

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

J. MANDEL

**Sur les équilibres par tranches planes des corps solides
à la limite d'écoulement**

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1942

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1942__251__1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNIVERSITÉ DE LYON – FACULTÉ DES SCIENCES

Sur les équilibres
par tranches planes
des corps solides
à la limite d'écoulement

THESE

soutenue devant la Faculté des Sciences de l'Université de Lyon

par

J. MANDEL

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
6, Avenue de Provence, 6

GAP

—
1942

UNIVERSITÉ DE LYON-FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. DOUIN, *, †, ☉ I.

Assesseur

N...

Doyen honoraire

M. LONGCHAMBON, *, †, ☉ I., †.

Professeurs honoraires

MM. VESSIOT, C. *, ☉ I. MM. VANEY, *, ☉ I., †.
RIGOLLOT, *, ☉ I. ROMAN, *, ☉ I.
COUTURIER, *, ☉ I., †. MEUNIER, O. *, ☉ I.
DULAC, *, ☉ I.

Maitre de conférences honoraire

M. BONNET, *, ☉ I.

Professeurs

MM. SIRE, *, ☉ I., †, *Mécanique rationnelle et appliquée.*
LOCQUIN, *, ☉ I., *Chimie générale.*
LONGCHAMBON, *, †, ☉ I., †, *Minéralogie.*
DOUIN, *, †, ☉ I., *Botanique.*
SOLLAUD, ☉ I., *Zoologie.*
LEMARCHANDS, *, ☉ I., *Chimie minérale.*
ÉYRAUD, ☉ I., *Calcul différentiel et intégral.*
THORAL, ☉ A., *Géologie.*
LÉGAUT, ☉ A., *Mathématiques.*
THIBAUD, ☉ A., *Physique expérimentale.*
FROMAGEOT, ☉ I., *Chimie biologique.*
AUMÉRAS, ☉ I., *Chimie physique.*
DŒUVRE, ☉ I., *Chimie organique.*
N..., *Chimie industrielle.*
N..., *Physique générale.*
N..., *Physiologie générale.*

Maitres de conférences et Chargés de cours

MM. PRETTRE, *Chimie minérale.*
KÜHNER, *Botanique.*
DE LARAMBERGUE, *Zoologie.*

Chargés de cours complémentaires

MM. DUFAY, *Astronomie et Physique supérieure.*
VIRET, ☉ I., *Etude des roches.*
TRONCHET, ☉ A., *Botanique.*
PELOSSE, ☉ I., *Sériciculture.*
COLONGE, ☉ A., *Chimie générale.*

Secrétaire

M. ROUX, ☉ A.

A Monsieur ALBERT CAQUOT,

membre de l'Institut,

A Monsieur HENRI EYRAUD,
professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

A Monsieur CHARLES LEDOUX,
docteur ès-sciences,
président du jury d'admission
et répétiteur à l'École Polytechnique.

INTRODUCTION

Sous des forces progressivement croissantes, les corps solides, à un certain moment, se rompent ou s'écoulent. Les problèmes correspondant à l'écoulement constituent la théorie de la Plasticité, qui a reçu quelques développements dans deux cas.

Le premier cas est celui des équilibres limites des terres, cas étudié par Rankine, Maurice Lévy, Résal, Boussinesq et plus récemment par M. A. Caquot. Ces auteurs font connaître divers équilibres particuliers relatifs à des tranches planes.

Le second cas est celui des métaux ductiles parfaitement plastiques, cas examiné d'abord par B. de Saint-Venant et Maurice Lévy (à la suite des expériences de Tresca), repris par la suite par des savants allemands : Prandtl, Hencky, Prager, Geiringer. Les calculs de ces auteurs se basent malheureusement sur des hypothèses assez arbitraires au sujet des relations entre contraintes et vitesses de déformation. Seule la détermination des contraintes dans le cas des tranches planes est affranchie de ces hypothèses.

Nous nous proposons ici d'étudier les équilibres limites d'un matériau quelconque (sans écrouissage toutefois). Notre but n'est pas seulement la généralisation de résul-

8

tats connus dans l'un ou l'autre des cas précédents, mais encore une étude plus complète et nous indiquerons à ce titre des résultats nouveaux valables bien entendu dans les cas précédents. Pour la raison exposée ci-dessus, nous nous limiterons au calcul des contraintes dans les problèmes de tranches planes.

CHAPITRE PREMIER

EQUILIBRES RECIPROQUES.

CONDITIONS DETERMINANT

LES EQUILIBRES LIMITES.

NOTATIONS ET RAPPEL DE PROPRIÉTÉS CONCERNANT LES CONTRAINTES. — ν et τ sont les composantes normale (ν) et tangentielle ($\tau =$ cisaillement) de la contrainte appliquée à un élément de surface. Dans cette étude nous considérerons ν comme positif si cette composante est une pression : ceci revient à orienter positivement la normale vers l'intérieur de la couche de matière à laquelle la contrainte est appliquée.

Soit un trièdre trirectangle $oxyz$. — Les composantes des contraintes sur les éléments de surface dont les normales positives sont parallèles à ox , oy , oz , seront représentées par :

$$\begin{array}{ccc} \nu_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \nu_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \nu_z \end{array}$$

On sait que la mécanique fournit entre les contraintes les relations suivantes :

1° F_x, F_y, F_z étant les composantes de la force massique par unité de volume, on a :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - F_x = 0$$

et deux autres équations analogues, constituant les relations (A).

2° Le tableau des 9 quantités v_x, τ_{xy} , est symétrique.

D'où : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ et deux autres relations analogues, relations (B).

3° T_x, T_y, T_z étant les composantes de la contrainte sur l'élément de surface dont la normale a pour cosinus directeurs α, β, γ , on a :

$$T_x = \alpha v_x + \beta \tau_{yx} + \gamma \tau_{zx}$$

et deux autres relations analogues, relations (C).

Supposons que dans le milieu tous les points d'une même parallèle à Oz jouissent des mêmes propriétés et qu'en outre la contrainte sur un élément de surface perpendiculaire à Oz soit principale ($\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0, v_z = n_3$). On a alors un problème de *tranches planes*. Sur un élément de surface perpendiculaire au plan des tranches et dont la normale fait l'angle φ avec Ox , les composantes de la contrainte sont :

$$(C) \quad \begin{cases} T_x = v_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi \\ T_y = \tau_{xy} \cos \varphi + v_y \sin \varphi \end{cases} \quad (T_z = 0).$$

L'ensemble de ces contraintes en un point (« sollicitation » ou tenseur des contraintes dans le plan xy) est

donc défini par 3 quantités v_x , τ_{xy} , v_y entre lesquelles on a 2 équations fournies par la mécanique :

$$(A) \begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = F_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = F_y \end{cases}$$

On obtient facilement des équations analogues A' en axes obliques, en considérant l'équilibre d'un petit parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux axes :

$$(A') \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} = F_x \cos i \\ \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = F_y \cos i \end{cases}$$

p , t et t , q étant les composantes des contraintes sur les éléments parallèles à Oy et Ox ; F_x , F_y les composantes de la force massique par unité de volume (Fig. 1).

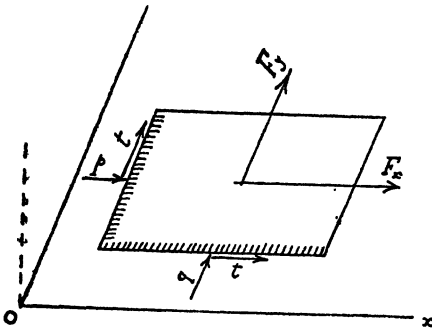


Figure 1

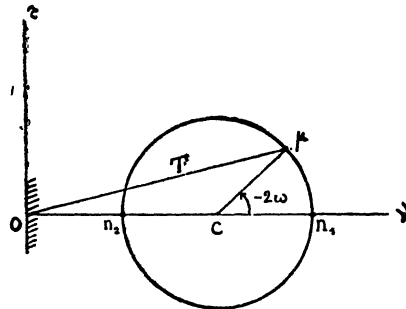


Figure 2

Rappelons qu'on appelle *éléments conjugués* 2 éléments tels que chacun d'eux contienne la contrainte appliquée sur l'autre.

Rappelons enfin que, pour représenter une sollicitation plane, on peut utiliser soit une conique directrice, soit le *cercle de Mohr et d'Ocagne*.

Ce cercle est le lieu de l'extrémité μ du vecteur contraint lorsqu'on rapporte ce vecteur aux axes constitués par la normale à l'élément de surface et la trace de cet élément sur le plan des tranches. On sait que lorsque l'élément tourne dans l'espace d'un angle ω (autour d'une parallèle à Oz), le point μ tourne autour du centre du cercle de d'Ocagne d'un angle double, mais en sens inverse.

DIAGRAMMES ASSOCIÉS. FONCTION D'AIRY. — Considérons en particulier le cas où il n'y a pas de forces massiques (dans l'hypothèse des tranches planes). Les forces de contact s'exerçant sur un contour formé ont alors une résultante nulle et un moment résultant nul. Il résulte immédiatement de là que les expressions des composantes de la force appliquée à un élément d'arc ds et de son moment par rapport à un point fixe sont des différentielles totales.

1° Soit dX , dY les composantes de la force appliquée à l'élément d'arc ds —, plus exactement à la couche de matière située à droite de cet arc pour un observateur regardant dans le sens de description de l'arc. On a :

$$dX = T_x ds = (v_x \cos \varphi + \tau_{xy} \sin \varphi) ds$$

Or : $ds \cos \varphi = dy$ $ds \sin \varphi = -dx$

$$\left. \begin{array}{l} \text{D'où : } dX = -\tau_{yx} dx + v_x dy \\ \text{et de même : } dY = -v_y dx + \tau_{xy} dy \end{array} \right\} (a)$$

On retrouverait les conditions A en exprimant que ces 2 expressions (a) sont des différentielles totales.

Les fonctions $X(x, y)$, $Y(x, y)$ définies à une constante près par les relations (a) sont les composantes d'un vecteur V (défini à un vecteur près) que j'appelle *vecteur intégrant*. Si l'on donne à tous les vecteurs intégrants une origine commune O , l'extrémité du vecteur V est un point variable $M(X, Y)$ que j'appelle point *associé* au point $m(x, y)$. La résultante des forces appliquées à un arc ab (couche de droite) est alors la différence géométrique des vecteurs intégrants en b et a , ou encore le vecteur AB joignant les 2 points associés.

A une figure (f) du plan xy correspond une figure ou *diagramme associé* (F) dans le plan XY : ce diagramme ⁽¹⁾ donne la force qui s'exerce sur n'importe quel arc de la figure f.

2° Soit dW le moment par rapport à l'origine, des forces appliquées à l'arc ds . On a :

$$(b) \quad dW = x dY - y dX$$

Cette expression doit être la différentielle totale d'une fonction $W(x, y)$. D'ailleurs :

$$x dY - y dX = d(xY - yX) - Y dx + X dy$$

L'expression :

$$(b') \quad X dy - Y dx = d(W - xY + yX)$$

est donc également une différentielle totale, soit dw en posant :

$$w(x, y) = W - xY + yX$$

On retrouverait, en exprimant ce fait, la condition B ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$).

La fonction $w(x, y)$ (scalaire axial) est définie à une

(1) Les diagrammes de Crémona utilisés au Statique Graphique sont une application particulière de cette représentation.

fonction linéaire près (X et Y étant définis à des constantes près).

De sa connaissance dérive celle du vecteur intégrant et celle de la distribution des contraintes, car :

$$(b'_1) \quad X = \frac{\partial w}{\partial y} \quad Y = - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial Y}{\partial y} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ v_y = - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

La fonction w est la fonction bien connue d'Airy, mais les considérations précédentes l'introduisent d'une façon tout à fait rationnelle.

Remarque : Les courbes $W = C^{te}$ sont telles que les forces de contact qui leur sont appliquées ont un moment nul par rapport à 0, donc sont dirigées suivant les rayons vecteurs. Réciproquement la contrainte sur un élément de rayon vecteur en un point est dirigée suivant la tangente à la courbe $W = C^{te}$ passant par ce point (directions conjuguées). Les courbes $W = C^{te}$ sont donc « conjuguées des rayons vecteurs ».

EQUILIBRES RÉCIPROQUES. — Si, sur les différents arcs ab d'un domaine (d) du plan xy on applique des forces représentées par les vecteurs AB du domaine associé (D) du plan XY , ces forces, par hypothèse, se font équilibre (en l'absence des forces massiques).

Réciproquement, sur les différents arcs AB du domaine (D), appliquons des forces représentées par les vecteurs

ab du domaine (d). Je dis que ces forces se font équilibre (en l'absence de forces massiques).

En effet, W étant supposé exprimé en fonction de X et Y , la relation (b) montre que :

$$(b_1) \quad x = \frac{\partial W}{\partial Y} \quad y = - \frac{\partial W}{\partial X}$$

Ces formules, réciproques des formules (b'_1) prouvent que, si dans le domaine D on prend pour fonction d'Airy $W(X, Y)$, le point associé au point M (de coordonnées XY) est m (de coordonnées xy).

L'intégrale des moments qui, dans l'équilibre initial, était :

$$W = w + xY - yX = w - x \frac{\partial w}{\partial x} - y \frac{\partial w}{\partial y}$$

devient pour l'équilibre associé :

$$W + Xy - Yx = W - X \frac{\partial W}{\partial X} - Y \frac{\partial W}{\partial Y} = w$$

Il y a donc réciprocity parfaite entre x, y, w d'une part, X, Y, W de l'autre. La transformation faisant passer d'un groupe de variable à l'autre est analogue à la transformation de Legendre à laquelle elle se ramène aisément ⁽¹⁾.

J'appelle *équilibres réciproques* les équilibres des 2 figures associées.

CONTRAINTES DANS LES ÉQUILIBRES RÉCIPROQUES. — Soit dm un arc élémentaire du plan xy , dM l'arc associé. Dans le premier équilibre la force qui s'exerce sur l'arc

(1) Par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de Oz , suivie d'une symétrie par rapport au plan $z = 0$.

dm est \overline{dM} ⁽¹⁾. La contrainte est donc parallèle à l'élément dM , de même sens, et égale à :

$$p = \frac{dM}{dm}$$

Dans l'équilibre réciproque la force qui s'exerce sur l'arc dM est \overline{dm} . La contrainte est donc parallèle à l'élément \overline{dm} , de même sens et égale à :

$$P = \frac{dm}{dM} = \frac{1}{p}$$

Ainsi sur 2 éléments associés les contraintes sont de grandeurs inverses, de signes contraires (voir fig. 3) et leurs directions sont 2 directions conjuguées (dans l'une ou l'autre des 2 sollicitations).

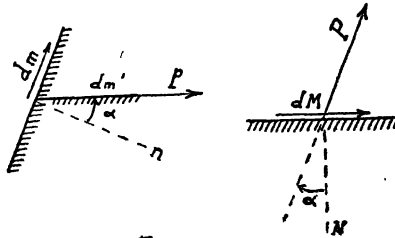


Figure 3

Il en résulte qu'à un élément dm « principal » (ou isostatique) correspond un élément dM principal et que les contraintes principales correspondantes n_1, N_1 sont inverses et de signes contraires.

A une ligne isostatique du plan xy correspond donc une ligne isostatique du plan XY , l'isostatique tangente à la plus forte contrainte (en valeur absolue) dans le premier

(2) Le trait surmontant dM indique qu'il s'agit d'un vecteur.

équilibre correspondant à l'isostatique tangente à la plus faible contrainte (en valeur absolue) dans le second.

Dans la représentation de Mohr les 2 contraintes (Op et OP) font avec la normale Ov des angles égaux et de sens contraire (d'après la fig. 3). De plus elles sont de signes contraires et de grandeurs inverses. *Les 2 cercles de Mohr sont donc inverses l'un de l'autre par rapport à l'origine avec la puissance -1 (fig. 4).*

Soit dm' l'élément conjugué de dm dans le premier équilibre. Il est parallèle à l'élément dM . Il est soumis à une pression p' qui, étant parallèle à dm est parallèle à la contrainte P sur dM . Enfin les points représentatifs

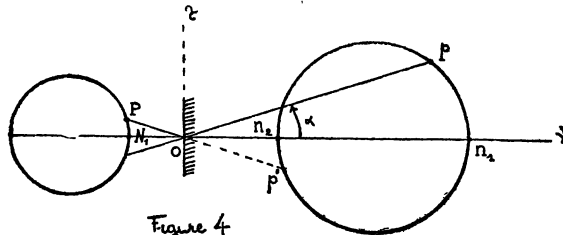


Figure 4

p' et P de ces 2 contraintes, sur le diagramme de Mohr, sont homothétiques par rapport à O :

$$\frac{Op'}{OP} = C^{te} = -\frac{N_1}{n_2} = -\frac{1}{n_1 n_2}$$

Donc : sur 2 éléments parallèles en 2 points associés dans les 2 équilibres, les contraintes sont parallèles et dans un rapport constant (dépendant du couple de points considéré); autrement dit *les coniques directrices sont homothétiques.*

Remarque : Sans rien changer aux figures associées, on

peut faire en sorte que sur les 2 éléments associés les contraintes soient, non pas de signes contraires, mais de même signe. Il suffit d'admettre pour les 2 figures des conventions différentes relativement au choix de la couche chargée. Si le vecteur AB représente la force appliquée sur la couche située à droite de l'arc ab (décrit de a vers b), le vecteur ab représentera la force appliquée sur la couche située à gauche de l'arc AB. Nous adopterons désormais cette convention : dès lors les cercles de Mohr dans les 2 équilibres sont inverses par rapport à l'origine avec la puissance $+ 1$.

CONDITION D'ÉCOULEMENT. — Les calculs que nous avons en vue sont relatifs aux déformations plastiques des solides. Ces déformations se produisent lorsque les contraintes atteignent une certaine limite dite « *limite d'écoulement* ». En général la résistance à la déformation augmente avec la déformation déjà subie : c'est l'*écrouissage*.

Nous nous bornerons ici à envisager des déformations sans écrouissage. En outre, le matériau sera supposé homogène et isotrope.

Dans ces conditions la limite d'écoulement dépend seulement, pour un matériau donné, des valeurs des 3 contraintes principales. Elle se traduit par une relation :

$$F(n_1, n_2, n_3) = 0$$

entre ces 3 contraintes. C'est la *condition d'écoulement*.

D'après Mohr, la contrainte principale intermédiaire n_3 n'interviendrait pas dans cette relation, qui se réduirait donc à :

$$f(n_1, n_2) = 0$$

Ce n'est là qu'une approximation, les expériences de W. Lode d'une part, de Ros et Eichinger d'autre part, ayant mis en évidence l'influence de la contrainte intermédiaire.

La condition de Mohr s'applique bien aux terres pour lesquelles la relation $f = 0$ est linéaire :

$$n_2 = j n_1 - \omega \quad j < 1$$

n_2 étant la contrainte principale minima. Elle équivaut à la condition posée par *Coulomb* :

$$\tau \leq (\nu + H) \operatorname{tg} \varphi$$

On a :

$$j = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad \omega = H(1 - j)$$

H et par suite ω sont nuls pour une terre pulvérulente.

Dans le cas des métaux ductiles, *Tresca* puis *Guest* ont donné la condition :

$$n_1 - n_2 = C^{\text{te}} = \omega$$

qui est de la même forme que la précédente avec $j = 1$.

EQUILIBRES LIMITES. — Nous envisagerons un écoulement infiniment lent. Alors pour tous les points de la région qui est sur le point de se déformer la condition $F = 0$ est strictement satisfaite. Cette région est dite en *équilibre limite*. On remarquera que, pour qu'un corps s'écoule, il n'est pas nécessaire que tout le corps soit en équilibre limite; certaines zones peuvent être encore en équilibre « *surabondant* » ($F \neq 0$); elles ne subissent pas de déformation mais seulement un déplacement d'ensemble. Pratiquement on se trouve donc le plus souvent en présence d'équilibres *mixtes*: limites dans une partie,

surabondants dans le reste du corps. Mais nous nous limiterons ici à l'étude des équilibres limites.

NON DÉTERMINATION DANS LE CAS GÉNÉRAL D'UN ÉQUILIBRE LIMITE PAR LA SEULE CONSIDÉRATION DES FORCES APPLIQUÉES. NÉCESSITÉ DE TENIR COMPTE DES CONDITIONS DE L'ÉCOULEMENT ULTÉRIEUR. — Essayons de déterminer un équilibre limite d'un domaine connaissant les forces appliquées à la surface et dans la masse (ces forces réalisant d'ailleurs entre elles certaines relations qui rendent l'équilibre possible et limite). Nous avons en chaque point 6 quantités inconnues : $v_x, v_y, v_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$, soit 6 fonctions inconnues de x, y, z entre lesquelles existent seulement 4 équations indéfinies : les 3 équations A et la condition d'écoulement — et certaines conditions à la limite telles que les conditions C appliquées aux contraintes à la surface lorsque les 3 composantes de celles-ci sont données (ce qui n'est possible que sur une portion de la surface). *Par la seule considération des forces appliquées à l'instant où a lieu l'équilibre limite, le problème reste donc indéterminé.*

On obtiendra par contre le nombre voulu d'équations indéfinies, si l'on prend en considération l'écoulement ultérieur, c'est-à-dire l'écoulement qui se substituerait à l'équilibre limite après une très petite modification (de sens convenable) des forces appliquées. Dans cet écoulement les contraintes sont liées aux déformations ou aux vitesses de déformation. Quelle que soit la forme de ces relations, elles permettent d'exprimer les contraintes, entre lesquelles n'existent plus que 3 équations indéfinies

A (la condition d'écoulement n'étant plus exactement vérifiée) au moyen des dérivées de 3 fonctions des coordonnées, savoir les 3 composantes u , v , w du déplacement. Dès lors le problème est déterminé si l'on tient compte des conditions à la limite relatives à l'écoulement.

Ces conditions à la limite, au nombre de 3 en chaque point, peuvent concerner les contraintes, ou les déplacements (ou vitesses de déplacement), ou faire intervenir simultanément contraintes et déplacements. Ces conditions sont donc plus nombreuses que celles qui résulteraient de la seule considération des forces dans l'équilibre limite, et ceci même lorsqu'il s'agit des contraintes à la surface. En effet dans l'équilibre limite il doit exister entre les contraintes, d'une fraction à l'autre du contour, certaines relations qui restreignent l'arbitraire. Dans l'écoulement ultérieur, ces relations n'ont plus à être satisfaites. Sans doute puisque nous considérons un écoulement extrêmement lent faisant suite à l'équilibre limite, les relations en question sont-elles presque satisfaites. Mais elles ne le sont pas exactement et le très faible écart qui existe joue un rôle déterminant. Nous devons donc prendre en considération, non seulement les contraintes lors de l'équilibre limite, mais encore les très petites modifications de ces contraintes à partir de l'équilibre limite.

En résumé *la considération de l'écoulement ultérieur fournit :*

- 1° *des équations indéfinies nouvelles;*
- 2° *des conditions à la limite nouvelles.*

Les unes comme les autres *indispensables pour déterminer l'équilibre limite.*

CAS DES TRANCHES PLANES. — Dans ce cas — et lorsque les conditions à la limite concernent uniquement les contraintes — la considération de l'écoulement ultérieur n'intervient, dans le calcul des contraintes, que pour fournir un renseignement *qualitatif*.

Nous allons montrer, en effet, que, *par la seule considération des forces appliquées, on obtient un nombre suffisant d'équations indéfinies*. Seules les conditions à la limite exigent donc que l'on tienne compte de l'écoulement ultérieur. Si de plus ces conditions concernent uniquement les contraintes, on n'aura à considérer l'écoulement que pour trancher entre deux hypothèses dans lesquelles les sens d'écoulement sont différents. Cette réserve faite, on peut donc dire que l'équilibre limite est déterminé par la connaissance des contraintes sur le contour limite.

On rencontre pratiquement 2 types de problèmes de tranches planes :

1° Sollicitation plane. — La contrainte principale n_3 perpendiculaire aux tranches est nulle. C'est le cas d'une tranche mince non chargée sur ses deux faces planes.

2° Déformation plane. — La dilatation principale e_3 dans le sens perpendiculaire aux tranches est nulle. C'est le cas d'un cylindre indéfini soumis sur sa surface latérale et dans sa masse à des forces parallèles au plan de section droite (indépendantes de la section envisagée).

Dans ces 2 cas la contrainte principale n_3 peut être éliminée de la condition d'écoulement, qui prend ainsi la forme :

$$f(n_1, n_2) = 0$$

En effet, dans le premier cas n_3 est nul; dans le second, la condition $e_3 = 0$ implique, quelle que soit la forme des contraintes et déformations (ou vitesses de déformation), une relation entre n_1 , n_2 , n_3 qui permet d'éliminer n_3 de la condition d'écoulement.

On remarquera que l'on est conduit au même résultat quel que soit le type de problème envisagé, si l'on accepte pour la condition d'écoulement la forme de Mohr et si n_3 est la contrainte principale intermédiaire.

Ceci posé, la sollicitation dans le plan des tranches est définie par 3 quantités, par exemple : v_x , τ_{xy} , v_y ou encore les 2 contraintes principales n_1 , n_2 contenues dans le plan des tranches et l'angle θ que fait la contrainte maxima n_1 avec Ox — soit 3 fonctions inconnues de x et y , entre lesquelles existent trois équations indéfinies : les 2 équations mécaniques A et la condition d'écoulement $f = 0$.

Supposons en outre que les conditions à la limite concernent uniquement les contraintes : alors le calcul des contraintes est possible, sans que l'on ait à faire intervenir les déplacements. C'est ce problème qui fait l'objet de ce mémoire.

Toutefois, ce que nous venons de dire au sujet des conditions à la limite appelle deux réserves importantes par lesquelles se rétablit l'accord avec les principes énoncés dans le cas général des distributions à 3 dimensions.

1°) Dans un grand nombre de problèmes pratiques, les conditions à la limite ne concernent pas uniquement les contraintes; certaines conditions concernent les déplacements.

Exemple : une partie du contour du domaine plastique est en contact avec une paroi rigide, fixe ou mobile et il n'y a pas glissement. Le déplacement d'un point de la masse plastique en contact avec la paroi doit alors être le même que le déplacement du point de la paroi avec lequel il coïncide. Ce cas se rencontre dans un grand nombre de problèmes (poinçonnage — fondations — poussée sur un mur de soutènement, etc...).

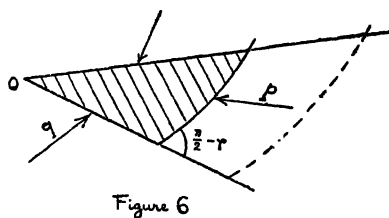
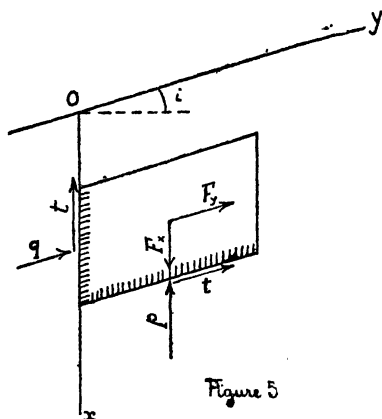
Pour tenir compte de telles conditions, le calcul des déplacements est nécessaire. La solution du problème des contraintes est donc, dans de pareils cas, intimement liée à celle du problème des déplacements : ces 2 problèmes forment un problème d'ensemble, indivisible, comme cela avait lieu dans le cas des distributions à 3 dimensions.

2°) Même lorsque les conditions à la limite ne concernent que les contraintes, la séparation des 2 problèmes n'est pas absolue. En effet nous verrons que lorsqu'on donne la contrainte sur un élément de contour, deux hypothèses sont possibles pour le tenseur correspondant ; elles correspondent à deux équilibres limites différents pour lesquels les sens des déplacements sont différents. Considérons par exemple l'équilibre limite d'une couche comprise entre 2 cylindres coaxiaux, soumis tous deux à des contraintes normales et uniformes. Soit donnée la contrainte sur le cylindre intérieur : c'est une contrainte principale ; mais ce peut être la contrainte principale maxima ou la contrainte principale minima. A ces 2 hypothèses correspondent 2 hypothèses sur le sens de l'écoulement qui peut être centrifuge ou centripète.

Pour choisir entre les 2 hypothèses possibles du problème des contraintes, on est donc amené à examiner les solutions correspondantes du problème des déformations. On peut heureusement se contenter souvent d'un examen sommaire portant sur le sens des déplacements relatifs des différentes parties du contour — en tenant compte du fait suivant : il y a contraction suivant la direction de la contrainte (pression) principale maxima et dilatation dans la direction de la contrainte principale minima.

Nous nous limiterons dans cette étude au calcul des contraintes sans prendre en considération les déplacements. Nous retiendrons de ce qui précède que la théorie ainsi établie n'est pas complètement suffisante pour résoudre les problèmes pratiques.

RAPPEL DE QUELQUES ÉQUILIBRES LIMITES CONNUS PAR VOIE ÉLÉMENTAIRE. — 1°) *Equilibres de Rankine et Mau-*



rice Lévy (V) ⁽¹⁾. — Ce sont les équilibres dans lesquels, sur des droites parallèles à une direction fixe, la sollicitation reste invariable en grandeur et direction. Utilisons 2 axes obliques, Oy étant parallèle aux droites envisagées. Les dérivées par rapport à y étant nulles par hypothèse, les équations A' fournissent les composantes p , t de la contrainte sur un élément parallèle à Oy :

$$p = \cos i \int F_x dx$$

$$t = \cos i \int F_y dy$$

(F_x , F_y doivent, d'après cela, être indépendants de y).

p et t étant connus, la condition d'écoulement donne q et par conséquent la sollicitation est déterminée. Conformément à la remarque 2° du paragraphe précédent, il y a pour q deux solutions possibles, correspondant à 2 écoulements de sens opposés.

Dans le cas où il n'y a pas de force massique, p , t et par suite q sont constants : la sollicitation est invariable en grandeur et en direction dans tout l'espace. L'équilibre est « homogène ».

Dans le cas de la pesanteur, Ox étant la verticale descendante, on a : $F_x = \Delta$ (poids spécifique), $F_y = 0$. D'où :

$$p = \Delta x \cos i + C^{te} \qquad t = C^{te}$$

Si t est nul à la surface limite (c'est le cas d'un massif limité par une parallèle à Oy et qui ne supporte aucune charge sur cette parallèle), il reste nul dans tout l'espace, q et p sont alors 2 contraintes conjuguées.

(1) Les numéros en chiffres romains renvoient à l'index bibliographique.

2°) *Equilibre de M. Caquot*, pour une terre pulvérulente (V). — C'est l'équilibre où les courbes conjuguées^s des rayons vecteurs issus d'un point O sont des spirales logarithmiques homothétiques d'inclinaison $\frac{\pi}{2} - \varphi$ sur les rayons vecteurs. Les contraintes conjuguées p et q s'exerçant respectivement sur les spirales et sur les rayons sont égales.

Le long d'un rayon vecteur, p reste constant; par suite la sollicitation reste constante en grandeur et direction.

Le long d'une spirale le produit pr^2 (ω , r étant les coordonnées polaires de pôle O) reste constant. On en déduit la relation :

$$p e^{\varepsilon 2\omega \operatorname{tg} \varphi} = \text{Cte}$$

valable dans tout l'espace, le signe de ε ($= \pm 1$) dépend du sens d'enroulement des spirales.

Nous généraliserons au chapitre III ce type d'équilibre à un matériau quelconque.

Résal a envisagé un équilibre analogue dans le cas d'une terre pulvérulente *pesante*, mais le calcul n'est possible que par approximations.

3°) *Equilibre d'une couche cylindrique*. — L'équilibre d'une couche comprise entre deux cylindres coaxiaux, soumis tous deux à des contraintes normales et uniformes, s'étudie aisément en écrivant les équations d'équilibre en coordonnées polaires. Les contraintes p sur les cercles et q sur les rayons sont principales.

On trouvera par exemple dans le cas d'une terre pulv erulente :

$$p = \lambda r^{k-1}$$

$k = \frac{q}{p}$ étant le rapport des 2 contraintes principales.

Si p est contrainte maxima : $k = j = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$

Si p est contrainte minima : $k = \frac{1}{j}$

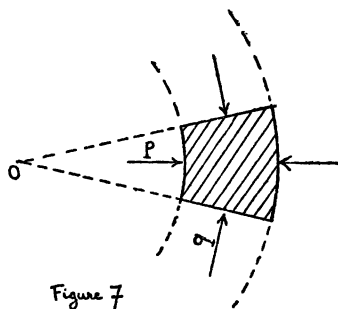


Figure 7

CHAPITRE II

PROPRIETES GENERALES DES EQUILIBRES LIMITES. LIGNES MARGINALÈS.

COURBE INTRINSÈQUE. — ÉLÉMENTS MARGINAUX. — Il nous sera commode de traduire la condition d'écoulement: $f(n_1, n_2) = 0$ dans la représentation de Mohr (coordonnées $v\tau$). Si l'on tient compte de la condition d'écoulement, le cercle de Mohr (dont le diamètre horizontal a pour extrémités les points $v = n_1$ et $v = n_2$ de l'axe Ov) ne dépend plus que d'un paramètre. Il possède donc une enveloppe (à priori réelle ou imaginaire), symétrique par rapport à Ov , que nous appellerons la *courbe intrinsèque* (C. I.).

On sait que la forme proposée par Mohr pour la condition d'écoulement se déduit de la considération d'une courbe analogue qui est réelle; l'expérience montre que cette courbe a l'allure de celle de la figure 8. Nous admettons donc que la C. I. est réelle et, quand il y aura lieu de le préciser, nous supposerons $|\tau|$ fonction croissante de v et $|\frac{d\tau}{dv}|$ fonction décroissante ou du moins non croissante de v .

La C. I. partage le plan $\nu\tau$ en 2 régions : nous appellerons intérieure de la C. I. la région qui contient les cercles de Mohr. C'est dans cette région que doivent se trouver les extrémités des vecteurs contraintes.

Le cercle de Mohr touche la C. I. en 2 points U et V (symétriques par rapport à Ov). A ces 2 points correspondent 2 éléments de surface de traces Mu et Mv . J'appelle éléments *marginiaux* ⁽¹⁾ ces éléments, contraintes

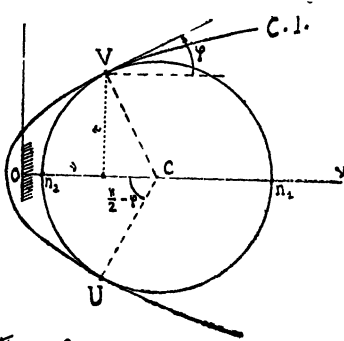


Figure 8

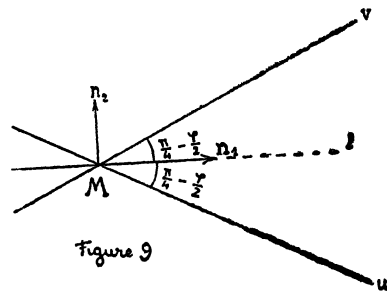


Figure 9

marginales les contraintes qu'ils supportent, lignes marginales les lignes qu'ils enveloppent dans le plan. Par chaque point de l'espace passent deux lignes marginales (ligne u , ligne v); ces lignes forment donc 2 familles constituant un réseau.

Soit φ l'angle avec Ov de la branche supérieure de la C. I. en V. Les angles des éléments Mu , Mv avec l'élé-

(1) Selon la théorie de Mohr, la déformation plastique s'effectue par glissements suivant ces éléments.

ment isostatique MI qui supporte la contrainte principale minima n_2 sont respectivement :

$$- \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad \text{et} \quad + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

car les angles au centre du cercle de Mohr $\widehat{n_2 CU}$ et $\widehat{n_2 CV}$ valent $+ \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$ et $- \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$

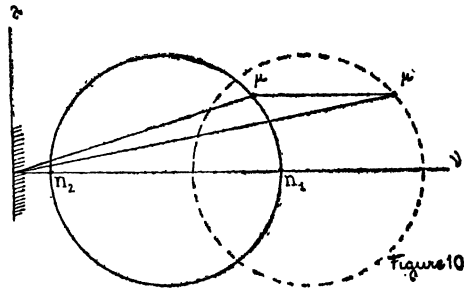
Désormais ν et τ désigneront les composantes normale et tangentielle des contraintes marginales, c'est-à-dire les coordonnées de V dans la représentation de Mohr.

Les éléments compris dans l'angle aigu Mu , Mv sont soumis à des contraintes dont les extrémités se trouvent sur l'arc $U n_2 V$: nous appellerons ces contraintes, contraintes, « mineures », ces éléments, éléments mineurs. Les éléments compris dans l'angle obtus supplémentaire du précédent sont soumis à des contraintes dont les extrémités se trouvent sur l'arc $V n_1 U$: nous appellerons ces contraintes contraintes majeures, ces éléments éléments majeurs.

Nous désignerons par *nature* d'une contrainte (ou d'un élément) sa qualité majeure ou mineure.

TRANSFORMATIONS SUR LES ÉQUILIBRES LIMITES. — 1°) *Translation de la C. I.* — Augmentons toutes les sollicitations d'une sollicitation isotrope ω constante. Une contrainte $\overline{O\mu}$ devient ainsi $\overline{O\mu'}$ ($\mu\mu' = \omega$) (fig. 10). Les équations mécaniques A restent vérifiées. D'autre part tous les cercles de Mohr subissent la même translation ω . On obtient donc un équilibre limite correspondant à une C. I. déduite de la C. I. initiale par la translation ω suivant Ov .

Dans le cas d'une C. I. rectiligne (terres), par une translation $\omega = H$ telle que le sommet de la courbe soit amené en O, on se ramène à l'équilibre limite d'une terre



pulvérulente : c'est le théorème des états correspondants de M. Caquot (V).

2°) *Homothétie dans l'espace.* — En multipliant toutes les dimensions dans le plan des tranches par un facteur constant λ , les contraintes restant les mêmes en 2 points homologues, on passe d'un premier équilibre limite à un autre équilibre limite correspondant à la même C. I., mais à des forces massiques divisées par λ .

3°) *Homothétie sur la C. I.* — En multipliant toutes les contraintes par λ , on passe d'un premier équilibre limite à un autre équilibre limite correspondant à des forces massiques multipliées par λ et à une C. I. homothétique de la C. I. initiale par rapport à l'origine dans le rapport λ .

En combinant les 2 homothéties précédentes, c'est-à-dire en multipliant simultanément contraintes et dimensions

par λ , les forces massiques ne sont pas modifiées et la C. I. subit une homothétie de rapport λ .

4°) *Inversion de la C. I.* — Considérons, dans le cas où il n'y a pas de forces massiques, l'équilibre réciproque d'un premier équilibre limite. Dans ce deuxième équilibre les cercles de Mohr sont inverses par rapport à l'origine des cercles de l'équilibre initial (puissance = 1). Ce nouvel équilibre est donc encore limite mais correspond à une C. I. inverse par rapport à O de la C. I. initiale. Les points représentatifs (sur les cercles) de 2 éléments réciproques se correspondent par inversion suivie de symétrie par rapport à Ov. Il en résulte que les éléments marginaux et par suite *les lignes marginales, se correspondent dans les 2 équilibres, mais avec échange des familles* : à une ligne u correspondra une ligne v .

On remarquera qu'une C. I. rectiligne ayant son sommet à l'origine O (milieu pulvérulent) n'est modifiée ni par homothétie ni par inversion par rapport à O. Les équilibres déduits par les transformations 2, 3 et 4 s'appliquent alors au même matériau que l'équilibre initial.

Equations de l'équilibre plastique. — Lorsqu'on tient compte de la condition d'écoulement: $f(n_1, n_2) = 0$ la sollicitation dans le plan xy ne dépend plus que de 2 quantités. Entre ces 2 quantités, les 2 équations mécaniques A établissent 2 relations, qui sont deux équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre, linéaires par rapport à ces dérivées.

L'une des quantités fixe l'orientation de la sollicitation (nous désignons par là l'orientation de la contrainte

principale majeure n_1); ce sera par exemple l'angle :
 $\Theta = (Ox, n_1)$.

L'autre quantité fixe la grandeur de la sollicitation; ce sera un paramètre quelconque fixant la position du cercle de Mohr ou encore celle du point V sur la C. I. Nous choisirons un paramètre qui simplifie au maximum les équations et qui reste invariant dans les transformations indiquées plus haut. n_1, n_2, ν, τ sont fonctions de cet unique paramètre.

Les équations A introduisent les dérivées de ν_x, τ_{xy}, ν_y . Or on a (en considérant le cercle de Mohr) :

$$\begin{aligned} \nu_x &= \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_1 - n_2}{2} \cos 2\Theta \\ \tau_{xy} &= \frac{n_1 - n_2}{2} \sin 2\Theta \\ \nu_y &= \frac{n_1 + n_2}{2} - \frac{n_1 - n_2}{2} \cos 2\Theta \\ \frac{n_1 + n_2}{2} &= \nu + \tau \operatorname{tg} \varphi & \frac{n_1 - n_2}{2} &= \frac{\tau}{\cos \varphi} \\ d \left(\frac{n_1 + n_2}{2} \right) &= d\nu + \operatorname{tg} \varphi d\tau + \frac{\tau}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{\cos \varphi}{\cos^2 \varphi} (d\nu + \tau d\varphi) \\ d \left(\frac{n_1 + n_2}{2} \right) &= \frac{d\tau}{\cos \varphi} + \frac{\tau \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} (d\nu + \tau d\varphi) \end{aligned}$$

Posons alors :

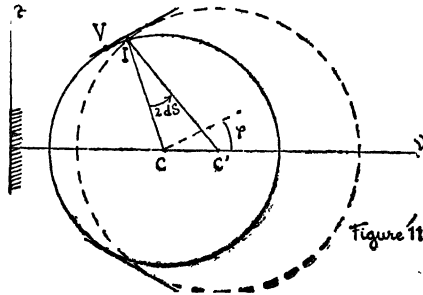
$$2 dS = \frac{d\nu + \tau d\varphi}{\tau}$$

ou :

$$S = \frac{1}{2} \int \frac{d\nu}{\tau} + d\varphi$$

(intégrale effectuée le long de la C. I. jusqu'au point V). Nous définissons ainsi (à une constante près) un paramètre sans dimensions S qui simplifie les équations et

jouit des propriétés suivantes : *il se conserve dans une translation ou une homothétie de la C. I.; il se conserve mais avec changement de signe, dans une inversion de la C. I.* Pour le démontrer on peut observer que $2dS$ repré-



sente l'angle sous lequel se coupent en I , près de V , deux cercles de Mohr infiniment voisins, car on a (fig. 11) :

$$CIC' = \frac{CC' \cos \varphi}{IC} = d \left(\frac{n_1 + n_2}{2} \right) \frac{\cos^2 \varphi}{\tau} = \frac{dv + \tau d\varphi}{\tau}$$

Une translation et une homothétie ne changent pas cet angle; une inversion change son sens.

Adoptons ce paramètre S pour définir la grandeur de la contrainte, les équations A deviennent :

$$A_1 \left\{ \begin{array}{l} (1 + \sin \varphi \cos 2\Theta) \frac{\partial S}{\partial x} + \sin \varphi \cos \Theta \frac{\partial S}{\partial y} - \\ \cos \varphi \sin 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \cos \varphi \cos 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y} - X \frac{\cos^2 \varphi}{2\tau} = 0 \\ \sin \varphi \sin 2\Theta \frac{\partial S}{\partial x} + (1 - \sin \varphi \cos 2\Theta) \frac{\partial S}{\partial y} + \\ \cos \varphi \cos 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \cos \varphi \sin 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y} - Y \frac{\cos^2 \varphi}{2\tau} = 0 \end{array} \right.$$

équations où S et Θ sont les fonctions inconnues de x et y , φ et τ étant 2 fonctions de S fournies par la connaissance de la C. I.

LIGNES CARACTÉRISTIQUES D'UN SYSTÈME DE 2 ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU 1^{er} ORDRE, LINÉAIRES. — Envisageons un système de 2 équations :

$$(1) \quad \begin{cases} a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + d \frac{\partial \eta}{\partial y} - e = 0 \\ a' \frac{\partial \xi}{\partial x} + b' \frac{\partial \xi}{\partial y} + c' \frac{\partial \eta}{\partial x} + d' \frac{\partial \eta}{\partial y} - e' = 0 \end{cases}$$

où $a, b, c, d, e, a', b', c', d', e'$ sont des fonctions des 2 variables x, y et des 2 fonctions inconnues ξ, η .

Proposons-nous de résoudre pour ce système le problème de Cauchy, qui consiste à déterminer des fonctions $\xi(x, y), \eta(x, y)$ continues ainsi que leurs dérivées premières, qui prennent sur une courbe donnée C du plan xy des valeurs données (ou encore à déterminer dans l'espace à 4 dimensions xy, ξ, η , une variété à 2 dimensions passant par une courbe donnée). A cet effet appliquons la méthode du développement en série.

ξ, η étant connus en C, on les connaîtra aussi en des points infiniment voisins si l'on peut calculer en tout point de C les 4 dérivées partielles $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}$. On a pour cela, en plus des 2 équations (1), deux équations fournies par la connaissance des variations de ξ et η le long de C :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy = d\xi \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy = d\eta \end{cases}$$

les d désignant les variations le long de C.

Ces 4 équations déterminent en général les 4 dérivées partielles. Toutefois il y a exception si le déterminant

des équations (1) et (2) s'annule, ce qui donne la condition :

$$(3) \quad (ca' - ac') dy^2 + (bc' - cb' + ad' - da') dx dy + (db' - bd') dx^2 = 0$$

Pour une ligne C vérifiant cette condition (3) le problème de Cauchy est en général impossible, les équations (1) et (2) étant incompatibles.

Mais ces équations deviennent compatibles si une certaine condition supplémentaire (4) est vérifiée par les données $\xi\eta$. Par exemple, en supposant différent de zéro le mineur formé par les 3 premières lignes et les 3 premières colonnes du déterminant des équations (1) et (2), on a la condition :

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a & b & c & e \\ b' & b' & c' & e' \\ dx & dy & 0 & d\xi \\ 0 & 0 & dx & d\eta \end{vmatrix} = 0$$

Dans ce cas il y a une infinité de solutions et la ligne est appelée une *ligne caractéristique* de système (1).

Plus exactement nous désignerons par lignes caractéristiques les lignes de l'espace à 4 dimensions (x, y, ξ, η) qui vérifient les équations (3) et (4).

Toute variété à 2 dimensions intégrale du système (1) est un lieu de caractéristiques. Par chaque point de cette variété passent deux lignes caractéristiques déterminées par l'équation (3) (réelles ou imaginaires). Soit :

$$u(x, y) = C^{te} \quad \text{et} \quad v(x, y) = C^{te}$$

les lignes caractéristiques des 2 familles. Si on les prend comme lignes de référence, c'est-à-dire si l'on effectue le changement de variables $x, y \rightarrow u, v$ on constate aisément

que le système (1) se ramène à la forme simplifiée :

$$(1') \left\{ \begin{array}{l} \alpha \frac{\partial \xi}{\partial u} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial u} - \epsilon = 0 \\ \alpha' \frac{\partial \xi}{\partial v} + \beta' \frac{\partial \eta}{\partial v} - \epsilon' = 0 \end{array} \right.$$

$\alpha, \beta, \epsilon, \alpha', \beta', \epsilon'$ fonctions de u, v, ξ, η .

Sous cette forme les propriétés des lignes caractéristiques sont en évidence. Soit par exemple une ligne $v = C^{st}$.

1°) Le long de cette ligne les données ξ, η ne sont pas arbitraires car elles sont liées par la 1^{re} équation (1').

2°) Ces données ne déterminent pas la solution du système car on n'a entre les dérivées $\frac{\partial}{\partial v}$ que la 2^e équation (1').

LIGNES CARACTÉRISTIQUES DU SYSTÈME A_1 . — Ecrivant l'équation (3) dans le cas du système A_1 nous obtenons :

$$\frac{(\sin \varphi + \cos 2\Theta) dy^2 - 2 \sin 2\Theta dx dy + (\sin \varphi - \cos 2\Theta) dx^2}{(\sin \varphi - \cos 2\Theta) dx^2} = 0$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2\Theta + \epsilon \cos \varphi}{\cos 2\Theta + \sin \varphi} = \operatorname{tg} \left[\Theta + \epsilon \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

$$\epsilon = \pm 1$$

Ce résultat montre que, pour une solution déterminée, les lignes caractéristiques coïncident avec les lignes marginales.

L'équation (4) montre que le long d'une ligne marginale il existe une relation (*relation marginale*) entre les variations de S et Θ . Cette relation est simple et s'intègre

lorsqu'il n'y a pas de force massique. En développant le déterminant (4) on obtient en effet :

$$- dS \cos \varphi + d\Theta \left[\sin 2\Theta - \frac{dy}{dx} (\cos 2\Theta + \sin \varphi) \right] = 0$$

ou, en tenant compte de la valeur de $\frac{dy}{dx}$:

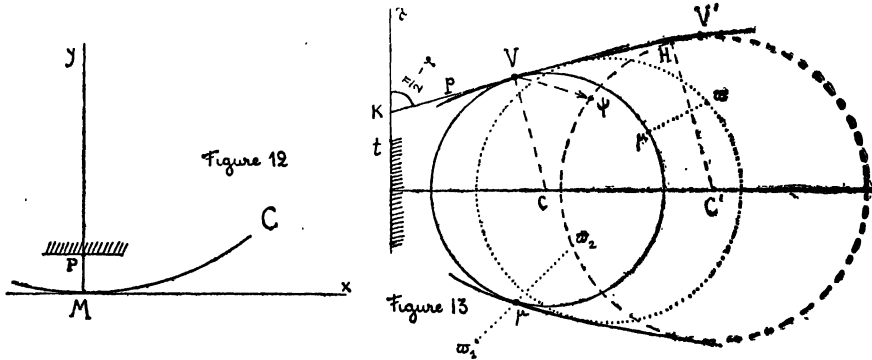
$$dS + \varepsilon d\Theta = 0$$

d'où :

$$S + \varepsilon\Theta = C^te$$

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE. — Cette propriété fondamentale des lignes marginales d'être lignes caractéristiques tient à ce que les points U et V correspondant aux éléments marginaux sont sur l'enveloppe des cercles de Mohr.

Raisonnons directement sur le système des équations A et de la condition d'écoulement. Résoudre le problème de Cauchy pour ce système, c'est trouver des fonctions $v_x(x, y)$, τ_{xy} , v_y , continues ainsi que leurs dérivées premières, satisfaisant aux 3 équations précédentes et pre-



nant sur une courbe C des valeurs données. Appliquons la méthode du développement en série : soit P un point

infinitement voisin de C. Les équations mécaniques A nous feront connaître la contrainte sur l'élément parallèle à la courbe C en P; puis la condition d'écoulement achèvera de déterminer la sollicitation en P.

En effet, de P abaissons la normale PM sur C; prenons-la comme axe des y , l'axe des x étant la tangente en M à C. Les $\frac{\partial}{\partial x}$ étant connues en M (d'après les données sur C), les équations A fournissent :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

Soit (fig. 13) $\mu (v_y, -\tau_{xy})$ le point représentatif de la contrainte sur l'élément tangent à la courbe C en M; $\overline{\mu\omega}$ un vecteur de composantes : $\frac{\partial v_y}{\partial y} \text{ MP}, -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \text{ MP}$. ω est le point représentatif de la contrainte sur l'élément parallèle à C en P. Le cercle de Mohr du point P est alors en général parfaitement déterminé par les conditions :

1°) de passer par ω ; 2°) d'être tangent à la C. I. (et d'avoir son centre sur Ov); 3°) d'être infinitement voisin du cercle de Mohr du point M.

Toutefois ce résultat est en défaut si le point μ est sur la C. I., c'est-à-dire si l'élément Mx est marginal. Examinons ce cas :

1°) Si les données sur C sont arbitraires, c'est-à-dire si $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ et $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$ ont des valeurs quelconques, le vecteur $\overline{\mu\omega}$ a une direction quelconque. Envisageons alors 2 points P_1 et P_2 situés de part et d'autre de C; il leur correspond 2 points ω_1, ω_2 situés de part et d'autre de la C. I.

(fig. 13). Par le point ω_1 qui est extérieur à la C. I. on ne peut mener aucun cercle tangent à la C. I. Par le point ω_2 qui est intérieur à la C. I. on peut mener 2 cercles tangents à la C. I.; mais les 2 solutions correspondantes sont discontinues au point M. On remarque en effet qu'un déplacement infiniment petit du cercle de Mohr correspond à un vecteur $\mu\omega_2$ infiniment petit du second ordre (à moins que ce vecteur ne soit dirigé suivant la tangente à la C. I.). Donc $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ serait infini en M.

D'un côté comme de l'autre de la courbe C le problème de Cauchy est donc impossible.

2°) Il y a exception si le vecteur $\mu\omega$ est dirigé suivant la tangente à la C. I. Ceci se produit si :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

(en supposant μ sur la branche inférieure de la C. I.).

On en déduit, par les équations A, une relation entre $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ et $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$ c'est-à-dire entre les données le long de C. La position de ω n'étant d'ailleurs définie qu'à un infiniment petit du 2^e ordre près, la distance infiniment petite du 2^e ordre de ω à la C. I. est arbitraire: il y a donc une infinité de solutions.

LES RELATIONS MARGINALES. — Le raisonnement précédent nous fournirait ces relations. Mais nous allons les déduire de considérations plus directes.

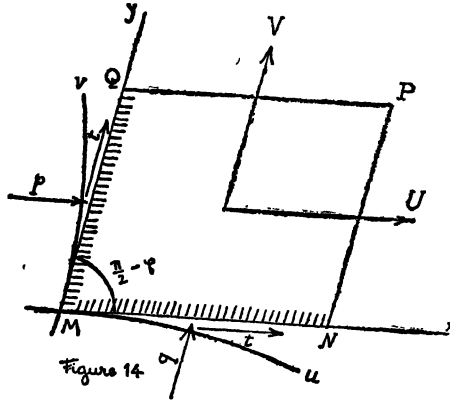
Au lieu d'écrire les équations d'équilibre A en axes rectangulaires, utilisons comme courbes de référence des lignes marginales. Nous devons obtenir 2 relations telles que (1'), ne renfermant chacune que les dérivées par rap-

port à une des variables et constituant précisément les relations marginales.

Pour écrire les équations en un point M substituons d'abord aux coordonnées curvilignes au voisinage de M un système de coordonnées rectilignes obliques dont les axes sont les tangentes en M aux 2 lignes marginales (les dérivées par rapport à l'arc de la ligne Mu ou par rapport à x sont les mêmes).

Les équations d'équilibre sont alors les équations A' (avec $i = \varphi$). De plus, il résulte de la condition d'écoulement que dans ces équations $\frac{\partial t}{\partial x}$ et $\frac{\partial t}{\partial y}$ sont nuls.

Traçons en effet les cercles de Mohr infiniment voisins relatifs au point M et au point N (utilisons les 2 cercles de la figure 13). Les contraintes sur les éléments MQ et



NP (fig. 14) ont pour extrémités les points V et Ψ . Les composantes p et t s'obtiennent en décomposant ces contraintes suivant la direction $(O\tau)$ de l'élément et la direc-

tion (KV) de la tangente au point V. Quand on passe de V à ψ la variation de la composante t est un infiniment petit du 2^e ordre. Donc :

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

De même, en considérant les éléments MN et QP, on obtiendrait :

$$\frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

Les équations A' se réduisent donc à : (1)

$$\frac{\partial p}{\partial x} - U \cos \varphi = 0 \quad \frac{\partial q}{\partial y} - V \cos \varphi = 0$$

qui sont bien de la forme (1)'.

Reste à exprimer les variations de p et q au moyen des variations de S et Θ . Calculons la variation dp de p quand on passe de l'élément MQ à l'élément NP.

Si, de M à N, l'orientation Θ de la sollicitation ne varierait pas, l'extrémité de la contrainte (p, t) resterait sur un rayon d'inclinaison fixe du cercle de Mohr, donc passerait de V en H (fig. 13). On aurait dans ce cas :

$$dp = VH = CC' \cos \varphi$$

$R = \frac{\pi}{\cos \varphi}$ étant le rayon du cercle de Mohr, on a alors d'après la figure 11 :

$$dp = 2R dS$$

Supposons maintenant que de M à N l'orientation de la sollicitation ait varié de $d\Theta$. Le rayon du cercle de Mohr qui a pour extrémité le point Ψ aura tourné de

(1) U, V désignent les composantes (obliques) de la force massique précédemment représentées par F_x, F_y .

+ 2 $d\Theta$ et le déplacement correspondant H Ψ est 2 R $d\Theta$. On a donc :

$$dp = 2R(dS - d\Theta)$$

D'où la relation marginale :

$$d(S - \Theta) = \frac{U \cos \varphi}{2R} ds_u$$

relation entre les variations le long de la ligne marginale u (celle dont la tangente a pour orientation :

$\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$). ds_u est l'arc élémentaire de cette ligne.

De même on trouverait :

$$dq = 2R(dS + d\Theta)$$

d'où :

$$d(S + \Theta) = \frac{V \cos \varphi}{2R} ds_v$$

relation marginale relative à la ligne v (celle dont la tangente a pour orientation : $\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$).

Exemples :

1° Lorsqu'il n'y a pas de forces massiques, chaque relation marginale s'intègre sous la forme :

$$S + \epsilon\Theta = C^{\text{te}}$$

relation qui s'applique à la ligne dont la tangente a pour orientation :

$$\Theta + \epsilon \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad \epsilon = \pm 1$$

2° Lorsqu'il existe des forces massiques, les relations marginales ne peuvent pas en général être intégrées sans que l'on connaisse le tracé des lignes marginales. C'est le cas qui se présente pour un milieu pesant de poids spécifique Δ , pour lequel on aura, en prenant pour axe Ox la verticale descendante :

$$U \cos \varphi = \Delta \sin \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$V \cos \varphi = - \Delta \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

La solution analytique complète du problème de l'équilibre plastique que nous donnerons au chapitre III est basée sur la possibilité d'intégrer les relations marginales sans connaître le tracé des lignes marginales. C'est ce qui explique que cette solution exacte doit être limitée au cas où il n'y a pas de force massique.

3° Exceptionnellement les relations marginales peuvent s'intégrer dans quelques cas très particuliers. Ainsi supposons que les forces massiques dérivent d'une *fonction de forces* W et que la C. I. soit constituée par 2 droites parallèles ($\varphi = 0$; c'est la C. I. qui correspond à la condition de Tresca). Dans ce cas : $2 R = C^{te} = \omega$. De plus les lignes marginales étant orthogonales $U ds_u$ et $V ds_v$, représentent les travaux de la force massique le long des arcs ds_u et ds_v . On a donc, le long d'une ligne marginale :

$$d(S + \epsilon \Theta) = \frac{dW}{\omega}$$

ou :

$$S - \frac{W}{\omega} + \epsilon \Theta = C^{te} \quad (1)$$

Conséquences de la qualité de caractéristiques des lignes marginales.

1° *Deux solutions analytiques différentes ne peuvent se raccorder que le long d'une ligne marginale commune.*

(1) Ce résultat s'obtient également en remarquant qu'en superposant aux sollicitations une traction isotrope égale à W , on passe d'un équilibre limite correspondant à la fonction des forces W à un équilibre limite sans forces massiques.

Soit par exemple, en l'absence de forces massiques, un équilibre homogène; on ne peut lui raccorder un autre équilibre que le long d'une de ses lignes marginales, qui sont droites. On peut de cette façon, en particulier, lui raccorder un équilibre de Caquot (généralisé, au cas d'un matériau quelconque), ce dernier ayant une famille de lignes marginales droites constituée par les rayons vecteurs issus de O.

2° Les données de Cauchy (S et Θ) sur un arc AB ne déterminent entièrement la solution que dans le quadrilatère formé par les 4 lignes marginales 2 à 2 issues des extrémités de l'arc AB .

Nous supposons qu'aucun élément de AB n'est marginal de sorte qu'une ligne marginale issue d'un point de AB ne recoupe pas cet arc.

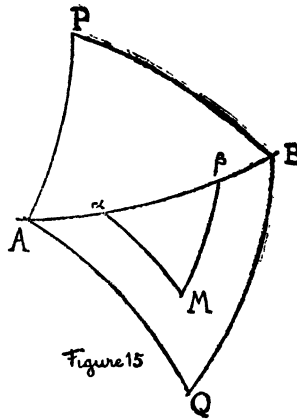


Figure 15

Par tout point M intérieur au quadrilatère ci-dessus défini passent 2 lignes marginales qui rencontrent l'arc AB en α et β (situés entre A et B). Chacune de ces lignes

établit une relation entre les valeurs de S et Θ en M .
 S et Θ sont donc déterminés en M .

Au contraire, par un point extérieur au quadrilatère on ne peut, suivant les régions, mener qu'une seule, ou zéro ligne marginale rencontrant l'arc AB : la solution est donc suivant les régions simplement ou doublement arbitraire.

Ces considérations intuitives recevront une confirmation rigoureuse par la suite.

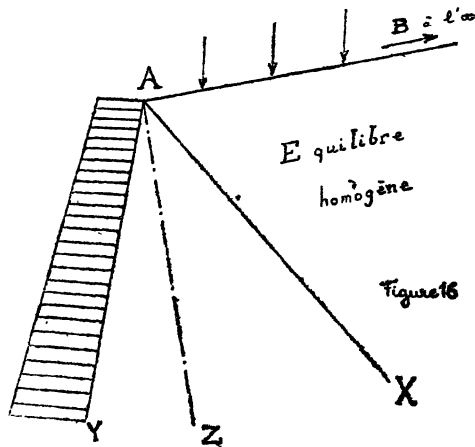
Remarque : Les données de Cauchy (S, Θ) sur AB sont connues si l'on se donne les contraintes qui s'exercent sur cet arc *et leur nature*. En effet la donnée de la contrainte sur un élément de l'arc fixe un point du cercle de Mohr. Par ce point on peut mener 2 cercles tangents à la $C. I.$ Mais pour l'un d'eux la contrainte est mineure, pour l'autre elle est majeure. Si l'on précise la nature de la contrainte, la sollicitation est donc bien déterminée. Cette nature reste constante sur AB si aucun élément de AB n'est marginal. Donc :

La connaissance des contraintes qui s'exercent sur un arc et de leur nature supposée uniforme, détermine entièrement les sollicitations dans le quadrilatère formé par les 4 lignes marginales issues des extrémités de l'arc et dans ce quadrilatère seulement.

Exemples : a) *Transmission à une paroi d'une contrainte uniforme appliquée à une surface libre plane.*

A partir des données sur la surface libre AB (B rejeté à l'infini — fig. 16) les contraintes sont entièrement déterminées dans l'angle BAX (AX première ligne marginale

issue de A que l'on rencontre en tournant dans le massif autour de A à partir de AB) : la solution est d'ailleurs fournie par un équilibre homogène. Au delà de AX, dans l'angle XAY, une infinité de solutions seraient possibles si l'on ne tenait compte que des conditions imposées sur



AB. Pour déterminer l'équilibre il faut tenir compte en outre des conditions imposées sur la paroi AY, soit aux contraintes, soit aux déplacements (voir chap. III).

b) *Poussée sur un mur de soutènement.* — C'est le même problème mais en tenant compte de la pesanteur et la surface libre pouvant être déchargée. Dans l'angle BAX l'équilibre est déterminé; c'est celui de Rankine. Rankine appliquait sa solution jusqu'à la paroi AY. Résal lui a substitué à partir de AX un équilibre conduisant à une poussée moindre. Ces 2 solutions correspondent au glissement de la terre sur la paroi, mais avec des valeurs diffé-

rentes du coefficient de frottement : ce dernier est maximum pour l'équilibre de Résal.

3° *Existence de relations entre les contraintes sur les différentes fractions d'un contour.*

Au paragraphe précédent nous supposons qu'aucune ligne marginale issue d'un point de l'arc AB ne recoupe cet arc. S'il n'en est pas ainsi, on ne peut se donner arbitrairement les contraintes sur la totalité de l'arc, car une ligne marginale joignant deux points M et N de l'arc établit une relation entre les sollicitations en ces deux points.

Ce cas se présente notamment si l'on envisage un contour fermé (simple ou multiple). Car une ligne marginale pénétrant dans le domaine en équilibre limite par un point M du contour en ressort nécessairement en un autre point N. Exemple : Dans l'équilibre limite d'une couche cylindrique il existe une relation entre la pression sur le cylindre intérieur et la pression sur le cylindre extérieur.

Graduation de diverses C. I. en valeurs de S. — S est défini par la relation :

$$2 dS = \frac{d\gamma}{\tau} + d\varphi$$

ou encore :

$$2 dS = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{dR}{R}$$

en désignant par $R = \frac{\tau}{\cos \varphi}$ le rayon du cercle de Mohr.

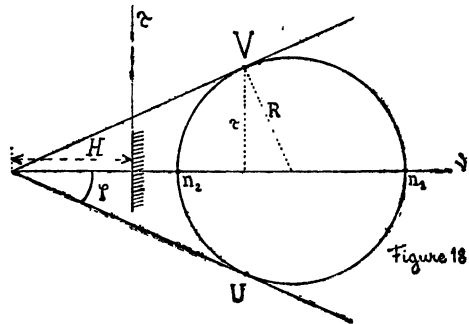
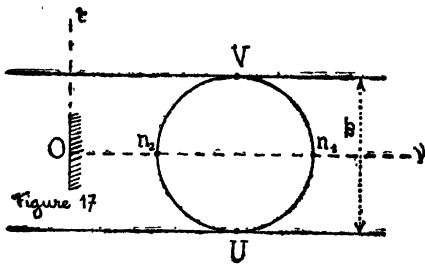
1° *C. I. composé de 2 droites parallèles* distantes de ω (fig. 17). Cette C. I. correspond à la condition de Tresca :

$$n_1 - n_2 = \omega$$

On a :

$$\varphi = 0$$

$$\tau = \frac{\omega}{2}$$



d'où :

$$S = \frac{\nu}{\omega} + C^{te}$$

2° *C. I. composés de 2 droites concourantes.* Cette *C. I.* correspond à la condition de Coulomb-Rankine :

$$\tau = (\nu + H) \operatorname{tg} \varphi$$

ou à la relation :

$$n_2 = j n_1 - \omega$$

On a :

$$\varphi = C^{te}$$

d'où :

$$S = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{Log} R + C^{te} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{Log} \tau + C^{te}$$

3° *C. I. circulaire.* — Envisageons seulement le cas d'un cercle coupant l'axe des ν en I_0 ou I_1 sous l'inclinaison φ_0 . L'inverse de ce cercle par rapport à I_0 est une droite d'inclinaison φ_0 et aux points inverses $p p'$ les valeurs de S sont opposées. Donc :

$$S = -\frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi_0} \operatorname{Log} \tau' + C^{te} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi_0} \operatorname{Log} \frac{r_0^2}{\tau} + C^{te}$$

r_0 désignant le rayon $p I_0$ (fig. 19).

En effectuant l'inversion par rapport à I_1 , on trouverait de même :

$$S = -\frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi_0} \operatorname{Log} \frac{r_1^2}{\tau} + C^{te} \quad r_1 = p I_1$$

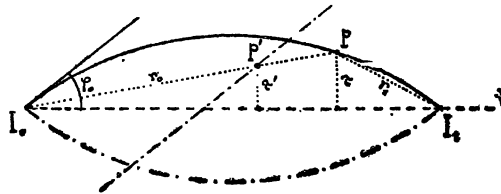


Figure 19

En prenant la moyenne des 2 expressions précédentes, on en obtient un 3^e :

$$S = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi_0} \operatorname{Log} \frac{r_0}{r_1} + C^{te}$$

4^o Si la C. I. ne possède pas de point anguleux en son sommet, elle est au moins au voisinage du sommet assimilable à une *parabole* :

$$v = \lambda \tau^m \quad \text{avec} \quad 1 < m \leq 2$$

On obtient immédiatement :

$$S = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m-1} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right]$$

avec

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \lambda m \tau^{m-1}$$

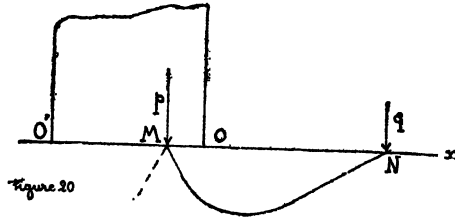
Exemple d'application : Problème du poinçonnage ou des fondations. Supposons que la surface d'appui OO' soit sans frottement. La pression p au point M est normale

donc principale; en outre elle est évidemment majeure. Au contraire sur la surface libre Ox la pression q est nulle, donc également principale mais mineure. Envisageons une ligne marginale v allant de M à N (fig. 20).

De M à N , Θ passe de $-\frac{\pi}{2}$ à 0 . On a donc :

$$S_M - S_N = \frac{\pi}{2}$$

relation qui donne la valeur de la pression p .



Ainsi pour un métal ductile, en adoptant la condition

de Tresca on aura : $v_M - v_N = \omega \frac{\pi}{2}$.

Or :

$$q = v_N - \frac{\omega}{2} = 0 \quad p = v_M + \frac{\omega}{2}$$

D'où :

$$p = \omega \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

Pour une terre ($\varphi = C^{\text{te}} \neq 0$), on obtiendra :

$$R_M = R_N e^{\pi \operatorname{tg} \varphi}$$

$$p + H = R_M \frac{1 + \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

$$q + H = R_N \frac{1 - \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

d'où la formule de M. Caquot :

$$p = H \left(\frac{e^{\pi \operatorname{tg} \varphi}}{j} - 1 \right) \quad \text{avec :} \quad j = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

CHAPITRE III

ETUDE DU RESEAU DES LIGNES MARGINALES

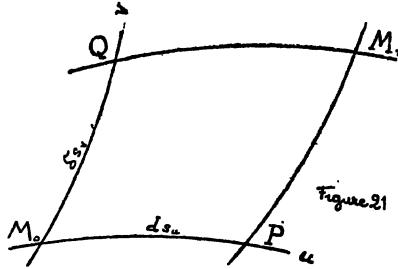
CONDITIONS IMPOSÉES A UN RÉSEAU MARGINAL. — Lorsqu'on connaît un réseau de lignes marginales, on en déduit immédiatement la sollicitation en chaque point. L'étude des équilibres limites se ramène donc à celle des réseaux marginaux, réseaux qui ne sont évidemment pas arbitraires et à qui deux conditions sont imposées.

En effet soit donné un réseau de lignes marginales. Les directions marginales en M font immédiatement connaître les angles Θ et φ : Θ est l'orientation de la bissectrice de l'angle aigu de ces 2 directions et $\frac{\pi}{2} - \varphi$ est la grandeur de cet angle.

En ce qui concerne S, supposons le connu en un point M_0 ; pour l'obtenir en un autre point M_1 nous pouvons appliquer les relations marginales le long des arcs marginaux issus de M_0 et M_1 (arcs qui se coupent en P et Q - fig. 21), les variations de Θ étant connues le long de ces arcs. On peut d'ailleurs passer de M_0 à M_1 en cheminant le long de $M_0 P M_1$ ou le long de $M_0 Q M_1$: dans les 2 cas on doit trouver la même valeur de S en M_1 . Il en résulte une première condition imposée au réseau.

Désignons par ds_u, ds_v les arcs des lignes marginales

de la famille u et de la famille v , par Θ_u , Θ_v les orientations de leurs tangentes, par U et V les composantes de



la force massique suivant les directions de ces 2 tangentes. Cette première condition s'écrit ⁽¹⁾ :

$$4R d\delta\Theta = (V - 3\lambda U \sin \varphi) \delta\Theta_u ds_v - \delta(U \cos \varphi) ds_u + (U - 3\lambda V \sin \varphi) d\Theta_v \delta s_v + d(V \cos \varphi) \delta s_v$$

en posant :

$$\lambda = \frac{1 - \frac{1}{6} \frac{d\varphi}{dS}}{1 - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS}}$$

$$d\delta\Theta = \Theta_{M1} - \Theta_P - (\Theta_Q - \Theta_{M0}) = \delta d\Theta$$

les d représentent les variations le long de l'arc $M_0 P$;

les δ représentent les variations le long de l'arc $M_0 Q$;

R est le rayon du cercle de Mohr.

Dans le cas de la pesanteur et pour $\varphi = C^{\text{te}}$ la condition donne :

$$R d\delta\Theta = \Delta \operatorname{tg} \varphi (\sin \Theta_u d\Theta \delta s_v - \sin \Theta_v \delta\Theta ds_u)$$

(1) Faute de place, nous ne donnons pas le détail des calculs ; ceci n'a pas d'inconvénient, car la suite de cette étude se rapporte à un cas particulier pour lequel nous obtiendrons la condition directement.

(Δ : poids spécifique — angles mesurés à partir de la verticale descendante).

En l'absence de forces massiques, la condition se réduit à :

$$d\delta\Theta = 0$$

En outre, à la valeur de S calculée comme il vient d'être dit, doit correspondre sur la C. I. l'angle φ mesuré sur le réseau; d'où une seconde condition imposée à celui-ci. Ainsi, dans le cas d'une C. I. rectiligne, les courbes du réseau doivent se couper sous un angle constant égal à

$$\frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Etudions directement le cas où il n'existe pas de forces massiques, cas auquel nous nous limiterons dans la suite.

Nous poserons :

$$\begin{cases} S + \Theta = 2u \\ S - \Theta = 2v \end{cases} \quad \text{ou : } \begin{cases} (1) & \Theta = u - v \\ (2) & S = u + v \end{cases}$$

u reste constant le long d'une ligne marginale v ; v reste constant le long d'une ligne marginale u .

Les conditions imposées peuvent alors s'exprimer ainsi: envisageons un arc $P_0 P_1$ d'une ligne variable d'une famille (famille v par exemple) limité à 2 lignes fixes de l'autre famille (lignes $v = v_0$ et $v = v_1$).

1° d'après la relation (1), on a :

$$\Theta_1 - \Theta_0 = v_0 - v_1 = C^{te}$$

Les directions principales (bissectrices de l'angle du réseau) aux 2 extrémités de l'arc doivent donc faire entre elles un angle constant. Cette condition, qui s'écrit encore $\delta\Theta = C^{te}$ ou : $d\delta\Theta = 0$ coïncide avec la première condition trouvée précédemment.

2° d'après la relation (2), on a :

$$S_1 - S_0 = v_1 - v_0 = \text{Cte}$$

φ étant lié à S sur la C. I., on en déduit qu'il existe une relation bien déterminée entre les angles $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ du réseau aux 2 extrémités de l'arc; ainsi, pour une C. I. rectiligne, ces angles doivent être égaux.

DÉTERMINATION GÉNÉRALE DES RÉSEAUX MARGINAUX EN L'ABSENCE DES FORCES MASSIQUES

A. — Réseaux dégénérés

Si nous cherchons à déterminer l'ensemble des réseaux satisfaisant aux conditions (1) et (2) nous rencontrons d'abord 2 cas particuliers :

a) u et v sont constants dans tout l'espace. Il en est alors de même de Θ et S (et par suite de φ) et des orientations $\pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ des lignes marginales. L'équilibre est donc homogène et les lignes marginales sont des droites.

b) u ou v , est constant dans tout l'espace. Soit $u = u_0$ dans tout l'espace. Le long d'une ligne u , v est en outre constant, donc aussi Θ , S , φ et l'orientation :

$$\Theta_u = \Theta - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

de la tangente à la ligne. Les lignes u sont donc des droites; le long de ces droites la sollicitation reste constante

en grandeur et direction. Nous dirons que l'équilibre est *semi-homogène*.

D'une droite à une autre, la sollicitation varie en fonction de l'orientation de la droite, conformément à la relation :

$$S + \Theta = 2u_0$$

ou :

$$S - \frac{1}{2} \varphi (S) = 2u_0 - \frac{\pi}{4} - \Theta_u$$

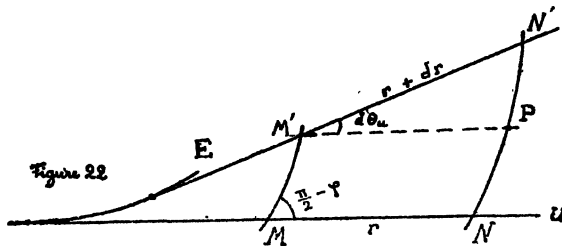
Une famille arbitraire de droites convient. De la valeur de S définie par la relation précédente, on déduit en effet φ d'où θ_v , ce qui permet de tracer les lignes v : et le réseau ainsi constitué vérifie évidemment les conditions (1) et (2) du paragraphe précédent.

Considérons 2 lignes v (MM' et NN' fig. 22) et soit r et $r + dr$ les longueurs qu'elles interceptent entre elles sur 2 lignes u infiniment voisines. On a :

$$dr = (NN' - MM') \sin \varphi = \frac{rd\Theta_u}{\cos \varphi} \sin \varphi$$

ou :

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{tg} \varphi \left(d\Theta + \frac{1}{2} d\varphi \right)$$



D'ailleurs, u restant constant :

$$d\Theta = - dS$$

et :

$$\operatorname{tg} \varphi \left(dS - \frac{1}{2} d\varphi \right) = \frac{1}{2} \frac{dv \operatorname{tg} \varphi}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{d\tau}{\tau}$$

D'où :

$$r \sqrt{\tau} = \text{Cte}$$

On remarquera également que les lignes marginales courbes v présentent un rebroussement sur la ligne enveloppe E des lignes marginales droites u .

Envisageons en particulier une famille de droites concourantes. Les lignes v sont alors homothétiques entre elles; leurs rayons polaires r sont déterminés par la relation :

$$r \sqrt{\tau} = \text{Cte}$$

Dans le cas où $\varphi = \text{Cte}$ ces courbes homothétiques sont des spirales logarithmiques. D'ailleurs la relation précédente donne :

$$r = C e^{-S \operatorname{tg} \varphi} = C e^{\Theta_u \operatorname{tg} \varphi}$$

Nous retrouvons ainsi l'équilibre de M. Caquot et nous voyons comment il se généralise dans le cas d'un matériau quelconque.

EQUILIBRES RÉCIPROQUES. — En 2 points qui se correspondent on a : $\theta' = \theta$ $S' = -S$ d'où : $u' = -v$ $v' = -u$.

A un équilibre semi-homogène $u = \text{Cte}$ correspond donc un équilibre semi-homogène $v = \text{Cte}$.

A un équilibre homogène correspond un équilibre homogène.

APPLICATIONS : L'équilibre homogène est celui qui se développe à partir d'une droite chargée de contraintes de grandeur et d'inclinaison uniformes.

Quant aux équilibres semi-homogènes ce sont ceux qui peuvent se raccorder à un équilibre homogène.

Supposons en effet que le raccordement ait lieu suivant une ligne v . Envisageons 2 lignes u issues de 2 points quelconques P et Q de la ligne de raccordement. Sur chacune de ces lignes, v est constant; en outre v a la même valeur en P et en Q puisque ces 2 points appartiennent à l'équilibre homogène; v est donc constant dans le domaine de l'équilibre qui se raccorde à l'équilibre homogène.

TRANSMISSION A UNE PAROI D'UNE CONTRAINTE UNIFORMÉ-APPLIQUÉE A UNE SURFACE LIBRE PLANE. — Dans l'angle XAY (fig. 16) l'équilibre est un équilibre semi-homogène. Cet équilibre est déterminé par une condition imposée sur la paroi AY.

Supposons par exemple qu'il y ait *glissement* de la masse plastique le long de la paroi. Il existe dans ce cas, une certaine condition indépendante du point considéré entre les composantes de la contrainte sur la paroi (si par exemple la masse n'adhère pas à la paroi, ces composantes doivent satisfaire à la loi de frottement de Coulomb). Cette condition équivaut à une relation entre les paramètres S et θ de la sollicitation. Comme d'autre part ces 2 quantités sont déjà liées par la condition de constance de v (ou de u), on voit qu'elles sont bien déterminées et ont même valeur pour tous les points de la paroi. *Sur la paroi les contraintes sont donc de grandeur et de direc-*

tion uniformes. A partir de la paroi règne donc un nouvel équilibre homogène, jusqu'à la droite marginale AZ. Enfin dans l'angle XAZ (fig. 16) règne un équilibre de Caquot, car c'est le seul équilibre semi-homogène qui possédant AX et AZ comme lignes marginales, ne donne pas lieu à un recouvrement (voir chap. V) de 2 parties du réseau au voisinage de A.

En particulier si la paroi AY est dans le prolongement de la surface libre, on obtient le cas du *poinçonnage* ou de la *fondation* rectiligne (en admettant qu'il y ait glissement de la matière au contact de la surface d'appui, ce qui n'a lieu que pour une surface assez large et de part et d'autre de la région médiane).

Ces considérations permettent également de calculer les pressions qui s'exercent sur les parois d'une *filière* ou d'une *trémie* rectilignes en admettant que dans la section droite de sortie les contraintes soient normales et de grandeur uniforme.

CAS PARTICULIER : FROTTEMENT MAXIMUM. — Le glissement peut avoir lieu, soit directement entre la masse et la paroi, soit entre 2 couches contigües de la masse dont l'une reste fixée à la paroi. Se réalisera celle des 2 hypothèses qui conduit à la moindre résistance.

a) Si le glissement a lieu directement entre la masse et la paroi, il y a entre les composantes normale n et tangentielle t de la contrainte sur la paroi, un relation, qui est celle de Coulomb : $t = n \operatorname{tg} \varphi'$, lorsqu'on suppose nulle l'adhérence de la masse à la paroi.

b) Si le glissement a lieu entre 2 couches contigües — et

si nous admettons l'identité entre direction de glissement et direction marginale (1) — la contrainte n, t est marginale.

Supposons que, n restant constant, on augmente progressivement depuis zéro l'angle de frottement φ' . Le glissement a d'abord lieu directement entre masse et paroi; t augmente avec φ' . Pour une certaine valeur de φ' la contrainte n, t devient marginale. A partir de ce moment le glissement a lieu entre 2 couches contigües et t garde une valeur constante. Le glissement entre 2 couches contigües correspond donc au frottement maximum.

Dans le cas du frottement maximum la paroi AY est ligne marginale; elle coïncide avec AZ (pour un glissement de sens convenable). L'équilibre de Caquot s'étend alors jusqu'à la paroi. Les calculs sont plus simples (2).

B. — Cas général

Dans le cas général, u et v étant tous deux variables, utilisons-les comme coordonnées curvilignes.

Soit: $ds_u = E(u, v) du, ds_v = G(u, v) dv$ les éléments d'arcs des 2 lignes marginales qui se coupent sous l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Pour définir le signe de E et G, nous choisirons sur chaque ligne un sens positif qui soit :

1° continu sur la ligne — 2° tel que l'on passe par une

(1) Cf. note (1), page 30.

(2) Ainsi dans le cas d'une fondation rectiligne, on obtient facilement :

$$n = H \left[(1 + \sin \varphi) e^{\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi \right)} \operatorname{tg} \varphi - 1 \right]$$

rotation de $+\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ de la tangente positive à une ligne u à la tangente positive à une ligne v . Ces deux conditions définissent parfaitement le sens de description de toutes les lignes du réseau, lorsqu'on a choisi le sens de description sur une seule d'entre elles.

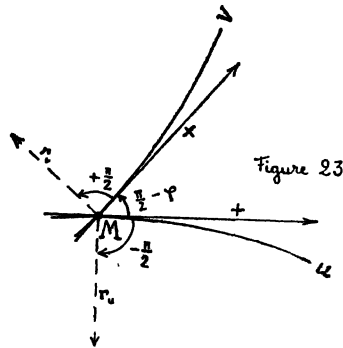
Le carré de l'élément linéaire du plan est alors :
 $dx^2 + dy^2 = ds^2 = E^2 du^2 + 2EG \sin \varphi du dv + G^2 dv^2$

La détermination d'un réseau se ramène à celle des fonctions $E(u, v)$, $G(u, v)$ et $\varphi(u, v)$. Voyons donc quelles conditions leur sont imposées.

En premier lieu l'élément linéaire ds doit être *euclidien*.

En second lieu le réseau doit satisfaire aux conditions (1) et (2) du début du chapitre.

Nous remarquons que la condition (2) concerne les angles du réseau. On y satisfait en prenant pour φ la fonc-



tion de $S \doteq u + v$ que l'on déduit de la C. I. Cette condition étant désormais supposée remplie, il reste 2 conditions pour les fonctions E et G .

Pour exprimer la condition (1), nous allons calculer à

partir de E et G la valeur de $d\Theta$ et nous l'égalons à $du - dv$. Pour cela, soit r_u et r_v les rayons de courbure des lignes u et v , leurs signes étant déterminés par la convention suivante : les normales positives se déduisent des tangentes positives par rotation de $-\frac{\pi}{2}$ pour les lignes u , de $+\frac{\pi}{2}$ pour les lignes v (fig. 23). Ces 2 rayons se déduisent de E et G par des formules classiques :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_u} = \frac{\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial(G \sin \varphi)}{\partial u}}{E G \cos \varphi} \\ \frac{1}{r_v} = \frac{\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial(E \sin \varphi)}{\partial v}}{E G \cos \varphi} \end{array} \right.$$

On a d'autre part :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r_u} = -\frac{d\Theta_u}{ds_u} = -\frac{1}{E} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} \right) \\ \frac{1}{r_v} = \frac{d\Theta_v}{ds_v} = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} \right) \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$d\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial u} du + \frac{\partial \Theta}{\partial v} dv = -\frac{E}{r_u} du + \frac{G}{r_v} dv - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} (du - dv)$$

d'où par les formules (1) :

$$(3) \quad d\Theta = -\frac{du}{G \cos \varphi} \left[\frac{\partial E}{\partial v} - \sin \varphi \frac{\partial G}{\partial u} \right] + \frac{dv}{E \cos \varphi} \left[\frac{\partial G}{\partial u} - \sin \varphi \frac{\partial E}{\partial v} \right] + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} (du - dv)$$

Identifiant cette expression à $du - dv$, on obtient les 2 conditions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial v} - \sin \varphi \frac{\partial G}{\partial u} &= -G \cos \varphi \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} \right) \\ \frac{\partial G}{\partial u} - \sin \varphi \frac{\partial E}{\partial v} &= -E \cos \varphi \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} \right) \end{aligned}$$

ou :

$$(4) \quad \begin{cases} a(S) \frac{\partial E}{\partial v} + E \sin \varphi = -G \\ a(S) \frac{\partial G}{\partial u} + G \sin \varphi = -E \end{cases}$$

en posant :

$$a(S) = \frac{\cos \varphi}{1 - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS}}$$

Nous trouvons 2 relations. C'est qu'en réalité, en identifiant l'expression (3) à la différentielle totale $du - dv$, nous avons exprimé non seulement la condition (1) mais aussi la condition que l'élément ds soit euclidien. On peut en effet démontrer que cette dernière condition peut s'exprimer de la façon suivante : la variation de θ (expression 3) doit être une différentielle totale. Les relations (4) sont donc les seules conditions entre E et G.

EQUILIBRES RÉCIPROQUES. — Lorsqu'on connaît un réseau correspondant à un premier équilibre limite, on en connaît un second : celui de l'équilibre limite réciproque (qui correspond à une C. I. différente en général de la C. I. initiale), ou réseau associé. On connaît même une infinité de réseaux associés : en effet, un réseau donné est valable pour une infinité d'équilibres correspondant à une même

C. I. mais à des positions différentes de l'origine par rapport à la C. I. Autrement dit, pour obtenir un réseau associé, on effectuera dans le plan $\nu\tau$ une inversion par rapport à un point quelconque de l'axe $O\nu$.

a) Cherchons comment, dans ces conditions, se transforment les quantités E et G.

ds et ds' étant 2 arcs qui se correspondent, soit p la contrainte sur l'arc ds , t sa composante de cisaillement, soit p' et t' la contrainte et le cisaillement sur l'arc ds'
On a :

$$\frac{ds'}{ds} = p = \frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{p}{p'}} = \sqrt{\frac{t}{t'}}$$

d'où :

$$\sqrt{t} ds = \sqrt{t'} ds'$$

Cette relation est indépendante de la position de l'origine des contraintes par rapport à la C. I. On en déduit que la quantité $\sqrt{t} ds$ est un invariant lorsqu'on passe de l'équilibre initial à l'un quelconque des équilibres réciproques en nombre infini que l'on peut en déduire.

Appliquons cette relation aux arcs marginaux. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sqrt{\tau} | E du | &= \sqrt{\tau'} | G' dv' | \\ \sqrt{\tau} | G dv | &= \sqrt{\tau'} | E' du' | \end{aligned}$$

Précisons la correspondance des signes. A deux éléments orientés symétriques par rapport à la direction de la contrainte principale majeure, correspondent dans un équilibre réciproque deux éléments orientés symétriques par rapport à la direction de la contrainte principale mineure. Si donc nous choisissons comme sens positif sur les li-

gnes u' celui qui correspond au sens positif des lignes associées v , le sens positif sur les lignes v' correspondra au sens négatif des lignes u .

On déduit de là :

$$\begin{aligned}\sqrt{\tau'} E' du' &= \sqrt{\tau} G dv \\ \sqrt{\tau'} G' dv' &= -\sqrt{\tau} E du\end{aligned}$$

d'où (en tenant compte des reations $u' = -v$, $v' = -u$):

$$\begin{aligned}\sqrt{\tau'} E' &= -\sqrt{\tau} G \\ \sqrt{\tau'} G' &= \sqrt{\tau} E\end{aligned}$$

Nous poserons :

$$\begin{aligned}\epsilon(u, v) &= E(u, v) \sqrt{\tau} \\ \gamma(u, v) &= G(u, v) \sqrt{\tau}\end{aligned} \quad (\tau: \text{fonction de } u + v)$$

Les relations précédentes s'écriront alors :

$$\begin{aligned}\epsilon'(u', v') &= -\gamma(u, v) \\ \gamma'(u', v') &= +\epsilon(u, v)\end{aligned}$$

b) Cherchons également comment se transforme la quantité $a(S)$ qui intervient dans le système (4). On a :

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} &= \frac{dv}{2\tau dS} \\ a(S) &= \frac{\cos \varphi}{1 - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS}} = \frac{2\tau dS \cos \varphi}{dv}\end{aligned}$$

d'où :

$$|a(S)| = \left| \frac{2\tau dS}{d\sigma} \right|$$

où $d\sigma$ représente l'élément d'arc de la C. I.

Or on a (triangles semblables de sommet O — fig. 24):

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{p'}{p} = \frac{\tau'}{\tau}$$

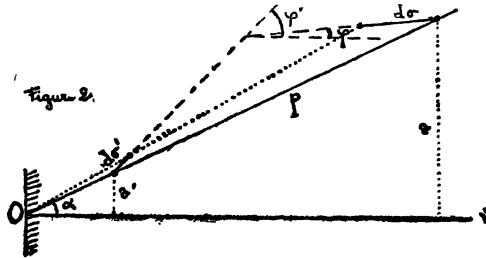
D'autre part :

$$dS' = -dS$$

On en déduit :

$$| a(S') | = | a(S) |$$

Les 2 quantités $a(S')$, $a(S)$ sont d'ailleurs de même signe car dS et dS' sont de signes opposés, $\frac{dv}{\cos \varphi}$ et $\frac{dv'}{\cos \varphi'}$ également. D'où : $a(S') = a(S)$.



RÉDUCTION DU SYSTÈME (4). — Introduisons dans le système (4) les quantités ε , γ . Nous avons :

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \quad G = \frac{\gamma}{\sqrt{\tau}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\tau \sqrt{\tau}} \frac{d\tau}{dS}$$

$$a(S) \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} a(S) \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{2\tau dS \sin \varphi}{d\tau} \frac{\varepsilon}{2\tau \sqrt{\tau}} \frac{d\tau}{dS}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tau}} a(S) \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \sin \varphi \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}}$$

De même :

$$a(S) \frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} a(S) \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \sin \varphi \frac{\gamma}{\sqrt{\tau}}$$

Le système (4) prend alors la forme simplifiée :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} a(S) \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = -\gamma \\ a(S) \frac{\partial \gamma}{\partial u} = -\varepsilon \end{array} \right.$$

Sous cette forme on vérifie immédiatement que les équations restent satisfaites lorsqu'on passe d'un équilibre à un équilibre réciproque.

VALEURS DE $a(S)$ POUR DIFFÉRENTES C. I. :

1° C. I. rectiligne : $\varphi = C^{te}$ $a(S) = \cos \varphi = C^{te}$

2° C. I. circulaire coupant l'axe des v sous l'angle φ_0 .
Par une inversion on change la C. I. en une droite d'inclinaison φ_0 sans changer $a(S)$. D'où :

$$a(S) = \cos \varphi_0 = C^{te}$$

3° C. I. parabolique : $v = \lambda \tau^m (1 \leq m \leq 2)$

On trouve aisément :

$$a(S) = \cos \varphi [1 - (m - 1) \sin^2 \varphi]$$

EQUATION DE LAPLACE ÉQUIVALENTE AU SYSTÈME (5). —
Eliminant γ entre les 2 équations (5) on obtient :

$$a^2(S) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u \partial v} + a(S) \frac{da}{dS} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \varepsilon = 0$$

De même, en éliminant ε , on obtient :

$$a^2(S) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial u \partial v} + a(S) \frac{da}{dS} \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \gamma = 0$$

Pour chacune des fonctions ε, γ le système est donc équivalent à une équation aux dérivées partielles du 2° ordre linéaire du type hyperbolique, type d'équation connu sous le nom d'équation de Laplace. Lorsque : $a(S) = C^{te} = \cos \varphi_0$

(C. I. rectiligne ou circulaire) les 2 équations précédentes coïncident et deviennent :

$$\cos^2 \varphi_0 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - z = 0$$

Posons :

$$u = l \cos \varphi_0 \qquad v = m \cos \varphi_0$$

Nous parvenons à l'équation classique :

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial l \partial m} = z$$

z étant une solution de cette équation, on pourra prendre :

$$\varepsilon = z \qquad \gamma = - \cos \varphi_0 \frac{\partial z}{\partial v} = - \frac{\partial z}{\partial m}$$

SYNTHÈSE DE LA SOLUTION. — En résumé les conditions imposées au réseau se traduisent :

1° par une certaine relation, dépendant de la C. I., entre l'angle du réseau : $\frac{\pi}{2} - \varphi$ et $S = u + v$; 2° par les 2 équations du système 5.

Réciproquement, ayant trouvé une solution du système 5, on construit facilement le réseau correspondant (synthèse de la solution). En effet soit par exemple à construire une ligne u . On aura :

$$dx = ds_u \cos \Theta_u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \cos \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) du$$

$$dy = ds_u \sin \Theta_u = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) du$$

formules où :

$$\Theta = u - v \qquad \varphi = f(u + v)$$

Partant d'un point $M_0 (u_0, v_0)$ de coordonnées connues, on pourra déterminer les coordonnées d'un point $M_1 (u_1,$

v_1), soit en suivant le chemin $M_0 P M_1$ (fig. 21), soit en suivant le chemin $M_0 Q M_1$. Grâce au fait que l'élément linéaire est euclidien, on parvient bien par ces deux chemins au même point. D'ailleurs, cette construction est traduite par les relations :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left[\varepsilon \cos \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) du \right. \\ \quad \left. + \gamma \cos \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) dv \right] \\ dy = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left[\varepsilon \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) du \right. \\ \quad \left. + \gamma \sin \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) dv \right] \end{array} \right.$$

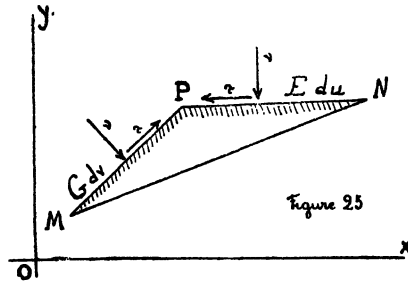
qui font connaître les coordonnées $x y$ par 2 nouvelles intégrations — et il est facile de vérifier que chacune de ces expressions est bien une différentielle totale.

VECTEUR INTÉGRANT. — On obtient les composantes XY du vecteur intégrant, soit en intégrant les relations (7) dans l'équilibre réciproque de l'équilibre étudié, soit en intégrant les relations suivantes (8), qui donnent directement dans l'équilibre étudié les variations dX, dY . Pour obtenir ces dernières, décomposons un arc quelconque MN en 2 arcs marginaux MP et PN qui sont soumis aux contraintes marginales (v, τ). Nous obtenons :

$$dX = \left[v \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \tau \cos \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} du + \left[v \sin \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + \tau \cos \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \frac{\gamma}{\sqrt{\tau}} dv$$

dY = expression dérivant de celle de dX en remplaçant

θ par $\theta - \frac{\pi}{2}$.



INTÉGRATION DIRECTE DES ÉQUATIONS A_1 . — La méthode que nous venons de suivre équivaut à une intégration par une voie détournée des équations A_1 . Le procédé offre ceci de particulier que x et y jouent le rôle de fonctions inconnues des variables u et v qui définissent la sollicitation, alors que le contraire avait lieu dans les équations A_1 .

Nous allons voir qu'en effectuant directement cette *interversion des fonctions et des variables* dans les équations A_1 , celles-ci se ramènent, dans le cas où il n'y a pas de forces massiques, à une équation du 2^e ordre, linéaire, du type hyperbolique, donc à une équation que l'on sait intégrer. Cette remarque explique le succès de la méthode que nous avons suivie.

Effectuons l'interversion entre x , y et S , Θ . On a :

$$\begin{aligned} D \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial \Theta}; & D \frac{\partial S}{\partial y} &= - \frac{\partial x}{\partial \Theta}; \\ D \frac{\partial \Theta}{\partial x} &= - \frac{\partial y}{\partial S}; & D \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= \frac{\partial x}{\partial S} \end{aligned}$$

$$D = \frac{\partial y}{\partial \Theta} \frac{\partial x}{\partial S} - \frac{\partial y}{\partial S} \frac{\partial x}{\partial \Theta}$$

Portant dans les équations A_1 , on obtient :

$$\begin{aligned} & - \sin \varphi \sin 2\Theta \frac{\partial x}{\partial \Theta} + \cos \varphi \cos 2\Theta \frac{\partial x}{\partial S} + (1 + \sin \varphi \cos 2\Theta) \frac{\partial y}{\partial \Theta} \\ & + \cos \varphi \sin 2\Theta \frac{\partial y}{\partial S} - X \frac{\cos^2 \varphi}{2\tau} \left(\frac{\partial y}{\partial \Theta} \frac{\partial x}{\partial S} - \frac{\partial y}{\partial S} \frac{\partial x}{\partial \Theta} \right) = 0 \\ & - (1 - \sin \varphi \cos 2\Theta) \frac{\partial x}{\partial \Theta} + \cos \varphi \sin 2\Theta \frac{\partial x}{\partial S} + \sin \varphi \sin 2\Theta \frac{\partial y}{\partial \Theta} \\ & - \cos \varphi \sin 2\Theta \frac{\partial y}{\partial S} - Y \frac{\cos^2 \varphi}{2\tau} \left(\frac{\partial y}{\partial \Theta} \frac{\partial x}{\partial S} - \frac{\partial y}{\partial S} \frac{\partial x}{\partial \Theta} \right) = 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où il n'y a pas de forces massiques : $X = 0$, $Y = 0$ ces équations deviennent linéaires par rapport aux dérivées partielles, comme l'étaient les équations A_1 ; mais l'avantage des nouvelles équations est que les coefficients y dépendent des variables S , θ et non pas des fonctions inconnues (x, y) : les lignes caractéristiques forment donc dans le plan S, θ un réseau invariable d'une solution à une autre.

Pour obtenir ces caractéristiques, appliquons l'équation (3) du chapitre II. Nous obtenons :

$$- \cos^2 \varphi dS^2 + \cos^2 \varphi d\Theta^2 = 0$$

Les lignes caractéristiques sont donc, en projection sur le plan S, θ les lignes : $S + \theta = C^{te}$ et $S - \theta = C^{te}$.

Prenons alors comme variables :

$$u = \frac{1}{2} (S + \Theta) \qquad v = \frac{1}{2} (S - \Theta)$$

au lieu de S et θ . Les équations A_2 se ramènent alors à un système qui, comme prévu, est de la forme du système (1)' du chapitre II :

$$\begin{cases} \cos(2\Theta + \varphi) \frac{\partial x}{\partial u} + [1 + \sin(2\Theta + \varphi)] \frac{\partial y}{\partial u} = 0 \\ \cos(2\Theta - \varphi) \frac{\partial x}{\partial v} - [1 - \sin(2\Theta - \varphi)] \frac{\partial y}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\Lambda'_2 \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \operatorname{tg} \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \operatorname{tg} \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \end{cases}$$

Ces relations expriment que dans le plan $x y$ les tangentes aux lignes u et v ont respectivement pour orientation :

$$\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad \Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

Si, entre ces 2 équations, on élimine l'une des fonctions, on obtient pour l'autre une équation du 2^e ordre, de Laplace. Ainsi x vérifie :

$$\begin{aligned} a(S) \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\cos \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{\partial x}{\partial u} \\ + \frac{\cos \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{\partial x}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

et y vérifie une équation analogue où les cosinus sont remplacés par des sinus (1).

(1) Ces équations avaient été obtenues par M. Oseen dans le cas particulier $\varphi = 0$.

On obtient un résultat plus symétrique, en posant, en considération des équations A'_2 :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = E \cos \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

d'où :

$$\frac{\partial y}{\partial u} = E \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = G \cos \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

d'où :

$$\frac{\partial y}{\partial v} = G \sin \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

On aura :

$$\begin{aligned} dx &= E \cos \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) du \\ &+ G \cos \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) dv \\ dy &= E \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) du \\ &+ G \sin \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) dv \end{aligned}$$

E G sont astreints à 2 conditions résultant de ce que les expressions ci-dessus doivent être différentielles totales. On retombe ainsi sur le système (4), réductible au système (5).

CHAPITRE IV

PROPRIETES DES SOLUTIONS

ET LIGNES REMARQUABLES

(en l'absence de forces massiques)

MULTIPLICATION ET ADDITION. — Les équations du système 5 étant homogènes, on déduit, d'une première solution, une autre solution en multipliant $\varepsilon \gamma$ par un facteur constant λ . Ceci correspond à une homothétie de rapport λ dans l'espace.

Les équations du système 5 étant linéaires, si $\varepsilon_1 \lambda_1$ et $\varepsilon_2 \gamma_2$ en sont deux solutions, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \gamma_1 + \gamma_2$ est encore une solution. Les relations 7 montrent que les coordonnées s'additionnent suivant la même règle que les fonctions $\varepsilon \gamma$. Autrement dit : *pour obtenir dans le 3^e équilibre les coordonnées du point où la sollicitation a une grandeur et une direction déterminées, on additionne les coordonnées des points où dans les 2 premiers équilibres la sollicitation a cette grandeur et cette direction.*

Si l'un des équilibres superposés est dégénéré (par exemple $u = C^e = u_0$) l'équilibre résultant l'est également (car il ne peut contenir que des points où $u = u_0$).

Les équilibres réciproques de 2 équilibres se superposent

suivant la même règle que les équilibres initiaux, puisque :

$$\epsilon' = -\gamma \qquad \gamma' = \epsilon$$

Cette propriété de superposition, qui repose sur l'absence de forces massiques, est facile à établir directement. Soit 2 équilibres limites dans lesquels les coordonnées des points où la sollicitation est la même sont x_1 y_1 et x_2 y_2 . Dans le 3^e équilibre cette même sollicitation sera appliquée au point de coordonnées :

$$x_3 = x_1 + x_2, \qquad y_3 = y_1 + y_2$$

On a (relations α du chapitre I) :

$$\begin{aligned} v_x dy_1 - \tau_{xy} dx_1 &= dX_1 \\ v_x dy_2 - \tau_{xy} dx_2 &= dX_2 \end{aligned}$$

d'où en additionnant :

$$v_x dy_3 - \tau_{xy} dx_3 = dX_3$$

en posant : $X_3 = X_1 + X_2$

De même on trouverait :

$$\tau_{xy} dy_3 - v_y dx_3 = dY_3$$

$$Y_3 = Y_1 + Y_2$$

Ces relations prouvent que les équations mécaniques \mathbf{A} sont satisfaites. Comme d'autre part les cercles de Mohr ne changent pas, la superposition conduit à un nouvel équilibre limite.

De plus on voit que les vecteurs intégrants s'additionnent ou encore que les équilibres réciproques se superposent suivant la même loi que les équilibres initiaux.

CONSEQUENCE : Soit : $\epsilon(u, v, \alpha)$, $\gamma(u, v, \alpha)$ une solution

renfermant un paramètre variable α . On déduit immédiatement des 2 propriétés précédentes que :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \varepsilon(u, v, \alpha), \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \gamma(u, v, \alpha)$$

est également une solution et aussi :

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varepsilon(u, v, \alpha) f(\alpha) d\alpha \quad \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \gamma(u, v, \alpha) f(\alpha) d\alpha$$

$f(\alpha)$ étant une fonction arbitraire, $\alpha_0 \alpha_1$ un intervalle arbitraire.

APPLICATION : Pour $a(S) = C^{be}$ le système 5 se ramène à l'équation 6 dont une solution évidente est :

$$z = e^{a l + \frac{m}{\alpha}} \quad (\alpha : \text{constante})$$

1° *Addition.* — Par addition et soustraction de 2 solutions correspondant à α_1 et α_2 , on obtient 2 nouvelles solutions :

$$z = e^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} l + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1 \alpha_2} m} \times \begin{cases} \text{Ch} \\ \text{ou} \\ \text{sh} \end{cases} \left[\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} l + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\alpha_1 \alpha_2} m \right]$$

a) $\alpha_1 \alpha_2$ de même signe. Posons :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha \operatorname{ch} V \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha \operatorname{sh} V$$

les solutions précédentes prennent la forme :

$$z = e^{\sigma \operatorname{ch} V} \times \begin{cases} \text{ch} \\ \text{ou} \\ \text{sh} \end{cases} \left[\lambda \operatorname{ch} V \right]$$

où :

$$\sigma = a l + \frac{m}{\alpha} \quad \lambda = a l + \frac{m}{\alpha}$$

b) α_1, α_2 de signes contraires. Posant :

$$\alpha_2 + \alpha_1 = 2\alpha \operatorname{sh} V \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha \operatorname{ch} V .$$

on obtient :

$$z = e^{\lambda \operatorname{sh} V} \times \begin{array}{c} \operatorname{ch} \\ \text{ou} \\ \operatorname{sh} \end{array} \left[\sigma \operatorname{ch} V \right] \quad \sigma, \lambda : \text{voir } \S a$$

c) α_1, α_2 nombres imaginaires conjugués :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha \cos V \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha i \sin V$$

On obtient les 2 solutions réelles :

$$z = e^{\sigma \cos V} \times \begin{array}{c} \cos \\ \text{ou} \\ \sin \end{array} \left[\lambda \sin V \right]$$

2° *Dérivation.* — Dérivant par rapport à α la solution fondamentale on obtient la solution :

$$z = \lambda e^{\sigma} \quad \sigma, \lambda : \text{voir } \S a$$

3° *Intégration.* — On obtient la solution :

$$z = \int_c e^{\alpha l + \frac{m}{\alpha}} f(\alpha) d\alpha$$

On peut supposer la variable α *complexe* et l'intégration effectuée sur un contour du plan de cette variable. Envisageons en particulier un petit contour fermé entourant l'origine ($\alpha = 0$) et à l'intérieur duquel la fonction $f(\alpha)$ est uniforme et n'a d'autre pôle que l'origine. Le résultat de l'intégration s'obtient en multipliant par $2\pi i$ le coefficient (résidu) de $\frac{1}{\alpha}$ dans le développement de

$f(\alpha) e^{\alpha l + \frac{m}{\alpha}}$ en série de Laurent.

Exemple : Soit :

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha}$$

On obtient :

$$z = 1 + \frac{lm}{(1!)^2} + \frac{l^2m^2}{(2!)^2} + \dots + \frac{l^pm^p}{(p!)^2} + \dots$$

On reconnaît dans cette série le développement de :

$$J_0(2i\sqrt{lm})$$

$J_0(x)$ étant la fonction de Bessel, solution de l'équation :

$$\frac{d^2 J_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_0}{dx} + J_0 = 0$$

$J_0(2i\sqrt{lm})$ est une solution bien connue de l'équation (6).

Toute solution $z(l, m)$ est représentable au voisinage d'un point ordinaire par une telle intégrale effectuée sur un contour fermé entourant l'origine. En effet la fonction z est bien définie au voisinage du point envisagé (que nous prendrons comme origine $l = 0, m = 0$) par sa valeur ainsi que celles de ses dérivées successives en ce point. Or ces dérivées s'obtiennent en dérivant la formule initiale :

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \int e^{al + \frac{m}{a}} \alpha f(\alpha) d\alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial m} = \int e^{al + \frac{m}{a}} \frac{f(\alpha)}{\alpha} d\alpha$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial l^2} = \int e^{al + \frac{m}{a}} \alpha^2 f(\alpha) d\alpha \text{ etc...}$$

Soit :

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} (a_0 + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} + \dots + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \dots)$$

le développement de la fonction inconnue $f(\alpha)$ en série de Laurent. On a alors :

$$\begin{aligned} z_0 &= \int f(\alpha) d\alpha = 2\pi ia_0 \\ \left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_0 &= \int \alpha f(\alpha) d\alpha = 2\pi ia_1 \\ \left(\frac{\partial z}{\partial m}\right)_0 &= \int \frac{f(\alpha)}{\alpha^2} d\alpha = 2\pi ib_1 \\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial l^2}\right)_0 &= \int \alpha^2 f(\alpha) d\alpha = 2\pi ia_2 \\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial m^2}\right)_0 &= \int \frac{f(\alpha)}{\alpha} d\alpha = 2\pi ib_2 \end{aligned}$$

etc... (les dérivées par rapport à 2 lettres différentes telles que $\frac{\partial^2 z}{\partial l \partial m}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial l \partial m^2}$ se ramènent par l'équation (6) aux dérivées précédentes). Les différents termes du développement de $f(\alpha)$ sont donc parfaitement déterminés.

ROTATION DU RÉSEAU. — Il est bien évident qu'en l'absence de forces massiques on peut d'une solution déduire, par une rotation, une solution plus générale renfermant un paramètre variable. Cela revient, ε et γ étant exprimés au moyen de S et θ (au lieu de u et v) à remplacer θ par $\theta + \alpha$ (α : constante arbitraire). On obtient donc une solution nouvelle en dérivant par rapport au paramètre, c'est-à-dire par rapport à θ .

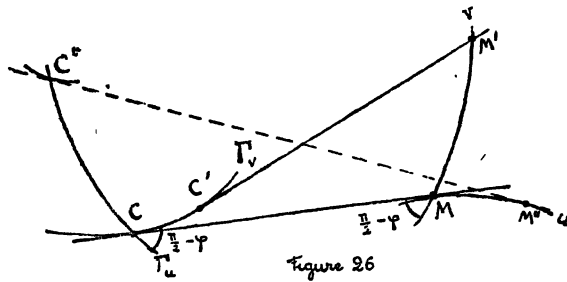
RÉSEAUX DÉRIVÉS. — Dans le cas où : $\alpha(S) = C^{\text{te}}$, les équations (5) restent vérifiées lorsqu'on remplace dans les expressions de ε et γ , S par $S + \beta$ (β : constante arbitraire). Ceci revient, pour un milieu pulvérulent ⁽¹⁾, à multiplier les contraintes par un facteur constant.

(1) Milieu vérifiant la condition de Coulomb avec H (ou ω) nul. Cf. pages 19 et 50.

Cette propriété jointe à la précédente, montre que l'on peut remplacer séparément l par $l + \lambda$ et m par $m + k$ (h, k : constantes arbitraires). On obtient donc des solutions nouvelles en dérivant ϵ γ soit par rapport à l , soit par rapport à m (évident sur l'équation 6). Les réseaux marginaux de ces 2 solutions dérivées (réseaux dérivés) peuvent, dans le cas d'une C. I. rectiligne, se déduire du réseau primitif par un processus remarquable.

Envisageons, tout le long d'une ligne v (ou m variable) les tangentes aux lignes u qui la croisent. Ces tangentes enveloppent une courbe que je nomme « *développée oblique* de la ligne v . La tangente en M touche la développée en C .

Quand M décrit une ligne u , C décrit une courbe Γu . Quand M décrit une ligne v , C décrit une développée Γv . Les lignes $\Gamma u, \Gamma v$ forment un réseau que j'appelle « *dérivé par rapport aux lignes v* » du réseau initial. On peut montrer que ce réseau correspond à la solution obtenue en



dérivant par rapport à v (ou m), la solution qui fournit le réseau initial.

Il existe également un réseau « *dérivé par rapport aux*

lignes u » qui correspond à la solution initiale dérivée par rapport à u (ou l).

On remarque sur la figure 26 que la ligne $M M''u$ est la développée oblique de la ligne Γu . Par conséquent le réseau initial est dérivé du réseau $\Gamma u \Gamma v$ par rapport aux lignes u . Analytiquement ce fait s'explique de la façon suivante : soit z la solution initiale, z' la solution correspondant aux lignes $\Gamma u, \Gamma v$. L'égalité :

$$z' = \frac{\partial z}{\partial m}$$

entraîne :

$$z = \frac{\partial^2 z}{\partial l \partial m} = \frac{\partial z'}{\partial l}$$

DIFFÉRENTIELLE TOTALE FORMÉE A PARTIR DE DEUX SOLUTIONS. — ε_1, γ_1 et ε_2, γ_2 étant 2 solutions du système (5) on vérifie immédiatement que l'expression :

$$(9) \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 du + \gamma_1 \gamma_2 dv$$

est une différentielle totale.

Cette propriété correspond pour le système 5 à la propriété classique de l'équation du 2^e ordre de Laplace, qui permet de former une différentielle totale à partir d'une solution de cette équation et d'une solution de son adjointe.

APPLICATION: INTÉGRATION DU SYSTÈME (5). — L'intégrale

$$\int_C \varepsilon_1 \varepsilon_2 du + \gamma_1 \gamma_2 dv$$

effectuée le long d'un contour fermé C à l'intérieur duquel les fonctions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2$ ainsi que leurs dérivées premières sont continues, est nulle. On en déduit un pro-

cédé d'intégration qui équivaut, pour le système (5), à la méthode de Riemann pour l'équation de Laplace.

Supposons les valeurs de ε , γ données sur un arc L du plan u , v ; proposons-nous de les calculer en un point ω de coordonnées u_0 , v_0 . Par ω menons les 2 lignes $\omega\alpha$ parallèle à Ou , $\omega\beta$ parallèle à Ov . (Nous supposons ici que chacune de ces lignes ne coupe l'arc L qu'en un point). Puis appliquons l'égalité :

$$\int_{\mathcal{C}} \varepsilon \varepsilon' du + \gamma \gamma' dv = 0$$

au contour triangulaire $\omega\beta\alpha$ en prenant pour ε' , γ' une solution ⁽¹⁾ du système (5) telle que :

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= 0 && \text{sur } \omega\alpha, \text{ c'est-à-dire pour } v = v_0 \\ \gamma' &= -\frac{1}{a(S)} && \text{sur } \omega\beta, \text{ c'est-à-dire pour } u = u_0 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\int_{\omega\beta} -\frac{\gamma}{a(S)} dv + \int_{\beta\alpha} \varepsilon \varepsilon' du + \gamma \gamma' dv = 0$$

ou, puisque :

$$\frac{\gamma}{a(S)} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}$$

$$(10) \quad \varepsilon_{\omega} = \varepsilon_{\beta} + \int_{\beta\alpha} \varepsilon \varepsilon' du + \gamma \gamma' dv$$

De même pour calculer γ_{ω} appliquons l'égalité :

$$\int_{\mathcal{C}} \varepsilon \varepsilon'' du + \gamma \gamma'' dv = 0$$

(1) L'existence et l'unicité d'une telle solution ainsi que l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy, peuvent s'établir par la méthode des approximations successives de E. Picard (IX).

au contour $\alpha\omega\beta\alpha$ en prenant pour ε'' , γ'' une solution du système (5) telle que :

$$\begin{aligned}\varepsilon'' &= -\frac{1}{a(S)} \text{ sur } \omega\alpha (v = v_0) \\ \gamma'' &= 0 \text{ sur } \omega\beta (u = u_0)\end{aligned}$$

On obtient :

$$(10') \quad \gamma_\omega = \gamma_\alpha + \int_{\alpha\beta} \varepsilon\varepsilon'' du + \gamma\gamma'' dv$$

Les solutions auxiliaires ε' , γ' , ε'' , γ'' dépendent du point ω ; leurs valeurs varient donc, non seulement avec le point p envisagé sur le contour L, mais encore avec le point ω . Ecrivons pour cette raison :

$$\varepsilon'(p; \omega) \quad \text{ou} \quad \varepsilon'(u, v; u_0, v_0)$$

En fait les solutions auxiliaires relatives aux différents points ω forment une infinité simple.

En effet :

1°) On a :

$$\begin{aligned}\gamma''(u, v; u_0, v_0) &= \varepsilon'(v, u; v_0, u_0) \\ \varepsilon''(u, v; u_0, v_0) &= \gamma'(v, u; v_0, u_0)\end{aligned}$$

2°) Si l'on prend comme variables S et θ au lieu de u et v , chaque solution ne renferme θ et θ_0 que par leur différence. D'où : $\varepsilon'(S, \theta - \theta_0, S_0)$. Une solution particulière dépend donc seulement de S_0 .

Enfin lorsque $a(S) = C^{te}$, chaque solution ne renferme S et S_0 que par leur différence. D'où :

$$\varepsilon'(S - S_0, \Theta - \Theta_0) \quad \text{ou} \quad \varepsilon'(u - u_0, v - v_0)$$

(1) On peut vérifier que les expressions données par les formules (10) et (10') satisfont bien au système (5) et aux conditions imposées sur L.

Toutes les solutions se ramènent donc à une seule. Posons d'ailleurs, dans ce cas :

$$s = z \quad \gamma = -\frac{\partial z}{\partial m} \quad a(S) \quad \gamma' = -\psi \quad a(S) \quad \varepsilon' = \frac{\partial \psi}{\partial l}$$

z et ψ étant solutions de l'équation (6). La solution ψ astreinte aux conditions :

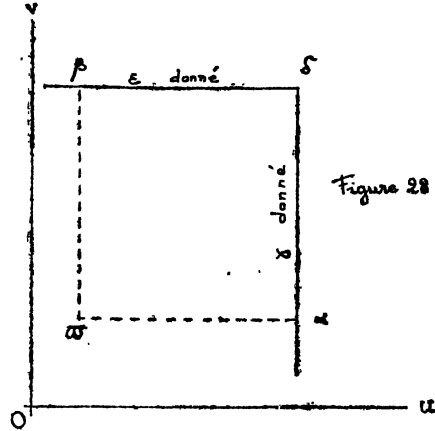
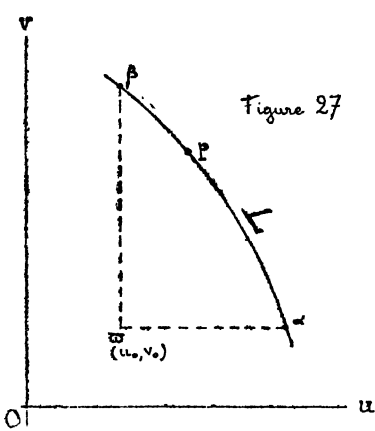
$$\begin{aligned} \psi &= 1 \text{ sur } \omega\beta \\ \psi &= \text{Cte donc } = 1 \text{ sur } \omega\alpha \end{aligned}$$

est :

$$\psi = J_0 [2i \sqrt{(l - l_0)(m - m_0)}]$$

La relation (10) devient dans ce cas :

$$z_\omega = z_\beta + \int_{\beta\alpha} z \frac{\partial \psi}{\partial l} dl + \psi \frac{\partial z}{\partial m} dm$$



CONTOUR COMPOSÉ DE DEUX CARACTÉRISTIQUES CONCOURANTES. — Le long d'un tel contour on ne peut se donner simultanément ε et γ (leurs valeurs étant liées par les équations 5). Mais on pourra, par exemple, se donner ε

sur $\delta\beta$ et γ sur $\delta\alpha$ (fig. 28). Les relations (10) et (10') fournissent encore la solution définie par ces conditions :

$$(10'') \quad \begin{cases} \varepsilon_{\omega} = \varepsilon_{\beta} + \int_{\beta\delta} \varepsilon\varepsilon' du + \int_{\delta\alpha} \gamma\gamma' dv \\ \gamma_{\omega} = \gamma_{\alpha} + \int_{\alpha\delta} \varepsilon\varepsilon'' du + \int_{\delta\beta} \gamma\gamma'' dv + \end{cases}$$

PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE. — ε_1, γ_1 et ε_2, γ_2 étant 2 solutions distinctes du système (5), ε, γ deux fonctions de u et v , si les 2 expressions :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \varepsilon du + \gamma_1 \gamma dv \\ \varepsilon_2 \varepsilon du + \gamma_2 \gamma dv \end{aligned}$$

sont des différentielles totales, ε, γ est aussi une solution du système (5).

Solutions distinctes signifie solutions non proportionnelles.

En effet, la première expression étant différentielle totale, on a :

$$\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial v} + \varepsilon_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = \gamma \frac{\partial \gamma_1}{\partial u} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma}{\partial u}$$

d'où, en tenant compte des relations (5) :

$$\varepsilon_1 \left[a(S) \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + \gamma \right] = \gamma_1 \left[a(S) \frac{\partial \gamma}{\partial u} + \varepsilon \right]$$

De même :

$$\varepsilon_2 \left[a(S) \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + \gamma \right] = \gamma_2 \left[a(S) \frac{\partial \gamma}{\partial u} + \varepsilon \right]$$

On en déduit si le déterminant $\begin{vmatrix} \varepsilon_1, & \gamma_1 \\ \varepsilon_2, & \gamma_2 \end{vmatrix}$ est différent

de zéro, les 2 équations (5) vérifiées par les fonctions ε, γ .

Application : Cette réciproque est valable notamment lorsque, ε_1, γ_1 étant une solution *quelconque* du système (5), l'expression : $\varepsilon_1 \varepsilon du + \gamma_1 \gamma dv$ est une différentielle totale. Ceci permet d'obtenir un certain nombre de solutions particulières du système (5).

Exemples : 1°) L'expression (7) du chapitre III, qui donne dx est une différentielle totale, ε, γ étant une solution quelconque du système (5). On en déduit que :

$$\varepsilon = \frac{\cos\left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\tau}} \quad \gamma = \frac{\cos\left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\tau}}$$

est une solution particulière du système (5).

L'expression de dy fournit une solution qui ne déduit simplement de la première par rotation de $-\frac{\pi}{2}$.

2°) L'expression (8) de dX est une différentielle totale.

On en déduit que :

$$\varepsilon = \frac{\nu}{\sqrt{\tau}} \sin\left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{\tau} \cos\left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\gamma = \frac{\nu}{\sqrt{\tau}} \sin\left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \sqrt{\tau} \cos\left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

est une solution particulière du système (5).

La solution particulière déduite de l'expression de dY se déduit de la précédente par rotation de $-\frac{\pi}{2}$.

3°) Nous rencontrerons plus loin les différentielles totales :

$$d\xi = e^{-\Sigma} (\varepsilon du + \gamma dv)$$

$$d\eta = e^{\Sigma} (-\varepsilon du + \gamma dv)$$

où :

$$\Sigma = \int \frac{dS}{a(S)}$$

On en déduit que :

$$\varepsilon = \gamma = e^{-\Sigma}$$

et :

$$\varepsilon = -\gamma = e^{+\Sigma}$$

sont deux solutions particulières du système (5).

LIGNES REMARQUABLES. — Il est parfois utile de considérer d'autres lignes remarquables que les lignes marginales ainsi que leurs « images » dans le plan uv (c'est-à-dire les lignes $v = f(u)$ correspondantes). L'orientation de la tangente à une ligne dans le massif plastique est liée à l'orientation de la tangente à son image, car, des relations (7), on déduit :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\Theta + \Omega)$$

en posant :

$$(11) \quad \operatorname{tg} \Omega = \frac{\gamma dv - \varepsilon du}{\gamma dv + \varepsilon du} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Ω est l'angle de la ligne avec la direction principale majeure.

En un point M déterminé, cette relation (11) établit une correspondance homographique entre la tangente à une ligne et la tangente à son image.

J'appelle lignes *isoclines* les lignes $\Theta = C^{\text{te}}$ le long desquelles la sollicitation conserve une orientation invariable, lignes *isobares* les lignes $S = C^{\text{te}}$ le long desquelles la sollicitation conserve une grandeur invariable.

En vertu de la correspondance homographique signalée ci-dessus, les directions isocline et isobare sont conjuguées harmoniques par rapport aux directions marginales, puisque, dans le plan uv , elles sont bissectrices de l'angle des directions marginales.

ISOBARES REMARQUABLES. — Il peut exister deux isobares particulières remarquables dans le cas où la C. I. est arrondie en son sommet (pas de point anguleux). Dans ce cas, S tend pour le sommet vers une valeur finie qui en est la borne inférieure et que nous pouvons prendre nulle. L'isobare $S = 0$ est l'*isobare limite*. Elle constitue aussi bien dans le plan uv que dans l'espace xy une frontière que ne peut dépasser le domaine en équilibre limite.

D'autre part cherchons comment varie, le long d'une ligne marginale, l'orientation de la tangente à cette ligne. On a, pour une ligne u :

$$d\Theta_u = d \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = du \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} \right)$$

Pour une ligne v :

$$d\Theta_v = d \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = -dv \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} \right)$$

Il y a donc inflexion des lignes marginales à la traversée de l'isobare pour laquelle :

$$1 + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} = 0$$

Cette *isobare d'inflexion* existe effectivement si, la C. I. étant représentée au voisinage du sommet par l'équation :

$$v = \lambda \tau^m \quad (1 < m \leq 2)$$

on a :

$$m > \frac{3}{2}$$

LIGNES ISOSTATIQUES. — Ce sont les lignes tangentes en chacun de leurs points à une direction principale. Les images de ces lignes se déterminent aisément de la façon suivante :

a) isostatiques tangentes à la contrainte principale majeure n_1 . On a : $\Omega = 0$, d'où :

$$\varepsilon(u, v) du - \gamma(u, v) dv = 0$$

b) isostatiques tangentes à la contrainte principale mineure n_2 . $\Omega = \frac{\pi}{2}$ d'où :

$$\varepsilon(u, v) du + \gamma(u, v) dv = 0$$

Ces équations s'intègrent par l'emploi d'un facteur intégrant. Soit $\lambda(u, v)$ un facteur intégrant de la première équation. On doit avoir :

$$\varepsilon \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \gamma \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) = 0$$

ou :

$$\gamma \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \varepsilon \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\lambda}{a(S)} (\gamma + \varepsilon)$$

La solution de cette équation linéaire aux dérivées partielles s'obtient en considérant le système différentiel :

$$\frac{du}{\gamma} = \frac{dv}{\varepsilon} = \frac{a(S) d\lambda}{\lambda(\gamma + \varepsilon)}$$

On en tire :

$$\frac{a(S) d\lambda}{\lambda(\gamma + \varepsilon)} = \frac{d(u + v)}{\gamma + \varepsilon}$$

d'où une intégrale première :

$$\lambda = Ce^{\Sigma} \quad \text{où :} \quad \Sigma = \int \frac{dS}{a(S)}$$

qui fournit un facteur intégrant.

De même : $\mu = Ce^{-\Sigma}$ est un facteur intégrant de la seconde équation différentielle.

Posons alors :

$$(12) \quad \begin{cases} d\xi = e^{-\Sigma} (\varepsilon du + \gamma dv) \\ d\eta = e^{\Sigma} (-\varepsilon du + \gamma dv) \end{cases}$$

Le résultat de l'intégration de ces 2 différentielles totales peut être mis sous une forme assez remarquable.

Prenons comme variables S et θ au lieu de u et v :

$$d\xi = \frac{1}{2} e^{-\Sigma} [(\varepsilon + \gamma) dS + (\varepsilon - \gamma) d\theta]$$

et intégrons par rapport à θ . Nous obtenons :

$$(13) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2} e^{-\Sigma} (E - \Gamma) \\ \eta = -\frac{1}{2} e^{\Sigma} (E + \Gamma) \end{cases}$$

avec :

$$\frac{\partial E(S, \Theta)}{\partial \Theta} = \varepsilon \quad \frac{\partial \Gamma(S, \Theta)}{\partial \Theta} = \gamma$$

Mais E et Γ ne sont ainsi définis qu'à une fonction arbitraire de S près. Pour les préciser, tirons des relations (13) :

$$\begin{aligned} E &= \xi e^{\Sigma} - \eta e^{-\Sigma} \\ \Gamma &= -\xi e^{\Sigma} - \eta e^{-\Sigma} \end{aligned}$$

et différencions. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} dE &= e^{\Sigma} d\xi - e^{-\Sigma} d\eta + (\xi e^{\Sigma} + \eta e^{-\Sigma}) d\Sigma \\ &= 2\varepsilon du - \frac{\Gamma}{a(S)} (du + dv) \end{aligned}$$

D'où la condition :

$$a(S) \frac{\partial E}{\partial v} = -\Gamma$$

De même, on obtiendrait en formant $d\Gamma$ la condition :

$$a(S) \frac{\partial \Gamma}{\partial u} = -E$$

On en déduit que : *les fonctions E et Γ forment une solution du système (5) dont la solution initiale $\varepsilon\gamma$ se déduit en dérivant par rapport à θ .*

ξ, η étant déterminés par les formules (13), les isostatiques seront les courbes : $\xi(u, v) = C^{te}$ (tangentes à la contrainte mineure n_2) et $\eta(u, v) = C^{te}$ (tangentes à la contrainte majeure n_1).

REMARQUE. — Aux points correspondants dans deux équilibres réciproques, on a :

$$u' = -v \quad v' = -u \quad \varepsilon' = -\gamma \quad \gamma' = \varepsilon \quad \Sigma' = -\Sigma$$

d'où :

$$d\xi' = d\eta \quad d\eta' = -d\xi$$

On en déduit :

$$\xi' = \eta \quad \eta' = -\xi$$

et par suite :

$$E' = -\Gamma \quad \Gamma' = -E$$

Nous vérifions que, dans 2 équilibres réciproques, les lignes isostatiques se correspondent, avec échange des familles.

L'utilisation des lignes isostatiques comme courbes de référence (au lieu des lignes marginales) peut rendre certains services. On peut en déduire par exemple que certains réseaux d'isostatiques sont valables pour toutes les C. I. rectilignes (quel que soit φ). Le réseau cercles concentriques-rayons vecteurs, qui correspond à l'équilibre d'une couche cylindrique (2 équilibres possibles) est le seul qui soit valable pour n'importe quelle C. I. Nous le nommons, pour cette raison, *réseau universel*.

CHAPITRE V

SINGULARITÉS DES SOLUTIONS

L'utilisation des solutions particulières présente certaines difficultés peu courantes dans les problèmes de physique mathématique. Ces difficultés proviennent de l'interversion des variables et des fonctions à laquelle nous avons été conduits. Les relations (7) du chapitre III nous donnent x et y en fonction explicite de u et v . Dans ces conditions : alors qu'à un point x, y correspond, dans la réalité, une sollicitation u, v bien déterminée, la sollicitation pouvant d'ailleurs être la même pour plusieurs points, c'est l'inverse que nous procure notre solution : à une sollicitation, elle fait correspondre un point et un seul, ce point pouvant d'ailleurs être le même pour plusieurs sollicitations différentes. Le domaine analytique d'une telle solution peut donc être à la fois trop étroit et trop large :

trop étroit : parce qu'une seule solution $\varepsilon(u, v), \gamma(u, v)$ ne peut pas représenter des équilibres, cependant physiquement possibles, où la même sollicitation existe en plusieurs points.

trop large : parce qu'une même solution peut donner en un point plusieurs sollicitations différentes, ce qui est physiquement impossible.

Nous serons amenés :

1°) à élargir ce domaine en associant plusieurs solutions;

2°) à le restreindre, de façon qu'à un point ne corresponde plus qu'une sollicitation.

Appelons point *support* un point du massif plastique de coordonnées xy , point *image* le point correspondant de coordonnées u, v . Il y a entre ces 2 points une correspondance que l'on peut traduire de la façon suivante : le point de coordonnées x, y, u, v dans un espace à 4 dimensions décrit une variété V à 2 dimensions. Les difficultés mentionnées ci-dessus se résolvent par la recherche des points ou lignes singuliers où la correspondance support-image ou la correspondance inverse se ramifient. Ces points ou lignes sont ceux où le jacobien

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = EG \cos \varphi = \frac{\varepsilon \gamma}{\tau} \cos \varphi$$

devient nul ou infini.

LIGNES DE REBROUSSEMENT OU CONTACT. — Etudions la correspondance au voisinage d'une ligne $\varepsilon(u, v) = 0$ (ou $\gamma(u, v) = 0$). Soit $v = f(u)$ une ligne quelconque traversant en m dans le plan u, v la ligne $\varepsilon = 0$. Il lui correspond dans le massif une ligne tangente à la ligne support $\varepsilon = 0$. En effet, pour l'une et l'autre de ces 2 lignes la

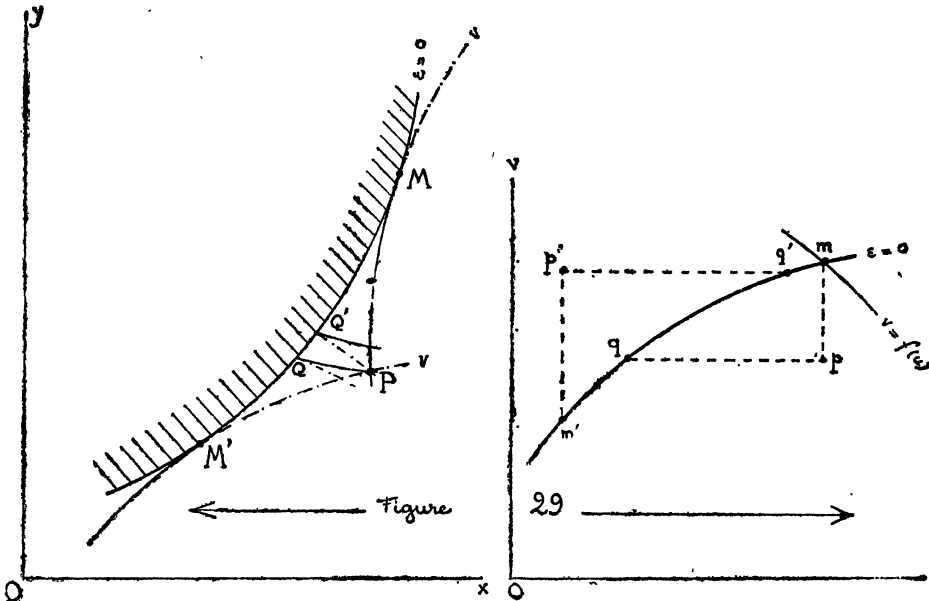
composante $\frac{\varepsilon \, du}{\sqrt{\tau}}$ de l'élément d'arc suivant la direction

marginale u est nulle; ces deux lignes ont donc la direction marginale v comme tangente commune. Il y a exception seulement pour la ligne marginale u ou les lignes qui lui sont tangentes en m dans le plan u, v ($f'(u) = 0$); car pour les lignes support correspondantes la composante de

l'arc suivant la seconde direction marginale v se trouve (dv étant nul) du même ordre que la composante suivant la direction u .

Les lignes supports tangentes à la ligne $\epsilon = 0$ ne traversent pas (en général) cette ligne. Donc à deux points images situés de part et d'autre de la ligne image $\epsilon = 0$ correspondent 2 points supports situés du même côté de la ligne support $\epsilon = 0$.

Les lignes u (ou plus généralement $v = f(u)$ avec $f'(u) = 0$) aboutissent obliquement dans le massif à la



ligne $\epsilon = 0$. D'après ce que nous venons de voir, elles ne peuvent la traverser. Elles présentent donc un rebroussement.

Pour ces raisons nous appellerons *ligne de rebroussement ou contact* la ligne $\varepsilon = 0$ du massif : elle est un lieu de points de rebroussement des lignes u ; elle est l'enveloppe des lignes v .

De même la ligne $\gamma = 0$ du massif est un lieu de points de rebroussement des lignes v ; elle est aussi l'enveloppe des lignes u .

Par un point P du plan x, y , situé d'un côté convenable de la ligne de rebroussement, passent 2 lignes v tangentes à la précédente ligne en M et M'. Suivant que l'on envisage l'une ou l'autre de ces lignes on obtient pour P une image (p ou p') située d'un côté ou de l'autre de la ligne image $\varepsilon = 0$. (En effet de P à M et de P à M' les sens de variation de v sont opposés). Par P passent également 2 lignes u : les arcs PQ et PQ' appartiennent par rapport au rebroussement à 2 branches différentes des lignes u .

Pour avoir entre les points supports P et les points images p une correspondance univoque, il est nécessaire de limiter le domaine image à la courbe $\varepsilon = 0$; les lignes marginales sont alors arrêtées à leur point de contact avec la ligne $\varepsilon = 0$ ou à leur point de rebroussement. On obtient de cette façon 2 équilibres limites, l'un correspondant aux parties des lignes marginales tracées en traits pleins, l'autre aux parties tracées en tirets sur la figure 29.

Toutes les particularités précédentes de la correspondance s'expliquent synthétiquement de la façon suivante :

Les lignes $\varepsilon = 0$ et $\gamma = 0$ appartiennent au contour apparent de la variété V en projection sur le plan x, y . 2 nappes de V séparées par le contour apparent se recouvrent en projection. Les lignes tracées sur V sont, en pro-

jection, tangentes au contour apparent ou (exceptionnellement) présentent un rebroussement sur ce contour.

LIGNES D'INFLEXION. — $\varepsilon(u, v)$ [ou $\gamma(u, v)$] infini. Une telle ligne sépare 2 nappes de V qui se recouvrent en projection sur le plan u, v . C'est une ligne de contour apparent pour la variété V ainsi que pour les surfaces $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ (projections de V dans les espaces à 3 dimensions x, u, v et y, u, v). En effet pour $\varepsilon \infty$ on a (relations (7)) $\frac{\partial x}{\partial u}$ (et $\frac{\partial y}{\partial u}$) ∞ .

Si de plus on suppose γ fini, $\frac{\partial n}{\partial v}$ est fini (de même

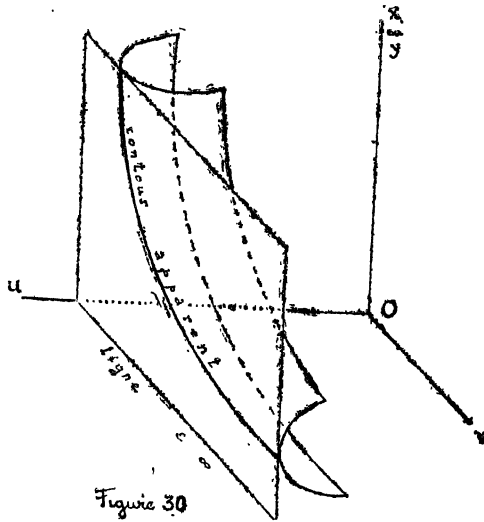


Figure 30

$\frac{\partial y}{\partial v}$): la tangente au contour apparent en projection est de direction fixe, parallèle à Ov : la projection du contour

est donc une droite parallèle à Ov . Autrement dit la ligne $\epsilon \infty$ est une ligne v (fig. 30).

Ceci étant, toute ligne tracée sur V autre qu'une ligne u ou une ligne tangente à la précédente à la traversée du contour apparent se projette sur le plan uv suivant une courbe tangente à la droite $\epsilon \infty$.

Exceptionnellement les lignes u (ou les lignes qui leur sont tangentes dans le massif à la traversée de la ligne $\epsilon \infty$) ont leur tangente perpendiculaire au plan uv et par suite présentent un rebroussement en projection sur le plan uv . En projection sur le plan xy , les lignes u présentent une inflexion car, du changeant de signe, il en est de même de

$$d\Theta_u = du \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS} \right)$$

Nous appellerons, pour cette raison, *ligne d'inflexion* la ligne $\epsilon \infty$ du massif.

De même une ligne $\gamma \infty$ est une courbe u ; elle est ligne d'inflexion pour les courbes v dans le massif.

Indiquons sommairement un raisonnement plus complet qui retrouve et précise les résultats précédents :

1°) ϵ ou γ ne peuvent devenir infinis en un point isolé; les lignes $\epsilon \infty$ ou $\gamma \infty$ sont nécessairement des lignes marginales.

Appliquons les relations (10) et (10') à un arc $\alpha \beta$ le long duquel ϵ et γ sont finis extrémités comprises. On en déduit que ϵ et γ sont aussi finis en ω (fig. 27).

S'il existait un point $\epsilon \infty$ isolé ou une ligne $\epsilon \infty$ non marginale nous pourrions leur appliquer ce résultat en

prenant pour $\alpha \beta$ un arc voisin du point ou de la ligne considérés. Ces 2 hypothèses seraient donc contredites, elles sont à rejeter.

Le raisonnement est toutefois en défaut si le point isolé ou la ligne envisagée font partie de l'isobare limite, car dans ce cas ε'' et γ' deviennent infinis en ω ($a(S) = 0$) et les formules (10) et (10') peuvent donner un résultat infini. Laissons de côté ce cas qui est étudié par la suite.

2°) Si sur une ligne u ou v , ε et γ sont tous deux infinis, la ligne support est rejetée à l'infini. En effet entre 2 points de cette ligne, la distance est infinie, qu'il s'agisse d'une ligne u , car, dans ce cas :

$$\Delta x = \int \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \cos\left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) du$$

ou d'une ligne v , pour laquelle :

$$\Delta x = \int \frac{\gamma}{\sqrt{\tau}} \cos\left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) dv$$

3°) Supposons maintenant ε infini et γ fini. On peut préciser que la ligne marginale est une ligne v .

En effet, s'il n'en était pas ainsi on en déduirait que $\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}$ et par suite γ sont infinis sur la ligne ce qui est contraire à l'hypothèse.

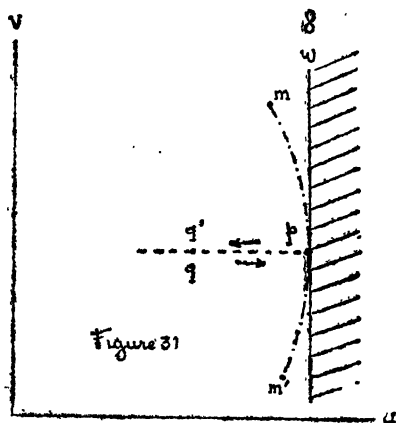
Dans ces conditions, la ligne support $\varepsilon \infty$ est à distance finie. En effet, soit p un point de la ligne image, dont nous cherchons le support P; soit q un point de la même

ligne u que p et dont le support Q est à distance finie.

On a :

$$x_P - x_Q = \int_{qp} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \cos \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) du$$

$$y_P - y_Q = \int_{qp} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) du$$



Ces intégrales ont même nature de convergence que la suivante :

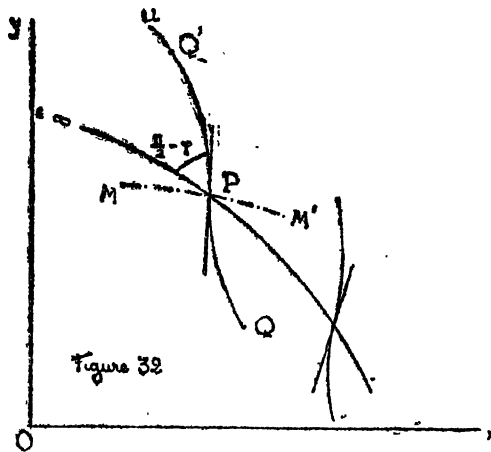
$$\int_{qp} \frac{\varepsilon}{a(S)} du = - \int_{qp} \frac{\partial \gamma}{\partial u} du = \gamma_q - \gamma_p$$

qui est finie.

4°) Une solution obtenue sous la forme des relations (7) ne présente évidemment pas de recouvrement en projection sur le plan uv . Le domaine d'une telle solution est donc limité à la ligne $\varepsilon = \infty$. Cela tient à la forme particulière

donnée à la solution : relations résolues par rapport à x et y pris comme fonctions inconnues de u et v (sous cette forme 2 nappes de V qui se recouvrent en projection uv se présentent comme deux solutions différentes).

Mais rien n'empêche de prolonger la solution dans le massif au delà de la ligne $\epsilon \infty$. Le problème est possible (problème de Cauchy) et même d'une infinité de façons, puisque la ligne $\epsilon \infty$ est marginale. Nous envisagerons en particulier une solution qui représente le prolongement analytique de la précédente, c'est-à-dire telle qu'il y ait continuité des dérivées, d'ordre plus élevé que le premier, de u et v par rapport à x et y , quand on passe d'un côté à l'autre de la ligne $\epsilon \infty$.



Dans ces conditions, ds_u étant l'élément d'arc de la ligne u au point P :

$$\frac{du}{ds_u} = \frac{\sqrt{\tau}}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \frac{d^2u}{ds_u^2}$$

sont continus. Donc $\frac{du}{ds_u}$ s'annule et change de signe. On en déduit que la ligne u présente une inflexion dans le massif et un rebroussement dans le plan uv .

Les résultats concernant les lignes images (tangentes à la ligne $\varepsilon \infty$ ou présentant un rebroussement) se déduisent ensuite immédiatement des relations (7) résolues par rapport à du et dv .

Par suite du recouvrement, à un même point image q correspondent 2 points du massif Q et Q' . C'est un inconvénient auquel on peut remédier de la façon suivante :

Imaginons l'image reportée non pas directement sur le plan uv mais sur des feuillets plans superposés et attachés le long de la ligne $\varepsilon \infty$ (ou $\gamma \infty$) de façon à former un pli ayant cette ligne pour arête. Ouvrons les plis, les différents feuillets apparaissent juxtaposés au lieu d'être superposés. Cette transformation revient à utiliser au lieu de u et v 2 paramètres nouveaux u' v' tels que :

1°)

$$\begin{aligned} |du'| &= |du| \\ \text{et} \quad |dv'| &= |dv| \end{aligned}$$

2°) u' ou v' varient toujours dans le même sens le long d'une ligne marginale (suivie dans le massif).

$\varepsilon du = ds_u \sqrt{\tau}$ gardant un signe constant lorsqu'on traverse une ligne d'inflexion, on peut prendre :

$$du' = \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} du \quad \text{et} \quad dv' = \frac{\gamma}{|\gamma|} dv$$

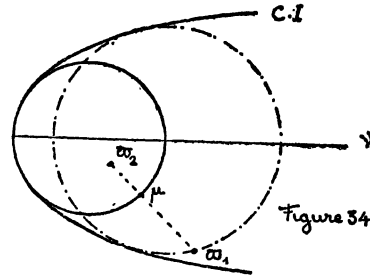
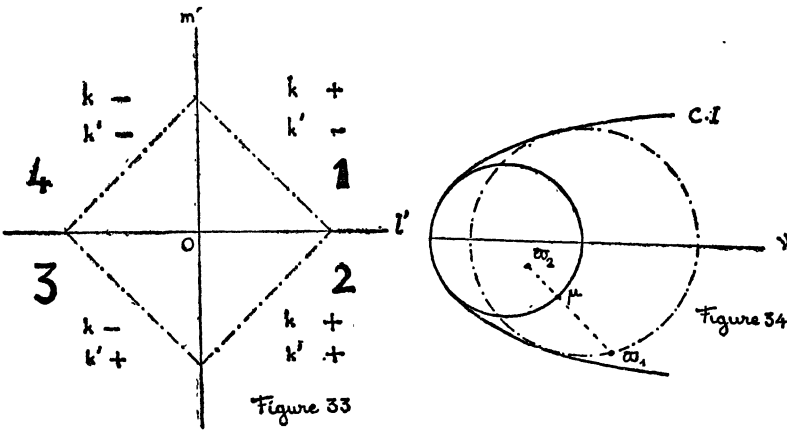
On obtient ainsi une représentation dans laquelle à un point figuratif u', v' correspond un seul point support.

Exemple : Envisageons, dans le cas où $\varphi = C^te$ les 4 solutions :

$$\varepsilon = z = k' \frac{e^{2kk' \sqrt{lm}}}{\sqrt{l}} \quad k, k' = \pm 1$$

$$\gamma = - \frac{\partial z}{\partial m} = - k' \frac{e^{2kk' \sqrt{lm}}}{\sqrt{m}}$$

Les lignes $l = 0$ ($\varepsilon \infty$) et $m = 0$ ($\gamma \infty$) sont lignes d'inflexion. Les 4 solutions correspondent à 4 feuillets d'une même variété, k changeant de signe quand on traverse la ligne $l = 0$, k' quand on traverse la ligne $m = 0$. Chaque feuillet occupe un quart de plan. Lorsqu'on ouvre les plis,



ce qui revient à prendre comme paramètre : $l' = kl$, $m' = -k' m$, les 4 feuillets forment un plan complet (fig. 33). Le domaine sollicité est également composé de

4 angles (alternativement égaux à $\frac{\pi}{2} - \varphi$ et $\frac{\pi}{2} + \varphi$) formant par leur réunion un plan complet.

ISOBARE LIMITE. — Le jacobien $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ devient infini pour $\tau = 0$. Dans le cas d'une C. I. à sommet arrondi nous sommes donc amenés à étudier l'isobare limite $S = 0$. Nous nous bornerons à une étude sommaire pour la raison suivante : Les parties de la C. I. voisines du sommet ne correspondent pas pratiquement à des écoulements plastiques, mais à des glissements destructifs de la cohésion. Pour le sommet de la C. I. il y a rupture par arrachement normal. L'existence stable d'une isobare limite est donc physiquement impossible. Cependant il n'est pas inutile de rechercher l'allure des différentes lignes remarquables lorsqu'on se rapproche du sommet, ce qui justifie les quelques considérations suivantes :

1°) *L'isobare limite est une frontière* du domaine en équilibre limite, comme son image est une frontière dans le plan uv . En effet cherchons à prolonger la solution au delà de l'isobare limite par le procédé exposé page 40. A deux points P_1, P_2 situés de part et d'autre de l'isobare limite correspondent 2 points ω_1, ω_2 situés de part et d'autre du cercle de Mohr osculateur au sommet de la C. I. (fig. 34). Par ω_2 intérieur à ce cercle on peut bien mener un cercle tangent à la C. I. (en son sommet); mais ce cercle n'est plus un cercle d'équilibre limite. Il n'y a donc équilibre limite possible que d'un seul côté de l'isobare limite.

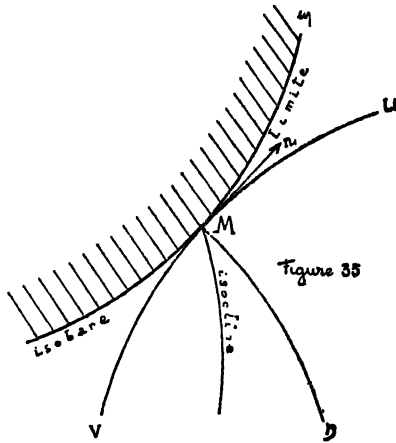
2°) τ étant nul, utilisons au lieu de ϵ et γ les quantités

E et G qui satisfont au système (4). Supposons d'abord que E et G restent finis ainsi que leurs dérivées premières. Alors les équations du système (4) fournissent toutes deux $E + G = 0$.

Les relations (7) se réduisent alors, puisque : $dS = 0$ à :

$$dx = E \cos \Theta d\Theta \quad dy = E \sin \Theta d\Theta$$

Ainsi toutes les courbes images pour lesquelles $\frac{du}{dv} \neq 1$ ont pour supports des lignes tangentes entre elles avec comme direction commune celle de la contrainte principale



maxima n_1 (fig. 35). Il en est ainsi en particulier de l'iso-bare limite qui, tangente à n_1 en tous ses points, est aussi l'isostatique ξ variable. Il en est également ainsi des 2 lignes marginales et l'on peut remarquer que les 2 lignes marginales se prolongent l'une l'autre (ceci tient à ce que, analytiquement, elles ne sont pas distinctes et n'apparaissent que comme 2 tronçons d'une même courbe).

L'isocline et l'isostatique η variable sont parmi les courbes exceptionnelles non tangentes à l'isobare limite.

Un exemple d'une telle isobare limite se rencontre dans l'équilibre d'une couche cylindrique lorsque la contrainte principale radiale est mineure

3°) Supposons maintenant E ou G (ou les 2 quantités) *infinis* pour $S = 0$.

Nous examinerons seulement le cas (qui n'est pas le seul possible) où il y a correspondance ponctuelle entre la droite $S = 0$ du plan uv et une courbe support située à distance finie. Le long de cette isobare limite on peut prendre θ comme paramètre variable et les relations (7) donnent, pour cette courbe :

$$dx = \left\{ (E - G) \cos \theta \right. \\ \left. + \lim_{\varphi = \frac{\pi}{2}} \left[(E + G) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \sin \theta \right\} \frac{d\theta}{2}$$

$$dy = \left\{ (E - G) \sin \theta \right. \\ \left. - \lim_{\varphi = \frac{\pi}{2}} \left[(E + G) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \cos \theta \right\} \frac{d\theta}{2}$$

On voit que $E - G$ doit être fini, c'est-à-dire que la limite du rapport $\frac{E}{G}$ quand S tend vers 0 doit être égale à 1.

Ceci étant la formule (11) donne $\Omega = 0$ si $\frac{dv}{du} \neq -1$.

Toutes les courbes images pour lesquelles $\frac{dv}{du} \neq -1$ ont

donc pour supports des lignes tangente à n_1 (lignes marginales, isocline, isostatique ξ variable) (fig. 36). L'isobare limite et l'isostatique η variable sont parmi les courbes exceptionnelles qui ont une tangente différente.

Un exemple d'une telle isobare limite se rencontre dans l'équilibre d'une couche cylindrique lorsque la contrainte principale radiale est majeure.

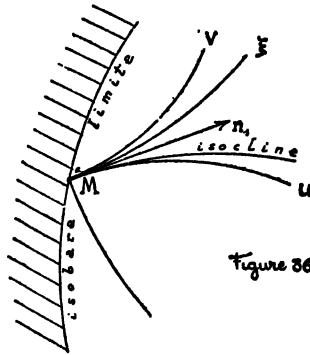


Figure 36

Remarquons pour terminer que, si particulière que soit la correspondance $xy - uv$ au voisinage de l'isobare limite, elle ne cesse pas d'être biunivoque.

POINTS CRITIQUES. — Dans le cas d'une C. I. présentant en son sommet un point anguleux, S tend pour le sommet vers $-\infty$. Les circonstances diffèrent alors beaucoup de celles du cas précédent. Des circonstances analogues se retrouvent d'ailleurs, lorsque les points de contact du cercle de Mohr avec la C. I. s'éloignent à l'infini (et ceci quelle que soit la forme de la C. I.): dans ce second cas, S tend vers $+\infty$. Ces deux cas s'étudient simultanément.

Considérons un point-image qui s'éloigne à l'infini sur la droite :

$$v = \alpha u + \beta$$

La position du point support est définie par les relations (7) intégrées :

$$x - x_0 = \int_{u_0}^U \left\{ E(u, \alpha u + \beta) \cos \left[u(1 - \alpha) - \beta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right] + \alpha G(u, \alpha u + \beta) \cos \left[u(1 - \alpha) - \beta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right] \right\} du$$

$y - y_0 =$ expression se déduisant de la précédente en remplaçant les cosinus par des sinus.

Suivant les solutions $E(u, v)$, $G(u, v)$ et suivant les valeurs de α et β , ces intégrales pourront, lorsque la limite d'intégration U tend vers l'infini, être divergentes ou convergentes.

Examinons le cas où les intégrales sont *convergentes*. Pour qu'il en soit ainsi il est nécessaire que $E(u, \alpha u + \beta)$ et $G(u, \alpha u + \beta)$ tendent tous deux vers zéro. Cette condition nécessaire est en général satisfaite pour un ensemble continu de valeurs de α et β . A l'intérieur de cet ensemble, la convergence est assez généralement réalisée, pour deux raisons : 1°) les intégrales portent en général sur des fonctions oscillantes dont l'amplitude d'oscillation décroît : elles convergent comme une série alternée à terme général décroissant ; 2°) les fonctions E et G , assujetties aux équations (4) tendent en général vers zéro plus vite que n'importe quelle puissance de $1/u$.

La démonstration de la convergence dans un cas parti-

culier se ramène à la vérification de l'une de ces deux propriétés.

1°) *Assimilation à une série alternée de terme général décroissant.* Elle est possible lorsque, pour des valeurs suffisamment grandes de u :

- a) $E(u, \alpha u + \beta)$ et G conservent des signes constants;
- b) Les valeurs absolues des rapports :

$$\frac{E}{1 - \alpha + \frac{1 + \alpha}{2} \frac{d\varphi}{dS}} \quad \text{et} \quad \frac{G}{1 - \alpha - \frac{1 + \alpha}{2} \frac{d\varphi}{dS}}$$

décroissent (u croissant) ou du moins ne croissent pas, (par cette dernière condition est exclu le cas des isoclines : $\alpha = 1$).

En effet, soit l'intégrale :

$$\int_{u_0}^{\infty} E(u, \alpha u + \beta) \cos \left[u(1 - \alpha) - \beta - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi(u + v) \right]$$

Prenons comme variable :

$$\omega = u(1 - \alpha) - \beta - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi \left[u(1 + \alpha) + \beta \right] + \frac{\pi}{2}$$

et posons :

$$E'(\omega) = \frac{E(u, \alpha u + \beta)}{1 - \alpha + \frac{1 + \alpha}{2} \frac{d\varphi}{dS}}$$

L'intégrale s'écrit :

$$\int_{\omega_0}^{\infty} E'(\omega) \sin \omega \, d\omega$$

Divisons l'intervalle $\omega_0 \infty$ en intervalles partiels dont

les limites sont les zéros successifs de $\cos \omega$. Nous formons une série de terme général :

$$\int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{E'(\omega)}{\pi} \sin \omega d\omega$$

série alternée, car $\frac{d\varphi}{dS}$ tendant vers 0, E' a le signe de

$\frac{E}{1-\alpha}$ signe constant pour ω assez grand.

série de terme général décroissant (ou ne croissant pas), car par suite de l'hypothèse b :

$$\begin{aligned} \left| \int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{E'(\omega)}{\pi} \sin \omega d\omega \right| &> \left| \int_{(p-1)\pi}^{p\pi} \frac{E'(p\pi)}{\pi} \sin \omega d\omega \right| \\ &= 2 \left| E'(p\pi) \right| \\ \left| \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{E'(\omega)}{\pi} \sin \omega d\omega \right| &< \left| \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \frac{E'(p\pi)}{\pi} \sin \omega d\omega \right| \\ &= 2 \left| E'(p\pi) \right| \end{aligned}$$

L'intégrale étudiée est donc convergente. Il en est de même pour des raisons analogues des intégrales contenant G , et par suite des intégrales x et y .

2°) *Rapidité de décroissance de E et G.* Il suffit, pour établir la convergence des intégrales, de prouver que :

$u^n E(u, \alpha u + \beta)$ et $u^n G(u, \alpha u + \beta)$
 n étant un nombre supérieur à 1, restent bornés supérieurement en valeur absolue.

La convergence étant assurée, supposons que, pour une valeur déterminée α_0 de α et pour toutes les valeurs de β comprises dans un intervalle $\beta_1 < \beta < \beta_2$, G (ou E) ten-

de *uniformément* vers zéro.

C'est ce qui a lieu en particulier si, dans tout l'intervalle $\beta_1 < \beta < \beta_2$ et pour $u > A$.

$u^n G(u, \alpha u + \beta)$ reste borné supérieurement en valeur absolue, n étant un nombre positif (qui peut être inférieur à 1), c'est-à-dire si, pour $u > A$ on a :

$$|u^n G(u, \alpha u + \beta)| < M$$

A et M étant des nombres indépendants de β .

Dans ce cas *les différents points I vers lesquels convergent les courbes supports relatives aux différentes valeurs de β coïncident.*

En effet, soit une ligne $u = u_0$ coupant les courbes précédentes en P et P' . L'arc PP' a pour grandeur :

$$\int_{\beta}^{\beta'} G(u_0, \alpha u_0 + \beta) d\beta = (\beta' - \beta) G(u_0, \alpha u_0 + \beta_i)$$

β_i étant une valeur comprise dans l'intervalle β, β' , donc à fortiori dans l'intervalle β_1, β_2 . Lorsqu'on fait tendre u_0 vers l'infini, P et P' tendent vers des points I et I' . D'autre part, l'arc PP tend vers 0 ($G(u_0, \alpha u_0 + \beta_i)$ tendant vers zéro). Donc I et I' sont confondus.

Supposons de même que, pour une valeur déterminée de β et pour toutes les valeurs de α comprises dans un intervalle $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ (pour lequel la convergence est par ailleurs assurée), $u G$ (ou $u E$) tende uniformément vers D . C'est ce qui a lieu en particulier si, dans tout l'intervalle $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ et pour $u > A$, $u^n G(u, \alpha u + \beta)$ reste borné supérieurement en valeur absolue, n étant un nombre supérieur à 1.

Dans ce cas *les différents points I vers lesquels conver-*

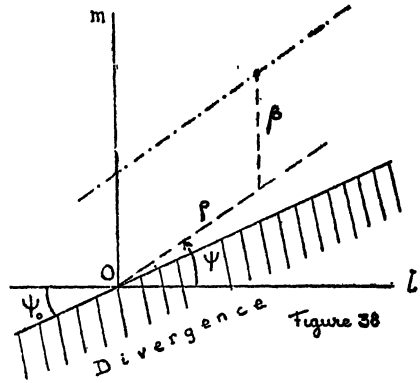
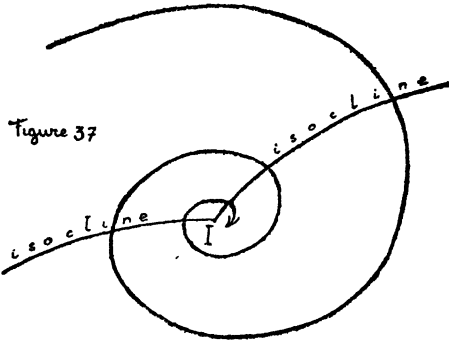
gent les courbes supports relatives aux différents valeurs de α coïncident. En effet, coupons par une ligne $u = u_0$; l'arc P P' est égal, cette fois-ci à :

$$\int_{\alpha u_0 + \beta}^{\alpha' u_0 + \beta} G(u_0, \alpha u_0 + \beta) d(\alpha u_0 + \beta) = \int_{\alpha}^{\alpha'} u_0 G(u_0, \alpha u_0 + \beta) d\alpha$$

$$= (\alpha' - \alpha) u_0 G(u_0, \alpha_1 u_0 + \beta)$$

α_1 étant une valeur comprise dans l'intervalle α, α' , donc à fortiori dans l'intervalle $\alpha_1 \alpha_2$. Cet arc tend vers zéro.

Le point I vers lequel convergent les différentes courbes sera appelé *point critique*. Il peut exister plusieurs points critiques.



Les courbes supports s'enroulent en général en spirale autour du point critique vers lequel elles convergent. Il y a exception pour les isoclines qui, en général, tendent vers le point critique avec une tangente bien déterminée (fig. 37). Car l'isocline correspondant à la direction θ fait avec

cette direction fixe un angle Ω , défini par la formule (11), qui tend en général vers une limite.

Exemple : Soit dans le cas $\varphi = 0^{\text{te}}$ la solution :

$$z = e^{al + \frac{m}{a}}$$

On a :

$$E = \frac{e^{al + \frac{m}{a} - (l+m)\sin\varphi}}{\sqrt{\tau}} = e \qquad G = \frac{\gamma}{\sqrt{\tau}} = -\frac{E}{a}$$

Posons :

$$l = \rho \cos \psi \qquad m = \rho \sin \psi + \beta$$

E se met sous la forme :

$$E = e^{-k^2 [\rho \sin(\psi - \psi_0) + \beta \cos \psi_0]}$$

La droite d'inclinaison $\psi = \psi_0$ partage le plan $l m$ en deux régions :

1°) pour : $\psi_0 - \pi < \psi < \psi_0$, E et G tendent vers l'infini pour $\rho \infty$. Le point x, y s'éloigne à l'infini par boucles de rayons croissants.

2°) pour : $\psi_0 < \psi < \psi_0 + \pi$, E et G tendent vers 0. Il en est de même de $l^n E, l^n G$ avec $n > 1$; donc il y a convergence. D'ailleurs, ψ restant dans un intervalle intérieur à l'intervalle $\psi_0, \psi_0 + \pi$, et β dans un intervalle fini, $l^n E$ reste borné supérieurement (pour le voir on majorera E en donnant à $\sin(\psi - \psi_0)$ et $\beta \cos \psi_0$ leurs plus petites valeurs dans ces intervalles). Il y a donc un point critique.

3°) pour $\psi = \psi_0$ ou $\psi = \psi_0 + \pi$, E et G restent constants. Il y a divergence mais le point support décrit des boucles successives sans s'éloigner à l'infini.

L'étude de la solution (page 145) confirmera ces résultats : à une droite du plan $l m$ correspond dans le massif une spirale logarithmique qui d'un côté tend vers le point critique, de l'autre côté s'éloigne à l'infini. Les hypothèses intermédiaires $\psi = \psi_0$ ou $\psi_0 + \pi$ correspondent au cas où la spirale est un cercle.

CORRESPONDANCE AU VOISINAGE D'UN POINT CRITIQUE. --
 1°) *Recouvrement hélicoïdal.* — Nous supposons d'abord qu'il n'existe pas de ligne de rebroussement. Décrivons autour d'un point critique I une courbe fermée C. Après un tour complet on ne retrouve plus pour le même point de la courbe ni la même valeur de θ , ni la même valeur de S. Comme d'ailleurs on peut faire sur la courbe une infinité de tours, il y a pour chaque point M (x, y) une suite infinie de valeurs de θ et S (ou de u et v). Autrement dit la variété V se recouvre une infinité de fois en projection x, y .

Pour se figurer le mode de correspondance on peut imaginer que les points supports sont reportés, non pas directement sur le plan x, y , mais sur une surface de vis à filet carré dont l'axe est normal en I au plan x, y . On peut d'ailleurs supposer nul le pas de cette surface de sorte qu'elle est aplatie sur le plan xy qu'elle recouvre une infinité de fois. Sur cette surface, à un point support correspondra un seul couple de valeurs de u et v .

Il est clair qu'une telle multiplicité de la correspondance ne peut se présenter dans un équilibre réel. La solution mathématique ne correspond donc à une possibilité

physique que dans un domaine n'entourant pas complètement le point critique.

Exceptionnellement il peut arriver qu'après un tour sur C , S reprenne la même valeur et Θ soit modifié d'un multiple exact de 2π . C'est le cas pour les 2 solutions correspondant au réseau universel d'isostatiques. Pour ces équilibres, d'ailleurs très particuliers, la solution mathématique est valable dans un domaine entourant complètement le point critique. Toutefois le point critique lui-même doit être exclu du domaine, celui-ci étant limité à une courbe fermée entourant le point critique ⁽¹⁾.

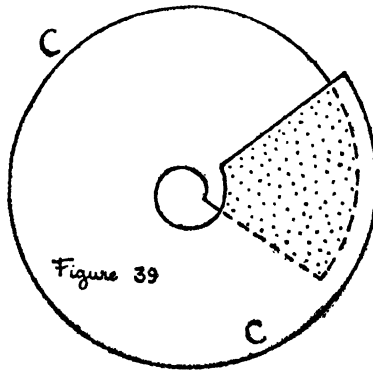
2°) *Recouvrements accessoires par lignes de rebroussement.* — Lorsqu'il existe des lignes de rebroussement, ces lignes convergent en général au point critique (ce point vérifiant les conditions $E = 0$, $G = 0$). Pour se figurer dans ce cas le mode de correspondance, on devra imaginer que, le long de chacune des lignes de rebroussement se raccordent 2 feuillets hélicoïdaux analogues à la surface envisagée au § 1 mais de sens d'enroulement inverses.

Ces circonstances restreignent encore le domaine dans lequel la solution mathématique est valable, ce domaine se réduisant à l'angle compris entre 2 lignes de rebroussement successives (à condition que cet angle soit inférieur à 2π).

RECOUVREMENTS POUR UN DOMAINE NE CONTENANT NI LIGNES NI POINTS SINGULIERS. — L'étude qui précède permet d'éli-

(1) Au point critique on trouverait des contraintes infinies et, suivant le rayon sur lequel on tend vers ce point, une infinité de valeurs du déplacement.

miner les recouvrements qui se produisent au voisinage des lignes ou points singuliers. Mais pour un domaine non illimité de toutes parts, des recouvrements peuvent encore se produire en l'absence de lignes ou points singuliers dans le domaine, ce qui conduit à limiter davantage ce dernier. Soit Δ le domaine du plan u, v , Γ son contour. Pour qu'il y ait correspondance univoque de u, v à x, y ,



il faut que le jacobien $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ ne s'annule pas, mais cela ne suffit pas; il faut encore qu'il y ait correspondance univoque sur le contour, c'est-à-dire que le contour C (lieu des supports des points de Γ) ne se recoupe pas. Ainsi le contour C ayant la forme dessinée sur la figure 39, il y aurait recouvrement dans la région couverte de pointillés.

CHAPITRE VI

ETUDE DE QUELQUES SOLUTIONS PARTICULIERES

Avant d'étudier (sommairement) quelques solutions, nous ferons les remarques générales suivantes :

1°) Chaque fois que cela sera possible, nous partirons de la solution E Γ qui fournit les lignes isostatiques (relations 13) et nous en déduirons par dérivation, la solution $\epsilon \gamma$.

2°) L'intégration des relations (7) et (8) sera extrêmement simple, dans les exemples traités, grâce à la remarque suivante :

Supposons que les différentielles totales à intégrer se ramènent, en prenant S et Θ comme variables, à la forme que j'appellerai $d\pi$ (= différentielle d'un produit) :

$$d\Pi = A(S) B(\Theta) dS + C(S) D(\Theta) d\Theta$$

ou à une somme de telles formes.

$d\pi$ étant différentielle totale, on doit avoir :

$$A(S) B'(\Theta) = C'(S) D(\Theta)$$

On en déduit :

$$A(S) = \omega C'(S)$$

ω : constante

$$D(\Theta) = \omega B'(\Theta)$$

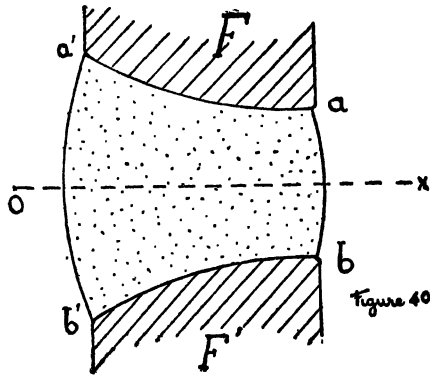
d'où :

$$\Pi = \omega C(S) B(\Theta) + C^{\text{te}}$$

3°) Presque toutes les solutions étudiées s'appliquent en particulier à l'écoulement d'une masse plastique entre 2 parois. Examinons d'une manière générale les conditions de ce problème.

ÉCOULEMENT D'UNE MASSE PLASTIQUE ENTRE 2 PAROIS SYMÉTRIQUES. — Soit F , F' deux parois cylindriques de profil quelconque, symétriques l'une de l'autre par rapport à un plan de trace Ox (fig. 40). Le domaine en équilibre limite est supposé limité par les parois et par deux bases ab et $a'b'$ de direction générale perpendiculaire à Ox . Cet équilibre est déterminé :

1°) par les conditions sur les parois;



2°) par des conditions concernant les bases. Ainsi nous montrerons au chapitre VII que l'on peut fixer sur une, et une seule des bases la grandeur et la direction des contraintes. C'est-à-dire que l'on peut se donner sur une

seule des bases l'effort total (ce qui est bien évident) et la répartition de cet effort ⁽¹⁾.

Ceci posé :

A) En ce qui concerne les conditions sur les parois, nous supposons qu'il y a glissement de la masse le long des parois. La plupart des solutions correspondent au glissement avec *frottement maximum* (voir page 60), Quand ce cas est réalisé tous les éléments des parois sont marginaux. Mais la relation marginale n'est pas, en général, vérifiée : il en résulte qu'en général les parois sont lignes de rebroussement.

B) Les solutions étudiées correspondront à une répartition particulière de l'effort total sur une base. Elles ne seront donc pas exactement adaptées aux problèmes pratiques auxquels nous les appliquerons. Toutefois nous montrerons au chapitre VII que l'influence « *perturbatrice* » de la répartition de l'effort total sur une base s'atténue au fur et à mesure qu'on s'éloigne de cette base — et que la solution tend alors vers la solution correspondante étudiée au présent chapitre. Celle-ci s'applique donc toujours approximativement si la longueur des parois est assez grande vis à vis de la largeur de la base soumise à l'effort donné; l'approximation est d'autant meilleure que le rapport de cette longueur à cette largeur est plus élevé; enfin pour des parois illimitées

(1) Dans la plupart des problèmes pratiques, l'effort total est imposé sur une base, mais non sa répartition; en revanche il existe des conditions concernant les déplacements des points des 2 bases. La détermination complète de la solution exigerait dans ce cas le calcul des déplacements,

dans les 2 sens ou limitées seulement, le cas échéant, en leur point de convergence, la solution que nous étudierons devient l'unique solution possible.

C) Pour une répartition déterminée de l'effort total sur une des bases et pour une valeur déterminée du frottement sur les parois, il existe 4 équilibres limites différents entre lesquels, dans un problème particulier, un examen sommaire des déplacements et des déformations nous permettra de distinguer :

α) En premier lieu 2 cas se présentent suivant la nature des éléments de l'axe (ou des bases). Supposons, par exemple, les parois fixes. Refoulons la masse plastique vers la convergence des parois en exerçant des pressions sur la grande base $a'b'$. Dans l'écoulement il y aura contraction des sections normales à l'axe et par suite (conservation du volume dans les déformations plastiques) dilatation dans la direction de l'axe. Dans l'équilibre limite les éléments de l'axe sont donc majeurs, les éléments des bases sont mineurs. Nous appellerons cet écoulement « *écoulement avec pression latérale prépondérante* ». Exemple : *trémies, filières*.

Inversement, refoulons la masse vers la divergence, nous provoquerons un écoulement avec *pression axiale prépondérante* où les éléments de l'axe sont mineurs.

Quand on suppose les parois fixes, les forces appliquées suivant l'axe sont les forces actives. On peut au contraire supposer les forces actives appliquées aux parois, qui seront alors mobiles. Ainsi en rapprochant les parois on provoquera un écoulement avec pression latérale prépon-

dérante (*mâchoires, presses*). En les éloignant on provoquerait (sous réserve que la masse ne se décolle pas des parois) un écoulement avec pression axiale prépondérante.

β) Nous avons également 2 cas à distinguer suivant le sens des contraintes tangentielles exercées par les parois. Ce sens est opposé à celui du glissement relatif de la masse par rapport à ces parois, glissement qui peut s'effectuer vers la convergence ou vers la divergence.

On remarquera que le sens du glissement relatif ne coïncide pas nécessairement avec le sens de l'écoulement dans l'espace absolu; car les parois peuvent être mobiles sur elles-mêmes: c'est le cas des cylindres de laminoirs. Selon que la vitesse tangentielle d'un point de la paroi est supérieure ou inférieure à la vitesse tangentielle du point de la masse qui est en contact avec lui, le glissement est dirigé vers la divergence ou vers la convergence.

γ) Il n'y a pas d'autres cas à distinguer, car les conditions particulières imposées à l'écoulement, autres que celles envisagées ci-dessus, n'intéressent plus le calcul des contraintes. Ainsi le même équilibre limite peut se présenter dans 2 écoulements de sens opposés dans l'espace absolu (conformément à la remarque du paragraphe β), ou encore dans 2 écoulements qui diffèrent par le comportement des parois: fixes et n'exerçant que des réactions — ou, au contraire, mobiles, et exerçant des forces actives.

PREMIÈRE SOLUTION :

$$E = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sin \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

(voir page 87); d'où en dérivant par rapport à θ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned}$$

Les relations (7) s'écrivent, en utilisant S et θ comme variables :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{2\tau} [(1 + \sin \varphi \cos 2\theta) dS + \cos \varphi \sin 2\theta d\theta] \\ dy &= \frac{1}{2\tau} [\sin \varphi \sin 2\theta dS - \cos \varphi \cos 2\theta d\theta] \end{aligned}$$

La seconde est de la forme $d\pi$; la première est une somme de 2 formes $d\pi$ dont l'une se réduit à : $\frac{dS}{2\tau}$.

D'où :

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{dS}{2\tau} - \frac{1}{4\tau} \cos \varphi \cos 2\theta \\ y &= - \frac{1}{4\tau} \cos \varphi \sin 2\theta \end{aligned}$$

(en prenant nulles les constantes d'intégration).

Courbes isobares : Pour $S = C^{\text{te}}$, le point support M décrit un cercle du centre C :

$$x_c = \int \frac{dS}{2\tau} \quad y_c = 0$$

de rayon $\frac{\cos \varphi}{4\tau} = \frac{1}{4R}$ (R : rayon du cercle de Mohr).

Le rayon CM fait avec Ox l'angle $\pi + 2\theta$. Quand θ augmente de π , on retrouve le même point M . On pourra donc se borner pour θ à l'intervalle $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$.

ou :

$$\Theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$$

on a :

$$\gamma = 0$$

La courbe $\gamma = 0$ est ligne de rebroussement pour les lignes v avec tangente de rebroussement parallèle à Oy .

Ces 2 courbes E, E' symétriques l'une de l'autre par rapport à Ox , sont aussi les enveloppes des lignes v et des lignes u respectivement, ainsi que des cercles isobares. Les rayons correspondant CV et CU du cercle isobare

sont inclinés sur Ox de $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Il en résulte que les tangentes en V et U aux 2 lignes sont inclinées de φ sur Ox .

Dans le cas $\varphi = C^{te}$ les 2 lignes E, E' ont une inclinaison constante sur Ox : ce sont donc des droites faisant entre elles l'angle 2φ et concourant en un point I (point critique). Les lignes isoclines ($\Theta = C^{te}$) sont également dans ce cas des droites passant par I .

Pour obtenir une solution physiquement valable, on ne doit prendre que l'un des 2 arcs déterminés par les points U, V sur le cercle isobare. Nous verrons que si l'on prend l'arc de gauche (fig. 41) les contraintes sur l'isobare sont majeures et les contraintes sur l'axe sont mineures. L'inverse a lieu si l'on prend l'arc de droite du cercle.

Directions isostatiques. — L'angle Θ , angle avec Ox de la contrainte principale majeure n_1 est la moitié de l'inclinaison du rayon CM sur Ox . La direction de n_1 s'obtient donc en joignant le point M au point le plus à droite P du cercle isobare.

De même la direction de la contrainte principale mineure n_2 s'obtient en joignant le point M au point le plus à gauche Q du cercle isobare.

Directions marginales. — Faisant avec la direction de n_1 des angles égaux à $\pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$, elles passent par les points U (tangente à la ligne u) et V (tangente à la ligne v).

Lignes marginales. — Imaginons que le cercle isobare roule sans glisser sur la branche E' ($\gamma = 0$) de son enveloppe, tout en se dilatant ou se contractant de façon à rester tangent à la branche E. Le mouvement élémentaire se ramène à une rotation autour du point U et une homothétie de centre U. Dans ces 2 transformations, les vitesses sont proportionnelles au rayon vecteur UM; elles sont perpendiculaires à ce rayon dans le premier cas, dirigées suivant le rayon dans le second cas. La vitesse résultante fait donc un angle fixe avec UM; par conséquent les vitesses de tous les points du cercle isobare passent par un point fixe du cercle. Ce point est le point V car la vitesse de V doit être tangente au cercle. Les vitesses ayant alors même direction que les tangentes aux lignes v , on en déduit qu'un point fixe du cercle décrit une ligne v .

On obtient de même les lignes u en faisant rouler sans glissement le cercle isobare sur la branche E de son enveloppe.

Dans le cas $\varphi = 0$, E et E' sont 2 droites parallèles; les lignes marginales sont des *cycloïdes*.

Vecteur intégrant. — Les relations (8) s'écrivent, en introduisant les variables \mathfrak{S} et Θ :

$$2 dX = \left(\frac{v}{\tau} \sin \varphi - \cos \varphi \right) \sin 2\Theta dS \\ - \left[\left(\frac{v}{\tau} \cos \varphi + \sin \varphi \right) \cos 2\Theta + 1 \right] d\Theta \\ 2 dY = \left[\left(\cos \varphi - \frac{v}{\tau} \sin \varphi \right) \cos 2\Theta - \frac{v}{\tau} \right] dS \\ - \left(\frac{v}{\tau} \cos \varphi + \sin \varphi \right) \sin 2\Theta d\Theta$$

Chacune de ces expressions est une somme de 2 formes $d\pi$ et l'on en déduit :

$$4X = - 2\Theta - \left(\sin \varphi + \frac{v}{\tau} \cos \varphi \right) \sin 2\Theta + C^te \\ 4Y = - 2 \int \frac{v}{\tau} dS + \left(\sin \varphi + \frac{v}{\tau} \cos \varphi \right) \cos 2\Theta + C^te$$

Applications. — Considérons un écoulement entre 2 parois F, F' , s'effectuant dans les conditions suivantes :

1°) Le glissement relatif de la masse par rapport aux parois s'effectue dans le sens de la divergence.

2°) Le frottement est maximum.

La solution précédente s'applique à cet écoulement si la figure $F F'$ est semblable à la figure $E E'$. Ainsi pour une $C. I.$ rectiligne on obtiendra l'écoulement entre 2 parois planes faisant entre elles l'angle 2φ . Pour $\varphi = 0$ on a l'écoulement entre deux plateaux parallèles.

La solution fournit 2 équilibres limites possibles, correspondant aux 2 arcs séparés par les points U, V sur le cercle isobare. L'un des équilibres correspond à l'écoulement avec pression axiale prépondérante (arc de gauche

des cercles), l'autre à l'écoulement avec pression latérale prépondérante (arc de droite).

Exemple : $\varphi = 0$. F et F' sont deux plateaux parallèles distants de h .

La solution étudiée donne 2 lignes de rebroussement parallèles E, E' distantes de $\frac{1}{\omega}$ (ω : diamètre constant du cercle de Mohr). Une homothétie de rapport $h\omega$ nous amène alors au cas proposé et nous obtenons :

$$\begin{cases} x = h \left(\frac{\nu}{\omega} - \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + \text{cte} \\ y = -\frac{1}{2} h \sin 2\theta \end{cases}$$

Les contraintes s'exerçant sur les plateaux ont pour composantes :

$$\begin{cases} \nu = \frac{\omega x}{h} + \text{cte} \\ \tau = \frac{\omega}{2} \end{cases}$$

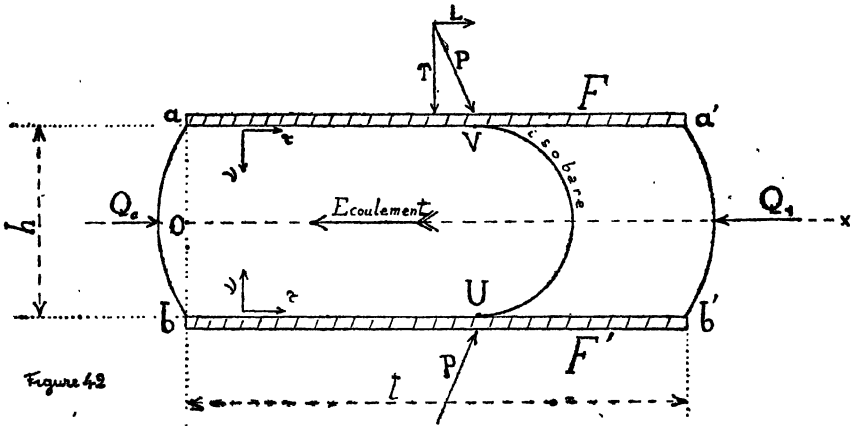
1°) *Écoulement avec pression latérale prépondérante.* -- Soit Q_0 et Q_1 les efforts totaux sur les 2 bases ab et $a'b'$ (fig. 42). P (composantes T et L) l'effort sur chacun des plateaux. Ces efforts sont déterminés lorsqu'on connaît l'un d'eux, par exemple Q_0 . Pour les calculer considérons le diagramme réciproque de la figure $ab, b'a'$. La ligne

B, B' qui correspond à $\theta = \frac{\pi}{4}$ est définie par :

$$\begin{aligned} 4X &= \left(\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\nu}{\omega} + \pi \right) h\omega = -2h\nu - \frac{\pi\omega}{4} \right) \\ 4Y &= -2 \frac{\nu^2}{\omega^2} h\omega \end{aligned}$$

en prenant dans X la constante d'intégration égale à π .
C'est un arc de parabole.

L'axe Ox correspond à $\Theta = \frac{\pi}{2}$ d'où $X = 0$.



Enfin la ligne A, A' qui correspond à $\Theta = \frac{3\pi}{4}$ est symétrique de B, B' par rapport à l'axe OY (fig. 43).

L'effort total Q sur une section droite U, V est :

$$Q = 2X_V = h \left(v - \frac{\pi\omega}{4} \right)$$

On en déduit, en prenant l'origine des axes dans la section droite de gauche :

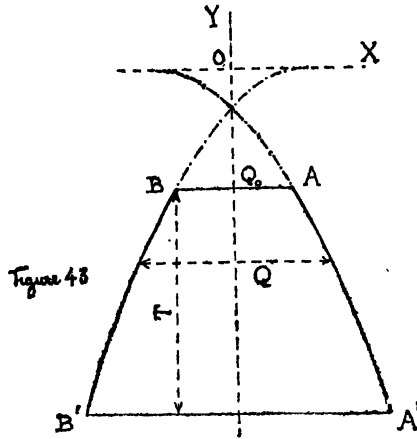
$$Q = Q_0 + \omega x$$

Ce résultat s'obtient d'ailleurs immédiatement en écrivant que la différence $Q - Q_0$ est équilibrée par les contraintes tangentielles $\tau = \frac{\omega}{2}$ exercées par les 2 plateaux sur la longueur x .

La composante normale T de l'effort sur un plateau est donnée par :

$$\begin{aligned} T &= Y_A - Y_{A'} = \frac{h}{2\omega} (v^2_1 - v^2_0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega l^2}{h} + Q_0 \frac{l}{h} + \omega l \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

l : longueur de la masse plastique en contact avec les pla-



teaux. Ce résultat s'obtient d'ailleurs directement en écrivant :

$$T = \int_0^l v \, dx$$

Les résultats précédents s'appliquent grossièrement à l'écrasement à la presse. Le plateau de la presse, de longueur $2l$ étant chargé en son milieu, l'écoulement se fait d'un côté vers la gauche, de l'autre vers la droite, de part et d'autre d'une région centrale dans laquelle il n'y a pas glissement de la masse sur les plateaux. En raison, d'une

part de l'existence de cette zone centrale, d'autre part du fait qu'aux extrémités (surfaces libres) la répartition des contraintes dans la section droite n'est pas celle qui correspond à la solution étudiée, cette dernière ne s'applique qu'approximativement et nous ne conserverons dans les formules que le terme principal. La charge R nécessaire pour produire l'écoulement est dans ces conditions :

$$R = 2T = \omega \frac{l^2}{h}$$

Dans un *laminoir*, le glissement de la masse plastique par rapport aux parois s'effectue, comme dans une presse, dans 2 sens opposés de part et d'autre de la région médiane. La formule précédente donne donc une indication sur la pression de laminage; indication très grossière seulement, non du fait de la courbure des parois, mais du fait de l'importance relative de la région centrale (sans glissement), le rapport $\frac{l}{h}$ n'étant pas assez élevé.

2°) *Écoulement avec pression axiale prépondérante.* — Les lignes bb' , Ox et aa' correspondent dans ce cas, respectivement à $\theta = \frac{\pi}{4}$, 0 et $-\frac{\pi}{4}$. Prenant dans X la constante d'intégration nulle, on obtient pour BB' et AA' deux arcs de paraboles symétriques par rapport à Oy , l'arc BB' étant défini par :

$$4X = - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2y}{\omega} \right) \omega h$$

$$4Y = - 2 \frac{y^2}{\omega^2} \omega h$$

L'effort total sur une section droite est alors :

$$Q = h \left(v + \frac{\pi\omega}{4} \right) = Q_0 + \omega x$$

L'effort normal sur une paroi :

$$T = Q_0 \frac{l}{h} + \omega \frac{l^2}{2h} - \omega l \frac{\pi}{4}$$

Supposons que Q_1 soit la force active provoquant l'écoulement. Si ab est surface libre $Q_0 = 0$, d'où $Q_1 = \omega l$. La résistance moyenne à l'écoulement par unité de section droite : $\omega \frac{l}{h}$ est d'autant plus élevée que le rapport $\frac{l}{h}$ est plus élevé.

Si au contraire, suivant ab , est disposée une cloison rigide, les relations :

$$Q_0 = Q_1 - \omega l$$

$$T = Q_1 \frac{l}{h} - \omega \frac{l^2}{2h} - \omega l \frac{\pi}{4}$$

donnent, approximativement (car au voisinage de la cloison il n'y a pas glissement) ; en fonction de l'effort Q_1 exercé sur a' , b' , les efforts sur la cloison et sur les parois latérales.

SECONDE SOLUTION. — En superposant la solution précédente à la deuxième solution particulière indiquée page 87 nous obtenons :

$$E = -\sqrt{\tau} \cos \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$+ \frac{v + c}{\sqrt{\tau}} \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\Gamma = \sqrt{\tau} \cos \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ + \frac{\nu + c}{\sqrt{\tau}} \sin \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

d'où :

$$\epsilon = \sqrt{\tau} \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ + \frac{\nu + c}{\sqrt{\tau}} \cos \left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ \gamma = -\sqrt{\tau} \sin \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ + \frac{\nu + c}{\sqrt{\tau}} \cos \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Cette solution correspond, à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ près, à un équilibre réciproque de l'équilibre précédent ⁽¹⁾. Les relations (7) s'intègrent pour cette raison d'une façon tout à fait analogue aux relations (8) dans le cas précédent et l'on obtient :

$$4x = 2 \int \frac{\nu + c}{\tau} dS \\ - \left(\sin \varphi + \frac{\nu + c}{\tau} \cos \varphi \right) \cos 2\Theta \\ 4y = 2\Theta - \left(\sin \varphi + \frac{\nu + c}{\tau} \cos \varphi \right) \sin 2\Theta$$

Courbes isobares. — Pour $S = C^{te}$, on a :

$$x = A - B \cos 2\Theta \quad y = \frac{\Theta}{2} - B \sin 2\Theta$$

A et B : constantes dépendant de S. L'isobare est donc

(1) La constante c correspond au fait que d'un équilibre on peut déduire une infinité d'équilibres réciproques si on laisse arbitraire l'origine des contraintes sur l'axe de la C. I.

engendrée par un point fixe d'un cercle de rayon B dont le centre C décrit la droite $x = A$ et dont la rotation est telle que le cercle concentrique de rayon $1/4$ roule sans glisser sur la droite : $x = A - \frac{1}{4}$. C'est une *cycloïde allongée ou raccourcie*.

Directions isostatiques. — Elles s'obtiennent en joignant le point M au point le plus à droite P et au point le plus à gauche Q du cercle générateur.

Directions marginales. — Elles s'obtiennent en joignant le point M aux points U et V extrémités des rayons du cercle générateur qui sont inclinés de $-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ et $+\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ sur Ox .

Lignes de rebroussement. — On a : $\varepsilon = 0$ pour :

$$\operatorname{tg}\left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{y + c}{r}$$

soit :

$$\Theta = -\alpha(S) + k\pi$$

De même, on a : $\gamma = 0$ pour :

$$\Theta = +\alpha(S) + k\pi$$

Ces lignes sont 2 à 2 symétriques par rapport à Ox car lorsqu'on change Θ en $-\Theta$, x ne change pas et y se change en $-y$.

D'autre part si l'on change Θ en $\Theta + \pi$, le point support subit simplement une translation égale à $\frac{\pi}{2}$ dans le sens de Oy , translation par laquelle se correspondent en particulier les différentes lignes $\varepsilon = 0$ (ou $\gamma = 0$).

On voit donc que la solution fournit 2 équilibres physiques distincts et 2 seulement correspondant à :

1°) Θ compris entre $-\alpha(S)$ et $+\alpha(S)$: arc AB de l'isobare (fig. 44); cet arc est entièrement majeur.

2°) Θ compris entre $\alpha(S)$ et $-\alpha(S) + \pi$: arc BA' de l'isobare; cet arc est mineur.

CAS PARTICULIER : Envisageons une C. I. rectiligne d'équation :

$$\tau = (v + H) \operatorname{tg} \varphi$$

et prenons :

$$c = H$$

Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{\sqrt{\tau}}{\sin \varphi} \sin \left(\Theta - \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ 4x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \operatorname{Log} \tau - \frac{1}{\sin \varphi} \cos 2\Theta \\ 4y = 2\Theta - \frac{1}{\sin \varphi} \sin 2\Theta \end{array} \right.$$

Lorsqu'on augmente S d'une constante, sans modifier Θ , le point support subit une translation parallèle à l'axe des x et le rayon $B = \frac{1}{4 \sin \varphi}$ du cercle générateur n'est pas modifié. Il en résulte que les *différentes courbes, isobares, isostatiques et marginales se conservent par cette translation*. Les lignes isoclines et les lignes de rebroussement sont des parallèles à Ox (fig. 44). Les lignes de rebroussement correspondent à :

$$\Theta = \pm \alpha(S) + k\pi \quad \text{avec} \quad \alpha(S) = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = C^{\text{te}}$$

et leurs ordonnées sont définies par :

$$4y = \pm \left(\cotg \varphi - \frac{1}{2} + \varphi \right) + 2k\pi$$

Les lignes marginales sont des cycloïdes. En effet si le point M décrit une ligne u :

$$S - \Theta = C^{te}$$

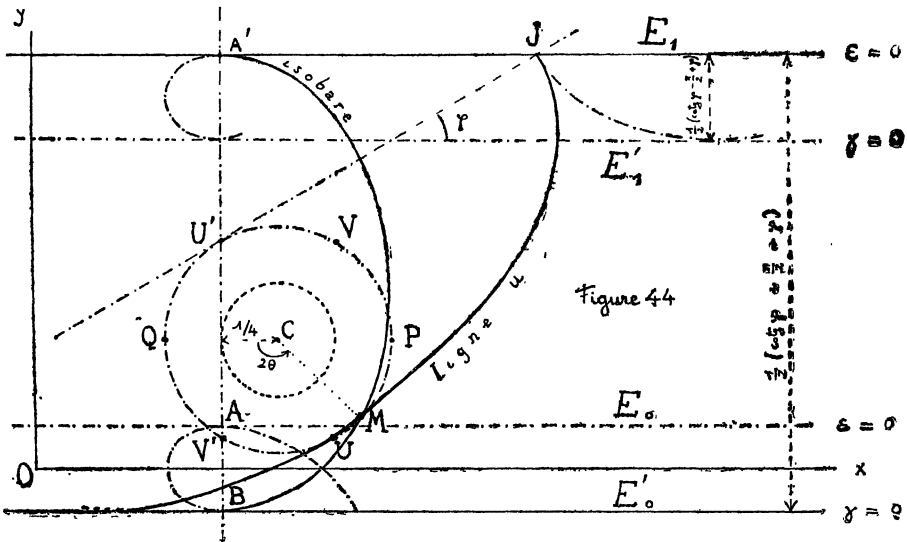
le centre C du cercle générateur, dont les coordonnées sont :

$$x = \frac{S}{2 \operatorname{tg} \varphi} \qquad y = \frac{\Theta}{2}$$

décrit une droite :

$$x - y \operatorname{tg} \varphi = C^{te}$$

Les tangentes au cercle générateur en U et U' qui ont l'inclinaison φ sur Ox sont fixes. Faisons rouler sans glis-



ser le cercle générateur sur la tangente fixe U' J : la tangente à la trajectoire du point M est MU qui coïncide avec la direction marginale u .

Dans le cas : $\varphi = 0$ la base U' J est confondue avec la

ligne E_1 , et l'on retrouve l'équilibre fourni par la première solution.

APPLICATION. — La solution précédente convient, pour le cas où φ est une constante quelconque, au problème de l'écoulement entre 2 plateaux plans parallèles, l'écoulement s'effectuant de droite à gauche (fig. 42), avec frottement maximum, comme dans la première solution (sur laquelle on retombe pour $\varphi = 0$). La solution fournit 2 équilibres limites possibles, l'un correspondant à l'écoulement avec pression axiale prépondérante (arc AB de l'isobare), l'autre à l'écoulement avec pression latérale prépondérante (arc BA').

Soit h la distance entre les 2 plateaux. Le rapport d'homothétie qui permet de passer de la figure 44 à la figure 42 est :

$$\lambda = \frac{2h}{\cotg \varphi + \varphi + \varepsilon \frac{\pi}{2}}$$

$\varepsilon = + 1$ pour l'écoulement avec pression latérale prépondérante;

$\varepsilon = - 1$ pour l'écoulement avec pression axiale prépondérante.

Entre l'abscisse d'un point M pris sur une paroi et la composante τ de la contrainte qu'exerce la masse plastique en ce point, on a la relation :

$$4x = \frac{\lambda}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \operatorname{Log} \tau + C^te$$

ou :

$$\tau = Ce^{\frac{4x \operatorname{tg}^2 \varphi}{\lambda}}$$

Pour calculer l'effort total Q qui s'exerce sur une section droite, remarquons que l'équilibre d'une tranche comprise entre 2 sections droites distantes de dx donne :

$$dQ = 2\tau dx = \frac{\lambda}{2} \cotg^2 \varphi d\tau$$

D'où :

$$Q = \frac{\lambda}{2} \cotg^2 \varphi \tau + C^{te}$$

Pour déterminer la constante appliquons la relation pour $x = -\infty$. On a $\tau = 0$, d'où $\nu = -H$. A l'infini à gauche règne donc une traction isotrope égale à H et par suite $Q = -hH$. Telle est la valeur de la constante.

Q_0 , Q_1 , T , l ayant la même signification que dans le cas $\varphi = 0$ étudié précédemment, on a :

$$Q_1 + hH = (Q_0 + hH) \frac{\tau_{a'}}{\tau_a} = (Q_0 + hH) e^{\frac{4l \operatorname{tg}^2 \varphi}{\lambda}}$$

$$T = \int_a^{a'} \nu dx =$$

$$\int_a^{a'} (\tau \cotg \varphi - H) dx = \frac{Q_1 - Q_0}{2} \cotg \varphi - lH$$

Ces résultats s'appliquent dans les mêmes conditions que ceux obtenus pour $\varphi = 0$. Ainsi la charge nécessaire pour produire l'écoulement (avec frottement maximum) dans une *presse* de longueur à $2l$ est approximativement :

$$R = 2T =$$

$$hH \cotg \varphi \left[e^{\frac{2l}{h} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \cotg \varphi \right) \operatorname{tg}^2 \varphi} - 1 \right] - 2lH$$

Les formules données pour $\varphi = 0$ peuvent être retrouvées à partir des formules actuelles en faisant tendre simultanément φ vers 0, H vers l'infini, le produit de $2 H \varphi$ tendant vers ω .

EQUILIBRES D'UNE COUCHE CYLINDRIQUE. — A. — Considérons la solution :

$$\epsilon = -e^{-\Sigma} \quad \gamma = -e^{-\Sigma} \quad \Sigma = \int \frac{dS}{a(S)}$$

Les relations (7) s'écrivent :

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{e^{-\Sigma}}{\sqrt{\tau}} \left[\cos \Theta \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) dS \right. \\ &\quad \left. + \sin \Theta \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) d\Theta \right] \\ dy &= -\frac{e^{-\Sigma}}{\sqrt{\tau}} \left[\sin \Theta \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) dS \right. \\ &\quad \left. - \cos \Theta \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) d\Theta \right] \end{aligned}$$

Elles sont de la forme $d\pi$ et s'intègrent par :

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^{-\Sigma}}{\sqrt{\tau}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \Theta \\ y &= \frac{e^{-\Sigma}}{\sqrt{\tau}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \Theta \end{aligned}$$

(les constantes d'intégration étant prises nulles).

Les lignes isoclines sont les droites issues de l'origine; elles sont en même temps isostatiques mineures (ξ variable), puisque leur inclinaison sur Ox est Θ .

Les lignes isobares sont des cercles concentriques à l'origine, de rayon :

$$r = \frac{e^{-\Sigma}}{\sqrt{\tau}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Elles sont en même temps isostatiques majeures.

Dans le cas d'une C. I. rectiligne, avec $\varphi \neq 0$, on a :

$$\frac{e^{-\Sigma}}{\sqrt{\tau}} = \tau - \frac{1 + \sin \varphi}{2 \sin \varphi}$$

d'où :

$$\tau = Cr - \frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = Cr^j - 1$$

C'est la solution classique mentionnée page 28. Pour :

$$\varphi = 0 \quad \Sigma = \frac{\nu}{\omega} \quad \tau = \frac{\omega}{2}$$

D'où :

$$\nu = C - \omega \text{ Log } r$$

L'origine O est point critique, correspondant à S infini positif. Pour $\tau = 0$ on peut vérifier que r a même limite que $\frac{1}{2R}$ (R rayon du cercle de Mohr). r tend donc vers l'infini ou vers une limite finie (isobare limite).

Cette solution ⁽¹⁾ s'applique à l'équilibre limite d'une couche comprise entre 2 cylindres circulaires coaxiaux, soumise sur ces cylindres à des contraintes normales uniformes p_0 et p_1 , la pression intérieure p_0 étant plus forte que la pression extérieure p_1 .

La relation entre les pressions p_0 et p_1 se déduit de la

(1) Après multiplication par une constante,

relation entre r et S ⁽²⁾. Par exemple pour une C. I. rectiligne, τ étant proportionnel à $p + H$, on aura :

$$p_0 + H = (p_1 + H) \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{1-j}$$

Pour $\varphi = 0$, v étant égal $p - \frac{\omega}{2}$, on aura :

$$p_0 = p_1 + \omega \operatorname{Log} \left(\frac{r_1}{r_0} \right)$$

B) La solution :

$$\varepsilon = e^{\Sigma} \quad \gamma = -e^{\Sigma}$$

conduit à un équilibre (réciproque du précédent) ayant même réseau d'isostatiques (avec échange des familles).

Le rayon d'un cercle isobare est ici :

$$r = \frac{e^{\Sigma}}{\sqrt{\tau}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Pour une C. I. rectiligne, avec $\varphi \neq 0$, on a :

$$\frac{e^{\Sigma}}{\sqrt{\tau}} = \tau \frac{1 - \sin \varphi}{\sin \varphi}$$

d'où :

$$\tau = C r \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = C r \frac{1}{j} - 1$$

Pour $\varphi = 0$:

$$v = C + \omega \operatorname{Log} r$$

(2) Dans le cas d'une C. I. à sommet arrondi, si l'on suppose p_1 donné, l'équilibre envisagé n'est possible que si p_1 est supérieur à une certaine valeur A correspondant au cercle de Mohr osculateur au sommet de la C. I. Pour $p_1 = A$ le cylindre extérieur est isobare limite. Pour $p_1 < A$ la masse ne s'écoule pas sous l'effet d'une forte pression intérieure p_0 ; elle péricite par fissuration.

Pour S infini positif, r devient infini.

Pour $\tau = 0$, r tend vers 0 dans le cas d'une C. I. à sommet anguleux (l'origine est donc point critique) — on peut montrer au contraire que r tend vers une limite différente de zéro (isobare limite) dans le cas d'une C. I. à sommet arrondi.

Cette solution s'applique à l'équilibre limite d'une couche cylindrique lorsque la pression extérieure est la plus forte (écoulement centripète) ⁽¹⁾.

Dans le cas d'une C. I. rectiligne, la relation entre les pressions p_0 et p_1 est pour $\varphi \neq 0$:

$$p_0 + H = (p_1 + H) \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{\frac{1}{i} - 1}$$

Pour $\varphi = 0$:

$$p_0 = p_1 - \omega \text{ Log } \frac{r_1}{r_0}$$

Cet équilibre est aussi celui qui s'établit lorsqu'on ouvre une cavité dans une masse comprimée et notamment (aux effets de la pesanteur près) autour des souterrains.

AUTRE APPLICATION :

Les 2 solutions précédentes s'appliquent à l'écoulement d'une masse plastique entre 2 parois sans frottement, faisant entre elles un angle de 2α quelconque. Le sens du glissement relatif paroi-masse n'intervient pas puisque le frottement est nul. Il n'y a donc que 2 équilibres limites qui correspondent aux 2 solutions précédentes, la pre-

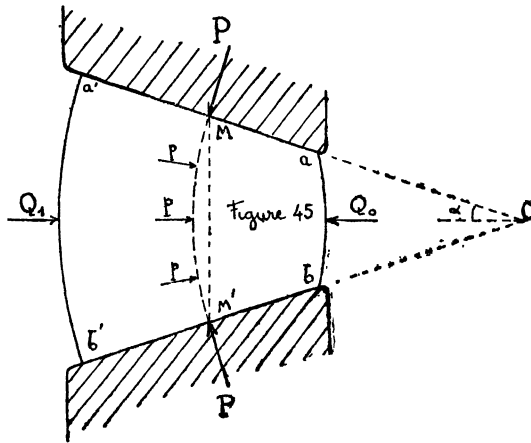
(1) Dans le cas d'une C. I. à sommet arrondi, si p_1 est donnée, il peut arriver que l'équation donnant p_0 n'ait pas de solution (le rayon r est inférieur au rayon du cercle isobare limite). Dans ce cas la masse ne peut s'écouler : elle périt par fissuration.

mière fournissant l'équilibre à pression axiale prépondérante, la seconde l'équilibre à pression latérale prépondérante.

Soit p la pression radiale, Q l'effort total sur une section droite MM' . On a :

$$Q = p \text{ corde } MM' = 2pr \sin \alpha$$

L'effort moyen, par unité de section droite est p .



Soit P l'effort total exercé par chacune des parois (cet effort est normal aux parois). L'équilibre des forces P , Q_0 , Q_1 donne :

$$P = \frac{Q_1 - Q_0}{2 \sin \alpha} = p_1 r_1 - p_0 r_0$$

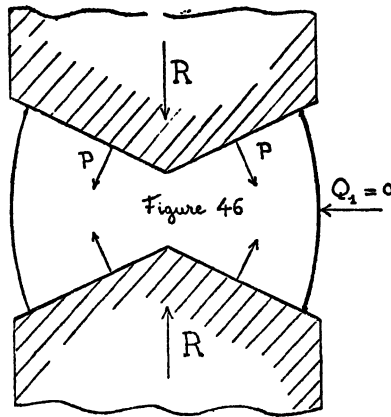
EXEMPLES: 1°) *Etirage à travers une filière rectiligne sans frottement.* — On a : $Q_1 = 0$, d'où $p_1 = 0$.

L'effort de traction qu'il faut appliquer sur la section de

sortie est donc — par unité de surface — dans le cas d'une C. I. rectiligne :

$$\begin{aligned}
 -p_0 &= H \left[1 - \rho^{\frac{1}{j}} - 1 \right] && \text{pour } \varphi \neq 0 \\
 -p_0 &= \omega \operatorname{Log} \left(\frac{1}{\rho} \right) && \text{pour } \varphi = 0
 \end{aligned}$$

$\rho = \frac{r_0}{r_1}$ désignant le rapport des sections à la sortie et à l'entrée de la filière.



2°) *Ecrasement entre 2 mâchoires convexes en forme de V.* — L'écoulement se fait moitié vers la gauche, moitié vers la droite (fig. 46), et avec les mêmes réserves que précédemment (dans le cas d'une presse) on peut donner comme valeur approchée de la charge R produisant l'ékra-

sement, dans le cas d'une C. I. rectiligne :

$$R = 2P \cos \alpha = 2Hr_0 \cos \alpha \left[1 - \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^{\frac{1}{i} - 1} \right] \quad \text{pour } \varphi \neq 0$$

$$R = 2\omega r_0 \cos \alpha \operatorname{Log} \left(\frac{r_1}{r_0} \right) \quad \text{pour } \varphi = 0$$

C) — En superposant les solutions A et B on obtient une infinité d'équilibres possédant la propriété de se conserver par une rotation autour de l'origine. On vérifie aisément que ce sont les seuls qui jouissent de cette propriété.

EQUILIBRES A ISOCLINES RECTILIGNES DANS LE CAS D'UNE C. I. RECTILIGNE. — A. Envisageons, dans le cas $\varphi = C^e$ la solution fondamentale :

$$\varepsilon = z = e^{al + \frac{m}{a}}$$

$$\gamma = - \frac{\partial z}{\partial m} = - \frac{z}{a}$$

Nous avons vu (page 113) qu'il y a un point critique par où passent en particulier les lignes isoclines. Ces lignes isoclines sont des droites. Car l'angle Ω de la tangente à l'isocline avec la direction isostatique (constante le long de l'isocline) est lui-même constant; la formule (11) donne en effet :

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Les isoclines sont donc les rayons concourant au point critique O. Le long d'un de ces rayons, les inclinaisons des

différentes lignes remarquables : isostatiques, marginales, isobare, restent invariables. En outre, Ω étant indépendante de l'isocline envisagée, ces inclinaisons, mesurées par rapport au rayon, restent invariables d'un rayon à un autre. Il en résulte que *toutes ces lignes remarquables sont des spirales logarithmiques* et les différentes lignes d'une même famille sont homothétiques entre elles.

Soit r, ω les coordonnées polaires (de pôle O) d'un point M.

$$\text{On a : } \omega = \Theta + \Omega.$$

Pour avoir r remarquons que si nous considérons la spirale ligne u qui passe par M, r est proportionnel au rayon de courbure de cette spirale, donc à $\frac{r}{\sqrt{\tau}}$. On obtient ainsi en prenant comme variables S et Θ :

$$r = ce \frac{(b - \sin \varphi) S + b' \Theta}{\cos \varphi}$$

en posant :

$$2b = \alpha + \frac{1}{\alpha} \quad 2b' = \alpha - \frac{1}{\alpha}$$

On en déduit inversement :

$$\tau = e^{2S \operatorname{tg} \varphi} = C \left[re - \frac{b' \omega}{\cos \varphi} \right] \frac{2 \sin \varphi}{b - \sin \varphi}$$

Cette solution renferme comme cas particuliers les cas : $\alpha = 0$ et $\alpha = \infty$ pour lesquels les rayons isoclines sont

lignes marginales : lignes v pour $\alpha = 0$ (car : $\Omega = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$),

lignes u pour $\alpha \infty$ (car : $\Omega = -\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$). b est infini : donc la sollicitation reste constante le long d'un rayon vecteur. On retrouve ainsi les 2 équilibres de M. Caquot.

La solution renferme également comme cas particuliers les cas : $\alpha = +1$ et $\alpha = -1$ pour lesquels les rayons isoclines sont lignes isostatiques : lignes ξ variable pour $\alpha = -1$ (car $\Omega = 0$), lignes η variable pour $\alpha = +1$ (car $\Omega = \frac{\pi}{2}$). b' étant nul les grandeurs des sollicitations ne dépendent que de r . On retrouve ainsi les 2 équilibres d'une couche cylindrique.

B. — D'une façon plus générale, cherchons quelles sont les solutions $z(l, m)$ de l'équation (6) pour lesquelles toutes les lignes isoclines sont des droites.

L'angle Ω doit être constant pour Θ constant. On en déduit, par la formule (11), que le rapport $\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial m}$ ne doit dépendre que de Θ ou encore de :

$$\lambda = l - m = \frac{\Theta'}{\cos \varphi}$$

Soit donc :

$$\frac{\partial z}{\partial m} = z \rho(\lambda)$$

En dérivant cette relation par rapport à l et remplaçant $\frac{\partial^2 z}{\partial l \partial m}$ par z , nous obtenons :

$$\frac{\partial z}{\partial l} = z \mu(\lambda) \qquad \mu = \frac{1 - \rho'(\lambda)}{\rho(\lambda)}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$d(\text{Log } z) = \mu(\lambda) dl + \rho(\lambda) dm$$

ou, en prenant pour variables nouvelles λ et $\Sigma = l + m$:

$$d(\text{Log } z) = \varphi(\lambda) d\lambda + \psi(\lambda) d\Sigma$$

On doit avoir :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial \Sigma} = 0$$

d'où :

$$\psi(\lambda) = C^{te} = b$$

D'où :

$$z = e^{b\Sigma} f(\lambda)$$

Pour déterminer la fonction $f(\lambda)$, utilisons l'équation (6). Nous obtenons la condition :

$$\begin{aligned} f''(\lambda) &= (b^2 - 1) f(\lambda) \\ f(\lambda) &= ce^{b'\lambda} + de^{-b'\lambda} \quad (1) \end{aligned}$$

b' étant une racine (réelle ou imaginaire pure) de l'équation :

$$b'^2 = b^2 - 1$$

On peut simplifier légèrement $f(\lambda)$ par les considérations suivantes :

Pour $d = 0$, la solution : $z = e^{b\Sigma} + b'\lambda$ n'est autre que la solution fondamentale étudiée au § A, en posant : $\alpha = b + b'$.

De même pour $c = 0$, en posant : $\alpha = b - b'$. Ces cas mis à part on peut supposer les 2 coefficients c et d égaux en valeur absolue car en modifiant λ d'une constante, ce qui revient à imposer à l'équilibre une rotation d'ensemble, on peut amener leurs valeurs absolues à l'égalité. Nous sommes, en résumé, ramenés à la forme :

$$z = ce^{b\Sigma} g(\lambda)$$

(1) Pour $b' = 0$ ($|b| = 1$) on a $f''(\lambda) = 0$ d'où :

$$f(\lambda) = c_1 + a_1 \lambda$$

SOLUTION	k'	k	z	$\frac{\partial z}{\partial m}$	OBSERVATIONS
A		0 ou ∞	$\frac{m}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha} e^{\frac{m}{\alpha}}$	
$ b < 1$ B_1 B_2 B_3 B_4	+	+	$\Sigma e^{\cos V} \cos \left(\lambda \sin V + \frac{V}{2} \right)$	$\Sigma e^{\cos V} \cos \left(\lambda \sin V - \frac{V}{2} \right)$	4 formes différentes d'une même solution B
	-	+	$- \Sigma e^{\cos V} \cos \left(\lambda \sin V - \frac{V}{2} \right)$	$- e^{-\Sigma \cos V} \cos \left(\lambda \sin V + \frac{V}{2} \right)$	
	+	-	$\Sigma e^{\cos V} \sin \left(\lambda \sin V + \frac{V}{2} \right)$	$\Sigma e^{\cos V} \sin \left(\lambda \sin V - \frac{V}{2} \right)$	
	-	-	$- \Sigma e^{\cos V} \sin \left(\lambda \sin V - \frac{V}{2} \right)$	$- e^{-\Sigma \cos V} \sin \left(\lambda \sin V + \frac{V}{2} \right)$	
$ b > 1$ C_1 C_2 C_3 C_4	+	+	$\Sigma e^{\text{ch } V} \text{ch} \left(\lambda \text{sh } V + \frac{V}{2} \right)$	$\Sigma e^{\text{ch } V} \text{ch} \left(\lambda \text{sh } V - \frac{V}{2} \right)$	
	-	+	$- \Sigma e^{\text{ch } V} \text{ch} \left(\lambda \text{sh } V - \frac{V}{2} \right)$	$- e^{-\Sigma \text{ch } V} \text{ch} \left(\lambda \text{sh } V + \frac{V}{2} \right)$	
	+	-	$\Sigma e^{\text{ch } V} \text{sh} \left(\lambda \text{sh } V + \frac{V}{2} \right)$	$\Sigma e^{\text{ch } V} \text{sh} \left(\lambda \text{sh } V - \frac{V}{2} \right)$	
	-	-	$- \Sigma e^{\text{ch } V} \text{sh} \left(\lambda \text{sh } V - \frac{V}{2} \right)$	$- e^{-\Sigma \text{ch } V} \text{sh} \left(\lambda \text{sh } V + \frac{V}{2} \right)$	
$ b = 1$ D_1 D_2 D_3 D_4	+	+	$\Sigma e^{\Sigma} e^{-\Sigma} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) e^{\Sigma}$	$\Sigma e^{\Sigma} e^{-\Sigma} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) e^{\Sigma}$	Solution A pour $\alpha = 1$ Solution A pour $\alpha = -1$
	-	+	$- e^{-\Sigma} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) e^{\Sigma}$	$- e^{-\Sigma} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) e^{\Sigma}$	
	+	-	$\left(\lambda + \frac{1}{2} \right) e^{-\Sigma}$	$\left(\lambda - \frac{1}{2} \right) e^{-\Sigma}$	
	-	-	$\left(\lambda - \frac{1}{2} \right) e^{-\Sigma}$	$-\left(\lambda + \frac{1}{2} \right) e^{-\Sigma}$	

avec :

$$g(\lambda) = e^{b'\lambda} + k'e^{-b'\lambda}$$

k' pouvant recevoir les 4 valeurs 0∞ (on supposera dans ce cas c fini), $+1$ et -1 .

Dans le cas particulier $b' = 0$ ($|b| = 1$), $g(\lambda)$ prend l'une des 2 formes : $g(\lambda) = C^{te}$ ou $\tilde{g}(\lambda) = \lambda$ qui dérivent (la première pour $k' = 1$, la seconde pour $k' = -1$) de la forme générale en faisant tendre b' vers 0.

On a alors :

$$\frac{\partial z}{\partial m} = ce^{b\Sigma} \left[(b - b') e^{b'\lambda} + k'(b + b') e^{-b'\lambda} \right]$$

Posons :

$$b + b' = ke^{2b'a}$$

d'où :

$$b - b' = ke^{-2b'a}$$

$k = \pm 1$ ayant le signe de b . Le nombre a ainsi défini est toujours réel et possède le signe de b .

Remplaçant alors, dans z , λ par $\lambda + a$, nous obtenons la solution sous sa forme définitive, parfaitement symétrique :

$$(F) \begin{cases} z = ce^{b\Sigma} g(\lambda + a) \\ \frac{\partial z}{\partial m} = cke^{b\Sigma} g(\lambda - a) \end{cases}$$

Sous cette forme générale se trouvent groupées différentes formes particulières, données au tableau ci-après, formes que l'on obtient en remplaçant b par $\pm ch \mathbf{V}$ ou $\pm \cos \mathbf{V}$ suivant que $|b|$ est supérieur ou inférieur à 1. Les 4 formes B se ramènent à une seule d'entre elles, B_1 par

exemple, par des changements opérés sur λ ou sur V . Il n'en est pas de même des 4 formes C ou des 4 formes D. On remarquera que les solutions étudiées précédemment sont pour $\varphi = C^te$ des cas particuliers de la solution actuelle.

Première solution = B_1 pour $V = \frac{\pi}{2} + \varphi$.

Seconde solution = B_1 pour $V = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Couche cylindrique = D_1 et D_2 .

Intégration : Les relations (7) donnent :

$$dx = \frac{c \cos \varphi}{2} e^{(b - \sin \varphi) \Sigma} \left[B(\lambda) d\Sigma + D(\lambda) d\lambda \right]$$

en posant :

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= g(\lambda + a) \cos \left(\lambda \cos \varphi - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\quad - kg(\lambda - a) \cos \left(\lambda \cos \varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ D(\lambda) &= g(\lambda + a) \cos \left(\lambda \cos \varphi - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ &\quad + kg(\lambda - a) \cos \left(\lambda \cos \varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned}$$

La différentielle dx est du type $d\pi$. On en déduit (en prenant la constante d'intégration nulle) ⁽¹⁾.

$$\begin{aligned} x &= \frac{c \cos \varphi}{2(b - \sin \varphi)} e^{(b - \sin \varphi) \Sigma} \left[g(\lambda + a) \right. \\ &\quad \left. \cos \left(\lambda \cos \varphi - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - kg(\lambda - a) \right. \\ &\quad \left. \cos \left(\lambda \cos \varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

On trouvera de même :

$$y = \frac{c \cos \varphi}{2(b - \sin \varphi)} e^{(b - \sin \varphi) \Sigma} \left[g(\lambda + a) \right.$$

$$\sin \left(\lambda \cos \varphi - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - kg (\lambda - a) \\ \sin \left(\lambda \cos \varphi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \Bigg]$$

Point critique. — L'origine est point critique (1) correspondant aux points à l'infini du plan l, m pour lesquels les modules de :

$e^{(b - \sin \varphi) \Sigma + b' \lambda}$ et $e^{(b - \sin \varphi) \Sigma - b' \lambda}$
tendent simultanément vers zéro.

Homothétie. — Augmentons Σ d'une constante, sans modifier λ . x et y sont multipliés par un même facteur, les orientations $\theta, \theta_u, \theta_v$ des différentes lignes remarquables ne sont pas modifiées. Le réseau se conserve donc par une homothétie de centre O.

Symétrie. — Pour $kk' = +1$, le changement de λ en $-\lambda$ change x en $-x$, sans modifier y : symétrie par rapport à Oy.

Pour $kk' = -1$, le changement de λ en $-\lambda$ change y en $-y$, sans modifier x : symétrie par rapport à Ox.

Pour $k' = 0$ ou ∞ (solution A) pas de symétrie, sauf pour $\alpha = \pm 1$; en revanche les lignes remarquables se conservent par rotation.

Lignes isoclines. — $\lambda = C^e$. Ce sont les droites issues de l'origine. La loi des contraintes le long d'une isocline est (à un facteur constant près) indépendante de l'isocline envisagée. Si r est la distance à O, on a :

$$r = Ce^{(b - \sin \varphi) \Sigma}$$

(1) Pour $b = \sin \varphi$ les relations prennent une forme particulière qui a été donnée page 134. Le point critique est rejeté à l'infini.

ou inversement :

$$\tau = e^{2\Sigma \sin \varphi} = Cr \frac{2 \sin \varphi}{b - \sin \varphi}$$

L'angle Ω défini par la formule (11) est constant le long d'une isocline. Mais il ne l'est pas d'une isocline à une autre, sauf pour la solution A. On a en effet :

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{1}{U} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$

en posant :

$$U = \frac{\frac{\partial z}{\partial m} - z}{\frac{\partial z}{\partial m} + z} = - \frac{e^{2b'\lambda} - kk'}{e^{2b'\lambda} + kk'} \frac{e^{2b'a} - k}{e^{2b'a} + k}$$

ou, en tenant compte de la valeur de $e^{2b'a}$:

$$(R) \quad U = - \frac{b'}{b+1} \frac{e^{2b'\lambda} - kk'}{e^{2b'\lambda} + kk'}$$

Pour $|U| > 1$ ($|\Omega| < \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$) l'isocline, traversant l'angle aigu des lignes marginales, est ligne mineure.

Pour $|U| < 1$ l'isocline est ligne majeure.

Lignes de rebroussement. — Ces lignes : $z = 0$ ou $\frac{\partial z}{\partial m} = 0$ sont des isoclines, donc des droites issues de O.

Leur nombre dépend des valeurs de b et k' :

1°) Solutions A, C₁, C₂, D₁, D₂ : aucune ligne de rebroussement.

2°) Solutions C₃, C₄, D₃, D₄ : 2 lignes correspondant aux 2 rayons symétriques : $\lambda = \pm a$. Ces rayons séparent 3 feuillet de la variété V. Le feuillet intermédiaire pos-

sède un axe de symétrie. Les 2 feuillets extrêmes, dépourvus de symétrie propre, sont symétriques l'un de l'autre.

3°) Solution B : infinité de lignes de rebroussement, séparant une infinité de feuillets. Mais tous ces feuillets dérivent de deux d'entre eux (successifs) par rotation de

$n \pi \left(\frac{\cos \varphi}{\sin V} - 1 \right)$ (n entier) autour de O ; car lorsqu'on

augmente λ de $\frac{\pi}{\sin V}$, z et $\frac{\partial z}{\partial m}$ changent simplement de signe. La solution B ne fournit donc que 2 équilibres distincts. Chacun des feuillets possède un axe de symétrie.

Lorsqu'on rencontre une ligne de rebroussement, $|U|$ prend la valeur 1 et réciproquement. Il en résulte que dans une même feuille $|U|$ est toujours supérieur ou toujours inférieur à 1.

Lignes remarquables. — Elles ne sont pas, en général, de définition simple, sauf les lignes isobares qui, pour $|b| < 1$ sont des épicycloïdes allongées (formant des bouches tangentes aux lignes de rebroussement) et pour $|b| > 1$ s'obtiennent en composant deux rayons vecteurs de 2 spirales logarithmiques inverses qui forment entre eux un angle fixe.

Équilibres réciproques. — Nous supposons que l'origine des contraintes est au sommet de la C. I. Dans ce cas 2 équilibres réciproques correspondent à la même C. I. De plus à un équilibre à isoclines rectilignes correspond un autre équilibre à isoclines rectilignes, car sur une isocline du premier, les contraintes sont de direction constante.

D'ailleurs, prenant comme première solution la forme (F), on a pour la seconde :

$$z' = \epsilon' = -\gamma = \frac{\partial z}{\partial m} \quad \Sigma' = -\Sigma \quad \lambda' = \lambda$$

d'où :

$$z' = ck e^{-b\Sigma'} g(\lambda' - a)$$

Cette solution dérive de la première par le changement de b en $-b$, ce qui entraîne le changement de signe de k et de a . Les formes particulières B_1 et B_2 , B_3 et B_4 , C_1 et C_2 , D_3 et D_4 , sont ainsi 2 à 2 réciproques.

Quand on passe d'une isocline à l'isocline associée, la quantité U se change en $-\frac{1}{U}$. A un domaine où les isoclines sont mineures ($|U| > 1$) correspond donc un domaine où les isoclines sont majeures.

Comparons enfin les rayons vecteurs r et r' de 2 points associés.

On a :

$$r = h(\lambda) e^{(b - \sin \varphi) \Sigma}$$

$$r' = H(\lambda') e^{-(b + \sin \varphi) \Sigma'}$$

$$= H(\lambda) e^{(b + \sin \varphi) \Sigma}$$

D'où :

$$r' = F(\lambda) r^{\frac{b + \sin \varphi}{b - \sin \varphi}}$$

APPLICATIONS. — I) *Ecoulement d'un matériau pulvé-
rulent entre deux parois planes pour une valeur quel-
conque du frottement.*

Le problème est résolu par les équilibres correspondant aux feuilletés à axe de symétrie de la solution précédente.

Nous remarquons en effet que la bissectrice de l'angle des parois est évidemment axe de symétrie. Cette droite correspond à $\lambda = 0$, c'est-à-dire à une contrainte principale majeure parallèle à Ox . Nous devons donc la prendre pour axe Ox dans le cas d'un écoulement avec pression axiale prépondérante, pour axe Oy dans le cas d'un écoulement avec pression latérale prépondérante. Remarquons que ceci fixe le signe de kk' (voir plus haut : symétries), négatif dans le premier cas, positif dans le second.

Le signe de k étant celui de b , il ne reste donc qu'à déterminer b . Pour cela nous calculerons les valeurs de U et λ pour l'une des parois F .

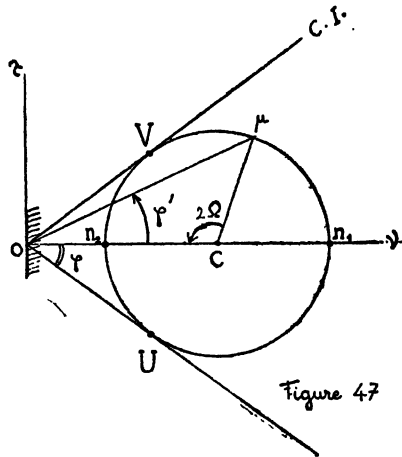


Figure 47

1°) U — L'inclinaison des contraintes sur la paroi est connue, d'après l'angle de frottement ($\varphi' \leq \varphi$) et le sens du glissement. On en déduit l'angle Ω (d'après les propriétés du cercle de Mohr — voir fig. 47), d'où U .

Remarquons que : $|U| > 1$ pour l'écoulement avec pression axiale prépondérante (isoclines lignes mineures).

$|U| < 1$ pour l'écoulement avec pression latérale prépondérante.

2°) λ — nous est donné par l'angle de Ox avec la contrainte principale majeure en un point de la paroi F (fig. 48).

Pour l'écoulement avec pression axiale prépondérante ($|U| > 1$), on a :

$$\lambda \cos \varphi = \alpha - \Omega$$

Pour l'écoulement avec pression latérale prépondérante ⁽¹⁾ ($|U| < 1$) :

$$\lambda \cos \varphi = \alpha - \Omega + \frac{\pi}{2}$$

2α désignant l'angle des 2 parois.

U et λ étant calculés, la relation (R) fournit une équation en b . La discussion de cette équation montre qu'elle a toujours une solution et une seule (étant entendu qu'on exclut les solutions sans valeur physique pour lesquelles F et F' appartiendraient à deux feuilletts différents). On peut remarquer que le changement de b et $-b$ remplace U par $-\frac{1}{U}$. Ceci permet de se ramener au cas $|U| \leq 1$.

D'autre part le changement simultané des signes de λ et de U ne modifie pas b , ce qui permet de se ramener au cas $\lambda \geq 0$. Nous avons tracé sur un abaque ⁽²⁾, pour les feuilletts à axe de symétrie, les courbes U , λ pour b constante, courbes cotées en valeur de b , limitées à $\lambda \geq 0$ et

(1) La direction Ox étant cette fois-ci normale à l'axe de symétrie.

(2) Voir à la dernière page.

$|U| \leq 1$. Cet abaque donne immédiatement la solution de l'équation (R).

Efforts totaux. — Les efforts totaux Q_0 , Q_1 , P s'obtiennent en considérant (fig. 49) le diagramme réciproque de la figure 48.

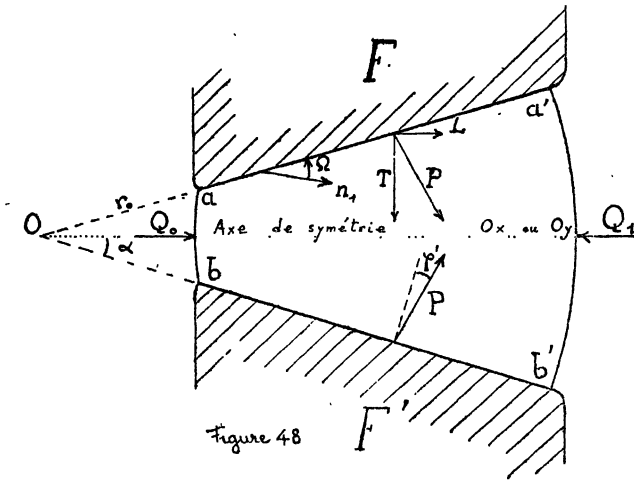


Figure 48

On a :

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{r'_1}{r'_0} = \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^\mu \quad \text{avec } \mu = \frac{b + \sin \varphi}{b - \sin \varphi}$$

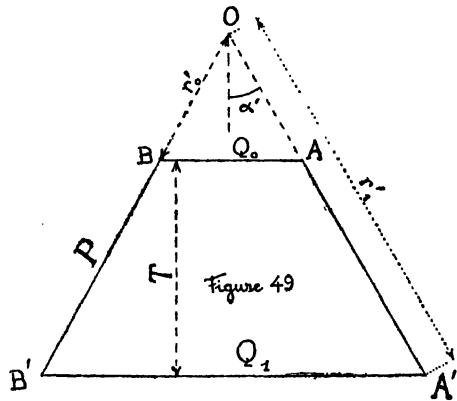
$$P = \frac{Q_1 - Q_0}{2 \sin \alpha'} \quad \text{avec } \alpha' = \alpha + \varphi'$$

L'angle φ' étant compté positivement si le glissement sur les parois s'effectue vers la convergence, négativement dans le cas contraire.

Connaissant l'un des efforts totaux nous pouvons ainsi calculer les 2 autres (Applications : trémies, presses, mâchoires).

II. — *Ecoulement d'un matériau cohérent entre deux parois planes, avec frottement maximum.*

Le problème de l'écoulement d'un matériau cohérent entre 2 parois se ramène, par le théorème des états correspondants, au problème précédent dans 2 cas : frottement nul et frottement maximum. Le premier cas ayant déjà été traité, envisageons seulement le second.



Dans ce second cas, les contraintes sur les parois sont marginales (et les parois lignes de rebroussement). Après addition d'une sollicitation isotrope H , on obtient des contraintes d'inclinaison constante égale à φ . On est donc ramené au problème précédent avec : $\varphi' = \varphi$. On aura ici :

$$\Omega = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

d'où :

$$U = + 1$$

si le glissement se fait vers la convergence ;

$$\Omega = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$$

d'où :

$$U = -1$$

si le glissement se fait vers la divergence.

Notre abaque donne directement la valeur de b , si l'on a affaire à un écoulement avec pression latérale prépondérante ($|U| < 1$ dans la masse). Au contraire, on devra remplacer U par $-\frac{1}{U}$, c'est-à-dire, changer le signe U , puis changer le signe trouvé pour b , si l'on a affaire à un écoulement avec pression axiale prépondérante ($|U| > 1$ dans la masse).

Les efforts totaux, Q_0, Q_1, P (composantes T, L) se déduisent, en vertu du théorème des états correspondants, des efforts correspondants Q'_0, Q'_1, T', L' pour le matériau pulvérulent. On a :

$$\begin{aligned} Q' &= Q + 2Hr \sin \alpha \\ T' &= T + H(r_1 - r_0) \cos \alpha \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} Q_1 + 2Hr_1 \sin \alpha &= (Q_0 + 2Hr_0 \sin \alpha) \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^{\mu} \\ T &= \frac{Q_1 - Q_0}{2} \cotg \alpha' - \varepsilon H \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha'} (r_1 - r_0) \\ L &= \frac{Q_1 - Q_0}{2} \end{aligned}$$

avec :

$$b = \frac{b + \sin \varphi}{b - \sin \varphi} \quad \alpha' = \alpha + \varepsilon \varphi$$

$\epsilon = +1$ si l'écoulement se fait vers la convergence;
 $\epsilon = -1$ si l'écoulement se fait vers la divergence.

Le cas d'une C. I. à branches parallèles se déduit du cas général en faisant tendre φ vers 0, H vers l'infini et le produit $2H\varphi$ vers ω . On obtient aisément :

$$T = \frac{Q_1 - Q_0}{2} \cotg \alpha - \epsilon \frac{\omega}{2} \frac{r_1 - r_0}{\sin \alpha}$$

EXEMPLE: *Etirage à travers une filière rectiligne avec frottement maximum.*

C'est un écoulement avec pression latérale prépondérante et glissement vers la convergence. On a :

$$U = +1 \quad \lambda = \left(\alpha + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \frac{1}{\cos \varphi}$$

L'abaque donne pour b une valeur toujours comprise entre $\sin \varphi$ (valeur qui correspond à $\alpha = 0$) et $+1$.

L'effort Q sur la section d'entrée étant nul, on obtient pour l'effort de traction sur la section de sortie, évalué par unité de surface :

$$q = \frac{-Q_0}{2r_0 \sin \alpha} = H \left[1 - \rho^{\mu - 1} \right] \text{ si } \varphi \neq 0$$

$$q = \frac{\omega}{b} \text{Log} \left(\frac{1}{\rho} \right) \text{ si } \varphi = 0$$

$\rho = \frac{r_0}{r_1}$ désignant le rapport des sections de sortie et d'entrée.

CHAPITRE VII

SOLUTION A PARTIR DES CONTRAINTES SUR UN CONTOUR LIMITE

Nous nous proposons dans ce chapitre de rechercher la solution des équations A_1 de l'équilibre plastique, qui satisfait à certaines conditions sur le contour du domaine en équilibre limite. Comme pour beaucoup de problèmes de ce genre la solution, alors même qu'on possède les moyens de l'obtenir, se heurte à de grosses difficultés pratiques. En outre il se présente ici une difficulté théorique. Il s'agit de connaître *le nombre ou l'étendue des conditions à la limite qui déterminent la solution*. L'objet principal des développements de ce chapitre est de répondre à cette question préalable des conditions de détermination de la solution.

On connaît l'importance fondamentale du théorème de Cauchy dans de pareilles questions, mais on sait aussi qu'il ne les résoud pas entièrement. Ainsi considérons les problèmes relevant d'une équation aux dérivées partielles du second ordre (z fonction inconnue de x et y).

Dans certains cas z est déterminée par ses valeurs sur une courbe du plan xy , ainsi que celles de sa dérivée normale à la courbe: ces données sont celles de Cauchy. Dans d'autres cas, la solution est déterminée par un seul

de ces 2 ensembles de données : valeurs de z ou valeurs de sa dérivée normale sur la courbe (qui est fermée). Enfin dans des cas plus complexes on doit fournir sur certains arcs 2 données (données de Cauchy), sur d'autres une seule donnée. Ces différences peuvent s'expliquer en faisant appel aux *singularités* des solutions. Supposons qu'on ait trouvé une surface : $F(x, y, z) = 0$ satisfaisant aux conditions de Cauchy. Si nous tirons z en fonction explicite de x et y , des singularités peuvent apparaître, par le seul fait que l'on introduit la projection du point x, y, z sur le plan xy . Ces singularités sont des recouvrements, des lacunes et des discontinuités ⁽¹⁾. Si donc, dans un certain domaine, on impose à la solution de ne présenter ni recouvrement, ni lacune, ni discontinuité, le problème de Cauchy pourra devenir impossible. C'est ce qui aura lieu notamment pour une courbe fermée.

PROBLÈME DE CAUCHY. — Examinons dans le cas qui nous occupe, le problème de Cauchy, sans nous soucier d'abord des singularités en projection.

1°) *Conditions à la limite pour le système A₁*. — Le problème de Cauchy consiste à déterminer une variété V à 2 dimensions de l'espace x, y, S, Θ , qui passe par une courbe donnée de cet espace. La projection (x, y) de cette courbe étant fixée, S et Θ (ou encore u et v) sont les don-

(1) Dans le cas d'une ligne de contour apparent, on supprime le recouvrement en arrêtant la surface au contour apparent : mais il subsiste une lacune (tout le plan xy n'est pas couvert). Dans le cas d'un point critique, on supprime le recouvrement par une coupure : mais il subsiste une discontinuité le long de la coupure.

nées de Cauchy. En fait ce ne sont pas, pratiquement, \mathbf{S} et Θ qui nous sont donnés, mais les contraintes sur la courbe. Rappelons d'ailleurs que la donnée des contraintes (grandeur et direction) n'est pas suffisante pour déterminer sans ambiguïté la sollicitation \mathbf{S} , Θ : il faut encore connaître la *nature* des contraintes, nature qui ne peut être déduite que d'une étude plus ou moins sommaire des déplacements (comme il a été fait au chapitre VI).

2°) *Conditions à la limite pour le système (5)*. — Au chapitre III nous avons ramené le système A_1 au système (5) par l'interversion des fonctions (\mathbf{S} , Θ ou u , v) et des variables (x , y). Cette interversion ne modifie en rien le problème de Cauchy (« faire passer une variété V par une courbe donnée de l'espace x , y , u , v »). Nous sommes donc ramenés au problème de Cauchy pour le système (5). Il est vrai que, pour le système (5), les variables sont ε , γ , u , v , et non x , y , u , v . Mais, lorsque sur une courbe on connaît les valeurs simultanées de x , y , u , v , on en déduit immédiatement celles de ε , γ , u , v , ε et γ étant déduits des relations (7).

D'ailleurs ε et γ se déduisent des composantes de l'arc $MM' = ds$ du contour suivant les deux directions marginales. On a (fig. 50) :

$$(14) \quad -\frac{\varepsilon du}{\sin \omega'} = \frac{\gamma dv}{\sin \omega} = \frac{\sqrt{\tau} ds}{\cos \varphi}$$

ω et ω' étant les angles de la direction MM' avec les directions positives des lignes u , et v (sur la fig. 50, ω est positif, ω' négatif). Les angles 2ω , $2\omega'$ sont donnés di-

rectement par le cercle de Mohr (angles au centre correspondant aux arcs μU et μV de la fig. 47).

On remarque que :

si l'arc MM' est mineur : $\sin \omega \sin \omega' < 0$ donc : ϵ, γ du $dv > 0$;

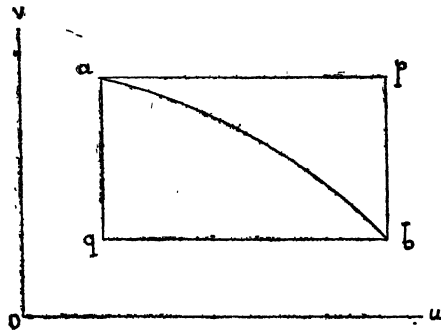
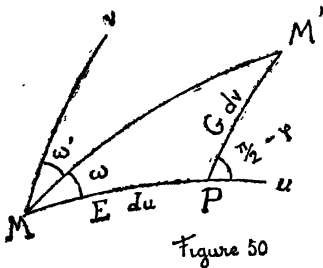


Figure 51

si l'arc MM' est majeur : $\sin \omega \sin \omega' > 0$ donc : ϵ, γ du $dv < 0$.

3°) *Solution.* — Le problème de Cauchy pour le système (5) a été résolu au chapitre IV par l'introduction d'une solution particulière $\epsilon'\gamma'$, qui est effectivement connue dans le cas d'une C. I. rectiligne. L'intégration introduit dans ce cas la fonction :

$$\psi = J_0 [2\sqrt{-(l - l_0)(m - m_0)}]$$

et sa dérivée :

$$\frac{\partial \psi}{\partial l} = - \frac{m - m_0}{\sqrt{-(l - l_0)(m - m_0)}} J_0$$

Il existe des tables qui donnent J_0 et J'_0 ⁽¹⁾. Cette solu-

(1) Cf. X. Dans cette table $J_1(x)$ désigne $-J'_0(x)$.

tion permet d'établir d'une façon rigoureuse les propriétés suivantes, déjà énoncées au chapitre II :

a) Principe fondamental de détermination : La donnée des contraintes (direction, grandeur, nature) sur un arc AB détermine entièrement les contraintes dans la quadrilatère formé par les lignes marginales issues des extrémités de l'arc — et dans ce quadrilatère seulement.

b) Le long d'une ligne marginale, une infinité d'équilibres limites peuvent se raccorder.

4°) *Détermination à partir de deux lignes marginales.*

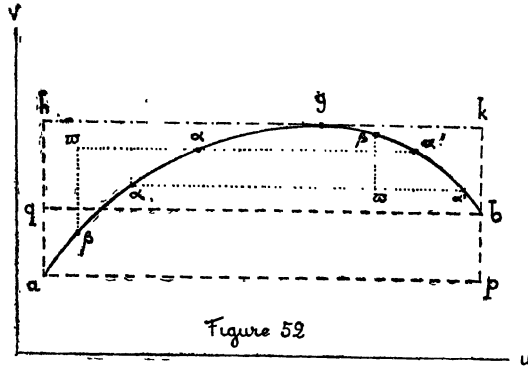
— Sur une ligne marginale de forme déterminée, la connaissance de la contrainte en un point fixe les valeurs de S et Θ en tous les autres points. On en déduit, s'il s'agit d'une ligne u , les valeurs de ε , s'il s'agit d'une ligne v les valeurs de γ , au moyen des formules (14) (au contraire dans le cas d'une ligne u , les formules (14) ne donnent pas γ , car on a simultanément : $dv = 0$ et $\omega = 0$). Ces données sont insuffisantes si elles se rapportent à une seule ligne marginale. On devra donc se donner *2 arcs marginaux concourants et la contrainte marginale en leur point de concours* ⁽¹⁾. Le problème sera alors résolu par les relations (10'').

RESTRICTIONS AU PRINCIPE FONDAMENTAL DE DÉTERMINATION. — Des restrictions apparaissent lorsque des lacunes

(1) Avec la condition que l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$ des 2 lignes marginales ait la valeur qui correspond, d'après la C. I., à la grandeur de la contrainte marginale donnée.

ou des recouvrements se produisent dans le plan xy pour des points dont les images font partie du rectangle fondamental $apbq$ (fig. 51). C'est ce qui se produit si ce rectangle est traversé par une ligne de rebroussement (recouvrement et lacune) ou par l'isobare limite (lacune), ou même en dehors de telles circonstances car nous savons qu'un domaine limité peut se recouvrir sans présenter ni ligne ni point singulier.

Mais la restriction la plus importante provient d'un recouvrement qui se produit simultanément sur le plan u, v et sur le plan x, y ⁽¹⁾. Supposons que l'arc image ab possède une tangente parallèle à l'un des axes : par exemple,



en g , la tangente est parallèle à Ou (fig. 52). Les parallèles voisines qui sont au-dessus de g ne coupent par l'arc ab ; les parallèles qui sont au-dessous de g coupent l'arc en 2 points α et α' . On ne trouve donc aucune solution

(1) La variété V possédant une arête de rebroussement projetée suivant hk .

au-dessus de la tangente $h g k$. Par contre pour les points situés dans le rectangle $b k h q$ on trouve par la relation (10) 2 solutions, suivant qu'on utilise dans cette relation l'arc $\alpha\beta$ ou l'arc $\alpha'\beta$. Ces 2 solutions coïncident le long de $h k$ (α et α' confondus en g). Nous voyons ainsi que la variété V possède, à l'égard de la projection uv , deux feuillet qui se recouvrent. Le rectangle où la solution est déterminée se trouve replié sur lui-même le long de $h k$ donnant les deux rectangles $apkh$ et $khqb$.

Toutefois le recouvrement sur le plan uv n'implique pas à priori un recouvrement sur le plan xy . Nous savons en effet que la variété V se recouvre le long d'une ligne u du plan uv (sans recouvrement xy) si γ est infini sur cette ligne et change de signe lorsqu'on traverse la ligne sup-

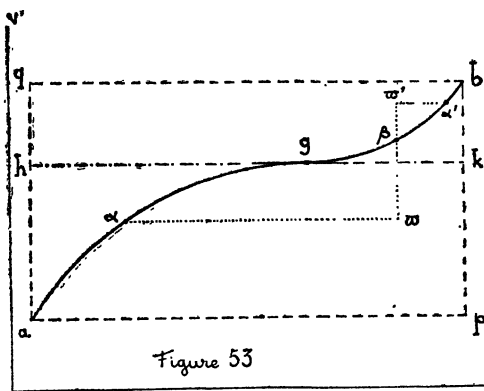


Figure 53

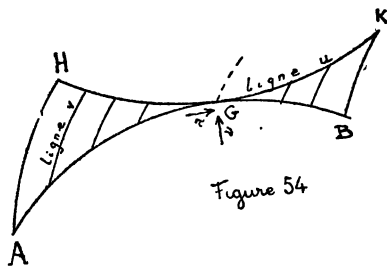


Figure 54

port correspondante (ligne d'inflexion). Si donc γ est infini en g et change de signe lorsqu'on passe de gauche à droite de g sur l'arc ab , il n'y a aucune restriction à faire. L'inconvénient du recouvrement u, v est d'ailleurs supprimé

si l'on déplie suivant hk' le pli des 2 feuillets de V (fig. 53).

Il y a au contraire recouvrement sur le plan xy si γ ne devient pas infini en g (ou tout au moins ne change pas de signe). Dans ce cas la contrainte en G sur l'arc AB est marginale (car d'après (14) on a $\sin \omega = 0$) et la nature de l'arc AB change de part et d'autre de G (car le signe de $\varepsilon \gamma$ du dv change). Nous pouvons donc formuler l'énoncé suivant qui limite la validité du principe fondamental :

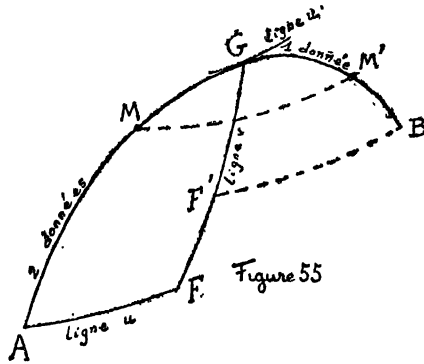
On ne peut choisir arbitrairement la grandeur et la direction des contraintes que sur un arc où la nature des contraintes ne varie pas.

Il est vrai que la contrainte en G pourrait être marginale sans que la tangente en g soit parallèle à Ou . En effet de $\omega = 0$ on déduit par (14) $\gamma dv = 0$. On peut donc avoir soit $dv = 0$, soit $dv \neq 0$ et $\gamma = 0$. Mais dans ce second cas il passe par g une ligne de rebroussement que l'on ne doit pas franchir et l'énoncé précédent reste exact.

Cas d'une détermination unilatérale. — La règle précédente a été énoncée en supposant que l'on se proposait de déterminer les contraintes des 2 côtés de l'arc. S'il n'en est pas ainsi, la restriction n'intervient que si l'image du domaine étudié se place dans la concavité de l'arc ab . Si l'image du domaine est dans la convexité de l'arc ab , on peut choisir arbitrairement la grandeur et la direction des contraintes sur la totalité de l'arc AB ; la zone déterminée se compose alors des 2 triangles AHG et BKG . On remarquera que, lorsqu'on se trouve dans ce cas, la

composante tangentielle de la contrainte appliquée en G au domaine étudié se dirige de l'arc mineur vers l'arc majeur (fig. 54) et réciproquement.

PROBLÈMES MIXTES. — Une ligne marginale (telle que MM' fig. 55) rencontrant l'arc AB en 2 points situés de part et d'autre de G établit une relation entre les contraintes en ces 2 points. On en déduit que si, sur l'arc AG,



on impose la grandeur et la direction des contraintes, on ne peut plus, sur l'arc GB, imposer qu'une de ces données ou plus généralement les valeurs d'une fonction de la grandeur et de la direction des contraintes ⁽¹⁾.

Le problème de la détermination des contraintes est alors un problème *mixte* (IX). Ce problème se ramène à la résolution successive :

(1) Au point G lui-même il existe entre les 2 données une condition résultant de ce que la ligne est tangente à l'arc. Cette condition est : $dv = 0$; ou encore : $dt = dn \operatorname{tg} \varphi$ en désignant par n et t les composantes normale et tangentielle de la contrainte sur un élément de l'arc GA.

1°) du problème de Cauchy à partir de l'arc AG porteur de 2 données — solution déterminée dans le domaine triangulaire AGF limité par les lignes marginales AF et GF.

2°) du problème que j'appellerai « *mixte simplifié* »⁽²⁾ qui consiste à déterminer la solution dans le domaine triangulaire BGF' à partir de la caractéristique GF déterminée au § 1 (et sur laquelle on connaît S et Θ) et de l'arc GB porteur d'une seule donnée.

Contrairement à ce qui se passait pour le problème de Cauchy, le problème mixte simplifié pour le système A_1 ne peut pas se ramener, en général au problème analogue pour le système (5) (problème déjà fort difficile). En effet les images des différents points de l'arc GB ne sont pas connues. Voici toutefois un cas exceptionnel où les 2 problèmes se ramènent l'un à l'autre : l'arc GB est un segment de droite le long duquel est imposée entre S et Θ une relation indépendante du point considéré. En effet cette relation fait connaître la courbe image ; en outre, en égalant la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée des relations (7) au coefficient angulaire de la droite on obtient une relation le long de cette courbe image entre ε , γ , u et $v \frac{dv}{du}$.

Exemple de problème mixte : Transmission à une paroi d'une contrainte appliquée sur une surface libre (fig. 16). Dans l'angle BAX on a à résoudre un problème de Cauchy, dans l'angle XAY un problème mixte simplifié qui si l'on

(2) 3^{me} problème de E. Picard. Cf. IX.

suppose qu'il y a glissement le long de la paroi (rectiligne) est précisément du type exceptionnel que nous venons d'indiquer.

CONTOUR FERMÉ — PROBLÈME INTÉRIEUR. — Nous supposons que tout l'intérieur du contour C doit être en équilibre limite. Se trouve donc exclu le cas de zones en équilibre surabondant à l'intérieur de C . Dans ces conditions, à l'intérieur de C , la solution ne doit présenter ni ligne de rebroussement, ni point critique (entraînerait lacunes ou discontinuités).

CONTOUR SIMPLE. — Considérons d'abord un contour simple. Il résulte de ce qui précède que :

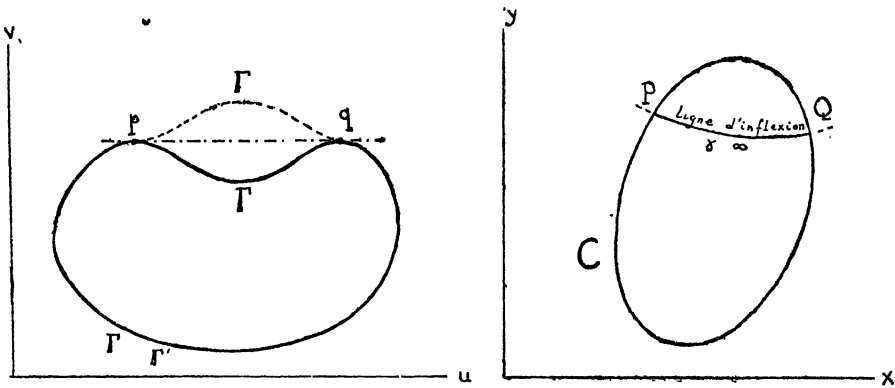


Figure 56

1°) Lorsqu'on fait un tour sur C , l'angle Θ doit reprendre sa valeur initiale (et non pas cette valeur modifiée d'un multiple de 2π); autrement dit *la courbe Γ image de C dans le plan uv doit être fermée.*

Si sur le contour on rencontre des points où ε (ou γ) devient infini et change de signe (points par où passent des lignes d'inflexion) on est amené à utiliser la représentation $u' v'$ (page 102), dans laquelle le contour a pour image Γ' . La courbe Γ' elle aussi doit être fermée: sinon le point $u' v'$ pourrait sans sortir du domaine, s'éloigner à l'infini; x, y restant finis il y aurait point critique.

Dans la représentation $u' v'$ la nature d'un arc est liée au signe du coefficient angulaire de la tangente à l'arc, car :

$$\varepsilon\gamma \, du \, dv = |\varepsilon\gamma| \, du' \, dv'$$

Si $du' \, dv' > 0$, l'arc est mineur.

Si $du' \, dv' < 0$, l'arc est majeur.

On en déduit que la nature des arcs du contour ne saurait rester constante et qu'il existe au moins 2 arcs de chaque nature (sauf au cas de points anguleux que l'on pourra d'ailleurs assimiler à de petits arcs). Il existe donc sur C au moins 4 éléments d'arcs marginaux.

2°) A l'intérieur de C doit correspondre l'intérieur de Γ' ⁽¹⁾ : il ne saurait en effet lui correspondre une zone extérieure à Γ' , limitée (car ce ne pourrait être que par des lignes de rebroussement), ni illimitée (car u, v devenant infinis pour x, y finis, il y aurait point critique).

Ceci étant les différents arcs séparés sur C par les éléments marginaux peuvent être classés en 4 catégories sui-

(1) Le jacobien $\frac{D(x, y)}{D(u', v')} = \frac{|\varepsilon\gamma|}{\tau} \cos \varphi$ étant positif, la condition pour qu'il en soit ainsi est que les sens de rotation qui se correspondent sur C et sur Γ' soient les mêmes.

vant la situation des normales à leurs images dirigées vers l'intérieur de Γ' dans l'un ou l'autre des 4 quadrants formés par les lignes marginales. Nous numérotions ces catégories dans l'ordre des quadrants successifs et nous parlerons, comme pour les quadrants, de catégories *adjacentes* et de catégories *opposées*. On peut alors énoncer le principe de détermination suivant :

On peut choisir arbitrairement ⁽¹⁾ la grandeur et la direction des contraintes sur les arcs de l'une des catégories l'une de ces données seulement (ou plus généralement une fonction quelconque de l'état de contrainte) sur les arcs

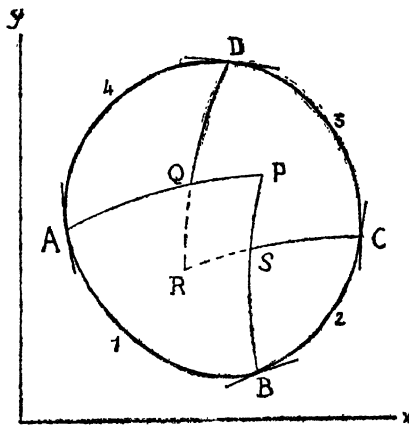


Figure 57

des 2 catégories adjacentes : sur les arcs de la catégorie opposée et dans tout l'intérieur du contour, les contraintes sont alors entièrement déterminées.

Considérons par exemple un contour composé seulement

(1) Sauf restrictions provenant de : ligne de rebroussement, isobare limite, ou recouvrement sans points singuliers.

de 4 arcs de catégories différentes (fig. 57). Supposons fixées 2 données sur l'arc AB (catégorie 1), une seule sur BC (catégorie 2) et sur AD (catégorie 4), zéro sur CD (catégorie 3). On détermine :

1°) à partir de AB, par un problème de Cauchy, les contraintes dans le triangle PAB.

2°) à partir de BC et du segment marginal BP, par un problème mixte simplifié, les contraintes dans le triangle CBS.

3°) à partir de AD et du segment marginal AP, par un problème mixte simplifié, les contraintes dans le triangle DAQ.

4°) à partir des 2 segments marginaux DR et CR, les contraintes dans la zone restante CSPQD.

Ceci suppose le point S entre B et P, le point Q entre A et P. S'il n'en est pas ainsi, la détermination est un peu plus longue mais repose toujours sur la résolution, de proche en proche, de problèmes des 3 types précédents. Il en est de même lorsque le contour présente plusieurs arcs d'une même catégorie.

Pour démontrer le principe de détermination d'une façon générale considérons les connexions existant entre les arcs de différentes catégories.

Appelons *ligne de connexion* une ligne brisée inscrite dans le contour et dont les côtés successifs sont des arcs de lignes marginales; exemple : la ligne dont l'image est j, k, l, m, n (fig. 58). On établit aisément qu'une ligne de connexion issue d'un arc d'une catégorie déterminée ne peut retomber sur un arc de la même catégorie sans avoir auparavant rencontré un arc de la catégorie oppo-

sée, circonstance qui, d'ailleurs, se produit toujours, après un parcours fini, pour une courbe fermée (que nous supposons sans point anguleux).

Ceci étant soit 1 la catégorie des arcs porteurs de 2 don-

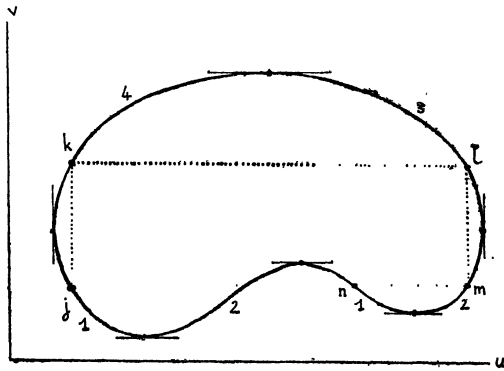


Figure 58

nées, 2 et 4 les catégories adjacentes des arcs porteurs de 1 donnée. Vérifions que ces données, indiquées par le principe de détermination sont bien compatibles avec les relations entre contraintes résultant des connexions marginales.

1°) Il n'existe pas de connexion entre les arcs 1 sans passer par les arcs 3 où aucun renseignement sur les contraintes n'est fourni. On peut donc bien se donner arbitrairement les contraintes sur tous les arcs 1.

2°) D'un point M d'un arc 2 ou 4 partent 2 lignes de connexion : arrêtons ces lignes lorsqu'elles rencontrent un arc 1 ou un arc 3. Si l'une aboutit à un arc 1, l'autre

aboutit à un arc 3 : sinon leur ensemble formerait une ligne de connexion joignant 2 arcs 1 sans passer par un arc 3. La connexion aboutissant à l'arc 3 ne fournit aucun renseignement; celle qui aboutit à l'arc 1 fournit une relation entre S et Θ en M ; il existe donc en M une donnée arbitraire.

3°) D'un point L d'un arc 3 partent 2 lignes de connexion qui toutes deux aboutissent à un arc 1 avant d'avoir rencontré un autre arc 3 : chacune d'elles fournit une relation entre S et Θ en L . En L il ne reste donc plus rien d'arbitraire.

APPLICATION. — Considérons le problème de l'*écoulement entre 2 parois planes* dans les cas envisagés à la fin du chapitre VI. Sur chacune des parois la valeur de l'angle Θ est connue est constante. L'image de chacune des parois est donc une droite (isocline) connue. De plus la valeur de l'angle Ω est connue et constante sur chacune des parois; il en résulte d'après la relation (11), que sur chacune des droites images la valeur du rapport ε/γ est une constante connue.

Ces données ne suffisent évidemment pas pour déterminer l'équilibre limite. Envisageons en effet un contour fermé tel que $abb'a'$ (fig. 59) où ab et $a'b'$ sont 2 sections droites. Son image est $\alpha\beta, \beta'\alpha'$. Nous supposerons que sur l'arc ab les contraintes sont : 1°) deux à deux symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle des parois;

2°) toutes de même nature, nature nécessairement opposée à celle des parois (en vertu de la symétrie des points

α et β par rapport à la droite $\Theta = 0$ image de la bissectrice précédente).

L'arc $\alpha\beta$ d'une part et les 2 arcs $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ de l'autre appartiennent donc à des catégories adjacentes. Il en résulte, les arcs aa' et bb' n'étant porteurs que d'une donnée, que l'on pourra, pour déterminer l'équilibre limite, faire choix sur l'arc ab de 2 données (grandeur et direction des con-

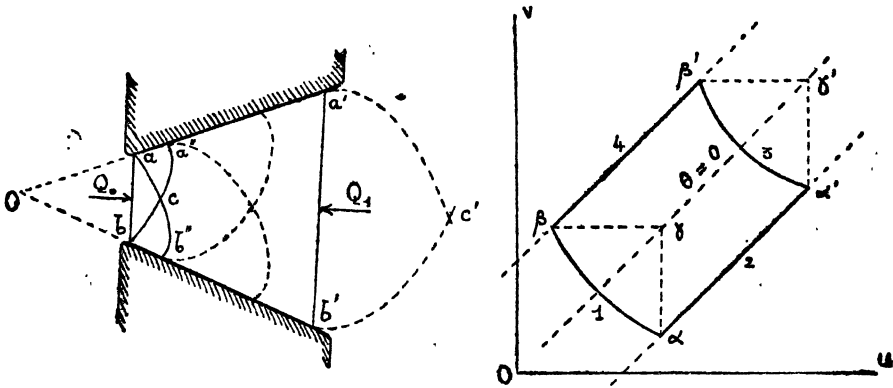


Figure 59

traintes). A ce moment les contraintes sont entièrement déterminées dans le domaine $abb'c'a'a$ ($a'c'$ et $b'c'$ étant 2 lignes marginales issues de a' et b') et en particulier sur l'arc $a'b'$.

Ainsi pour un même effort total Q_0 sur l'arc ab , il y a une infinité de solutions, correspondant aux différents modes de répartition possible de cet effort sur l'arc ab . La solution du chapitre VI n'est donc pas l'unique solu-

tion; cependant elle possède un intérêt primordial. En effet, soit une autre solution du problème; lorsqu'on s'éloigne de la section ab , soit vers l'infini (cas de la fig. 59), soit vers le point O :

ou bien cette solution cesse à un certain moment d'exister, n'étant valable que dans un domaine limité (par suite de singularités);

ou bien elle tend vers la solution du chapitre VI, car les lignes isoclines tendent à se confondre avec des droites (leurs asymptotes ou leurs tangentes en O).

On étudierait facilement dans le domaine $a''b'' b a$ une autre solution : celle qui correspond à des contraintes normales et uniformes sur ab (équilibre homogène dans le triangle abc , équilibres semi-homogènes dans les triangles $aa''c$ et $bb''c$).

CONTOUR MULTIPLE. — Soit par exemple un contour multiple formé de deux contours partiels C_1 et C_2 . Lorsqu'on fait un tour sur C_1 ou sur C_2 , on tourne autour d'un vide : l'intérieur de C_2 , et par suite l'angle Θ ne reprend pas nécessairement sa valeur initiale mais plus généralement cette valeur modifiée d'un multiple de 2π . Les images Γ_1, Γ_2 (plan u', v') des contours partiels ne sont donc pas nécessairement fermées.

1^{er} Cas : *L'une des images est fermée.* — Il en est alors de même de l'autre. En effet réunissons les deux contours par une ligne double $AB, \bar{A}'B'$; nous constituons un contour simple dont l'image doit être fermée. Si l'image Γ_1 est fermée, les images a et a' de A et A' coïncident; il en

est alors de même des images b et b' de B et B' . Donc la courbe Γ_2 est fermée.

De plus, les contours partiels Γ_1 , Γ_2 doivent être intérieurs l'un à l'autre; sinon on ne pourrait parler de domaine intérieur au contour total Γ' (cf. page 172, § 2°).

Ceci étant, le *principe de détermination* reste le même

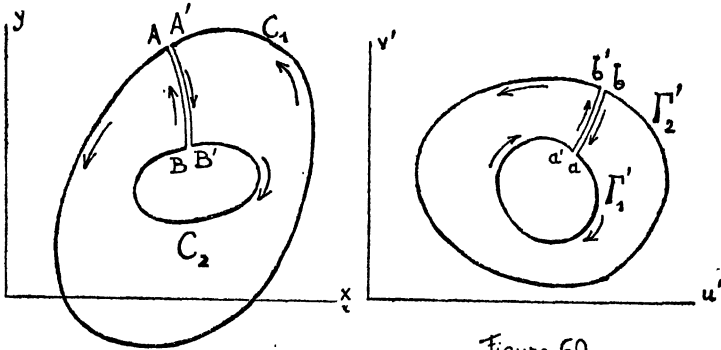


Figure 60

que pour un contour simple. Considérons en effet le contour dont l'image est contour extérieur — soit C_2 (image Γ_2 sur la figure 60). A partir des données sur C_2 supposées conformes au principe indiqué, on pourrait, progressivement, déterminer la solution dans tout le domaine dont l'image est intérieure à Γ_2 . Mais à un certain moment on tombe en un point A sur la frontière C_1 . Joignons alors A au contour C_2 par une ligne double AB , $A'B'$ tracée dans le domaine dès à présent déterminé. Nous constituons un contour simple et la solution s'achève comme dans le cas du contour simple (sans avoir aucune don-

née à fournir sur AB et $A'B'$). Le principe de détermination n'est donc pas modifié.

2^e Cas : Les images des contours partiels ne se ferment pas. — Si, partant d'un point A sur C_1 , on effectue un tour sur C_1 , le point figuratif décrit un arc aa' ; si nous effectuons un second tour, il décrira un nouvel arc $a'a''$ se déduisant du premier par la translation aa' , etc... La courbe Γ_1 se compose ainsi d'une infinité d'arcs identiques : un seul de ces arcs, d'ailleurs, représenterait en entier le contour C_1 ; mais on introduirait ainsi sur le contour C_1 une césure arbitraire. Il est préférable de respecter la continuité en acceptant qu'un même point support soit représenté par une infinité de points images régulièrement espacés. Dans ces conditions, l'intérieur du contour double $C_1 C_2$ sera représenté par une bande infiniment allongée ayant pour direction générale la direction Δ des lignes isobares.

Si l'on prend comme quadrant n° 1 l'un des 2 quadrants opposés qui ne contiennent pas Δ , les raisonnements faits dans le cas d'un contour simple au sujet des lignes de connexion subsistent entièrement. Le principe de détermination énoncé pour un contour simple reste donc valable sous cette condition.

On parvient également au même résultat par la recherche progressive de la solution à partir d'un des contours. *Exemple :* C_1 et C_2 sont 2 cercles concentriques. Sur l'un d'eux C_1 on donne les contraintes, normales, de grandeur constante donnée, de nature constante donnée. La solution déterminée à partir du contour C_1 est unique, car on

1°) La courbe Γ' n'est pas nécessairement fermée ⁽²⁾. En conséquence la nature des contraintes sur le contour C peut rester constante. Dans ce cas les contraintes restent arbitraires en grandeur et direction sur la totalité du contour C .

2°) Supposons la courbe image Γ' fermée et composée de 4 arcs de catégories différentes. En outre supposons qu'à l'extérieur de C corresponde l'extérieur de Γ' . Dans ce cas les contraintes sur C restent encore partout arbitraires car l'image du domaine étudié se trouve dans la convexité des arcs successifs de Γ' .

Cette plus grande liberté pour le choix des données provient de ce qu'une ligne marginale issue d'un point du contour dans le domaine extérieur ne recoupe pas nécessairement ce contour comme cela a lieu dans le domaine intérieur.

(2) Car il peut exister des points ou lignes singulières à l'intérieur de C .

Répertoire des principales notations et formules

- A** Les 2 équations d'équilibre entre les composantes v_x, τ_{xy}, v_y de la sollicitation en axes rectangulaires :
La première s'écrit :
- $$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = F_x$$
- A'** Les 2 équations d'équilibre entre les composantes p, t, q de la sollicitation en axes obliques (page 11).
- n_1, n_2** Contraintes principales : $n_1 \geq n_2$.
- j, ω** Coefficients de la condition d'écoulement pour une C. I. rectiligne :
- $$n_2 = j n_1 - \omega \quad j = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$$
- v, τ** Composantes normale et tangentielle de la contrainte *marginale*.
- φ** Angle e la tangente à la C. I. avec Oy .
- R** Rayon du cercle de Mohr.
- Θ** Angle (Ox, n_1) .
- S** Défini par :
- $$2 dS = \frac{dv}{\tau} + d\varphi \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{dR}{R}$$
- A_1** Les 2 équations aux dérivées partielles premières des fonctions S et Θ par rapport à x et y . (page 35).
- u, v** Paramètres marginaux :
 $S = u + v \quad \Theta = u - v$
- E, G** 2 fonctions de u, v intervenant dans l'expression de l'élément d'arc.

2 équations entre E et G (page 64).
La première s'écrit :

(4)
$$a(S) \frac{\partial E}{\partial v} + E \sin \varphi = -G$$

$a(S)$
$$a(S) = \frac{\cos \varphi}{1 - \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dS}} \quad \text{ou} \quad \frac{2\tau dS \cos \varphi}{dv}$$

ε, γ
$$\varepsilon(u, v) = \sqrt{\tau} E(u, v) \quad \gamma = \sqrt{\tau} G$$

(5) 2 équations entre ε et γ :

$$\begin{cases} a(S) \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = -\gamma \\ a(S) \frac{\partial \gamma}{\partial u} = -\varepsilon \end{cases}$$

l, m Pour $a(S) = C^{te} = \cos \varphi_0$ on pose :
$$u = l \cos \varphi_0 \quad v = m \cos \varphi_0$$

$z(l, m)$. Expression de ε au moyen de l, m :
$$\varepsilon = z \quad \gamma = -\frac{\partial z}{\partial m}$$

(6) Equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial l \partial m} = z$$

(7)
$$\left\{ \begin{aligned} dx &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \varepsilon \cos \left[\left(\Theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) du \right] \\ &\quad + \gamma \cos \left(\Theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) dv \end{aligned} \right\}$$

 dy expression analogue. Les cos étant remplacés par les sin.

(10)
$$\varepsilon_{\omega} = \varepsilon_{\beta} + \int_{\beta\alpha} \varepsilon \varepsilon' du + \gamma \gamma' dt$$

 ε', γ' Solution définie par :
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' &= 0 \text{ sur } \omega\alpha \\ \gamma' &= -\frac{1}{a(S)} \text{ sur } \omega\beta \end{aligned} \right\} \text{ voir fig. 27}$$

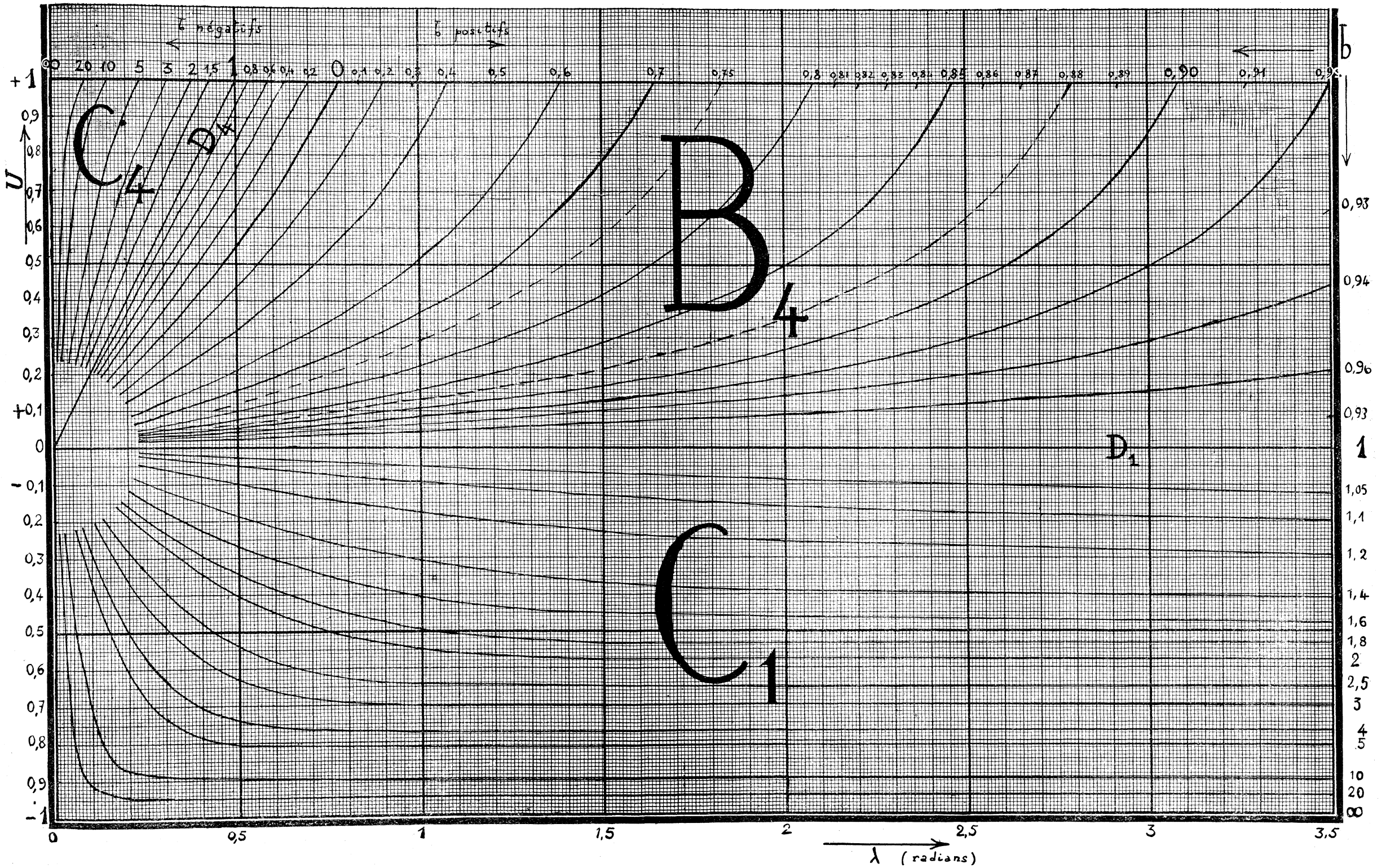
Ω Angle de n_1 avec un arc; l'angle de Ox avec l'arc est $\Theta + \Omega$.

- (11) $\operatorname{tg} \Omega = \frac{\gamma dv - \varepsilon du}{\gamma dv + \varepsilon du} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)$
- Σ $\Sigma = \int \frac{dS}{a(S)}$ Pour $\varphi = \text{Cte}$: $\Sigma = l + m$.
- ξ, η Paramètres isostatiques. La ligne ξ C^{te} est tangente à n_2 .
- E, Γ Solution de (5) telle que :
- $$\frac{\partial E}{\partial \Theta} = \varepsilon \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial \Theta} = \gamma$$
- (13) $\xi = \frac{1}{2} e^{-\Sigma} (E - \Gamma) \qquad \eta = -\frac{1}{2} e^{\Sigma} (E + \Gamma)$
- (F) Forme générale d'une solution à isoclines rectilignes, pour φ C^{te} :
- $$\begin{cases} z = c e^{b\Sigma} g(\lambda + a) \\ \frac{\partial z}{\partial m} = ck e^{b\Sigma} g(\lambda - a) \end{cases} \quad \begin{matrix} k = \pm 1 \\ (\operatorname{sgn} \text{ de } b) \end{matrix}$$
- $g(\lambda)$ $g(\lambda) = e^{b'\lambda} + k' e^{-b'\lambda} \qquad k' = 0, \infty, +1, -1$
- λ $\lambda = l - m \qquad b'^2 = b^2 - 1$
- U $U = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg} \Omega}$ où Ω est l'angle de n_1 avec l'isocline.
- (R) Relation :
- $$U = \frac{b'}{b+1} \frac{e^{2b'\lambda} - kk'}{e^{2b'\lambda} + kk'}$$
-

Bibliographie

- I. — H. TRESCA : *Mémoire sur l'écoulement des corps solides*, (Mém. prés. par divers savants, t. 18, 1868 - t. 20, 1872).
- II. — DE SAINT-VENANT : *Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles...* Journal des Math. pures et appl., t. 16, 1871.
- III. — Maurice LÉVY : *Extrait du mémoire sur les équations générales des mouvement intérieurs opérés dans les corps solides ductiles...* Journal des Math. pures et appl., t. 16, 1871.
- IV. — M. BRILLOUIN : *Théorie de la plasticité et de la fragilité des solides isotropes*. Annales de Physique, série 9, t. 13, 1920 - t. 14, 1920 - t. 15, 1921.
- V. — A. CAQUOT : *Equilibres des massifs à frottement interne*, Paris, 1934.
- VI. — H. GEIRINGER : *Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes*. Mém. des Sc. Math. Fascicule 86.

- VII. — W. PRAGER : *Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique*. Mém. des Sc. Math. Fascicule 87.
- VIII. — E. SIEBEL : *Le façonnage des métaux par déformation plastique*, traduction française par A. Collinet, 1936.
- IX. — E. PICARD : *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique*.
- X. — JAHNKE et EMDE : *Funktionentafeln*. Teubner, Berlin et Leipzig, 1936.
-



Pour $|U| > 1$ remplacer U par $-\frac{1}{U}$, b par $-b$.
 Pour $\lambda < 0$ remplacer λ par $-\lambda$, U par $-U$.

ABAQUE de la relation R
 (feuillet à axe de symétrie)

Les courbes tracées sont les courbes b C^{te}.
 Les lettres B, C, D indiquent la forme particulière de la solution F.