Lorsque les variables p et q sont identiquement nulles on a :

$$p \equiv 0, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \equiv 0, \qquad q \equiv 0, \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mu} \equiv 0$$

et les deux déterminants fonctionnels sont nuls à la fois en tous les points de la solution périodique. Le mouvement a lieu sur un ellipsoïde ou sur un hyperboloïde ou sur un cercle et le théorème de Poincaré n'est plus applicable. La constante α s'exprime alors en fonction des constantes h et g. Les équations canoniques (17) et (18) n'admettent plus que deux intégrales uniformes distinctes $F = h$ et $F_1 = g$. Par conséquent il y a quatre exposants caractéristiques nuls et deux exposants caractéristiques non nuls, égaux et de signes contraires. Si le mouvement s'effectue dans un plan il y a deux exposants caractéristiques nuls et deux exposants caractéristiques égaux et de signes contraires. Nous rechercherons ces exposants caractéristiques dans le cas où le point matériel est en équilibre sur la droite joignant les deux centres fixes et dans le cas où le mouvement a lieu sur une ellipse et sur une hyperbole.

4. **Cas du point matériel en équilibre sur l'axe** P'P. — Le mobile est en équilibre sur l'axe P'P si l'on a :

$$\lambda \equiv 1, \qquad \mu = \mu_0 = \text{cst}, \qquad p \equiv 0, \qquad q \equiv 0.$$

Posons :

$$a = \frac{2K^2}{(1+\mu_0)^3} + \frac{2K'^2}{(1-\mu_0)^3}, \qquad b = \frac{2K^2}{(1+\mu_0)^3} - \frac{2K'^2}{(1-\mu_0)^3}.$$

Les équations aux variations (19) s'écrivent :

$$\frac{d\xi_\lambda}{dt} = 0, \qquad \frac{d\xi_\mu}{dt} = \xi_q, \qquad \frac{d\xi_p}{dt} = a\xi_\lambda + b\xi_\mu, \qquad \frac{d\xi_q}{dt} = b\xi_\lambda + a\xi_\mu. \tag{24}$$

Le système différentiel (24) est un système différentiel linéaire à coefficients constants dont nous recherherons des solutions particulières de la forme $\xi_i = A_i e^{\omega t}$; A_i et ω étant des constantes. L'équation caractéristique du système différentiel (24) est :

$$\begin{vmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 1 \\ a & b & \omega & 0 \\ b & a & 0 & \omega \end{vmatrix} = \omega^2(\omega^2 - a) = 0.$$

L'équation caractéristique a donc deux racines nulles et deux racines réelles $\pm\sqrt{a}$.
Finalement la solution générale du système différentiel (24) s'écrira :

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_\lambda = A, \qquad \xi_\mu = -\dfrac{bA}{a} + Be^{\sqrt{a}t} + Ce^{-\sqrt{a}t}, \\ \xi_p = D + \dfrac{(a^2 - b^2)A}{a}t + \dfrac{bB}{\sqrt{a}}e^{\sqrt{a}t} - \dfrac{bC}{\sqrt{a}}e^{-\sqrt{a}t}, \qquad \xi_q = \sqrt{a}(Be^{\sqrt{a}t} - Ce^{-\sqrt{a}t}) ; \end{array}\right. \tag{25}$$

A, B, C, D étant des constantes.

5. **Mouvement sur l'ellipse** $\lambda = \lambda_0 =$ cst. — La variable μ est définie en fonction du temps par l'intégrale :

$$t + \tau = \int \frac{(\lambda_0^2 - \mu^2)\, d\mu}{\pm\sqrt{S(\mu)}}, \tag{26}$$

la valeur de q^2 est donnée par l'expression :

$$q^2 = \frac{S(\mu)}{(1 - \mu^2)^2} = \frac{1}{\lambda_0(1 - \mu^2)}\left[K^2(\lambda_0 - \mu)^2 + K'^2(\lambda_0 + \mu)^2\right] \tag{27}$$

et l'on a :

$$h = -\frac{(K^2 + K'^2)}{2\lambda_0}, \qquad \alpha = -(K^2 + K'^2)\lambda_0, \qquad p \equiv 0.$$

Les équations canoniques (1) admettent l'intégrale des forces vives $H = h$ et par conséquent deux exposants caractéristiques de la solution périodique seront nuls. En supposant les variables μ et q exprimées en fonction du temps et des deux paramètres h et τ, les équations aux variations admettent les deux systèmes de solutions particulières distincts :

$$\frac{\partial\mu}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial q}{\partial\tau}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\tau} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial\tau} = 0,$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial h}, \quad \frac{\partial q}{\partial h}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial h}, \quad \frac{\partial p}{\partial h} = 0.$$

Le système d'équations différentielles aux variations qui est du quatrième ordre peut donc être ramené à un système du second ordre. Considérons le système d'équations différentielles linéaires :

$$(28) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = 0, & \dfrac{dy}{dt} + a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = 0, \\ \dfrac{dz}{dt} + a_3x + b_3y + c_3z + d_3u = 0, & \dfrac{du}{dt} + a_4x + b_4y + c_4z + d_4u = 0. \end{cases}$$

Supposons que l'on connaisse deux systèmes distincts d'intégrales (x_1, y_1, z_1, u_1) et (x_2, y_2, z_2, u_2) tels que $\Delta = x_1y_2 - y_1x_2 \neq 0$. Le changement de variables :

$$x = x_1X + x_2Y, \qquad y = y_1X + y_2Y, \qquad z = z_1X + z_2Y + Z, \qquad u = u_1X + u_2Y + U,$$

conduit au système d'équations différentielles linéaires :

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} - \beta_1Z - \gamma_1U = 0, \quad \dfrac{dY}{dt} - \beta_2Z - \gamma_2U = 0, \\ \dfrac{dZ}{dt} + (c_3 + \beta_1z_1 + \beta_2z_2)Z + (d_3 + \gamma_1z_1 + \gamma_2z_2)U = 0, \quad \dfrac{dU}{dt} + (c_4 + \beta_1u_1 + \beta_2u_2)Z + (d_4 + \gamma_1u_1 + \gamma_2u_2)U = 0, \end{cases}$$

avec :

$$\beta_1 = \frac{c_2x_2 - c_1y_2}{\Delta}, \qquad \beta_2 = \frac{c_1y_1 - c_2x_1}{\Delta}, \qquad \gamma_1 = \frac{d_2x_2 - d_1y_2}{\Delta}, \qquad \gamma_2 = \frac{d_1y_1 - d_2x_1}{\Delta}.$$

Posons $\xi_\mu = x$, $\xi_q = y$, $\xi_\lambda = z$, $\xi_p = u$ et identifions les coefficients des deux systèmes d'équations différentielles (19) et (28). Nous aurons :

$$\begin{array}{llll} a_1 = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q\, \partial\mu}, & b_1 = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q^2}, & c_1 = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q\, \partial\lambda}, & d_1 = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial q\, \partial p} = 0, \\ a_2 = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\mu^2}, & b_2 = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\mu\, \partial q}, & c_2 = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\mu\, \partial\lambda}, & d_2 = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\mu\, \partial p} = 0, \\ a_3 = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial p\, \partial\mu} = 0, & b_3 = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial p\, \partial q} = 0, & c_3 = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial p\, \partial\lambda} = 0, & d_3 = -\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^2}, \\ a_4 = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\lambda\, \partial\mu}, & b_4 = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\lambda\, \partial q}, & c_4 = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\lambda^2}, & d_4 = \dfrac{\partial^2 H}{\partial\lambda\, \partial p} = 0. \end{array}$$

En ayant égard aux égalités $\dfrac{\partial\mu}{\partial\tau} = \dfrac{d\mu}{dt}$, $\dfrac{\partial q}{\partial\tau} = \dfrac{dq}{dt}$, les coefficients β_1, β_2, γ_1, γ_2 prennent les valeurs suivantes :

$$\beta_1 = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\mu}{\partial h}\frac{\partial^2 H}{\partial\mu\, \partial\lambda} + \frac{\partial q}{\partial h}\frac{\partial^2 H}{\partial q\, \partial\lambda}\right], \qquad \beta_2 = -\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial q}{\partial\tau}\frac{\partial^2 H}{\partial q\, \partial\lambda} + \frac{\partial\mu}{\partial\tau}\frac{\partial^2 H}{\partial\mu\, \partial\tau}\right] = -\frac{1}{\Delta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\lambda}\right) \equiv 0, \qquad \gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = 0.$$

Finalement nous aurons à résoudre le système d'équations différentielles linéaires :

$$\frac{dX}{dt} - \beta_1Z = 0, \qquad \frac{dY}{dt} = 0, \qquad \frac{dZ}{dt} + d_3U = 0, \qquad \frac{dU}{dt} + c_4Z = 0.$$

L'intégration des deux dernières équations différentielles se ramène à l'intégration de l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} - \frac{1}{\dfrac{\partial^2 H}{\partial p^2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right)\frac{dZ}{dt} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} Z = 0. \tag{30}$$

Si l'on pose :

$$v = \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}, \qquad Z = vV,$$

on est conduit à l'intégration de l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2V}{dt^2} + PV = 0, \tag{31}$$

avec :

$$P = \frac{1}{2v}\frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{3}{4v^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + v\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2};$$

le coefficient P de V est une fonction périodique du temps.

On a successivement :

$$v = \frac{\lambda_0^2 - 1}{\lambda_0^2 - \mu^2}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{2(\lambda_0^2-1)\mu}{(\lambda_0^2-\mu^2)^2}\frac{d\mu}{dt} = \frac{2(\lambda_0^2-1)\mu(1-\mu^2)}{(\lambda_0^2-\mu^2)^3} q,$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = 2(\lambda_0^2 - 1)\left[\frac{(1-3\mu^2)(\lambda_0^2-\mu^2)+6\mu^2(1-\mu^2)}{(\lambda_0^2-\mu^2)^5}(1-\mu^2)q^2 + \frac{\mu(1-\mu^2)}{(\lambda_0^2-\mu^2)^3}\left(\frac{\mu(\lambda_0^2-1)}{(\lambda_0^2-\mu^2)^2}q^2 - \frac{K^2}{(\lambda_0+\mu)^2} + \frac{K'^2}{(\lambda_0-\mu)^2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} = \frac{(1-\mu^2)}{(\lambda_0^2-\mu^2)^3}(\mu^2+3\lambda^2) - \frac{2K^2}{(\lambda_0+\mu)^3} - \frac{2K'^2}{(\lambda_0-\mu)^3};$$

par suite, la fonction P aura pour valeur :

$$P(\mu) = \frac{1}{(\lambda_0^2-\mu^2)^4}\Big[K^2(\lambda_0-\mu)^2\left(\mu^3 - \lambda_0\mu^2 + (2\lambda_0^2-3)\mu + \lambda_0^3\right) + K'^2(\lambda_0+\mu)^2\left(-\mu^3 - \lambda_0\mu^2 - (2\lambda_0^2-3)\mu + \lambda^3\right)\Big] \tag{32}$$

et dans cette expression il faudra remplacer μ par sa valeur exprimée en fonction du temps. Il existe une valeur λ_1 du paramètre λ comprise entre 1 et 2 telle que, pour les valeurs de λ supérieures à λ_1, la fonction $P(\mu)$ reste constamment positive lorsque la variable μ oscille entre les valeurs -1 et $+1$. La fonction $P(\mu)$ ne peut pas être constamment négative puisque cette fonction est positive pour $\mu = 0$.

6. **Mouvement sur l'hyperbole** $\mu = \mu_0 =$ cst. — Une étude semblable à la précédente conduit à la résolution de l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2V}{dt^2} + PV = 0, \tag{33}$$

avec :

$$P(\lambda) = \frac{1}{(\lambda^2-\mu_0^2)^4}\Big[K^2(\lambda-\mu_0)^2[\lambda^3 - \mu_0\lambda^2 + (2\mu_0^2-3)\lambda + \mu_0^3] + K'^2(\lambda+\mu_0)^2[\lambda^3 + \mu_0\lambda^2 + (2\mu_0^2-3)\lambda - \mu_0^3]\Big]. \tag{34}$$

Dans ce cas particulier du mouvement les constantes h et α s'expriment en fonction du paramètre μ_0 :

$$h = -\frac{(K^2 - K'^2)}{2\mu_0}, \qquad \alpha = -(K^2 - K'^2)\mu_0 ;$$

la variable λ oscille entre les valeurs $+1$ et $r_2 = \frac{K + K'}{K - K'}\mu_0$ et le paramètre μ_0 est compris entre 0 et $+1$.

Étudions le signe de la fonction $P(\lambda)$. Pour $\lambda = 1$ et $\lambda = r_2$ nous aurons respectivement :

$$P(+1) = \frac{1}{(1 - \mu_0^2)^4}\left[K^2(1 - \mu_0)^2(\mu_0^2 - 1)(\mu_0 + 2) + K'^2(1 + \mu_0)^2(\mu_0^2 - 1)(2 - \mu_0)\right],$$

$$P(r_2) = \frac{8K^2K'^2(K + K')}{(K - K')^3}\mu_0^2\left\{\left[2 + \left(\frac{K + K'}{K - K'}\right)^2\right]\mu_0^2 - 3\right\}.$$

La quantité $P(r_2)$ s'annule pour deux valeurs μ_1 et μ_2 de μ égales à $\pm\sqrt{\frac{3}{2 + \left(\frac{K + K'}{K - K'}\right)^2}}$ et nous poserons $\mu_1 < 0 < \mu_2 < 1$. Pour $\mu > \mu_1$ la quantité $P(r_2)$ est positive et, puisque la quantité $P(+1)$ est négative, la fonction $P(\lambda)$ prend des valeurs positives et négatives pour les valeurs de λ comprises entre $+1$ et r_2. Pour $\mu < \mu_1$ la quantité $P(r_2)$ est négative et la fonction $P(\lambda)$ est constamment négative pour les valeurs de λ comprises entre $+1$ et r_2.

7. **Application du critérium de Liapounoff** (1). — L'équation différentielle du second ordre $\frac{d^2V}{dt^2} + PV = 0$ dans laquelle le coefficient P est une fonction périodique du temps a fait l'objet de nombreuses études. Nous rappellerons les deux théorèmes suivants dus à Liapounoff :

Théorème I. — Si la fonction P ne peut prendre que des valeurs négatives ou nulles (sans être identiquement nulle), les racines de l'équation caractéristique correspondant à l'équation (33) seront toujours réelles, et l'une d'entre elles sera plus grande, l'autre plus petite que 1.

Théorème II. — Si la fonction P ne peut prendre que des valeurs positives ou nulles (sans être identiquement nulle), et si en outre elle satisfait à la condition :

$$2T\int_0^{2T} P\, dt \leq 4,$$

les racines de l'équation caractéristique correspondant à l'équation (33) seront toujours imaginaires, leurs modules étant égaux à 1.

Lorsque la fonction P est constamment positive les exposants caractéristiques ne sont pas nécessairement imaginaires. Liapounoff donne un exemple dans lequel les exposants sont réels et Picart (2) donne un exemple dans lequel les exposants sont imaginaires.

---

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. IX, p. 402 (1907).

(2) *Bulletin astronomique*, p. 225, 1898.

Lorsque le mouvement a lieu sur l'hyperbole $\mu = \mu_0$, les exposants caractéristiques sont réels, égaux et de signes contraires pour les valeurs de μ_0 satisfaisant l'inégalité $\mu_0 < \mu_1$. On peut considérer les solutions asymptotiques correspondant à chacun de ces exposants. Les conditions d'existence énoncées par Picard sont immédiatement vérifiées et les solutions asymptotiques ne dépendent que d'une seule constante arbitraire.

8. **Étude de la stabilité dans le problème des deux corps.** — Lorsque l'un des coefficients attractifs est nul le problème des deux centres fixes se réduit au problème des deux corps et l'équation différentielle (14) du chapitre I devient une équation d'Euler :

$$\frac{d\lambda}{\pm\sqrt{R(\lambda)}} = \frac{d\mu}{\pm\sqrt{R(\mu)}}.$$

Il serait donc possible de déduire l'étude du problème des deux corps de l'étude du problème des deux centres fixes mais il est plus simple d'en donner une étude directe. Soient r et φ les coordonnées polaires de la masse m_2 par rapport à la masse m_1 et μ le coefficient attractif. Si H désigne la fonction hamiltonienne et h la constante des forces vives nous aurons :

$$H = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] - \frac{\mu}{r} = h.$$

Posons :

$$p = \frac{dr}{dt}, \qquad q = r^2\frac{d\varphi}{dt}.$$

En fonction des nouvelles variables p et q on a :

$$H = \frac{1}{2}\left[p^2 + \frac{q^2}{r^2}\right] - \frac{\mu}{r} = h.$$

Le mouvement est défini par les équations différentielles canoniques :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \qquad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}. \tag{35}$$

L'équation aux dérivées partielles de Jacobi :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{2\mu}{r}\right] = 0$$

admet l'intégrale complète :

$$S = -ht + \alpha\varphi + \int \pm\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha^2}{r^2}}\,dr$$

et la solution du système différentiel (35) est représentée par les formules :

$$t + \tau = \int \frac{r\,dr}{\pm\sqrt{2hr^2 + 2\mu r - \alpha^2}}, \qquad \varphi - \beta = \int \frac{\alpha\,dr}{\pm r\sqrt{2hr^2 + 2\mu r - \alpha^2}},$$

$$p = \pm\frac{1}{r}\sqrt{2hr^2 + 2\mu r - \alpha^2}, \qquad q = \alpha.$$

Les équations aux variations correspondant au système différentiel (35) s'écrivent :

$$\frac{d\xi_r}{dt} = \xi_p, \qquad \frac{d\xi_v}{dt} = -\frac{2q}{r^3}\xi_r + \frac{1}{r^2}\xi_q, \qquad \frac{d\xi_p}{dt} = \left(-\frac{3q^2}{r^4} + \frac{2\mu}{r^3}\right)\xi_r + \frac{2q}{r^3}\xi_q, \qquad \frac{d\xi_q}{dt} = 0. \tag{36}$$

Posons $\xi_q = A_4$ et remplaçons le système différentiel (36) par les deux équations différentielles :

$$\frac{d^2\xi_r}{dt^2} = \left(-\frac{3q^2}{r^4} + \frac{2\mu}{r^3}\right)\xi_r + A_4\frac{2q}{r^3}, \qquad \frac{d\xi_v}{dt} = -\frac{2q}{r^3}\xi_r + \frac{A_4}{r^2}. \tag{37}$$

Dans le cas général du mouvement on connaît deux intégrales uniformes : l'intégrale des aires et l'intégrale des forces vives. D'après le théorème de Poincaré tous les exposants caractéristiques correspondant à la solution du système différentiel (36) seront nuls. Cependant, si le mouvement a lieu sur un cercle, il existe deux exposants caractéristiques nuls et deux exposants caractéristiques non nuls. Si la trajectoire de la masse m_2 est un cercle de rayons r_0, le polynôme $(2hr^2 + 2\mu r - \alpha^2)$ admet r_0 pour racine double. Par conséquent nous aurons $\mu^2 + 2h\alpha^2 = 0$, $r_0 = -\dfrac{\mu}{2h}$ et par suite :

$$-\frac{3q^2}{r_0^4} + \frac{2\mu}{r_0^3} = -\frac{\mu}{r_0^3}.$$

Posons $\dfrac{\mu}{r_0^3} = k^2$ et déterminons successivement les solutions des deux équations différentielles (37). Nous obtiendrons :

$$\left\{\begin{aligned} &\xi_r = A_1\cos kt + A_2\sin kt + 2A_4\frac{\alpha}{\mu}, \qquad \xi_v = -\frac{2\alpha}{kr_0^3}[A_1\sin kt - A_2\cos kt] - \frac{3A_4}{r_0^2}t + A_3, \\ &\xi_p = k[-A_1\sin kt + A_2\cos kt]. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Les deux exposants caractéristiques non nuls sont donc imaginaires.

Les études précédentes sur la stabilité peuvent être rapprochées de l'étude de la stabilité du mouvement pendulaire. La position du pendule est définie par un paramètre θ. Il existe une intégrale des forces vives et d'après le théorème de Poincaré les deux exposants caractéristiques correspondant à la solution de l'équation aux variations $\dfrac{d^2\xi_\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}(\cos\theta)\,\xi_\theta = 0$ sont nuls. Si θ est constant et a pour valeurs 0 ou π les deux exposants caractéristiques ne sont pas nuls et ont respectivement pour valeurs $\pm i\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ ou $\pm\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

IV. — **Conclusion.**

Le système d'équations canoniques définissant le mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes admet des solutions périodiques. Ces solutions ne dépendent que de quatre constantes arbitraires alors que la solution générale dépend de six constantes. Les trajectoires parcourues périodiquement sont contenues dans le volume compris entre deux ellipsoïdes et deux hyperboloïdes de révolution ayant pour axe la droite joignant les deux points fixes. Il n'existe pas d'orbites périodiques à chocs dans l'espace.

A des accroissements arbitraires ξ^0 des valeurs initiales des variables λ, μ, φ, p, q, s génératrices du mouvement périodique correspondent des faisceaux de trajectoires instables. Cependant, si les accroissements ξ^0 sont choisis de telle sorte que les coefficients A_1, A_2, A_3 des équations (22) et (23) soient nuls, les faisceaux de trajectoires correspondant aux nouvelles conditions initiales seront stables. Nous devrons avoir ainsi en particulier :

$$\xi_s^0 = A_2 = 0$$

et, puisque la variable s est égale à g et ne doit pas subir d'accroissement d'après l'égalité précédente, on remarque notamment que dans le mouvement perturbé la constante des aires devra conserver la même valeur que dans le mouvement périodique.

Les six exposants caractéristiques qui correspondent aux solutions des équations aux variations sont nuls. Cependant, lorsque le mouvement a lieu sur un ellipsoïde, sur un hyperboloïde, sur un cercle, sur une ellipse, sur une hyperbole ou lorsque le mobile est en équilibre en un point de l'axe P'P, deux exposants caractéristiques sont différents de zéro.

TROISIÈME PARTIE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DU CHOC BINAIRE RÉEL

CHAPITRE PREMIER

ÉTABLISSEMENT DES FORMULES DE RÉCURRENCE DONNANT LES COEFFICIENTS DES PUISSANCES DE u DANS LES DÉVELOPPEMENTS DE SUNDMAN

1. Dans son mémoire sur le problème des trois corps, Sundman transforme le système différentiel classique d'ordre douze en un système différentiel d'ordre dix-huit en remplaçant le temps t par une nouvelle variable u définie par la relation :

$$dt = r\,du.$$

Soient P_0, P_1, P_2 trois corps de masses m_0, m_1, m_2. Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées de la masse m_1 par rapport à la masse m_0 et par ξ, η, ζ les coordonnées de la masse m_2 par rapport au centre de gravité des masses m_0 et m_1 qui se choquent, le système différentiel de Sundman s'écrit :

$$\text{(I)}\qquad \left|\begin{array}{lll}
\dfrac{dr}{du} = r', & \dfrac{dr'}{du} = m_0 + m_1 + r\mathrm{L}, & \dfrac{dt}{du} = r, \\
\dfrac{dx}{du} = x', & \dfrac{dx'}{du} = \alpha + r^2\mathrm{X}, & \dfrac{d\alpha}{du} = \mathrm{X}rr' + \mathrm{L}x', \\
\dfrac{dy}{du} = y', & \dfrac{dy'}{du} = \beta + r^2\mathrm{Y}, & \dfrac{d\beta}{du} = \mathrm{Y}rr' + \mathrm{L}y', \\
\dfrac{dz}{du} = z', & \dfrac{dz'}{du} = \gamma + r^2\mathrm{Z}, & \dfrac{d\gamma}{du} = \mathrm{Z}rr' + \mathrm{L}z', \\
\dfrac{d\xi}{du} = r\xi', & \dfrac{d\eta}{du} = r\eta', & \dfrac{d\zeta}{du} = r\zeta', \\
\dfrac{d\xi'}{du} = r\Xi, & \dfrac{d\eta'}{du} = r\mathrm{H}, & \dfrac{d\zeta'}{du} = r\Pi.
\end{array}\right.$$

D'après la notation de Sundman nous avons posé :

$$\mathrm{M} = m_0 + m_1 + m_2, \qquad \lambda = \frac{m_1}{m_0 + m_1}, \qquad \mu = \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \qquad g = \frac{\mathrm{M}}{m_2(m_0 + m_1)}, \qquad h = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1},$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad r_0^2 = (\xi - \mu x)^2 + (\eta - \mu y)^2 + (\zeta - \mu z)^2, \qquad r_1^2 = (\xi + \lambda x)^2 + (\eta + \lambda y)^2 + (\zeta + \lambda z)^2.$$

$$X = -m_2 x\left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3}\right) + m_2\xi\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right), \qquad Y = -m_2 y\left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3}\right) + m_2\eta\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),$$

$$Z = -m_2 z\left(\frac{\mu}{r_0^3} + \frac{\lambda}{r_1^3}\right) + m_2\zeta\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),$$

$$\Xi = -M\xi\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + \lambda\mu M x\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right), \qquad H = -M\eta\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + \lambda\mu M y\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),$$

$$\Pi = -M\zeta\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + \lambda\mu M z\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right),$$

$$L = xX + yY + zZ + 2m_2\left(\frac{1}{\mu r_0} + \frac{1}{\lambda r_1}\right) - \frac{m_2}{\lambda\mu M}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - \frac{K}{g},$$

$$\alpha = \frac{r'x' - (m_0 + m_1)x}{r}, \qquad \beta = \frac{r'y' - (m_0 + m_1)y}{r}, \qquad \gamma = \frac{r'z' - (m_0 + m_1)z}{r}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \xi', \qquad \frac{d\eta}{dt} = \eta', \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \zeta'.$$

Au voisinage de l'instant du choc les dix-huit variables s'expriment par des développements en séries entières en u qui dépendent de neuf constantes arbitraires : φ, χ, ψ cosinus directeurs fixant la position limite, à l'instant du choc, de la droite joignant les deux masses m_0 et m_1 ; ξ_1, η_1, ζ_1 coordonnées du corps de masse m_2 ; ξ'_1, η'_1, ζ'_1 composantes de la vitesse de la masse m_2 ; K constante des forces vives. Si les variables sont exprimées en fonction du temps il faut ajouter la constante arbitraire t_0, instant du choc. Dans cette étude nous poserons $t_0 = 0$.

2. Considérons pour les variables de Sundman des développements à coefficients indéterminés et soient :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} x = a_2u^2 + a_3u^3 + \dots + a_nu^n + \dots, & y = b_2u^2 + b_3u^3 + \dots + b_nu^n + \dots, & z = c_2u^2 + c_3u^3 + \dots + c_nu^n + \dots, \\ \alpha = (m_0+m_1)\varphi + \alpha_1u + \dots + \alpha_nu^n + \dots, & \beta = (m_0+m_1)\chi + \beta_1u + \dots + \beta_nu^n + \dots, & \gamma = (m_0+m_1)\psi + \gamma_1u + \dots + \gamma_nu^n + \dots, \\ \xi = \xi_1 + A_3u^3 + \dots + A_nu^n + \dots, & \eta = \eta_1 + B_3u^3 + \dots + B_nu^n + \dots, & \zeta = \zeta_1 + C_3u^3 + \dots + C_nu^n + \dots, \\ \xi' = \xi'_1 + D_3u^3 + \dots + D_nu^n + \dots, & \eta' = \eta'_1 + E_3u^3 + \dots + E_nu^n + \dots, & \zeta' = \zeta'_1 + F_3u^3 + \dots + F_nu^n + \dots, \\ r = R_2u^2 + \dots + R_nu^n + \dots, & t = T_3u^3 + \dots + T_nu^n + \dots, & \end{array}\right.$$

$$\rho^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

$$r_0^2 = \rho^2[1 + \mathcal{A}_2u^2 + \dots + \mathcal{A}_nu^n + \dots], \qquad r_1^2 = \rho^2[1 + \mathcal{B}_2u^2 + \dots + \mathcal{B}_nu^n + \dots],$$

$$\frac{1}{r_0^3} = \frac{1}{\rho^3}[1 + \mathcal{D}_2u^2 + \dots + \mathcal{D}_nu^n + \dots], \qquad \frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{\rho^3}[1 + \mathcal{E}_2u^2 + \dots + \mathcal{E}_nu^n + \dots],$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{\rho}[1 + \mathcal{F}_2u^2 + \dots + \mathcal{F}_nu^n + \dots], \qquad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{\rho}[1 + \mathcal{H}_2u^2 + \dots + \mathcal{H}_nu^n + \dots],$$

$$L = L_0 + L_3u^3 + \dots + L_nu^n + \dots,$$

a_i, b_i, c_i, ..., $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{H}_i$, L_i sont des coefficients que nous devrons exprimer en fonction des constantes φ, χ, ψ, ξ_1, η_1, ζ_1, ξ'_1, η'_1, ζ'_1. Ces coefficients satisfont aux relations suivantes :

$$L_0 = \frac{2m_2}{\lambda\mu\rho} - \frac{h}{g}(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2) - \frac{K}{g},$$

$$L_n = \frac{2m_2}{\rho}\left(\frac{\mathcal{F}_n}{\mu} + \frac{\mathcal{H}_n}{\lambda}\right) - \frac{m_2}{\lambda\mu M}\left[S(2\xi_1' D_n) + S(2D_3D_{n-3}) + \dots + S\left(D^2_{\frac{n}{2}}\right) \text{ ou } S\left(2D_{\frac{n-1}{2}}D_{\frac{n-1}{2}}\right)\right]$$

$$- \frac{m_2}{\rho^3}\left[2R_2R_{n-2} + \dots + R^2_{\frac{n}{2}} \text{ ou } 2R_{\frac{n-1}{2}}R_{\frac{n+1}{2}} + \sum_{i=2}^{n-4}(\mu\mathcal{O}_i + \lambda\mathcal{E}_i)\left(2R_2R_{n-i-2} + \dots R^2_{\frac{n-i}{2}} \text{ ou } 2R_{\frac{n-i-1}{2}}R_{\frac{n-i+1}{2}}\right)\right]$$

$$+ \frac{m_2}{\rho^3}\sum_{i=2}^{n-2}(\mathcal{O}_i - \mathcal{E}_i)\left[S(\xi_1 a_{n-i}) + S(A_3 a_{n-i-3}) + \dots + S(A_{n-i-2}a_2)\right],$$

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{\rho^2}\left[S(2\xi_1 A_n) + S(2A_3A_{n-3}) + \dots + S\left(A^2_{\frac{n}{2}}\right) \text{ ou } S\left(2A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+1}{2}}\right) - 2\mu[S(\xi_1 a_n) + S(A_3 a_{n-3}) + \dots + S(A_{n-2}a_2)]\right.$$

$$\left. + \mu^2\left(2R_2R_{n-2} + \dots + R^2_{\frac{n}{2}} \text{ ou } 2R_{\frac{n-1}{2}}R_{\frac{n+1}{2}}\right)\right],$$

$$\mathcal{O}_2 = -\frac{3}{2}\mathcal{A}_2, \qquad \mathcal{O}_3 = -\frac{3}{2}\mathcal{A}_3, \qquad \mathcal{O}_4 = -\frac{3}{2}\mathcal{A}_4 + \frac{3\cdot 5}{2^2\cdot 2}\mathcal{A}_2^2, \qquad \mathcal{O}_5 = -\frac{3}{2}\mathcal{A}_5 + \frac{3\cdot 5}{2^2\cdot 2}2\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3,$$

$$\mathcal{O}_6 = -\frac{3}{2}\mathcal{A}_6 + \frac{3\cdot 5}{2^2\cdot 2}(2\mathcal{A}_2\mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_3^2) - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^3\cdot 3\,!}\mathcal{A}_2^3, \qquad \mathcal{O}_7 = -\frac{3}{2}\mathcal{A}_7 + \frac{3\cdot 5}{2^2\cdot 2}(2\mathcal{A}_2\mathcal{A}_5 + 2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4) - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^3\cdot 3\,!}3\mathcal{A}_2^2\mathcal{A}_3.$$

Nous avons posé :

$$S(2\xi_1' D_n) = 2(\xi_1' D_n + \eta_1' E_n + \zeta_1' F_n), \qquad S\left(2D_{\frac{n-1}{2}}D_{\frac{n+1}{2}}\right) = 2\left(D_{\frac{n-1}{2}}D_{\frac{n+1}{2}} + E_{\frac{n-1}{2}}E_{\frac{n+1}{2}} + F_{\frac{n-1}{2}}F_{\frac{n+1}{2}}\right), \dots,$$

$$S(\xi_1 a_n) = \xi_1 a_n + \eta_1 b_n + \zeta_1 c_n, \qquad S(A_{n-2}a_2) = A_{n-2}a_2 + B_{n-2}b_2 + C_{n-2}c_2.$$

$\mathcal{F}_n$ s'obtient en remplaçant dans l'expression de $\mathcal{O}_n$ les coefficients $\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\dots(2i+1)}{2^i\cdot i\,!}$ par les coefficients $\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\dots(2i-1)}{2^i\cdot i\,!}$. $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{H}_n$ s'obtiennent respectivement à partir de A_n, D_n, F_n en remplaçant la quantité μ par la quantité $-\lambda$.

3. Afin de développer les seconds membres du système différentiel de Sundman suivant les puissances entières de u nous exprimerons en fonction de u quelques quantités nécessaires à ce calcul.

$$X = \frac{m_2}{\rho^3}\left\{[-a_2 + \xi_1(\mathcal{O}_2 - \mathcal{E}_2)]u^2 + \dots + \left[-a_n - \sum_{i=2}^{n-2}(\mu\mathcal{O}_i + \lambda\mathcal{E}_i)a_{n-i} + \xi_1(\mathcal{O}_n - \mathcal{E}_n) + \sum_{i=3}^{n-2}A_i(\mathcal{O}_{n-i} - \mathcal{E}_{n-i})\right]u^n + \dots\right\},$$

$$\Xi = \frac{M}{\rho^3}\left\{-\xi_1 - \xi_1(\lambda\mathcal{O}_2 + \mu\mathcal{E}_2)u^2 + \dots + \left[-\xi_1(\lambda\mathcal{O}_n + \mu\mathcal{E}_n) - A_n - \sum_{i=3}^{n-2}A_i(\lambda\mathcal{O}_{n-i} + \mu\mathcal{E}_{n-i})\right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda\mu\sum_{i=2}^{n-2}(\mathcal{O}_{n-i} - \mathcal{E}_{n-i})a_i\right]u^n + \dots\right\},$$

$$rL = L_0R_2u^2 + L_0R_3u^3 + \dots + \left[L_0R_n + \sum_{i=3}^{n-2}L_iR_{n-i}\right]u^n + \dots,$$

$$x'L = 2L_0a_2u + 3L_0a_3u^3 + \dots + \left[(n+1)L_0a_{n+1} + \dots + \sum_{i=3}^{n-1}(n+1-i)L_ia_{n+1-i}\right]u^n + \dots,$$

$$r^2 X = \frac{m_2}{\rho^3}\Bigg\{ R_2^2[-a_2 + \xi_1(\varpi_2 - \mathcal{E}_2)]\,u^6 + \ldots + \left[\sum_{j=4}^{n-2}\left[2R_2R_{j-2} + \ldots + R^2_{\frac{j}{2}} \text{ ou } 2R_{\frac{j-1}{2}}R_{\frac{j+1}{2}}\right]\right.$$

$$\left.\times\left[-a_{n-j} - \sum_{i=2}^{n-j-2}(\mu\varpi_i + \lambda\mathcal{E}_i)a_{n-j-i} + \xi_1(\varpi_{n-j} - \mathcal{E}_{n-j}) + \sum_{i=3}^{n-j-2}A_i(\varpi_{n-j-i} - \mathcal{E}_{n-j-i})\right]\right]u^n + \ldots\Bigg\},$$

$$rr'X = \frac{m_2}{\rho^3}\Bigg\{ 2R_2^2[-a_2 + \xi_1(\varpi_2 - \mathcal{E}_2)]\,u^5 + \ldots + \left[\sum_{j=3}^{n-2}\frac{j+1}{2}\left[2R_2R_{j-1} + \ldots + R^2_{\frac{j+1}{2}} \text{ ou } 2R_{\frac{j}{2}}R_{\frac{j+2}{2}}\right]\right.$$

$$\left.\times\left[-a_{n-j} - \sum_{i=2}^{n-j-2}(\mu\varpi_i + \lambda\mathcal{E}_i)a_{n-j-i} + \xi_1(\varpi_{n-j} - \mathcal{E}_{n-j}) + \sum_{i=3}^{n-j-2}A_i(\varpi_{n-j-i} - \mathcal{E}_{n-j-i})\right]\right]u^n + \ldots\Bigg\},$$

$$r\xi' = \xi_1' R_2 u^2 + \ldots + \left[\xi_1' R_n + \sum_{i=3}^{n-2} D_i R_{n-i}\right]u^n + \ldots,$$

$$r\Xi = \frac{M}{\rho^3}\Bigg\{ -\xi_1 R_2 u^2 - \xi_1 R_3 u^3 + \ldots + \left[-\xi_1 R_n + \sum_{j=2}^{n-2} R_j\left[-\xi_1(\lambda\varpi_{n+j} + \mu\mathcal{E}_{n-j}) - A_{n-j}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=3}^{n-j-2}A_i(\lambda\varpi_{n-j-i} + \mu\mathcal{E}_{n-j-i}) + \lambda\mu\sum_{i=2}^{n-j-2}a_i(\varpi_{n-j-i} - \mathcal{E}_{n-j-i})\right]\right]u^n + \ldots\Bigg\}.$$

4. En égalant dans les deux membres des équations différentielles (I) les coefficients des mêmes puissances de u nous déterminerons la valeur des coefficients des développements (1) au moyen des formules de récurrence suivantes :

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&(n-1)nR_n = L_0R_{n-2} + \sum_{i=3}^{n-4}L_iR_{n-2-i}, \qquad nT_n = R_{n-1},\\
&(n-1)na_n = \alpha_{n-2} + \frac{m_2}{\rho^3}\sum_{j=4}^{n-4}\left[2R_2R_{j-2} + \ldots + R^2_{\frac{j}{2}} \text{ ou } 2R_{\frac{j-1}{2}}R_{\frac{j+1}{2}}\right]\left[-a_{n-2-j} - \sum_{i=2}^{n-j-4}(\mu\varpi_i + \lambda\mathcal{E}_i)a_{n-2-j-i}\right.\\
&\qquad\left. + \xi_1(\varpi_{n-2-j} - \mathcal{E}_{n-2-j}) + \sum_{i=3}^{n-j-4}A_i(\varpi_{n-2-j-i} - \mathcal{E}_{n-2-j-i})\right],\\
&n\alpha_n = nL_0a_n + \sum_{i=3}^{n-2}(n-i)L_ia_{n-i} + \frac{m_2}{\rho^3}\sum_{j=3}^{n-3}\frac{j+1}{2}\left[2R_2R_{j-1} + \ldots + R^2_{\frac{j+1}{2}} \text{ ou } 2R_{\frac{j}{2}}R_{\frac{j+2}{2}}\right]\\
&\qquad\times\left[-a_{n-1-j} - \sum_{i=2}^{n-j-3}(\mu\varpi_i + \lambda\mathcal{E}_i)a_{n-1-j-i} + \xi_1(\varpi_{n-1-j} - \mathcal{E}_{n-1-j}) + \sum_{i=3}^{n-j-3}A_i(\varpi_{n-1-j-i} - \mathcal{E}_{n-1-j-i})\right],\\
&nD_n = \frac{M}{\rho^3}\Bigg\{-\xi_1R_{n-1} + \sum_{j=2}^{n-3}R_j\left[-\xi_1(\lambda\varpi_{n-1-j} + \mu\mathcal{E}_{n-1-j}) - A_{n-1-j} - \sum_{i=3}^{n-j-3}A_i(\lambda\varpi_{n-1-j-i} + \mu\mathcal{E}_{n-1-j-i})\right.\\
&\qquad\left. + \lambda\mu\sum_{i=2}^{n-j-3}a_i(\varpi_{n-1-j-i} - \mathcal{E}_{n-1-j-i})\right]\Bigg\},\\
&nA_n = \xi_1'R_{n-1} + \sum_{i=3}^{n-3}D_iR_{n-1-i}.
\end{aligned}\right.$$

5. Afin d'étudier les propriétés des coefficients précédents nous déterminerons de proche en proche quelques-uns d'entre eux. A cet effet nous devrons expliciter la quantité L_n et nous aurons successivement :

$$\mathcal{O}_2 - \mathcal{E}_2 = \frac{3}{\rho^2} S(\xi_1 a_2), \qquad \mathcal{O}_3 - \mathcal{E}_3 = 0, \qquad \mathcal{O}_4 - \mathcal{E}_4 = \frac{3}{\rho^2} S(\xi_1 a_4) + \frac{3}{2\rho^2}(\lambda - \mu) R_2^2 + \frac{3 \cdot 5}{2\rho^4}(\mu - \lambda)[S(\xi_1 a_2)]^2,$$

$$\mathcal{O}_5 - \mathcal{E}_5 = \frac{3}{\rho^2} S(A_3 a_2) - \frac{3 \cdot 5}{\rho^4} S(\xi_1 A_3) \cdot S(\xi_1 a_2),$$

$$\lambda \mathcal{O}_2 + \mu \mathcal{E}_2 = 0, \qquad \lambda \mathcal{O}_3 + \mu \mathcal{E}_3 = -\frac{1}{\rho^2} R_2 S(\xi_1 \xi_1'), \qquad \lambda \mathcal{O}_4 + \mu \mathcal{E}_4 = -\frac{3}{2\rho^2}[S(2\xi_1 A_4) + \lambda\mu R_2^2] + \frac{3 \cdot 5}{2\rho^4} \lambda\mu [S(\xi_1 a_2)]^2,$$

$$\mu \mathcal{O}_2 + \lambda \mathcal{E}_2 = -\frac{3}{\rho^2}(\lambda - \mu) S(\xi_1 a_2), \qquad \mu \mathcal{O}_3 + \lambda \mathcal{E}_3 = -\frac{3}{\rho^2} S(\xi_1 A_3),$$

$$\frac{\mathcal{F}_3}{\mu} + \frac{\mathcal{K}_3}{\lambda} = -\frac{S(\xi_1 A_3)}{\lambda\mu\rho^2}, \qquad \frac{\mathcal{F}_4}{\mu} + \frac{\mathcal{K}_4}{\lambda} = -\frac{1}{2\rho^2}\left[\frac{S(2\xi_1 A_4)}{\lambda\mu} + R_2^2\right] + \frac{3}{2\rho^4}[S(\xi_1 a_2)]^2, \qquad \frac{\mathcal{F}_5}{\mu} + \frac{\mathcal{K}_5}{\lambda} = -\frac{1}{2\lambda\mu\rho^2} S(2\xi_1 A_5),$$

$$\frac{\mathcal{F}_6}{\mu} + \frac{\mathcal{K}_6}{\lambda} = -\frac{1}{2\rho^2}\left[\frac{S(2\xi_1 A_6) + S(A_3^2)}{\lambda\mu} + 2R_2 R_4\right] + \frac{3}{8\rho_4}\left[8S(\xi_1 a_2) \cdot S(\xi_1 a_4) + 4(\lambda - \mu) R_2^2 S(\xi_1 a_2) + \frac{[S(2\xi_1 A_3)]^2}{\lambda\mu}\right]$$
$$+ \frac{3 \cdot 5}{3!\,\rho^6}(\mu - \lambda)[S(\xi_1 a_2)]^3,$$

$$\frac{\mathcal{F}_7}{\mu} + \frac{\mathcal{K}_7}{\lambda} = -\frac{S(2\xi_1 A_7)}{2\lambda\mu\rho^2} + \frac{3}{2^2\rho^4}[R_2^2 S(2\xi_1 A_3) + 4S(\xi_1 a_2) S(A_3 a_2)] - \frac{3 \cdot 5}{2\rho^6} S(\xi_1 A_3)[S(\xi_1 a_2)]^2,$$

$$L_3 = 0, \qquad L_4 = -\frac{2m_2}{\rho^3} R_2^2 + \frac{6m_2}{\rho^5}[S(\xi_1 a_2)]^2, \qquad L_5 = 0$$

$$L_6 = \frac{5^2}{2} \cdot \frac{m_2}{\rho^7}(\mu - \lambda)[S(\xi_1 a_2)]^3 + \frac{m_2}{\rho^5}\left[L_0[S(\xi_1 a_2)]^2 + \frac{3 \cdot 5}{2}(\lambda - \mu) R_2^2 S(\xi_1 a_2)\right] - \frac{m_2}{3\rho^3} L_0 R_2^2,$$

$$L_7 = -\frac{5 \cdot 11}{7} \cdot \frac{m_2}{\rho^7} R_2 S(\xi_1 \xi_1') \cdot [S(\xi_1 a_2)]^2 + \frac{11}{7} \cdot \frac{m_2}{\rho^5}[2R_2 S(\xi_1 a_2) \cdot S(\xi_1' a_2) + R_2^2 S(\xi_1 \xi_1')].$$

A partir de ces expressions nous trouvons pour valeur des coefficients :

R)

$$\boxed{R_2 = \frac{m_0 + m_1}{2}}, \qquad R_3 = 0, \qquad R_4 = \frac{2L_0 R_2}{4!}, \qquad R_5 = 0, \qquad R_6 = \frac{2L_0^2 R_2}{6!}, \qquad R_7 = 0,$$

$$R_8 = \frac{1}{7 \cdot 8}\left[\frac{2L_0^3 R_2}{6!} - \frac{2m_2}{\rho^3} R_2^3 + \frac{6m_2}{\rho^5} R_2 [S(\xi_1 a_2)]^2\right], \qquad R_9 = 0, \qquad R_{11} = \frac{L_7 R_2}{10 \cdot 11},$$

$$R_{10} = \frac{1}{9 \cdot 10}\left[\frac{2L_0^4 R_2}{8!} - \frac{3 \cdot 5\, m_2}{4 \cdot 7\, \rho^3} L_0 R_2^3 + \frac{3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 7} \frac{m_2}{\rho^5} L_0 R_2 [S(\xi_1 a_2)]^2 + \frac{3 \cdot 5}{2} \cdot \frac{m_2(\lambda - \mu)}{\rho^5} R_2^2 S(\xi_1 a_2) + \frac{5^2}{2} \frac{m_2(\mu - \lambda)}{\rho^7} R_2 [S(\xi_1 a_2)]^3\right].$$

α)

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = 0, \qquad \alpha_2 = L_0 a_2, \qquad \alpha_4 = \frac{2}{4!} L_0^2 a_2,$$

$$\alpha_6 = \frac{2}{6!} L_0^3 a_2 - \frac{m_2}{\rho^3} R_2^2 a_2 + \frac{2m_2}{\rho^5} a_2 [S(\xi_1 a_2)]^2 + \frac{m_2}{\rho^5} R_2^2 \xi_1 S(\xi_1 a_2),$$

$$8\alpha_8 = 8L_0 a_8 + 4L_4 a_4 + 2L_6 a_2 + \frac{m_2}{\rho^3}\left[2R_2^2[-a_4 - (\mu \mathcal{O}_2 + \lambda \mathcal{E}_2) a_2 + \xi_1(\mathcal{O}_4 - \mathcal{E}_4)] + 6R_2 R_4[-a_2 + \xi_1(\mathcal{O}_2 - \mathcal{E}_2)]\right],$$

$$9\alpha_9 = 2L_7 a_2 + \frac{2m_2}{\rho^3} R_2^2 \left[\frac{a_2}{\rho^2} S(\xi_1 \xi_1') + \frac{\xi_1}{\rho^2} S(\xi_1' a_2) - \frac{5\xi_1}{\rho^4} S(\xi_1 \xi_1') S(\xi_1 a_2) + \frac{\xi_1'}{\rho^2} S(\xi_1 a_2)\right].$$

α) $$a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = 0, \qquad \boxed{a_2 = \frac{m_0 + m_1}{2}\varphi}, \qquad a_4 = \frac{2L_0 a_2}{4\,!}, \qquad a_6 = \frac{2L_0^2 a_2}{6\,!},$$

$$7 \cdot 8\, a_8 = \alpha_6 + \frac{m_2}{\rho^3} R_2^2 \left[- a_2 + \frac{3\xi_1}{\rho^2} S(\xi_1 a_2)\right],$$

$$9 \cdot 10\, a_{10} = \alpha_8 + \frac{m_2}{\rho^3} \left[R_2^2[- a_4 - (\mu\mathcal{O}_2 + \lambda\mathcal{E}_2)a_2 + \xi_1(\mathcal{O}_4 - \mathcal{E}_4)] + 2R_2R_4[- a_2 + \xi_1(\mathcal{O}_2 - \mathcal{E}_2)]\right],$$

$$10 \cdot 11\, a_{11} = \alpha_9 + \frac{m_2}{\rho^3} R_2^2[- (\mu\mathcal{O}_3 + \lambda\mathcal{E}_3)a_2 + \xi_1(\mathcal{O}_5 - \mathcal{E}_5) + A_3(\mathcal{O}_2 - \mathcal{E}_2)].$$

D) $$D_3 = -\frac{M}{3\rho^3} R_2\xi_1, \qquad D_4 = 0, \qquad D_5 = -\frac{2M}{5\,!\,\rho^3} L_0 R_2 \xi_1, \qquad D_6 = -\frac{M}{6\rho^3}\left[-\frac{1}{\rho^2} R_2^2\xi_1 S(\xi_1\xi_1') + \frac{1}{3} R_2^2 \xi_1'\right],$$

$$D_7 = \frac{M}{7\rho^3}\left[-\frac{2}{6\,!} L_0^2 R^2 \xi_1 + \frac{3\lambda\mu}{2\rho^2} R_2^2\xi_1 - \frac{3 \cdot 5}{2} \cdot \frac{\lambda\mu}{\rho^4} R_2\xi_1[S(\xi_1 a_2)]^2 + \frac{3\lambda\mu}{\rho^2} R_2 a_2 S(\xi_1 a_2)\right].$$

A) $$A_3 = \frac{1}{3} R_2\xi_1', \qquad A_4 = 0, \qquad A_5 = \frac{2}{5\,!} L_0 R_2 \xi_1', \qquad A_6 = -\frac{M}{2 \cdot 3^2 \rho^3} R_2^2\xi_1, \qquad A_7 = \frac{2}{7\,!} L_0^2 R_2 \xi_1',$$

$$A_8 = \frac{1}{180}\frac{M}{\rho^3} R_2^2 L_0 \xi_1, \qquad 9\,A_9 = \xi_1' R_8 + D_6 R_2, \qquad 10\,A_{10} = D_3R_6 + D_5R_4 + D_7R_2.$$

Finalement les variables de Sundman s'expriment par des développements en séries entières en u de la forme :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{m_0 + m_1}{2} u^2 + R_4u^4 + R_6u^6 + R_8u^8 + R_{10}u^{10} + R_{11}u^{11} + \dots, \\ \alpha &= (m_0 + m_1)\varphi + \alpha_2u^2 + \alpha_4u^4 + \alpha_6u^6 + \alpha_8u^8 + \alpha_9u^9 + \dots, \\ x &= \frac{m_0 + m_1}{2}\varphi u^2 + a_4u^4 + a_6u^6 + a_8u^8 + a_{10}u^{10} + a_{11}u^{11} + \dots, \\ \xi' &= \xi_1' + D_3u^3 + D_5u^5 + D_6u^6 + \dots, \\ \xi &= \xi_1 + A_3u^3 + A_5u^5 + A_6u^6 + \dots. \end{aligned} \right.$$

t s'exprime en fonction de u au moyen de l'intégrale :

$$t = \int_0^u r\, du.$$

CHAPITRE II

ÉTUDE DE L'ORBITE AU VOISINAGE D'UN CHOC

1. **A l'instant d'un choc binaire réel, le plan osculateur à la trajectoire relative de la masse m_1 par rapport à la masse m_0 contient la troisième masse m_2.** — Considérons la trajectoire relative de la masse m_1 par rapport à la masse m_0. Le corps P_0 de masse m_0 est l'origine des coordonnées et la tangente P_0T en ce point à la trajectoire a pour composantes φ, χ, ψ. Le plan passant par un point P de la trajectoire voisin de P_0 et par la tangente P_0T a pour équation :

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \varphi & \chi & \psi \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Y, X, Z désignent les coordonnées courantes d'un point du plan et les variables x, y, z devront être remplacées par leurs développements (3). En se reportant aux valeurs trouvées pour les coefficients a_i (chapitre I, § 5), nous constatons les propriétés suivantes : les coefficients a_2, a_4, a_6 contiennent le facteur φ, les coefficients a_8 et a_{10} sont des fonctions linéaires de φ et de ξ_1, enfin, tous les autres coefficients sont des fonctions linéaires de φ, ξ_1, ξ_1' de la forme :

$$p\varphi + q\xi_1 + s\xi_1', \tag{4}$$

p, q, s étant des fonctions de φ, χ, ψ, ξ_1, η_1, ζ_1, ζ_1', η_1', ζ_1'. D'autre part nous remarquons que les coefficients b_i et c_i des développements des variables y et z s'obtiennent en remplaçant dans la relation (4), φ, ξ_1, ξ_1' par χ, η_1, η_1' et par ψ, ζ_1, ζ_1'.

Nous aurons donc :

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{m_0+m_1}{2}\varphi u^2 + p_4\varphi u^4 + p_6\varphi u^6 + (p_8\varphi + q_8\xi_1)u^8 + (p_{10}\varphi + q_{10}\xi_1)u^{10} + \sum_{n=11}^{\infty}(p_n\varphi + q_n\xi_1 + s_n\xi_1')u^n, \\ y &= \frac{m_0+m_1}{2}\chi u^2 + p_4\chi u^4 + p_6\chi u^6 + (p_8\chi + q_8\eta_1)u^8 + (p_{10}\chi + q_{10}\eta_1)u^{10} + \sum_{n=11}^{\infty}(p_n\chi + q_n\eta_1 + s_n\eta_1')u^n, \\ z &= \frac{m_0+m_1}{2}\psi u^2 + p_4\psi u^4 + p_6\psi u^6 + (p_8\psi + q_8\zeta_1)u^8 + (p_{10}\psi + q_{10}\zeta_1)u^{10} + \sum_{n=11}^{\infty}(p_n\psi + q_n\zeta_1 + s_n\zeta_1')u^n. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Par conséquent le plan osculateur à la trajectoire au point P_0 aura pour équation :

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \varphi & \chi & \psi \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} = 0$$

et par suite, à l'instant du choc, le plan osculateur contiendra la masse m_2.

2. **Si dans les développements** (5) **nous négligeons les puissances de** u **supérieures à la dixième, le mouvement sera plan.** — En effet, il existera entre les variables x, y, z la relation linéaire :

$$(\chi\zeta_1 - \psi\eta_1)x + (\psi\xi_1 - \varphi\zeta_1)y + (\varphi\eta_1 - \chi\xi_1)z = 0.$$

3. **La trajectoire relative de la masse** m_1 **par rapport à la masse** m_0 **présente un point de rebroussement. Dans le cas du problème plan des trois corps le point de rebroussement est de deuxième espèce.** — Prenons la tangente P_0T pour axe des x et le plan osculateur pour plan des x, y. Nous aurons :

$$\chi = \psi = 0, \qquad \varphi\eta_1 - \chi\xi_1 = 0, \qquad \psi\xi_1 - \varphi\zeta_1 = 0, \qquad \varphi \neq 0, \qquad \chi\zeta_1 - \psi\eta_1 \neq 0,$$

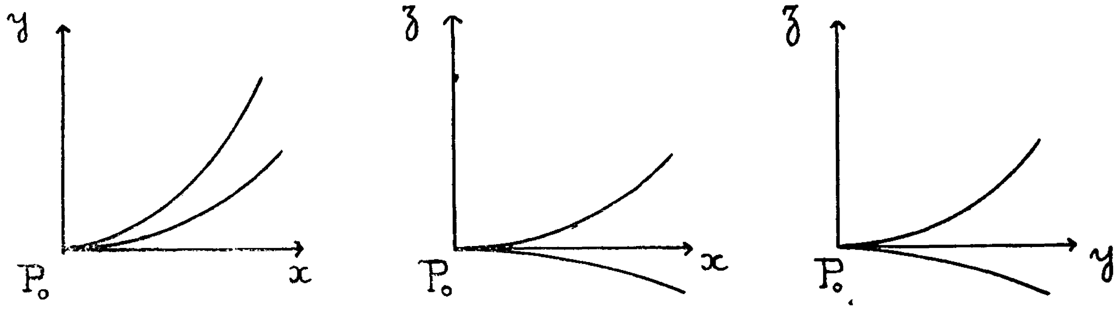
d'où :

$$\zeta_1 = 0, \qquad \varphi\eta_1 \neq 0.$$

Les développements des variables x, y, z suivant les puissances de u seront alors de la forme :

$$x = a_2u^2 + \ldots, \qquad y = b_8u^8 + \ldots, \qquad z = c_{11}u^{11} + \ldots.$$

Au voisinage de l'instant du choc, les projections de la trajectoire sur les plans de coordonnées seront données par les figures suivantes :



Par conséquent, dans le problème plan, la trajectoire admet un point de rebroussement de deuxième espèce à l'instant du choc.

4. **Si dans les développements** (5) **nous négligeons les puissances de** u **supérieures à la sixième, le mouvement est rectiligne.** — On a en effet :

$$\frac{x}{\varphi} = \frac{y}{\chi} = \frac{z}{\psi}.$$

Ce résultat a été signalé pour la première fois par *Kiveliovitch* (loc. cit.).

5. **Sur des résultats obtenus par M. Chazy.** — Considérons l'une des trois équations des aires :

$$g\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+h\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)=g\left(\frac{xy'-yx'}{r}\right)+h(\xi\eta'-\eta\xi')=\mathrm{C}, \tag{7}$$

A, B, C désignant les trois constantes des aires. En remplaçant dans l'équation (7) les variables par leurs développements (3) nous obtenons :

$$g\left[\frac{\dfrac{3}{2^4\cdot 7}\cdot\dfrac{m_2(m_0+m_1)^4}{\rho^5}(\varphi\eta_1-\chi\xi_1)\mathrm{S}(\xi_1\varphi)\cdot u^7+\ldots}{\dfrac{m_0+m_1}{2}+\mathrm{R}_4u^2+\ldots}\right]+h\left[(\xi_1\eta_1'-\eta_1\xi_1')+\frac{\mathrm{M}(m_0+m_1)}{6\rho^3}(\eta_1^2-\xi_1^2)u^3+\ldots\right]=\mathrm{C}.$$

A l'instant du choc $u=0$ et nous aurons les trois relations suivantes :

$$h(\eta_1\zeta_1'-\zeta_1\eta_1')=\mathrm{A},\qquad h(\zeta_1\xi_1'-\xi_1\zeta_1')=\mathrm{B},\qquad h(\xi_1\eta_1'-\eta_1\xi_1')=\mathrm{C}.$$

Nous en déduirons que *le choc a lieu dans le plan du maximum des aires*, et, qu'à l'instant du choc, *les trajectoires du troisième corps et du centre de gravité des deux masses m_0 et m_1 sont tangentes à ce plan* (1).

Si, à l'instant du choc, les composantes ξ_1', η_1', ζ_1' de la vitesse de la masse m_2 sont nulles, les trois constantes des aires A, B, C seront nulles et, d'après le théorème de Dziobek, le mouvement sera plan. D'après la forme des coefficients a_i, b_i, c_i, A_i, B_i, C_i chapitre I, § 5), les coordonnées x, y, z, ξ, η, ζ seront des fonctions paires de u. M. Chazy donne à ce choc le nom de *choc symétrique* (2).

6. **Choc de deux masses infiniment petites.** — Les deux masses m_0 et m_1 qui se choquent étant infiniment petites, nous poserons :

$$m_0=\varepsilon\mathrm{M}_0,\qquad m_1=\varepsilon\mathrm{M}_1,$$

M_0 et M_1 désignant des quantités finies et ε étant un paramètre arbitraire. Dans les développements des variables x, y, z, r, α, β, γ les coefficients des puissances impaires de u sont d'ordre 4 par rapport à ε et les puissances paires de u sont d'ordre 1. Dans les développements des variables ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', les coefficients des puissances paires de u sont d'ordre 2 et les coefficients des puissances impaires sont d'ordre 1. Nous constatons ces propriétés par l'étude des coefficients des premiers termes des développements (3) et nous avons vérifié, à partir des formules de récurrence (2) que si les coefficients des termes en u^{2k} et en u^{2k+1} sont de la forme indiquée, il en sera de même des coefficients des termes en u^{2k+2} et en u^{2k+3}. Par conséquent, en mettant dans chaque coefficient le facteur ε^i en évidence nous aurons :

$$\left\{\begin{array}{lll} r=\varepsilon\mathrm{P}(u)+\varepsilon^4\mathrm{I}(u), & t=\varepsilon\mathrm{I}(u)+\varepsilon^4\mathrm{P}(u), & x=\varepsilon\mathrm{P}(u)+\varepsilon^4\mathrm{I}(u), \\ \xi=\xi_1+\varepsilon\mathrm{I}(u)+\varepsilon^2\mathrm{P}(u), & \xi'=\xi_1'+\varepsilon\mathrm{I}(u)+\varepsilon^2\mathrm{P}(u), & \end{array}\right. \tag{9}$$

$\mathrm{P}(u)$ et $\mathrm{I}(u)$ désignent respectivement des séries entières en u convergentes et contenant des termes pairs ou impairs. Nous appliquerons aux orbites à chocs de Poicnaré les résultats obtenus en étudiant paragraphe par paragraphe le chapitre XXXII des *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* qui traite des solutions périodiques de deuxième espèce.

(1) *Remarques sur les problèmes des deux corps et des trois corps* (*Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 81).

(2) *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps* (*Bulletin astronomique*, 2e série, t. VII, 1932, p. 403-436).

CHAPITRE III

ORBITES A CHOCS DE POINCARÉ

1. **Définition.** — « Si les masses m_0 et m_1 sont *infiniment petites*, les deux planètes suivront les lois de Képler, *à moins que leur distance ne devienne elle-même à certains moments infiniment petite.* Supposons en effet, que les deux planètes, d'abord très éloignées l'une de l'autre, décrivent l'une et l'autre une ellipse képlérienne. Il pourra arriver que ces deux ellipses se rencontrent, ou passent très près l'une de l'autre, et cela de telle façon qu'à un certain moment la distance des deux planètes devienne très petite, à ce moment, leur action perturbatrice mutuelle pourra devenir sensible et les deux orbites subiront des perturbations importantes. Puis, les planètes s'étant de nouveau éloignées l'une de l'autre, décriront de nouveau des ellipses képlériennes. Seulement ces ellipses différeront beaucoup des anciennes. » Poincaré admet qu'après un choc la vitesse relative de la masse m_1 par rapport à la masse m_0 a une direction quelconque et que les constantes des forces vives et des aires ne sont pas altérées. Ces constantes étant données et en supposant $\varepsilon = 0$, Poincaré construit les ellipses décrites après un choc *indépendamment* des ellipses construites avant le choc. Il considère une sphère d'activité ayant pour centre le point de choc Q et il admet qu'à l'entrée et à la sortie de la sphère les vitesses des masses m_0 et m_1 par rapport à la masse principale m_2 sont celles que possèderaient ces deux masses au point Q d'intersection des ellipses décrites pour $\varepsilon = 0$. Nous savons d'après les travaux de Sundman que les constantes des forces vives et des aires ont la même valeur avant et après un choc et nous appliquerons la transformation $dt = r\,du$ à l'étude du choc de deux masses infiniment petites.

2. **Étude de la trajectoire au voisinage du choc.** — Pour ε infiniment petit, considérons une sphère d'activité S de centre P_0 et de rayon $\varepsilon\rho$, ρ étant fini. A l'extérieur de cette sphère, les trajectoires des masses m_0 et m_1 sont, par approximation, des orbites képlériennes. Pour étudier le mouvement à l'intérieur de la sphère S nous considérerons les développements (9). Les termes impairs des développements des variables r, x, y, z contiennent le facteur ε^4 et pourront être négligés. D'autre part, nous ne conserverons dans les développements des variables ξ et ξ' que les premiers termes ξ_1 et ξ_1'. La variable u aura donc la même valeur absolue à l'entrée et à la sortie de S et par suite, la trajectoire relative de m_1 par rapport à m_0 revient sur elle-même. Les composantes de la vitesse relative $\frac{dx}{dt} = \frac{x'}{r}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{y'}{r}$, $\frac{dz}{dt} = \frac{z'}{r}$ sont de la forme $I(u) + \varepsilon^3 P(u)$ et, en négligeant les troisièmes puissances de ε, elles ont même valeur absolue avant et après le choc et sont de signes contraires. Par conséquent, la vitesse

relative a même grandeur, même direction avant et après le choc, mais elle a un sens opposé. Le temps mis par la masse m_1 pour traverser la sphère d'activité est infiniment petit ; les coordonnées et la vitesse de la masse m_2 sont les mêmes à l'entrée et à la sortie de S.

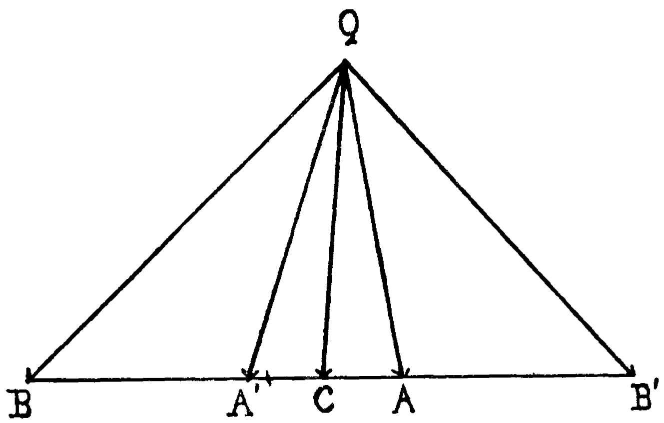
3. **Construction des orbites à chocs.** — Connaissant les vitesses $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_1$ des masses m_0 et m_1 par rapport à la masse m_2 à l'entrée dans S nous déterminerons les vitesses $\vec{V}_0$ et $\vec{V}_1$ de chaque masse à la sortie de S. Les coniques décrites avant le choc par les masses m_0 et m_1 se coupent en un point Q_1 ; nous admettrons que le point de choc est le point Q_1 et que les vitesses $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_1$ sont les vitesses des masses m_0 et m_1 en ce point.

Prenons le corps P_2 de masse m_2 pour origine des coordonnées et désignons par $\vec{v}_r$ la vitesse relative de m_1 par rapport à m_0, et par $\vec{v}_g$ la vitesse du centre de gravité G des deux masses m_0 et m_1 par rapport à P_2. Nous aurons :

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{P_2P_1} - \overrightarrow{P_2P_0}, \qquad \overrightarrow{P_2G} = \overrightarrow{P_2P_0} + \overrightarrow{P_0G}, \qquad \vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_0, \qquad \vec{v}_g = \vec{v}_0 + \frac{M_1}{M_0 + M_1}\vec{v}_r,$$

$$\vec{V}_0 = \vec{v}_g + \frac{M_1}{M_0 + M_1}\vec{v}_r, \qquad \vec{V}_1 = \vec{v}_g - \frac{M_0}{M_0 + M_1}\vec{v}_r.$$

Les vitesses $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_1$ étant connues en grandeur, direction et sens, les vitesses $\vec{V}_0$ et $\vec{V}_1$ seront données par la construction suivante :



$$\overrightarrow{Q_1A} = \vec{v}_0, \qquad \overrightarrow{Q_1B} = \vec{v}_1, \qquad \overrightarrow{AB} = \vec{v}_r, \qquad \overrightarrow{AC} = \frac{M_1}{M_0 + M_1}\vec{v}_r, \qquad \overrightarrow{Q_1C} = \vec{v}_g, \qquad \overrightarrow{CA'} = -\overrightarrow{CA},$$

$$\overrightarrow{CB'} = -\overrightarrow{CB}, \qquad \overrightarrow{Q_1A'} = \vec{V}_0, \qquad \overrightarrow{Q_1B'} = \vec{V}_1.$$

Si, initialement, les trajectoires des masses m_0 et m_1 sont des ellipses, les vitesses v_0 et v_1 vérifieront l'inégalité :

$$v^2 < \frac{2m_2}{r}, \qquad \text{avec} \qquad P_2Q_1 = r. \tag{10}$$

Dans cette inégalité nous avons pris la constante de Gauss égale à l'unité et nous avons négligé les masses infiniment petites des deux corps m_0 et m_1. Par suite, comme après le choc une vitesse $\vec{V}_0$ ou $\vec{V}_1$ est toujours à l'intérieur du triangle Q_1AB, l'une des deux vitesses $\vec{V}_0$ ou $\vec{V}_1$ vérifiera l'inégalité (10) et la trajectoire correspondante sera une ellipse. Si les deux petites masses sont égales on a $\vec{V}_0 = \vec{v}_1$, $\vec{V}_1 = \vec{v}_0$; les nouvelles trajectoires décrites après le choc sont les coniques primitives mais chaque corps a changé de conique.

Les orbites à chocs décrites par les deux masses m_0 et m_1 infiniment petites autour de la masse principale m_2 sont des orbites approchées. Au degré d'approximation admis par Poincaré les orbites à chocs n'ont pas la généralité qu'il leur supposait et après un choc la vitesse relative n'a pas une direction quelconque. Les ellipses initiales étant données, les coniques décrites après le choc sont connues ; l'une de ces coniques est une ellipse et l'autre conique est une ellipse, ou une parabole, ou une hyperbole ou se réduit à un segment de droite. Chaque masse infiniment petite m_0 et m_1 peut décrire successivement deux ou plusieurs ellipses et le mouvement peut être périodique. Pratiquement nous avons construit ces orbites à chocs en admettant implicitement les hypothèses suivantes : ε est nul et par suite chaque corps décrit rigoureusement un orbite képlérienne ; après chaque passage simultané des corps P_0, P_1 aux points d'intersection des orbites décrites la vitesse relative change de sens.

4. Lorsque ε tend vers zéro, peut-on conclure qu'à la limite, pour $\varepsilon = 0$, chaque corps décrit rigoureusement des orbites képlériennes telles qu'après chaque passage simultané des corps P_0 et P_1 aux points d'intersection des orbites décrites la vitesse relative change de sens ? A priori nous pouvons répondre à cette question par la négative mais afin d'apporter la rigueur nécessaire à cette étude nous reprendrons le système différentiel que nous avons établi dans notre note sur le choc binaire réel. (Première partie, chapitre II) (1).

Après avoir posé $m_1 = \varepsilon M_1$, $m_2 = \varepsilon M_2$ nous aurons :

$$\lambda = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \qquad \mu = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, \qquad g = \frac{M}{\varepsilon m_3(M_1 + M_2)} = \frac{g_1}{\varepsilon}, \qquad h = \frac{M_1 + M_2}{\varepsilon M_1 M_2} = \frac{h_1}{\varepsilon}, \qquad K = \frac{K_1}{\varepsilon},$$

avec

$$g_1 = \frac{M}{m_3(M_1 + M_2)}, \qquad h_1 = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}.$$

En remplaçant dans le système différentiel considéré les quantités m_1 et m_2 par εM_1, et par εM_2 nous obtenons le système différentiel S_1 :

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\xi_1}{z_1} = \frac{d\xi_2}{z_2} = \frac{d\xi_3}{z_3} = \frac{dx_4}{ry_4} = \frac{dx_5}{ry_5} = \frac{dx_6}{ry_6} = \frac{dz_2}{\cdots} = \frac{dz_3}{\cdots} = \frac{dy_5}{\cdots} = \frac{dy_6}{\cdots}$$

$$= \frac{dz_1}{\begin{array}{l} -z_1 - (z_1 + \xi_1)\sum\limits_1^3 z_i^2 + \dfrac{g_1 + g_1\sum\limits_1^3 z_i^2 + h_1 \sum\limits_4^6 y_i^2}{2M\left[\dfrac{r}{M_1 r_1} + \dfrac{r}{M_2 r_2} + \dfrac{\varepsilon}{m_3}\right] + K_1 r} \Bigg\{ \varepsilon(M_1 + M_2) z_1 - m_3\left(\dfrac{\mu}{r_1^3} + \dfrac{\lambda}{r_2^3}\right)\xi_1 r^3 + m_3\left(\dfrac{1}{r_1^3} - \dfrac{1}{r_2^3}\right) x_4 r^2 \\ \qquad\qquad + (z_1 + \xi_1)\left[m_3\left(\dfrac{\mu}{r_1^3} + \dfrac{\lambda}{r_2^3}\right) r^3 - m_3\left(\dfrac{1}{r_1^3} - \dfrac{1}{r_2^3}\right)(\xi_1 x_4 + \xi_2 x_5 + \xi_3 x_6) r^2\right]\Bigg\} \end{array}}$$

(1) Nous conservons la notation utilisée dans ce chapitre et par suite les deux masses qui se choquent sont m_1 et m_2.

$$= \frac{dy_4}{-y_4\sum_1^3 z_i^2 + \dfrac{g_1 + g_1\sum_1^3 z_i^2 + h_1\sum_4^6 y_i^2}{2M\left[\dfrac{r}{M_1 r_1} + \dfrac{r}{M_2 r_2} + \dfrac{\varepsilon}{m_3}\right] + K_1 r}\left\{\varepsilon(M_1+M_2)y_4 - M\left(\dfrac{\lambda}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}\right)x_4 r^2 + \lambda\mu M\left(\dfrac{1}{r_1^3}-\dfrac{1}{r_2^3}\right)\xi_1 r^3 + y_4\left[m_3\left(\dfrac{\mu}{r_1^3}+\dfrac{\lambda}{r_2^3}\right)r^3 - m_3\left(\dfrac{1}{r_1^3}-\dfrac{1}{r_2^3}\right)(\xi_1 x_4 + \xi_2 x_5 + \xi_3 x_6)r^2\right]\right\}}.$$

En annulant ε dans le système différentiel S_1 nous obtenons le système différentiel S_2 :

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\xi_1}{z_1} = \frac{d\xi_2}{z_2} = \frac{d\xi_3}{z_3} = \frac{dx_4}{ry_4} = \frac{dx_5}{ry_5} = \frac{dx_6}{ry_6} = \frac{dz_2}{\cdots} = \frac{dz_3}{\cdots} = \frac{dy_5}{\cdots} = \frac{dy_6}{\cdots}$$

$$= \frac{dz_1}{-z_1 - (z_1+\xi_1)\sum_1^3 z_i^2 + \dfrac{g_1 + g_1\sum_1^3 z_i^2 + h\sum_4^6 y_i^2}{2M\left[\dfrac{1}{M_1 r_1} + \dfrac{1}{M_2 r_2}\right] + K_1}\left\{-m_3\left(\dfrac{\mu}{r_1^3}+\dfrac{\lambda}{r_2^3}\right)\xi_1 r^2 + m_3\left(\dfrac{1}{r_1^3}-\dfrac{1}{r_2^3}\right)x_4 r + (z_1+\xi_1)\left[m_3\left(\dfrac{\mu}{r_1^3}+\dfrac{\lambda}{r_2^3}\right)r^2 - m_3\left(\dfrac{1}{r_1^3}-\dfrac{1}{r_2^3}\right)(\xi_1 x_4 + \xi_2 x_5 + \xi_3 x_6)r\right]\right\}}$$

$$= \frac{dy_4}{-y_4\sum_1^3 z_i^2 + \dfrac{g_1 + g_1\sum_1^3 z_i^2 + h_1\sum_4^6 y_i^2}{2M\left[\dfrac{1}{M_1 r_1} + \dfrac{1}{M_2 r_2}\right] + K_1}\left\{-M\left(\dfrac{\lambda}{r_1^3}+\dfrac{\mu}{r_2^3}\right)x_4 r + \lambda\mu M\left(\dfrac{1}{r_1^3}-\dfrac{1}{r_2^3}\right)\xi_1 r^2 + y_4\left[m_3\left(\dfrac{\mu}{r_1^3}+\dfrac{\lambda}{r_2^3}\right)r^2 - m_3\left(\dfrac{1}{r_1^3}-\dfrac{1}{r_2^3}\right)(\xi_1 x_4 + \xi_2 x_5 + \xi_3 x_6)r\right]\right\}}.$$

Pour des valeurs nulles des variables r, z_1, z_2, z_3 et pour des valeurs arbitraires des variables ξ_1, ξ_2, ξ_3, x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6 tous les dénominateurs du système différentiel S_2 sont nuls. Les variables s'expriment par des développements en séries entières en r alors que pour $\varepsilon \neq 0$ les variables s'expriment par des développements en séries entières en $r^{\frac{1}{2}}$. Posons $dt = r\,du$. De la relation :

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = r\,\frac{g_1 + g_1\sum_1^3 z_i^2 + h_1\sum_4^6 y_i^2}{2M\left[\dfrac{r}{M_1 r_1} + \dfrac{r}{M_2 r_2} + \dfrac{\varepsilon}{m_3}\right] + K_1 r},$$

nous tirons :

$$\frac{dr}{du} = r^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2M\left[\dfrac{r}{M_1 r_1} + \dfrac{r}{M_2 r_2} + \dfrac{\varepsilon}{m_3}\right] + K_1 r}{g_1 + g_1\sum_1^3 z_i^2 + h_1\sum_4^6 y_i^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, pour $\varepsilon \neq 0$ on a :

$$\frac{dt}{dr} = r^{\frac{1}{2}}S(r^{\frac{1}{2}}), \qquad \frac{dr}{du} = r^{\frac{1}{2}}S(r^{\frac{1}{2}}),$$

et pour $\varepsilon = 0$, on a :

$$\frac{dt}{dr} = S(r), \qquad \frac{dr}{du} = rS(r),$$

S ayant la même définition que dans la première partie.

Les résultats mis en évidence et l'étude des dénominateurs du système différentiel S_1 et des seconds membres des équations différentielles en $\frac{dr}{dt}$ et $\frac{dr}{du}$ montrent que les variables ne sont pas des fonctions continues du paramètre ε au voisinage de l'instant du choc et de la valeur zéro du paramètre ε. L'on ne peut donc pas passer par continuité d'orbites à chocs définies pour $\varepsilon \neq 0$ aux orbites décrites pour $\varepsilon = 0$. D'autre part, la transformation de Sundman n'est valable que pour $\varepsilon \neq 0$.

Pour ε nul, chaque corps P_0 et P_1 décrit une conique et une seule ; il n'est donc pas légitime d'écrire que pour $\varepsilon = 0$ chaque corps décrit deux ou plusieurs coniques et que la vitesse relative change de sens après le passage des deux corps aux points d'intersection des coniques décrites.

CHAPITRE IV

ÉTUDE DE SOLUTIONS PÉRIODIQUES

1. Considérons le système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{11}$$

où X_i est une fonction des variables x_i et d'un paramètre ε. Il est généralement impossible de démontrer l'existence de solutions périodiques de ces équations. Cependant, dans le cas où pour une valeur nulle du paramètre ε les équations (11) admettent une solution particulière périodique :

$$x_i = \theta_i(t, 0),$$

Poincaré a démontré l'existence de solutions périodiques de ces équations pour ε suffisamment petit. Poincaré a utilisé, à cet effet, un théorème (1) qui est une extension du théorème de Cauchy sur l'existence des intégrales holomorphes des équations différentielles :

« Si les fonctions X_i sont développables suivant les puissances de ε, $x_i - \theta_i(t, 0)$, pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et t_0, les solutions $\theta_i(t, \varepsilon)$ des équations (11) peuvent être développées suivant les puissances de ε pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et t_0. »

Dans l'étude des solutions périodiques du problème des trois corps basée sur le théorème de Poincaré on suppose toujours une masse principale, deux petites masses m_i et l'on définit le paramètre ε par l'égalité $\varepsilon = \frac{m_i}{M_i}$, M_i étant une quantité finie. Le théorème fondamental de Poincaré n'est pas applicable au système d'équations différentielles du problème des trois corps si, pour ε nul, la solution particulière $\theta(t, 0)$ est représentée par deux ellipses qui se coupent ou par une trajectoire rectiligne de l'un des petits corps et une trajectoire elliptique de l'autre petit corps.

La transformation de Sundman régularisant le système différentiel du problème des trois corps au voisinage d'un choc, il est permis de se demander s'il n'est pas possible de démontrer l'existence de solutions périodiques à chocs ou sans chocs pour de petites valeurs du paramètre ε se réduisant pour ε nul aux trajectoires précédentes. En désignant par m_0 et par m_1 les masses qui se choquent, nous devrons considérer deux problèmes distincts.

1° les deux masses m_0 et m_1 sont petites et la masse principale est m_2 ; pour ε nul, les deux masses

(1) *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, 1892, pp. 58-61.

m_0 et m_1 passent au même instant en un point d'intersection des ellipses qu'elles décrivent et le mouvement est périodique ; nous savons d'après le chapitre précédent que chaque petit corps décrit une ellipse ;

2° les deux masses m_1 et m_2 sont petites et la masse principale est m_0 ; pour ε nul, m_1 décrit un segment de droite, avec choc en m_0, m_2 une ellipse et nous supposons le mouvement périodique.

L'une des conditions de l'existence des solutions périodiques est la continuité des solutions $x_i = \theta_i(u, \varepsilon)$ du système différentiel de Sundman par rapport au paramètre ε pour toutes les valeurs de u y compris celle de l'instant du choc. Dans le cas du premier problème nous savons que les variables ne sont pas des fonctions continues du paramètre ε au voisinage de l'instant du choc. Dans le cas du second problème, toutes les conditions d'application du théorème sur les intégrales infiniment voisines sont vérifiées et il est possible de démontrer l'existence de solutions périodiques pour $\varepsilon \neq 0$ (1).

Conclusion. — Soient deux petites masses $m_0 = \varepsilon M_0$, $m_1 = \varepsilon M_1$. Pour ε nul. ces deux masses passent au même instant en un point d'intersection des deux ellipses qu'elles décrivent autour de la masse principale m_2 et le mouvement est supposé périodique. De l'existence de ces solutions périodiques pour ε nul il n'est pas permis de conclure à l'existence de solutions périodiques pour de petites valeurs de ε par application du théorème de Poincaré.

2. Nous donnerons un exemple très simple où les solutions périodiques existent pour $\varepsilon \neq 0$ sans qu'il soit possible de les déduire de l'existence des solutions périodiques pour $\varepsilon = 0$.

Considérons le point matériel C attiré par deux centres fixes P′ et P distants de $2c$, les coefficients respectifs étant ε et K^2. Nous supposerons le mouvement rectiligne avec chocs en P′ et en P.

Posons :

$$P'C = \rho, \qquad PC = r, \qquad \varepsilon < K^2, \qquad dt = r\rho\, du = r\, dv, \qquad h = -h_1, \qquad h_1 > 0,$$

h désignant la constante des forces vives. Le mouvement sera défini par une équation différentielle déduite de l'intégrale des forces vives :

$$\frac{d\rho}{dt} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{-h_1(2c-\rho)\rho + \varepsilon(2c-\rho) + K^2\rho}{(2c-\rho)\rho}}. \tag{12}$$

Pour ε nul, l'équation différentielle (12) est régularisée par l'introduction de la variable v, et elle se transforme en l'équation différentielle :

$$\frac{d\rho}{dv} = \sqrt{2}\,\sqrt{(2c-\rho)[K^2 - h_1(2c-\rho)]}. \tag{13}$$

Le point matériel C décrit le segment P′P si l'on a la relation :

$$2c = \frac{K^2}{h_1}, \tag{14}$$

et le mouvement est périodique.

(1) Kiveliovitch, *loc. cit.*

Pour ε différent de zéro, l'équation différentielle (12) est régularisée par l'introduction de la variable u et, en tenant compte de la relation (14), elle devient :

$$\frac{d\rho}{du} = \sqrt{2}\ \sqrt{\rho(2c - \rho)[h_1\rho^2 + \varepsilon(2c - \rho)]}. \tag{15}$$

Le trinôme du second degré $[h_1\rho^2 + \varepsilon(2c - \rho)]$ n'a pas de racines puisque son déterminant Δ est négatif : $\Delta = \varepsilon(\varepsilon - 4K^2) < 0$. Par conséquent, le point matériel C décrit le segments P'P et le mouvement est périodique.

Appliquons le théorème de Poincaré à l'équation (15) et intégrons cette équation différentielle pour ε nul. La variable ρ n'est pas une fonction périodique de u ; en effet, ρ s'exprime en fonction de u au moyen de l'équation différentielle $\dfrac{d\rho}{du} = \sqrt{2h_1(2c - \rho)\rho^3}$ et la variable ρ admet la valeur d'arrêt $\rho = 0$. D'autre part, en supposant ε petit, nous constatons que le second membre $f(\varepsilon, \rho)$ de l'équation différentielle (15) n'est pas développable suivant les puissances de ε. On a en effet :

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\rho, \varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\frac{(2c - \rho)\sqrt{2(2c - \rho)\rho}}{\sqrt{h_1\rho^2 + \varepsilon(2c - \rho)}}\right], \qquad \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\rho, 0) = \frac{(2c - \rho)}{2\rho}\sqrt{\frac{2(2c - \rho)\rho}{h_1}},$$

et cette dernière expression est infinie pour ρ nul.

Le théorème de Poincaré n'est donc pas applicable à l'équation différentielle (15). Le mouvement est périodique pour ε nul, mais nous ne pouvons pas démontrer l'existence de solutions périodiques pour de petites valeurs de ε se réduisant à la solution périodique mise en évidence pour ε nul. Il n'existe pas de solutions périodiques pour de petites valeurs de ε et pour ε nul telles que la différence entre les deux solutions soit aussi petite que l'on veut.

3. **Solutions périodiques de deuxième espèce.** — Poincaré a construit des orbites périodiques à chocs approchées pour une valeur infiniment petite du paramètre ε et il en a déduit qu'à la limite, lorsque ε tend vers zéro, les trajectoires de chaque petit corps se composent de deux ou plusieurs ellipses. Par définition, les solutions périodiques de deuxième espèce sont des solutions périodiques avec chocs ou sans chocs qui se réduisent à ces ellipses lorsque ε tend vers zéro.

Nous avons montré que pour $\varepsilon = 0$ chaque petit corps décrit une seule ellipse et que l'on ne peut pas passer par continuité d'orbites décrites pour $\varepsilon \neq 0$ aux orbites décrites pour $\varepsilon = 0$. Par conséquent, nous ne pouvons donc pas mettre en évidence l'existence, pour $\varepsilon \neq 0$, des solutions périodiques de deuxième espèce de Poincaré se réduisant pour $\varepsilon = 0$ à des solutions périodiques où les trajectoires de chaque petit corps sont représentées par deux ou plusieurs ellipses ; mais de plus, nous n'avons pas pu déduire de l'existence de solutions périodiques pour $\varepsilon = 0$ l'existence de solutions périodiques pour $\varepsilon \neq 0$. L'application du théorème de Poincaré sur les intégrales infiniment voisines ne nous a point permis, en utilisant les propriétés de continuité, de montrer l'existence de nouvelles solutions périodiques et, par suite, de progresser dans l'étude des solutions du problème des trois corps.

TABLE DES MATIÈRES

1489. — IMPRIMÉ EN FRANCE PAR L'IMPRIMERIE NOUVELLE, ORLÉANS — 5-1943