CONSTANTIN DRAMBA

Sur les singularités réelles et imaginaires dans le problème des trois corps

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1940

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1940__234__1_0>

SÉRIE A
No 1922
No D'ORDRE:
2789

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. CONSTANTIN DRAMBA

ASTRONOME À L'OBSERVATOIRE DE BUCAREST

1re THÈSE. — SUR LES SINGULARITÉS RÉELLES ET IMAGINAIRES DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

2e THÈSE. — MÉTHODES DE DÉTERMINATION DES ORBITES PLANÉTAIRES PAR TROIS OBSERVATIONS VOISINES.

Soutenues le 1940 devant la Commission d'Examen

MM. E. ESCLANGON *Président.*
J. CHAZY } *Examinateurs.*
A. LAMBERT }

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA CENTRALĂ
BUCUREŞTI
1940

C. 24.678.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . .	M. MOLLIARD.
Doyen	C. MAURAIN. *Professeur,* Physique du Globe.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.	DANGEARD.	G. BERTRAND.
Émile PICARD.	LESPIEAU.	ABRAHAM.
Léon BRILLOUIN.	MARCHIS.	Ch. FABRY.
GUILLET.	VESSIOT.	Léon BERTRAND.
PÉCHARD.	PORTIER.	WINTREBERT.
FREUNDLER.	MOLLIARD.	DUBOSCQ.
AUGER.	LAPICQUE.	BOHN.
		RABAUD.

PROFESSEURS

M. CAULLERY . .	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Émil BOREL	T	Calcul des probabilités et Physique mathematique.
Jean PERRIN . . .	T	Chimie physique.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON	T	Recherches physiques.
J. DRACH	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ . . .	T	Zoologie.
M. GUICHARD . . .	T	Analyse et mesures chimiques.
Paul MONTEL . . .	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
L. BLARINGHEM .	T	Botanique.
G. JULIA	T	Mecanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY . .	T	Pétrographie.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique
Eugéne BLOCH . . .	T	Physique.
G. BRUHAT	T	Physique théorique et physique céleste.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique
A. DEBIERNE. . . .	T	Physique Générale et Radioactivité.
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. B).
L. DUNOYER		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND .	T	Botanique.
M. JAVILLIER . .	T	Chimie biologique.
ROBERT-LÉVY . . .	T	Physiologie comparée.
Henri VILLAT . .	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB.	T	Géologie
P. PASCAL	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON. . .	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER . . .		Physique (P. C. B.)
De BROGLIE	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
P. JOB.		Chimie générale.
LABROUSTE		Physique du Globe.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES	T	Physiologie végetale.
GARNIER	T	Mathématiques générales.
PÉRÉS		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL.	T	Chimie minérale,
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P. C. B.)
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches physiques.
DUPONT	T	Théories chimiques.
LANQUINE	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON		Mathématiques générales.
BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT		Biologie animale (P. C. B.)
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON		Chimie organique.
G. DARMOIS		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
CHATTON	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
Jacques BOURCART		Geographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL . . .		Biologie végétale (P. C. B.)
CABANNES		Enseignement de Physique.
GRASSÉ		Biologie animale (P. C. B.).
PRÉVOST		Chimie (P. C. B).
BOULIGAND		Mathématiques.
CHAUDRON		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire	PACAUD
Secrétaire honoraire	D. TOMBECK

À

MONSIEUR NICOLAS COCULESCO

Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Bucarest
Membre de l'Institut des Sciences de Roumanie.
Ancien Directeur de l'Observatoire de Bucarest.

Hommage très reconnaissant.

À

MONSIEUR JEAN CHAZY

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
Membre de l'Académie des Sciences.
Membre d'honneur de l'Institut des Sciences de Roumanie

Hommage très reconnaissant.

À MA FEMME

PREMIÈRE THÈSE

SUR LES SINGULARITÉS RÉELLES ET IMAGINAIRES DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

INTRODUCTION

Le problème dés trois corps, pour si ancien qu'il soit offrira encore un champ étendu de recherches, qui toutes ont pour but d'approfondir nos connaissances sur ce sujet, des plus passionnants.

Lorsque Newton découvrit la loi de l'attraction universelle, le problème des deux corps fut aussitôt résolu. Les lois de Képler étaient confirmées, mais on sait comment il fallait modifier la troisième, ce dont à l'époque on ne pouvait pas se rendre compte en se fondant uniquement sur les observations.

En mettant trois corps en présence, au lieu de deux, la solution devient particulièrement ardue. Quand Lagrange fut en possession de sa méthode des constantes arbitraires, on l'utilisa avec succès pour la construction des éphémérides. Laplace a lié son nom à la théorie des perturbations planétaires.

Du point de vue de l'analyse mathématique, la solution du problème des trois corps a formé l'objet d'intéressants travaux, au fur et à mesure que cette discipline s'est perfectionnée. Bien souvent c'est ce problème au contraire qui a eu une heureuse influence sur le développement de l'analyse en ce sens que, pour vaincre les difficultés, les Géomètres étaient contraints à se créer d'abord l'instrument analytique de recherche.

Les tentatives pour trouver d'autres intégrales premières que celle des forces vives, ont conduit à la figure rectiligne d'Euler et au triangle équilatéral de Lagrange. Ces deux configurations, dont la dernière se trouve réalisée dans notre système planétaire même sont des solutions particulières, mais rigoureuses.

La considération des équations aux variations conduit à des solutions asymptotiques à la figure rectiligne d'Euler et au triangle équilatéral de Lagrange.

M. SUNDMAN a démontré que si les trois corps se choquent à un instant, ils tendent à se placer en ligne droite ou à former un triangle équilatéral. M. CHAZY a complété la proposition de M. SUNDMAN en montrant qu'à l'instant du choc, l'orientation de la figure des trois corps tend vers une orientation limite.

Le théorème de CAUCHY sur l'existence de la solution d'un système différentiel marque le début d'importants progrès dans l'étude des fonctions définies par des pareils systèmes. CAUCHY avait établi des conditions nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique.

Dans l'ordre des idées qui nous concernent, POINCARÉ vient enrichir les résultats acquis par CAUCHY, en considérant les cas où le théorème ne trouve pas d'application. Si pour un système de valeurs des fonctions inconnues les conditions de CAUCHY ne sont pas satisfaites, la solution n'est plus unique, on a à faire à un point singulier. Les points singuliers peuvent former des multiplicités.

On sait, d'après les recherches de MM. SUNDMAN [1]) et LEVI-CIVITA [2]), qu'il est possible de régulariser les équations différentielles du problème des trois corps au voisinage d'un choc binaire réel.

Il arrive dans le problème restreint que l'intégrale des forces vives n'ait plus de sens. Toutefois il existe une intégrale première, celle de JACOBI, dont nous ferons usage. Nous réussissons à régulariser le système différentiel du problème par l'introduction d'une nouvelle inconnue λ, et nous démontrons dans le chapitre I, qu'il n'existe pas d'autres singularités réelles du problème restreint que les chocs qui résultent, quand une masse s'annulle, des développements suivant les puissances du temps formés par M. SUNDMAN. Nous avons envisagé le cas où la masse nulle se meut dans l'espace, tandis que dans une note antérieure [3]) nous avons présenté le cas plan. Pour la rédaction de ce premier chapitre nous nous sommes servis du mémoire de M. SUNDMAN.

Dans le chapitre II nous avons formé le système différentiel auquel satisfont les éléments hyperboliques p, $e > 1$, τ, ϖ, et nous avons démontré l'existence des trajectoires hyperboliques-elliptiques.

Nous avons montré ensuite comment on peut régulariser ce système différentiel au voisinage de $e = 1$ à l'aide du changement $u = \sqrt{e^2 - 1}$. U, employé par M. CHAZY dans son mémoire „Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment“ [4]). u désigne l'anomalie excentrique de la masse nulle, dans

---

[1]) „Mémoire sur le probleme des trois corps“, Acta Matematica, tome 36, 1913, p. 105 — 179.

[2]) „Sur la régularisation du problème des trois corps“, Acta Matematica, tome 42, 1920, p. 99 — 144.

[3]) „Sur les singularités du problème restreint des trois corps“, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Tome 202, 1936, p. 1736.

[4]) Annales de l'Ecole Normale, 3 série, tome 39, 1922 p. 29 — 130.

son mouvement autour du centre de gravité des deux masses finies, U signifie la nouvelle variable.

Nous avons montré qu'il existe des trajectoires pour lesquelles l'excentricité peut prendre la valeur 1, à un instant fini t_0. En supposant que t tend vers l'infini nous avons démontré l'existence des trajectoires paraboliques-elliptiques, du problème restreint.

M. Chazy a lié l'étude des singularités dans le problème des trois corps à des recherches d'ordre qualitatif, en prenant comme point de départ les résultats de Poincaré sur les courbes définies par des équations différentielles, qu'il a lui-même élargis et complétés. M. Chazy a appliqué ces résultats dans son mémoire „Sur le problème rectiligne des trois corps“ [5]).

Dans le chapitre III nous avons étudié les chocs binaires doubles, signalés par M. Uno, au point de vue de la représentation des solutions d'un système différentiel au voisinage des multiplicités singulières, en appliquant le théorème de M. Chazy contenu dans son mémoire „Sur les multiplicités singulières du problème des trois corps“ [6]). Ce chapitre comprend les trois cas suivants:

1. Triangle isocèle avec axe de symétrie dans le plan.
2. Triangle isocèle dans l'espace avec plan de symétrie.
3. Triangle isocèle dans l'espace avec axe de symétrie.

Nous sommes arrivés à ce résultat que les coordonnées et les distances sont développables en séries entières suivant les puissances de $(t-t_0)^{1/5}$, convergentes, et que le nombre des constantes est égal à l'ordre du système différentiel considéré dans chacun des trois cas.

A la fin du chapitre nous avons envisagé le choc triple imaginaire dans le problème isocèle plan avec axe de symétrie, en donnant le système différentiel à partir duquel on peut faire cette étude.

Pour la rédaction de ce chapitre nous avons fait usage, en dehors des travaux cités, de: Traité d'Analyse, tome III, de M. Picard, de l'exposé de Painlevé „Existence de l'intégrale générale. Détermination d'une intégrale particulière par ses valeurs initiales“ paru dans l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, édition française, d'une note de M. Popovici „Sur les points d'équilibre d'un fluide en mouvement“,[7]) et de l'article de M. Dulac „Points singuliers des équations différentielles“ du Mémorial des Sciences Mathématiques.

Nous sommes heureux de pouvoir témoigner ici notre plus vive gratitude à nos maîtres MM. Nicolas Coculesco et Jean Chazy. M. Coculesco nous a envoyés pour accomplir un stage d'études à l'Observa-

[5]) Bulletin de la Société Mathématique de France, tome 55, 1927, p. 222—268.

[6]) Bulletin des Sciences Mathématiques, tome 56, 1932, p. 79—104.

[7]) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, tome 147, 1908, p. 176—179.

toire de Paris. A cette occasion nous nous sommes intéressés à des questions théoriques du domaine de la mécanique céleste. Recommandé par M. Coculesco, M. Chazy nous a accueillis avec une bienveillance particulière, en nous indiquant tout d'abord quels étaient les points intéressants à développer, au sujet du problème des trois corps. Ensuite M. Chazy s'est intéressé aux progrès succesifs de ce travail, en nous aidant par ses précieux conseils.

CHAPITRE I

Equations différentielles et définition du choc binaire

1. Nous supposons que la masse m_2, dans son mouvement relatif autour de la masse m_1, décrit une circonférence de rayon r, avec un moyen mouvement n. On prend r comme unité de longueur et la somme $m_1 + m_2$ des deux masses finies comme unité de masse.

Dans ces conditions le carré du moyen mouvement est égal à la constante k de l'attraction universelle. Choisissons convenablement l'unité de temps de façon à rendre $n^2 = k = 1$.

Soit O le centre de gravité des deux masses m_1 et m_2. Nous prenons le plan du cercle comme plan $\xi O \eta$. L'axe $O\zeta$ est perpendiculaire à ce plan, le trièdre $\xi\eta\zeta$ étant direct. Les équations différentielles du mouvement absolu de la masse m_3 supposée nulle sont

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -m_1 \frac{\xi + m_2 \cos t}{r_1^3} - m_2 \frac{\xi - m_1 \cos t}{r_2^3} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -m_1 \frac{\eta + m_2 \sin t}{r_1^3} - m_2 \frac{\eta - m_1 \sin t}{r_2^3} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -m_1 \frac{\zeta}{r_1^3} - m_2 \frac{\zeta}{r_2^3} \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} r_1^2 &= (\xi + m_2 \cos t)^2 + (\eta + m_2 \sin t)^2 + \zeta^2 \\ r_2^2 &= (\xi - m_1 \cos t)^2 + (\eta - m_1 \sin t)^2 + \zeta^2 \\ \rho^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \end{aligned} \right.$$

Le système différentiel (1) admet l'intégrale de Jacobi

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} + h.$$

Nous utiliserons également un autre système d'axes obtenu en prenant dans le plan $(\xi O \eta)$ comme axe OX, la droite qui unit les masses

m_1 et m_2, le sens positif étant dirigé de m_1 vers m_2 et comme axe OY une perpendiculaire à OX. L'axe OZ coïncide avec Oζ. Les coordonnées relatives X, Y, Z et les coordonnées absolues ξ, η, ζ, ainsi que leurs dérivées premières sont liées par les relations

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{ll} \xi = X\cos t - Y\sin t & X = \xi\cos t + \eta\sin t \\ \eta = X\sin t + Y\cos t & Y = -\xi\sin t + \eta\cos t \\ \zeta = Z & Z = \zeta. \\ \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{dX}{dt}\cos t - \dfrac{dY}{dt}\sin t - \eta & \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{dX}{dt}\sin t + \dfrac{dY}{dt}\cos t + \xi & \\ \dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{dZ}{dt} & \\ \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{d\xi}{dt}\cos t + \dfrac{d\eta}{dt}\sin t + Y & \\ \dfrac{dY}{dt} = -\dfrac{d\xi}{dt}\sin t + \dfrac{d\eta}{dt}\cos t - X & \\ \dfrac{dZ}{dt} = \dfrac{d\zeta}{dt}. & \end{array}\right.$$

Les équations différentielles de ce mouvement relatif sont

$$(5)\quad\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2X}{dt^2} - 2\dfrac{dY}{dt} - X = -m_1\dfrac{X+m_2}{r_1^3} - m_2\dfrac{X-m_1}{r_2^3} \\ \dfrac{d^2Y}{dt^2} + 2\dfrac{dX}{dt} - Y = -m_1\dfrac{Y}{r_1^3} - m_2\dfrac{Y}{r_2^3} \\ \dfrac{d^2Z}{dt^2} = -m_1\dfrac{Z}{r_1^3} - m_2\dfrac{Z}{r_2^3} \end{array}\right.$$

où l'on a

$$(6)\quad\left\{\begin{array}{l} r_1^2 = (X+m_2)^2 + Y^2 + Z^2 \\ r_2^2 = (X-m_1)^2 + Y^2 + Z^2 \\ \rho^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \end{array}\right.$$

Le système différentiel (5) admet l'intégrale de Jacobi

$$(7)\quad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2\right] = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{1}{2}(X^2+Y^2) + h.$$

Dans la suite nous aurons à considérer les coordonnées relatives x, y, z de la masse m_3 par rapport à la masse m_1, le système d'axes $(x\,y\,z)$ ayant pour centre la masse m_1 et étant disposé parallèlement au système absolu $(\xi\,\eta\,\zeta)$, de sorte que l'on a

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \xi + m_2 \cos t \\ y &= \eta + m_2 \sin t \\ z &= \zeta. \end{aligned} \right.$$

2. Nous supposons que, quand t croît à partir de l'instant initial t_0 le mouvement est régulier, c'est-à-dire que X, Y, Z sont holomorphes, pour $t < t_1$, et que X, Y, Z ne sont plus holomorphes, pour $t = t_1$.

Soient deux sphères (S_1) et (S_2)entourant les masses m_1 et m_2 et une troisième sphère (S) entourant les deux premières.

Nous étudions trois cas.

Si quand t tend vers t_1, il existe indéfiniment des instants où m_2 est extérieure à (S_1) et (S_2) et intérieure à (S), dX/dt, dY/dt, dZ/dt sont bornées, d'après l'intégrale de Jacobi. Selon le théorème de Cauchy, X, Y, Z, sont holomorphes dans un cercle ayant pour centre le point t et un rayon fixe. Si t est assez voisin de t_1, ce cercle contient t_1, et X, Y, Z sont holomorphes pour $t = t_1$, contre l'hypothèse.

Donc quand t tend vers t_1, m_3 finit par être ou bien à l'intérieur de toute sphère (S_1), si petite soit-elle, ou de toute sphère (S_2) si petite soit-elle, ou bien à l'extérieur de toute sphère (S) si grande soit-elle. Nous dirons dans les deux premiers cas que m_3 choque m_1 ou m_2.

Nous allons montrer que le troisième cas et impossible. En effet supposons qu'à l'instant t' le point m_3 soit au dehors de (S) et pour $t' < t < t_1$, reste au dehors de (S). Et transformons X, Y, Z en coordonnées demi-polaires

$$X = \rho \cos \theta, \qquad Y = \rho \sin \theta \qquad Z = Z.$$

L'intégrale de Jacobi donne $(d\rho/dt)^2 + \rho^2\,(d\theta/dt)^2 + (dZ/dt)^2 < \rho^2 +$ quantité bornée, d'où $(d\rho/dt)^2 < \rho^2 +$ quantité bornée, $|d\rho/\rho dt| <$ quantité bornée. Donc dans l'intervalle (t', t_1), ρ ne pourrait varier que d'une quantité bornée, m_3 resterait à distance bornée de O et en même temps serait extérieure à (S_1) et (S_2). Donc nous serions ramenés au cas que nous avons écarté.

Limites de quelques expressions

3. Etudions maintenant le choc de m_3 et de m_1. Nous désignerons dorénavant r_1 par r et nous supposons que $t_1 = 0$. En multipliant l'équation (7) par r, on voit que quand t tend vers zéro, on a

$$(9) \qquad \lim_{t=0} r \left[\left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt} \right)^2 \right] = 2\, m_1.$$

Considérons d'autre part l'identité de LAGRANGE

$$(10)\quad \begin{aligned}&\left[(X+m_2)\frac{dY}{dt}-Y\frac{dX}{dt}\right]^2+\left[Y\frac{dZ}{dt}-Z\frac{dY}{dt}\right]^2+\left[Z\frac{dX}{dt}-X\frac{dZ}{dt}\right]^2+\\&\left[(X+m_2)\frac{dX}{dt}+Y\frac{dY}{dt}+Z\frac{dZ}{dt}\right]^2=r^2\left[\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2+\left(\frac{dZ}{dt}\right)^2\right].\end{aligned}$$

On déduit de (9) en multipliant par r

$$(11)\quad \begin{cases}\lim\limits_{t=0} r\dfrac{dr}{dt}=\lim\limits_{t=0}\left[(X+m_2)\dfrac{dY}{dt}-Y\dfrac{dX}{dt}\right]=\\ \lim\limits_{t=0}\left(Y\dfrac{dZ}{dt}-Z\dfrac{dY}{dt}\right)=\lim\limits_{t=0}\left(Z\dfrac{dX}{dt}-X\dfrac{dZ}{dt}\right).\end{cases}$$

Nous rappelons que $r\dfrac{dr}{dt}=(X+m_2)\dfrac{dX}{dt}+Y\dfrac{dY}{dt}+Z\dfrac{dZ}{dt}$.

4. Il résulte alors que la distance r finit par décroître constamment quand t tend vers zéro.

En effet la dérivée seconde de r^2 par rapport au temps a pour expression

$$(12)\quad \begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d^2r^2}{dt^2}&=2\left[(X+m_2)\frac{dY}{dt}-Y\frac{dX}{dt}\right]+(X+m_2)X+Y^2+\frac{m_1}{r}\\&+2\frac{m_2}{r_2}+X^2+Y^2-m_2\frac{(X+m_2)(X-m_1)+Y^2+Z^2}{r_2^3}+2h.\end{aligned}$$

Dans cette expression tous les termes sont bornés sauf m_1/r qui tend vers $+\infty$, donc d^2r^2/dt^2 finit par être positive quand t tend vers zéro, donc la dérivée première de r^2 finit par croître. Comme cette dérivée tend vers zéro d'aprés (11), elle finit par être négative, donc r^2 et r finissent par décroître constamment.

5. En tenant compte de (4) et (8) en a

$$(13)\quad \begin{cases}x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}=(X+m_2)\dfrac{dY}{dt}-Y\dfrac{dX}{dt}+(X+m_2)^2+Y^2\\ y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}=\left[(X+m_2)\dfrac{dZ}{dt}-Z\dfrac{dX}{dt}\right]\sin t+\left(Y\dfrac{dZ}{dt}-Z\dfrac{dY}{dt}\right)\cos t\\ \qquad -Z\left[(X+m_2)\cos t-Y\sin t\right]\\ z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}=\left[Z\dfrac{dX}{dt}-(X+m_2)\dfrac{dZ}{dt}\right]\cos t+\left[Y\dfrac{dZ}{dt}-Z\dfrac{dY}{dt}\right]\sin t-\\ \qquad -Z\left[(X+m_2)\sin t+Y\cos t\right]\end{cases}$$

Il résulte des egalités (13) que les expressions

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt},\ z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt},\ x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \tag{13'}$$

c'est-à-dire les moments par rapport aux axes $m_1\,x$, $m_1\,y$, $m_1\,z$, de la vitesse de m_3 tendent vers zéro, quand t tend vers zéro.

6. On tire des équations du no. 1

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = m^2\,\mathrm{Y}\left(1 - \frac{1}{r_2^3}\right) \tag{14}$$

$$1 - \frac{1}{r_2^3} = \frac{(r_2 - 1)(1 + r_2 + r_2^2)}{r_2^3}$$

Au moment du choc, la distance r_2 devient égale à l'unité, elle reste donc plus grande qu'une quantité $b < 1$. Puisque l'on a encore $|\,\mathrm{Y}\,| < r$ et $|\,r_2 - 1\,| < r$, nous pouvons écrire l'inégalité

$$m_2\,|\,\mathrm{Y}\left(1 - \frac{1}{r_2^3}\right)| < \frac{3\,m_2}{b^3}\,r^2, \tag{15}$$

Si ψ_0 est une quantité dont le module est plus petit que l'unité, on a

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 3\,\frac{m_2}{b^3}\,\psi_0\,r^2. \tag{16}$$

Intégrant (16) de l'instant zéro, jusqu'à l'instant t, dans le sens inverse du mouvement, et rappelant que d'après (13'), $x\,dy/dt - y\,dx/dt$ tend vers zéro quant t tend vers zéro, nous obtenons

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \int_0^t \frac{3\,m_2}{b^3}\,\psi_0\,r^2\,dt \tag{17}$$

d'où puisque r diminue constamment

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \psi_0'\,r^2\,t \tag{18}$$

$$\text{où } |\,\psi_0'\,| < \frac{3\,m_2}{b^3}.$$

On obtient de même, en tenant compte que $|\zeta \cos t| < r$, $|\zeta \sin t| < r$

$$(19) \qquad \begin{cases} y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt} = \psi_1' \, r^2 t \\ z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt} = \psi_2' \, r^2 t \end{cases}$$

où l'on a encore $|\psi_1'| < \dfrac{3m_2}{b^3}$, $|\psi_2'| < \dfrac{3m_2}{b^3}$.

7. Les égalités (18) et (19) nous permettent de montrer qu'au moment du choc, la droite qui unit les masses m_1 et m_3 tend vers une position limite.

Les cosinus directeurs de cette direction sont x/r, y/r, z/r. Nous allons montrer que la dérivée de x/r tend vers zéro avec t.

$$(20) \qquad \frac{d}{dt}\frac{x}{r} = \frac{1}{r^3}\left[z\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) - y\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right]$$

En tenant compte de (18) et (19) on a

$$(21) \qquad \frac{d}{dt}\frac{x}{r} = \psi' \, t,$$

où $|\psi'| < 6m_2/b^3$. Il résulte de (21) que $d(x/r)/dt$ tend vers zéro quand t tend vers zéro, donc x/r et de même y/r et z/r tendend vers des limites.

$$(22) \qquad \lim_{t=0} \frac{x}{r} = \varphi \ , \quad \lim_{t=0} = \chi \ , \quad \lim_{t=0} \frac{z}{r} = \psi.$$

8. Dès lors nous pouvons montrer que r a en t un ordre d'infinitude déterminé. De l'identité de Lagrange

$$\left(x\frac{dx}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)^2 =$$
$$r^2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - \left(r\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

on déduit l'expression

$$(23) \qquad \frac{1}{r}\left[\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)^2\right] =$$
$$= r\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] - r\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Or d'après (4), (8) et (9) on a

$$(24)\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2+\left(\frac{dZ}{dt}\right)^2+$$

$$+\,2\left[\left(X+m_2\right)\frac{dY}{dt}-Y\frac{dX}{dt}\right]+(X+m_2)^2+Y^2\,.$$

En multipliant cette dernière égalité par r, nous obtenons en passant à la limite

$$(25)\qquad \lim r\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=2m_1\,,$$

en tenant compte de (11), et puisque $X+m_2$ et Y tendent vers zéro. D'autre part d'après (18) et (19), les quotients

$$\frac{1}{r}\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2,\ \frac{1}{r}\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)^2,\ \frac{1}{r}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

tendent vers zéro et il résulte en passant à la limite dans (23), que

$$26)\qquad r\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=2m_1(1+\varepsilon).$$

De (26) on déduit

$$(27)\qquad \sqrt{r}\,\frac{dr}{dt}=-\sqrt{2m_1}\,(1+\varepsilon'),$$

et par intégration de l'instant zéro, à l'instant t, et selon la formule de la moyenne, on a

$$(28)\qquad \frac{2}{3}r^{3/2}=-\sqrt{2m_1}\,t\,(1+\varepsilon'').$$

Nous pouvons donc écrire

$$(29)\qquad r=t^{2/3}\sqrt[3]{\frac{9}{2}m_1}\,(1+\varepsilon''').$$

ε, ε', ε'', ε''' sont des fonctions qui tendent vers zéro avec t.

Au voisinage d'un choc la distance r, et les coordonnés x, y, z, sont infiniment petits de l'ordre $^2/_3$ par rapport au temps.

9. En multipliant l'équation (18) par $-y$, et par z la dernière des équations (19) et en tenant compte de (22) et (27), nous obtenons

$$(30)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{t=0} \sqrt{r}\,\dfrac{dx}{dt} = -\varphi\sqrt{2m_1} \\[2ex] \lim\limits_{t=0} \sqrt{r}\,\dfrac{dy}{dt} = -\chi\sqrt{2m_1} \\[2ex] \lim\limits_{t=0} \sqrt{r}\,\dfrac{dz}{dt} = -\psi\sqrt{2m_1} \end{cases}$$

expressions qui nous seront utiles, ainsi que (22).

Régularisation du mouvement au voisinage du choc

10. Les coordonnées x, y, z, satisfont au système différentiel

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + m_1\dfrac{x}{r^3} = \mathrm{E} = -m_2\dfrac{x-\cos t}{r_2^3} - m_2\cos t \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + m_1\dfrac{y}{r^3} = \mathrm{F} = -m_2\dfrac{y-\sin t}{r_2^3} - m_2\sin t \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + m_1\dfrac{z}{r^3} = \mathrm{G} = -m_2\dfrac{z}{r_2^3} \end{cases}$$

où l'on a

$$(32)\qquad \begin{cases} r_2^2 = (x-\cos t)^2 + (y-\sin t)^2 + z^2 \\ r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

Le système différentiel (31) admet l'intégrale première

$$(33)\qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{r_2} + x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} - m_2(x\cos t + y\sin t) + \mathrm{H}$$

La constante H est liée à h par la relation $\mathrm{H} = h + m_2^2/2$

Introduisons à la place de t, la variable u de M. Sundman, par la relation

$$(34)\qquad dt = r\,du$$

et désignons par des accents les dérivations par rapport à u. Le système (31) et l'intégrale (33) deviennent

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'}{du} = \dfrac{r'}{r} x' - m_1 \dfrac{x}{r} + r^2 \mathrm{E} \\[2ex] \dfrac{dy'}{du} = \dfrac{r'}{r} y' - m_1 \dfrac{y}{r} + r^2 \mathrm{F} \\[2ex] \dfrac{dz'}{du} = \dfrac{r'}{r} z' - m_1 \dfrac{z}{r} + r^2 \mathrm{G} \end{cases}$$

$$(36)\quad \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = r^2 \left(\frac{m_1}{r} + \frac{m_2}{r^2}\right) + r(xy' - yx') \\ - m_2 r^2 (x \cos t + y \sin t) + \mathrm{H} r^2$$

Pour avoir dr'/du nous dérivons deux fois l'égalité $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, en remplaçant $x'^2 + y'^2 + z'^2$ par sa valeur, donnée par (36) et dx'/du, dy'/du, dz'/du par leurs valeurs (35). Nous obtenons

$$(37)\quad \frac{dr'}{du} = m_1 + r(x\mathrm{E} + y\mathrm{F} + z\mathrm{G}) + 2m_2 \frac{r}{r_2} + 2(xy' - yx') \\ - 2m_2 r(x \cos t + y \sin t) + 2\mathrm{H} r.$$

Si nous posons maintenant

$$(38)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{r'}{r} x' - m_1 \dfrac{x}{r},\ \beta = \dfrac{r'}{r} y' - m_1 \dfrac{y}{r},\ \gamma = \dfrac{r'}{r} z' - m_1 \dfrac{z}{r} \\[2ex] \mathrm{L} = x\mathrm{E} + y\mathrm{F} + z\mathrm{G} + \dfrac{2m_2}{r} + 2\lambda - 2m_2(x \cos t + y \sin t) + 2\mathrm{H} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{xy' - yx'}{r}$$

nous obtenons finalement le système

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{du} = r' & \dfrac{dr'}{du} = m_1 + r\mathrm{L} & \dfrac{dt}{du} = r \\[2ex] \dfrac{dx}{du} = x' & \dfrac{dx'}{du} = \alpha + r^2 \mathrm{E} & \dfrac{d\alpha}{du} = rr' \mathrm{E} + x' \mathrm{L} \\[2ex] \dfrac{dy}{du} = y' & \dfrac{dy'}{du} = \beta + r^2 \mathrm{F} & \dfrac{d\beta}{du} = rr' \mathrm{F} + y' \mathrm{L} \\[2ex] \dfrac{dz}{du} = z' & \dfrac{dz'}{du} = \gamma + r^2 \mathrm{G} & \dfrac{d\gamma}{du} = rr' \mathrm{G} + z' \mathrm{L} \\[2ex] & \dfrac{d\lambda}{du} = r(x\mathrm{F} - y\mathrm{E}) & \end{cases}$$

Le système (39) est régulier au voisinage du choc envisagé, et on peut lui appliquer la théorème de CAUCHY. Supposons qu'à la valeur zéro de t, u est aussi nul, ainsi les valeurs des inconnues qui figurent dans le système (39) et d'après (22) et (30) sont, pour $u=0$

$$(40)\qquad \left|\begin{array}{lll} (r)_1 = 0 & (r')_1 = 0 & t_1 = 0 \\ x_1 = 0 & x'_1 = 0 & \alpha_1 = m_1 \varphi \\ y_1 = 0 & y'_1 = 0 & \beta_1 = m_1 \chi \\ z_1 = 0 & z'_1 = 0 & \gamma_1 = m_1 \psi \end{array}\right.$$

Les inconnues ci-dessus sont, au voisinage du choc, développables en séries entières de la variable u, dont les premiers termes sont

$$x = \frac{m_1 \varphi}{2} u^2 + \frac{m_1 \varphi (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{24} u^4 + \frac{m_1 \varphi (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)^2}{720} u^6 + \dots$$

$$y = \frac{m_1 \chi}{2} u^2 + \frac{m_1 \chi (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{24} u^4 + \frac{m_1 \chi (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)^2}{720} u^6 + \dots$$

$$z = \frac{m_1 \psi}{2} u^2 + \frac{m_1 \psi (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{24} u^4 + \frac{m_1 \psi (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)^2}{720} u^6 + \dots$$

$$x' = m_1 \varphi u + \dots \qquad y' = m_1 \chi u + \dots \qquad z' = m_1 \psi u + \dots$$

$$(41)\qquad r = \frac{m_1}{2} u^2 + \frac{m_1 (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{24} u^4 + \frac{m_1 (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{720} u_6 + \dots$$

$$\alpha = m_1 \varphi + \dots \qquad \beta = m_1 \chi + \dots \qquad \gamma = m_1 \psi + \dots$$

$$\lambda = -\frac{3}{56} m_1^3 m_2 \varphi \chi u^7 + \dots$$

$$t = \frac{m_1}{6} u^3 + \frac{m_1 (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{120} u^5 + \dots$$

Par inversion, u s'exprime à l'aide d'une série entière en $t^{1/3}$. Il résulte que la distance r, ainsi que les coordonnées x, y, z sont développables en séries analogues, et qui commencent par des termes en $t^{2/3}$ Nécessairement ces développements pourraient être obtenus aussi par la méthode des coefficients indéterminés.

On voit que nous sommes conduits à prendre une variable et à érire une équation de plus, que dans le calcul qui résulte simplement de la transposition du calcul de M. SUNDMAN. Les trajectoires conduisant à un choc, dépendent de 4 paramètres: l'instant t_1 du choc, que nous avons ici supposé nul, ensuite deux des trois quantités φ, χ, ψ, dont la somme des carrés est égale à 1, et enfin la constante h de l'intégrale de JACOBI.

Nous démontrons ainsi qu'il n'existe pas d'autres singularités réelles du problème restreint que les chocs qui résultent, quand une masse s'annulle, des développements suivant les puissances du temps formés par M. SUNDMAN.

La trajectoire la plus générale du problème dépendant de six paramètres, il résulte qu'il existe deux conditions de choc. Elles s'obtiennent pur l'élimination de u, φ, χ, φ et h entre les six développements de x, y, z, x', y', z' contenus dans (41), auxquels on ajoute la relation $\varphi^2+\chi^2+\varphi^2=1$. Soient

$$
(42) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y, z, x', y', z')=0 \\ F_2(x, y, z, x', y', z')=0, \end{array} \right.
$$

les deux conditions de choc. Elles expriment les conditions que doivent remplir un système de valeurs initiales x, y, z, x', y', z', à un moment initial quelconque u, pour qu'un choc binaire puisse se produire sur la trajectoire correspondante. Ces deux conditions se réduisent à une dans le plan.

Si les valeurs initiales ainsi choisies ne satisfont pas aux deux conditions (42), il résulte que sur une telle trajectoire on n'aura pas de choc réel. D'autre part, d'après le théorème de CAUCHY, les coordonnées et les composantes de la vitesse admettent des développements holomorphes au point initial u, auxquels le théorème assure un rayon de convergence, dont la grandeur dépend de la positon d'autres singularités, dans le plan complexe. Une catégorie de ces singularités est tormée par les chocs binaires imaginaires, dont M. CHAZY a approfondi l'étude. Une autre catégorie, les chocs binaires doubles de M. UNO, formera l'objet du troisième chapitre.

L'étude des deux conditions de choc, dans le problème général des trois corps à été faite par M. CHAZY, par M. KIVELIOVITCH[8]) et par M. ROSENBLATT.

Forme de la trajectoire au voisinage du choc

11. Dans le but de représenter la trajectoire décrite par un météorite ou comète tombant sur la TERRE, ou sur une autre planète, et en supposant comme nous que cette dernière décrit un cercle dans son mouvement relatif autour du SOLEIL, M. BELORIZKY[9]) a formé des développements des coordonnées de la masse nulle suivant les puissances de u. Avec nos notations, les coordonnées employées, par M. BELORIZKY sont $X+m_2, Y, Z$. Il obtient les développements après avoir régularisé le mouvement au voisinage d'un choc à l'aide de la transformation de M.

[8]) „Sur les points singuliers du problème des trois corps", Bulletin Astronomique, tome VII, fascicule III, 1932.

[9]) „Recherche sur l'application pratique des solutions générales du problème des trois corps", Journal des Observateurs, No. 11, Noembre 1933.

SUNDMAN suivie de la transformation de contact de M. LEVI-CIVITA. Nous allons montrer comment on peut arriver aux mêmes développements à partir des équations (41) et des expressions

$$\text{(43)} \qquad \begin{cases} X + m_2 = x \cos t + y \sin t \\ Y \qquad\; = - x \sin t + y \cos t \\ Z \qquad\; = z. \end{cases}$$

Nous pouvons écrire

$$\sin t = \frac{m_1}{6} u^3 + \frac{m_1 (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{120} u^5 + S_7$$

$$\cos t = 1 - \frac{m_1^2}{72} u^6 + S_7$$

$$\varphi \cos t + \chi \sin t = \varphi + \frac{m_1}{6} \chi u^3 + \frac{m_1 (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{120} \chi u^5 - \frac{m_1^2}{72} \varphi u^{t} + S_7$$

$$- \varphi \sin t + \chi \cos t = \chi - \frac{m_1}{6} \varphi u^3 - \frac{m_1 (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{120} \varphi u^5 - \frac{m_1^2}{72} \chi u^6 + S_7.$$

Nous désignons d'une façon générale par S_n une série entière en u, qui bien entendu n'est pas toujours la même, et qui n'a pas de termes en u de degré inférieur en n. Nous pouvons par exemple retrouver l'un des résultats de M. BELORIZKY. D'après les formules (43) nous obtenons

$$\text{(44)} \quad \begin{cases} X + m_2 = \dfrac{m_1}{2} \varphi u^2 + \dfrac{m_1 (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{24} \varphi u^4 + \dfrac{m_1^2}{12} \chi u^5 + A \varphi u^6 + S_7 \\ Y \qquad\; = \dfrac{m_1}{2} \chi u^2 + \dfrac{m_1 (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{24} \chi u^4 + \dfrac{m_1^2}{12} \varphi u^5 + A \chi u^6 + S_7 \\ Z \qquad\; = \dfrac{m_1}{2} \psi u^2 + \dfrac{m_1 (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h)}{24} u^4 \psi + A \psi u^6 + S_7 \end{cases}$$

où

$$A = \frac{m_1 (m_2^2 + 2 m_2 + 2 h) - 12 m_1^2 m_2 \varphi}{1440}.$$

En multipliant la première de ces relations par $\varphi \psi$, la deuxième a $\chi \psi$, ajoutons-les en tenant compte de la troisième. Nous obtenons

$$[\varphi (X + m_2) + \chi Y] \psi = (\varphi^2 + \chi^2) Z + S_7.$$

Nous retrouvons donc cette proposition : au voisinage du choc, si l'on néglige les puissances de u supérieures à la sixième, le mouvement est plan.

CHAPITRE II

Equations différentielles et introduction des éléments képlériens p, e, τ, ϖ

1. Nous considérons le cas plan du problème restreint, avec les mêmes hypothèses que précédemment, quant aux unités de longueur, masse et temps. Les équations différentielles du mouvement absolu de la masse m_3, supposée nulle, autour du centre de gravité O, des deux masses m_1 et m_2 sont

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = -m_1 \dfrac{x + m_2 \cos t}{r_1^3} - m_2 \dfrac{x - m_1 \cos t}{r_2^3} \\[2ex] \dfrac{d^2 y}{dt^2} = -m_1 \dfrac{y + m_2 \sin t}{r_1^3} - m_2 \dfrac{y - m_1 \sin t}{r_2^3} \end{cases}$$

où l'on a

$$(2) \qquad \begin{cases} r_1^2 = (x + m_2 \cos t)^2 + (y + m_2 \sin t)^2 \\ r_2^2 = (x - m_1 \cos t)^2 + (y - m_1 \sin t)^2 \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Le système (1) admet l'intégrale de Jacobi

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} + h.$$

Le système (1) peut encore s'écrire

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{x}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{d^2 y}{dt^2} + \dfrac{y}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{cases}$$

où l'on a

$$R = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} - \frac{1}{r}, \tag{5}$$

Nous appellerons R fonction perturbatrice. Pour intégrer le système différentiel (4) nous employons la méthode de la variation des constantes, de LAGRANGE. Nous allons donc intégrer d'abord le système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = 0 \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} = 0, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

c'est-à-dire nous considérons en premier lieu le mouvement de m_3 autour d'une masse $m_1 + m_2 = 1$, placée au centre de gravité des deux masses m_1 et m_2. On obtient, généralement, des solutions qui dépendent de quatre constantes, et du temps. On suppose ensuite que, dans ces solutions, les constantes sont des fonctions du temps et on cherche à les déterminer de manière que (4) soit satisfait, tout en gardant les mêmes expressions pour les composantes de la vitesse que dans le mouvement osculateur. On connaît pour (6) trois classes de solutions ou de mouvements, que nous écrivons avec l'équation de KÉPLER correspondante

Mouvement elliptique

$$\left\{\begin{aligned} &x = a\left[(\cos u - e)\cos\varpi - \sqrt{1-e^2}\sin u \sin\varpi\right] \\ &y = a\left[(\cos u - e)\sin\varpi + \sqrt{1-e^2}\sin u \cos\varpi\right] \\ &r = \sqrt{x^2+y^2} = a(1 - e\cos u) \\ &u - e\sin u = n(t-\tau) \qquad\qquad n = \frac{1}{a^{3/2}} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Mouvement hyperbolique

$$\left\{\begin{aligned} &x = a\left[(e - chu)\cos\varpi - \sqrt{e^2-1}\, shu \sin\varpi\right] \\ &y = a\left[(e - chu)\sin\varpi + \sqrt{e^2-1}\, shu \cos\varpi\right] \\ &r = \sqrt{x^2+y^2} = a(echu - 1) \\ &eshu - u = n(t-\tau) \qquad\qquad n = \frac{1}{a^{3/2}} \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Mouvement parabolique

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
& x = p\left(\frac{1-U^2}{2}\cos\varpi - U\sin\varpi\right) \\
& y = p\left(\frac{1-U^2}{2}\sin\varpi + U\cos\varpi\right)
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left|
\begin{aligned}
& r = \sqrt{x^2+y^2} = p\,\frac{1+U^2}{2} \\
& U + \frac{U^3}{3} + \frac{2}{p^{3/2}}(t-\tau).
\end{aligned}
\right.
$$

2. Nous nous occupons du mouvement hyperbolique. Considérons le système [10]) suivant

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\varepsilon} \\
& \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\varpi} - \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\varepsilon} \\
& \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial\bar{R}}{\partial a} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial\bar{R}}{\partial e} \\
& \frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial\bar{R}}{\partial e}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous avons noté par $\bar{R}$ la fonction perturbatrice exprimée avec les éléments a, e, ε, ϖ. Faisons maintenant le changement de variables

$$
(11)\qquad \varepsilon = \varpi - n\tau, \qquad p = a\,(e^2-1),
$$

en prenant p, e, τ, ϖ la place de a, e, ε, ϖ et désignons par R, la fonction perturbatrice exprimée avec les éléments p, e, τ, ϖ. En tenant compte des relations qui lient les dérivées partielles du premier ordre de R et de $\bar{R}$

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{\partial R}{\partial p} = \frac{1}{e^2-1}\frac{\partial\bar{R}}{\partial a} + \frac{3}{2}\tau\frac{(e^2-1)^{3/2}}{p^{5/2}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\varepsilon} \\
& \frac{\partial R}{\partial e} = -\frac{2pe}{(e^2-1)^2}\frac{\partial\bar{R}}{\partial a} + \frac{\partial\bar{R}}{\partial e} - 3\tau e\,\frac{(e^2-1)^{1/2}}{p^{3/2}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\varepsilon} \\
& \frac{\partial R}{\partial\tau} = -\frac{(e^2-1)^{3/2}}{p^{3/2}}\frac{\partial\bar{R}}{\partial\varepsilon} \\
& \frac{\partial R}{\partial\varpi} = \frac{\partial\bar{R}}{\partial\varpi}\qquad ,
\end{aligned}
\right.
$$

[10]) F. TISSERAND, Traité de Mécanique céleste, t. 1, p. 169.

nous obtenons

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= 2\sqrt{p}\,\frac{\partial R}{\partial \varpi}\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{p}{e}\frac{\partial R}{\partial \tau} + \frac{e^2-1}{e\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial \varpi}\\
\frac{d\tau}{dt} &= \frac{p}{e}\frac{\partial R}{\partial e}\\
\frac{d\varpi}{dt} &= -2\sqrt{p}\,\frac{\partial R}{\partial p} - \frac{e^2-1}{e\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial e}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Dans la fonction perturbatrice R il faut remplacer x et y par leurs expressions (8), où l'on voit que x et y sont des fonctions de a, e, u, ϖ. Pour avoir les dérivées partielles de x et y par rapport à p, e, τ, et ϖ, il faut tenir compte des relations

$$
(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial p} &= \frac{1}{e^2-1}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{3}{2p}\frac{eshu-u}{echu-1}\frac{\partial x}{\partial u}\\
\frac{\partial x}{\partial e} &= -\frac{2pe}{(e^2-1)^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial e} - \frac{3eu-(1+2e^2)shu}{(e^2-1)(echu-1)}\frac{\partial x}{\partial u}\\
\frac{\partial x}{\partial \tau} &= -\frac{(e^2-1)^{3/2}}{p^{3/2}(echu-1)}\frac{\partial x}{\partial u}\\
\frac{\partial x}{\partial \varpi} &= \frac{\partial x}{\partial \varpi}\,,
\end{aligned}\right.
$$

et un groupe analogue, en remplaçant x par y. (14) nous donnent les dérivées partielles de x par rapport à p, e, τ, ϖ. Les dérivées partielles qui entrent dans les seconds membres s'obtiennent de (8), en tenant compte de l'équation de Képler et de la relation $p = a(e^2-1)$. En faisant les calculs nous obtenons

$$
(15)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= 2\sqrt{p}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{d\varpi} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varpi}\right)\\
\frac{de}{dt} &= \frac{e^2-1}{e\sqrt{p}}\left(\frac{\sqrt{e^2-1}}{echu-1}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial \varpi}\right)\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{e^2-1}{e\sqrt{p}}\left(\frac{\sqrt{e^2-1}}{echu-1}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial \varpi}\right)\frac{\partial R}{\partial y}\\
\frac{d\tau}{dt} &= \frac{p}{e}\left[-\frac{2pe}{(e^2-1)^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial e} + \frac{(1+2e^2)shu-3eu}{(e^2-1)(echu-1)}\frac{\partial x}{\partial u}\right]\frac{\partial R}{\partial x} +\\
&\quad \frac{p}{e}\left[-\frac{2pe}{(e^2-1)^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial e} + \frac{(1+2e^2)shu-3eu}{(e^2-1)(echu-1)}\frac{\partial y}{\partial u}\right]\frac{\partial R}{\partial y}\\
\frac{d\varpi}{dt} &= \frac{e^2-1}{e\sqrt{p}}\left(-\frac{\partial x}{\partial e} + \frac{shu}{echu-1}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{e^2-1}{e\sqrt{p}}\left(-\frac{\partial y}{\partial e} + \frac{shu}{echu-1}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial R}{\partial y}
\end{aligned}\right.
$$

En tenant compte des expressions

$$
(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} = \left(-\dfrac{m_1}{r_1^3} - \dfrac{m_2}{r_2^3} + \dfrac{1}{r^3}\right) x + m_1 m_2 \left(\dfrac{1}{r_2^3} - \dfrac{1}{r_1^3}\right) \cos t \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} = \left(-\dfrac{m_1}{r_1^3} - \dfrac{m_2}{r_2^3} + \dfrac{1}{r^3}\right) y + m_1 m_2 \left(\dfrac{1}{r_2^3} - \dfrac{1}{r_1^3}\right) \sin t, \end{cases}
$$

et si l'on pose pour simplifier l'ecriture

$$
(17)\quad \begin{cases} A = -\dfrac{m_1}{r_1^3} - \dfrac{m_2}{r_2^3} + \dfrac{1}{r^3} \\ B = \dfrac{1}{r_2^3} - \dfrac{1}{r_1^3}, \end{cases}
$$

le système (15) nous donne finalement

$$
\frac{dp}{dt} = 2 m_1 m_2 \frac{p^{3/2}}{e^2 - 1} B[(e - chu) \sin(t - \varpi) - \sqrt{e^2 - 1}\, shu \cos(t - \varpi)]
$$

$$
\frac{de}{dt} = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{e^2 - 1}} A\, shu + m_1 m_2 \frac{\sqrt{p(e^2-1)}}{e(echu-1)} B[-shu \cos(t - \varpi) +
$$

$$
\sqrt{e^2 - 1}\, chu \sin(t - \varpi)] + m_1 m_2 \frac{\sqrt{p}}{e} B[(e - chu) \sin(t - \varpi) -
$$

$$
\sqrt{e^2 - 1}\, shu \cos(t - \varpi)]
$$

$$
(18)\qquad \frac{d\tau}{dt} = \frac{p^3}{e(e^2-1)^2} A\, chu (echu - 1) - \frac{2p^3}{(e^2-1)^3} A (echu - 1)^2 +
$$

$$
+ \frac{p^3}{(e^2-1)^3} A\, shu[(1 + 2e^2) shu - 3eu]
$$

$$
+ m_1 m_2 \frac{p^2}{e(e^2-1)} B[\cos(t - \varpi) + \frac{eshu}{\sqrt{e^2-1}} \sin(t - \varpi)]
$$

$$
- m_1 m_2 \frac{2p^2}{(e^2-1)^2} B[(e - chu) \cos(t - \varpi) + \sqrt{e^2 - 1}\, shu \sin(t - \varpi)]
$$

$$
+ m_1 m_2 \frac{p^2}{e(e^2-1)^2} B \frac{(1+2e^2) shu - 3eu}{echu - 1} [- shu \cos(t - \varpi) +
$$

$$
\sqrt{e^2 - 1}\, chu \sin(t - \varpi)]
$$

$$
\frac{d\varpi}{dt} = \frac{p^{3/2}}{e(e^2-1)} A (chu - e) - m_1 m_2 \frac{\sqrt{p}}{e} B[\cos(t - \varpi) + \frac{eshu}{\sqrt{e^2-1}} \sin(t - \varpi)]
$$

$$
+ m_1 m_2 \frac{\sqrt{p}}{e} B \frac{shu}{echu - 1} [- shu \cos(t - \varpi) + \sqrt{e^2 - 1}\, chu \sin(t - \varpi)].
$$

Si la masse m_2 par exemple est très petite, p, e, τ, ϖ varient très lentement avec le temps.

Si dans son mouvement la masse nulle m_3 passe très près de m_2 (ou de m_1), les éléments p, e, τ, ϖ subissent de très grandes variations. C'est pourquoi bien des comètes hyperboliques peuvent devenir elliptiques et inversement.

Le théorème de CAUCHY s'applique au système (18) pour tout ensemble de valeurs initiales $t=t_0$, $p=p_0$, $e=e_0>1$, $\tau=\tau_0$, $\varpi=\varpi_0$:

Il existe donc une solution unique, holomorphe dans un cercle de rayon déterminé, qui pour $t=t_0$ prend les valeurs p_0, e_0, $\tau=\varpi_0$, données à l'avance. Le mouvement correspondant a ses éléments osculateurs hyperboliques.

Trajectoires hyperboliques-elliptiques

3. Nous étudions maintenant le système (18) pour $t_0=\infty$.
Pour cela nous développons A et B suivant les puissances de $1/r$ et nous nous bornons aux premiers termes

$$(19)\quad \begin{cases} A = -\dfrac{3}{2} m_1 m_2 \dfrac{3\cos^2\varphi - 1}{r^5} + \dots \\[2ex] B = \dfrac{3\cos\varphi}{r^4} + \dots \quad , \end{cases}$$

$$(20)\qquad \cos\varphi = \frac{e - chu}{echu - 1}\cos(t-\varpi) + \frac{\sqrt{e^2-1}\, shu}{echu-1}\sin(t-\varpi) \ ,$$

φ étant l'angle formé par les directions Om_2 et Om_3. Selon l'équation de KÉPLER (8), shu est infiniment grand d'ordre 1 par rapport au temps, et de même chu, puisque shu et chu sont des infiniment grands équivalents. Il résulte d'après (8) que x, y et r sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps. Donc pour les grandes valeurs de t le système (18) est de la forme

$$(21)\qquad \frac{dp}{dt} = \frac{b}{t^3}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{b}{t^3}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{b}{t^3}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = \frac{b}{t^3},$$

où b désigne une quantité bornée quand t tend vers l'infini, qui bien entendu n'est pas toujours la même. Il résulte que lorsque t tend vers l'infini p, e, τ, ϖ tendent vers des limites finies.

Inversement si l'on se donne pour $t=\infty$: $p=p_0$, $e=e_0>1$, $\tau=\tau_0$, $\varpi=\varpi_0$ le système (18) admet une solution, qui est unique, et qui tend vers p_0, e_0, τ_0, ϖ_0, quand t tend vers l'infini.

Les seconds membres de (18) ne sont pas holomorphes pour $t=\infty$, à cause des termes en $\sin(t-\varpi)$ et $\cos(t-\varpi)$. Si l'on prend comme variable indépendante $T=1/t$, les seize dérivées partielles des seconds membres des quatre équations (18), par rapport à p, e, τ, ϖ sont de la forme bT. Elles sont donc bornées au voisinage de $T=0$, les conditions de Lipschitz sont par conséquent satisfaites.

M. Chazy a classé, dans le problème général des trois corps[11]), les différents mouvements possibles au point de vue des maxima des distances mutuelles, quand le temps tend vers l'infini. Selon cette classification, les trajectoires du problème restreint dont les éléments osculateurs tendent vers des éléments hyperboliques quand le temps tend vers l'infini sont appelées hyperboliques-elliptiques.

4. Les composantes de la vitesse de la masse nulle sont

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{\sqrt{p}}\,\dfrac{sh u\cos\varpi+\sqrt{e^2-1}\;ch u\sin\varpi}{e\,ch u-1} \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{\sqrt{p}}\,\dfrac{sh u\sin\varpi-\sqrt{e^2-1}\;ch u\cos\varpi}{e\,ch u-1} \end{cases}$$

et l'on voit que x/t, y/t, et r/t ont mêmes limites que dx/dt, dy/dt et dr/dt, quant t tend vers l'infini

$$(23)\quad \begin{cases} \lim\limits_{t=\infty}\dfrac{x}{t}=\lim\limits_{t=\infty}\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{e\sqrt{p}}\left(\cos\varpi+\sqrt{e^2-1}\sin\varpi\right) \\[2ex] \lim\limits_{t=\infty}\dfrac{y}{t}=\lim\limits_{t=\infty}\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{e\sqrt{p}}\left(\sin\varpi+\sqrt{e^2-1}\cos\varpi\right) \\[2ex] \lim\limits_{t=\infty}\dfrac{r}{t}=\lim\limits_{t=\infty}\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{\sqrt{e^2-1}}{\sqrt{p}}\,. \end{cases}$$

Ces limites ne sont nulles simultanément que si $e=1$. Dans ce cas nous verrons que x, y et r sont des infiniment grands d'ordre $^2/_3$ par rapport au temps.

---

[11]) „Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment", Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences, *t.* 170, 1920, p. 1560.

Régularisation du système différentiel (18) au voisinage de $e = 1$

5. Nous allons montrer maintenant comment on peut régulariser le système (18) pour $e = 1$, à l'aide du changement de variable

$$u = \sqrt{e^2 - 1}\, \mathrm{U}. \tag{24}$$

Pour cela nous écrivons le système (18) comme il suit

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2 m_1 m_2 p^{3/2} \mathrm{B} [\beta_1 \sin(t - \varpi) + \gamma_1 \cos(t - \varpi)] \\ \frac{de}{dt} &= p^{3/2} \mathrm{A} \alpha_2 + m_1 m_2 \frac{\sqrt{p}}{e} \mathrm{B} [\beta_2 \sin(t - \varpi) + \gamma_2 \cos(t - \varpi)] \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{p^3}{e} \mathrm{A} \alpha_3 + m_1 m_2 \frac{p^2}{e} \mathrm{B} [\beta_3 \sin(t - \varpi) + \gamma_3 \cos(t - \varpi)] \\ \frac{d\varpi}{dt} &= p^{3/2} \mathrm{A} \alpha_4 + m_1 m_2 \frac{\sqrt{p}}{e} \mathrm{B} [\beta_4 \sin(t - \varpi) + \gamma_4 \cos(t - \varpi)] \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} & \beta_1 = \frac{e - chu}{e^2 - 1}, \qquad \gamma_1 = -\frac{shu}{\sqrt{e^2 - 1}}, \\ & \alpha_2 = \frac{shu}{\sqrt{e^2 - 1}} = -\gamma_1 \quad \beta_2 = \frac{2e^2 chu - e ch^2 u - e}{echu - 1}, \gamma_2 = -\frac{\sqrt{e^2 - 1}\, shu\, chu}{echu - 1}, \\ & \alpha_3 = \frac{e^3 ch^2 u + (3e^2 + 1) chu - 3e^2 u\, shu - 2e^3 - 3e}{(e^2 - 1)^3}, \\ & \beta_3 = \frac{(1 + e^2) shu\, chu + eshu - 3\, eu\, chu}{(e^2 - 1)^{3/2} (echu - 1)}, \\ & \gamma_3 = \frac{-ch^2 u - (e^3 + 3e) chu + 3eu\, shu + 3e^2 + 2}{(e^2 - 1)^2 (echu - 1)}, \\ & \alpha_4 = \frac{chu - e}{e^2 - 1} = -\beta_1, \quad \beta_4 = \frac{(e - chu) shu}{\sqrt{e^2 - 1}\, (echu - 1)}, \quad \gamma_4 = \frac{1 - echu - sh^2 u}{echu - 1}. \end{aligned} \right.$$

Si quand t tend vers un instant fini t_0, e tend vers 1, l'anomalie excentrique u tend vers zéro.

En effet, c'est ce qui montre l'équation $r = \frac{p}{e^2 - 1}(echu - 1)$, puisque r est fini, et $p \neq 0$.

Nous allons développer α_i, β_i, γ_i suivant les puissances de u. Ensuite nous ferons le changement de variable (24).

$$\beta_1 = \frac{e-1-\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{24}+\dots}{e^2-1} = \frac{e-1-\frac{e^2-1}{2}U^2-\frac{(e^2-1)^2}{24}U^4+\dots}{e^2-1} = \frac{1-\frac{e+1}{2}U^2+\dots}{e+1},$$

$$\gamma_1 = -\frac{u+\frac{u^3}{6}+\dots}{\sqrt{e^2-1}} = -\frac{\sqrt{e^2-1}\,U+\frac{(e^2-1)^{3/2}}{6}U^3+\dots}{\sqrt{e^2-1}} = -U+\dots$$

$$\alpha_2 = -\gamma_1 = U+\dots$$

$$\beta_2 = \frac{-e+2e^2\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\dots\right)-e\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\dots\right)^2}{-1+e\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\dots\right)} =$$

$$\frac{2e(e-1)+(e^2-e)u^2+\dots}{e-1+\frac{e}{2}u^2+\frac{e}{24}u^4+\dots} = \frac{2e(e-1)+e(e-1)(e^2-1)U^2+\dots}{e-1+\frac{e}{2}(e^2-1)U^2+\dots} =$$

$$\frac{2e+\dots}{1+e\frac{e+1}{2}U^2+\dots},$$

$$\gamma_2 = -e\sqrt{e^2-1}\,\frac{\left(u+\frac{u^3}{6}+\dots\right)\left(1+\frac{u^2}{2}+\dots\right)}{-1+e\left(1+\frac{u^2}{2}+\dots\right)} = e\,\frac{-\sqrt{e^2-1}\,u-\frac{2}{3}\sqrt{e^2-1}\,u^3+\dots}{e-1+\frac{e}{2}u^2+\dots} =$$

$$e\,\frac{-(e^2-1)U+\dots}{(e-1)+e\frac{e^2-1}{2}U^2+\dots} = e\,\frac{-(e+1)U+\dots}{1+e\frac{e+1}{2}U^2+\dots}.$$

$$\alpha_3 = \frac{e^3\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\frac{u^6}{720}+\dots\right)^2+(3e^2+1)\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\frac{u^6}{720}+\dots\right)-3e^2u\left(u+\frac{u^3}{6}+\frac{u^5}{120}+\dots\right)-2e^3-3e}{(e^2-1)^3} =$$

$$\frac{-e^3+3e^2-3e+1+\frac{2e^3-3e^2+1}{2}u^2+\frac{8e^3-9e^2+1}{24}u^4+\frac{32e^3-15e^2+1}{720}u^6+\dots}{(e^2-1)^3} =$$

$$\frac{-(e-1)^3+\frac{(e-1)^2(2e+1)(e^2-1)}{2}U^2+\frac{(e-1)(8e^2-e-1)(e^2-1)^2}{24}U^4+\frac{(32e^3-15e^2+1)(e^2-1)^3}{720}U^6+\dots}{(e^2-1)^3}=$$

$$\frac{-1+\frac{(2e+1)(e+1)}{2}U^2+\frac{(8e^2-e-1)(e+1)^2}{24}U^4+\frac{(32e^3-15e^2+1)(e+1)^3}{720}U^6+\dots}{(e+1)^3}$$

$$\beta_3=\frac{e\left(u+\frac{u^3}{6}+\frac{u^5}{120}+\dots\right)+(1+e^2)\left(u+\frac{u^3}{6}+\frac{u^5}{120}+\dots\right)\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\dots\right)-3eu\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\dots\right)}{(e^2-1)^{3/2}\left(e-1+\frac{e}{2}u^2+\dots\right)}=$$

$$\frac{(e-1)^2u+\frac{2}{3}(e-1)^2u^3+\frac{8e^2-7e+8}{60}u^5+\dots}{(e^2-1)^{3/2}\left(e-1+\frac{e}{2}u^2+\dots\right)}=$$

$$\frac{(e-1)^2\sqrt{e^2-1}\,U+\frac{2}{3}(e-1)^2(e^2-1)^{3/2}U^3+\frac{8e^2-7e+8}{60}(e^2-1)^{5/2}U^5+\dots}{(e^2-1)^{3/2}\left[e-1+\frac{e}{2}(e^2-1)U^2+\dots\right]}=$$

$$\frac{U+\frac{2}{3}(e^2-1)U^3+\frac{(8e^2-7e+8)(e+1)^2}{60}U^5+\dots}{(e+1)\left(1+e\frac{e+1}{2}U^2+\dots\right)}$$

$$\gamma_3=\frac{-\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\frac{u^6}{720}+\dots\right)^2-(e^3+3e)\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\frac{u^6}{720}+\dots\right)+3eu\left(u+\frac{u^3}{6}+\frac{u^5}{120}+\dots\right)+3e^2+2}{(e^2-1)^2\left[-1+e\left(1+\frac{u^2}{2}+\dots\right)\right]}=$$

$$\frac{-(e-1)^3-\frac{e^3-3e+2}{2}u^2-\frac{e^3-9e+8}{24}u^4-\frac{e^3-15e+32}{720}u^6+\dots}{(e^2-1)^2\left(e-1+\frac{e}{2}u^2+\dots\right)}=$$

$$\frac{-(e-1)^3-\frac{(e-1)^2(e+2)}{2}u^2-\frac{(e-1)(e^2+e-8)}{24}u^4-\frac{e^3-15e+32}{720}u^6+\dots}{(e^2-1)^2\left(e-1+\frac{e}{2}u^2+\dots\right)}=$$

$$\frac{-(e-1)^3-\frac{(e-1)^3(e+1)(e+2)}{2}U^2-\frac{(e-1)^3(e^2+e-8)(e+1)^2}{24}U^4-\frac{(e-1)^3(e^3-15e+32)(e+1)^3}{720}U^6+}{(e-1)^3(e+1)^2\left(1+e\frac{e+1}{2}U^2+\dots\right)}=$$

$$\frac{-1-\frac{(e+1)(e+2)}{2}U^2-\frac{(e^2+e-8)(e+1)^2}{24}U^4-\frac{(e^3-15e+32)(e+1)^3}{720}U^6+\dots}{(e+1)\left(1+e\frac{e+1}{2}U^2+\dots\right)}=$$

$$\alpha_4=-\beta_1=-\frac{1-\frac{e+1}{2}U^2+\dots}{e+1}$$

$$\beta_4=\frac{\left(u+\frac{u^3}{6}+\frac{u^5}{120}+\dots\right)\left[e-\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\dots\right)\right]}{\sqrt{e^2-1}\left[-1+e\left(1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\dots\right)\right]}=$$

$$\frac{(e-1)u+\frac{e-4}{6}u^3+\dots}{\sqrt{e^2-1}\left(e-1+\frac{e}{2}u^2+\dots\right)}=\frac{(e-1)\sqrt{e^2-1}\,U+\frac{e-4}{6}(e^2-1)^{3/2}U^3+\dots}{\sqrt{e^2-1}\left(e-1+e\frac{e^2-1}{2}U^2+\dots\right)}=$$

$$\frac{U+\frac{(e-4)(e+1)}{6}U^3+\dots}{1+e\frac{e+1}{2}U^2+\dots}$$

$$\gamma_4=\frac{1-e\left(1+\frac{u^2}{2}+\ldots\right)\quad\left(u+\frac{u^3}{6}+\ldots\right)^2}{-1+e\left(1+\frac{u^2}{2}+\ldots\right)}=\frac{e-1-\frac{e+2}{2}u^2+\ldots}{e-1+\frac{e}{2}u^2+\ldots}=$$

$$\frac{e-1-\frac{e+2}{2}(e^2-1)\,U^2+\ldots}{e-1+e\frac{e^2-1}{2}U^2+\ldots}=\frac{-1-\frac{(e+1)(e+2)}{2}U^2+\ldots}{1+e\frac{e+1}{2}U^2+\ldots}$$

Donc au voisinage de $e=1$ nous pouvons écrire le système (18) comme il suit

$$\frac{dp}{dt}=2\,m_1\,m_2\,p^{3/2}\,B\left[\frac{1-\frac{e+1}{2}U^2+\ldots}{e+1}\sin(t-\varpi)-\frac{(e+1)U+\ldots}{e+1}\cos(t-\varpi)\right]$$

$$\frac{de}{dt}=p^{3/2}\,A\,(U+\ldots)+m_1\,m_2\frac{\sqrt{p}}{e}\,B\times$$

$$\left[\frac{2e+\ldots}{1+e\frac{e+1}{2}U^2+\ldots}\sin(t-\varpi)-e\frac{(e+1)U+\ldots}{1+e\frac{e+1}{2}U^2+\ldots}\cos(t-\varpi)\right]$$

(27)
$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{p^3}{e(e+1)^3}A\left[-1+\frac{(2e+1)(e+1)}{2}U^2+\frac{(8e^2-e-1)(e+1)^2}{24}U^4+\frac{(32e^3-15e^2+1)(e+1)^3}{720}U^6+\ldots\right]$$

$$+m_1\,m_2\frac{p^2}{e}B\left[\frac{U+\frac{2}{3}(e^2-1)U^3+\frac{(8e^2-7e+8)(e+1)^2}{60}U^5+\ldots}{(e+1)\left(\left(1+e\frac{e+1}{2}U^2+\ldots\right)\right.}\sin(t-\varpi)\right.$$

$$\left.-\frac{1+\frac{(e+1)(e+2)}{2}U^2+\frac{(e^2+e-1)(e+1)^2}{24}U^4+\frac{(e^3-15e+32)(e+1)^3}{720}U^6+\ldots}{(e+1)^2\left(1+e\frac{e+1}{2}U^2+\ldots\right)}\cos(t-\varpi)\right]$$

$$\frac{d\varpi}{dt}=\frac{p^{3/2}}{e(e+1)}A\left(-1+\frac{e+1}{2}U^2+\ldots\right)+m_1\,m_2\frac{\sqrt{p}}{e}B\times$$

$$\left[\frac{U+\frac{(e-4)(e+1)}{6}U^3+\ldots}{1+e\frac{e+1}{2}U^2+\ldots}\sin(t-\varpi)+\frac{1+\frac{(e+1)(e+2)}{2}U^2+\ldots}{1+e\frac{e+1}{2}U^2+\ldots}\cos(t-\varpi)\right]$$

Les termes non-écrits sont nuls pour $e=1$.

U est une quantité finie qui est égale à $\operatorname{tg}(w/2)$ lorsque $e=1$, w étant l'anomalie vraie.

En effet, on peut montrer cela de deux façons, soit en partant de l'équation

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2}=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{tg}h\frac{u}{2},$$

soit en partant de l'équation de KÉPLER

$$eshu-u=n(t-\tau).$$

Si, après avoir effectué le changement $u=\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{U}$ on fait $e=1$, la première équation se réduit à

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2}=\mathrm{U},$$

tandis que la seconde se réduit à

$$\mathrm{U}+\frac{\mathrm{U}^3}{3}=\frac{2}{p^{3/2}}(t-\tau).$$

Cette dernière n'est autre chose que l'équation de KÉPLER dans le mouvement parabolique de deux corps. D'ailleurs les équations (8) se réduisent aux équations (9) si l'on fait le changement (24), et qu'on y fait ensuite $e=1$.

Les expressions A et B sont régulières au voisinage de $t=t_0$ s'il ne se produit pas de choc à cet instant entre m_3 et m_1, ou entre m_3 et m_2, ou bien si m_3 ne passe pas au centre de gravité de m_1 et m_2.

Les dérivées partielles des seconds membres du système (18), par rapport à p, e, τ, ϖ sont également finies pour $t=t_0$.

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant:

Si l'on se donne à l'avance $p=p_0$, $e=e_0=1$, $\tau=\tau_0$, $\varpi=\varpi_0$, il existe une solution unique, qui pour $t=t_0$ prend les valeurs p_0 1, τ_0, ϖ_0.

Trajectoires paraboliques-elliptiques

6. Nous allons montrer maintenant qu'il existe encore une solution du système (18) qui tend vers p_0, 1, τ_0, ϖ_0, quand le temps tend vers l'infini, p_0, τ_0, ϖ_0, étant données à l'avance.

La distance r satisfait à l'équation différentielle

$$(28) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = -r\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right) + m_1 m_2 \frac{x\cos t + y\sin t}{r}\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) + \\ + \frac{1}{r^3}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Les rapports de la distance r et des deux distances r_1 et r_2 tendent vers 1 quand la masse m_3 s'éloigne à l'infini, et l'on peut écrire

$$r_1 = r(1+\varepsilon), \qquad r_2 = r(1+\varepsilon)$$

$$\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2^2}\right) = \frac{3(r_1 - r_2)(1+\varepsilon)}{r^4}$$

d'où

$$(29) \qquad \left|\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right| \leq \frac{3(1+\varepsilon)}{r^4},$$

ε désigne une quantité qui tend vers zéro quand le temps croît indéfiniment, et qui n'est pas toujours la même.

L'expression $(x\cos t + y\sin t)\,/\,r$ est bornée en valeur absolue, ainsi que l'expression $x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{p}$. Enfin, puisque $\dfrac{m_1}{r_1^3} + \dfrac{m_2}{r_2^3} = \dfrac{1+\varepsilon}{r^3}$, l'équation (28) devient

$$(30) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1+\varepsilon}{r^2}$$

Supposons que dans (23) la limite commune du quotient r/t et de dr/dt soit nulle, c'est-à-dire que e tend vers 1 quand le temps croît indéfiniment. Multiplions l'équation (30) par 2 dr/dt, et intégrons de l'instant $t = +\infty$ à linstant t ; on obtient

$$\sqrt{r}\,\frac{dr}{dt} = \sqrt{2}\,(1+\varepsilon),$$

et si l'on intègre encore une fois entre les mêmes limites, on obtient

$$r = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}\, t^{2/3}(1+\varepsilon). \tag{31}$$

Il résulte que s'il existe une trajectoire sur laquelle e tend vers 1 quand le temps croît indéfiniment, sur cette trajectoire, la distance r est un infiniment grand d'ordre $^2/_3$ par rapport au temps.

Par le même raisonnement on déduit des équations (1), que si e tend vers 1 lorsque le temps croît indéfiniment, x et y sont des infiniment grands d'ordre $^2/_3$, par rapport au temps.

7. Nous avons à chaque instant

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{e^2-1}{p} + \frac{2}{r}. \tag{32}$$

Si nous dérivons l'équation (32) par rapport au temps et en tenant compte des équations (1), nous obtenons l'équation

$$\frac{d}{dt}\frac{e^2-1}{p} = \frac{b}{t^3},$$

donc $(e^2-1)/p$ est de la forme b/t^2. Selon l'équation $r = p(e \operatorname{ch} u - 1)/(e^2-1)$ l'anomalie excentrique u tend vers zéro, quand le temps croît indéfiniment. Cette dernière équation peut se mettre sous la forme

$$e\left[\frac{U^2}{2} + \frac{(e^2-1)U^4}{24} + \ldots\right] = \frac{r}{p} - \frac{1}{e+1}, \tag{33}$$

où l'on voit que U est un infiniment grand d'ordre $^1/_3$ par rapport au temps.

Pour les grandes valeurs du temps on a

$$A = \frac{b}{U^{10}} = \frac{b}{t^{10/3}}\ , \quad B = \frac{b}{U^8} = \frac{b}{t^{8/3}}\ .$$

8. Ainsi les seconds membres du système (27) tendent vers zéro lorsque le temps croît indéfiniment, e tendant vers 1. Les dérivées partielles de ces seconds membres, par rapport à p, e, τ, ϖ tendent également-

ment vers zéro, pour tout système de valeurs p_0, 1, τ_0, ϖ_0, lorsque le temps croît indéfiniment, et sont par suite bornées.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Si l'on se donne à l'avance $p = p_0$, $e = e_0 = 1$, $\tau = \tau_0$, $\varpi = \varpi_0$, il existe une trajectoire unique sur laquelle p, e, τ, ϖ tendent vers p_0, 1, τ_0, ϖ_0, quand le temps tend vers l'infini.

Selon la classification de M. Chazy ces trajectoires sont appelées paraboliques-elliptiques. Nous avons vu precédemment que sur une telle trajectoire x, y et r sont des infiniment grands d'ordre $^2/_3$ par rapport au temps. Elles dépendent de trois paramètres, qui sont les valeurs limites de p, τ et ϖ. Il résulte qu'au moment initial il existe une relation entre les valeurs correspondantes de p, e, τ et ϖ, soit $F(p, e, \tau, \varpi) = 0$.

CHAPITRE III

1. Dans son „Mémoire sur le problème des trois corps" [1]), M. K. SUNDMAN a présenté une étude complète sur les singularités réelles.

Les singularités imaginaires ont été signalées par M. JEAN CHAZY [12]): à l'instant t_0, nécessairement imaginaire, une distance mutuelle s'annulle sans que ses projections sur les axes s'annulent en même temps. Ce sont d'après la désignation de M. CHAZY, des chocs binaires imaginaires.

M. CHAZY a établi entre autres, trois résultats simples concernant les chocs binaires imaginaires:

1⁰. Au voisinage de $t=t_0$ les coordonnées et les distances sont développables en séries convergentes suivant les puissances entières et positives de $(t-t_0)^{1/2}$.

2⁰. La transformation de M. SUNDMAN régularise également les chocs binaires imaginaires.

3⁰. Les solutions avec choc binaire imaginaire dépendent d'un nombre de constantes arbitraires égal à l'ordre du système différentiel, soit 12 dans le cas général du problème des trois corps.

Ce fait important fait prévoir que, comme dans le problème des deux corps, pour les valeurs arbitraires des constantes, la solution comporte un choc binaire imaginaire. Il n'est pas de même quant aux chocs binaires réels. Dans ce dernier cas si les 12 constantes ne vérifient pas les deux conditions de choc signalées pour la première fois par PAINLEVÉ, la solution correspondante n'admettra pas de choc binaire réel, mais sa convergence sera arrêtée par la présence dans le plan complexe, de ces singularités.

Les chocs dont nous allons nous occuper ont été envisagés pour la première fois par M. TOSIO UNO dans son mémoire „Sur les singularités des équations différentielles dans le problème des trois corps" [13]). Ces sin-

[12]) „Sur les points singuliers de l'intégrale générale du problème des n corps", Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 157, 1913, p. 1398

[13]) Annali di Matematica, tomo XIV, 1935.

gularités sont de la nature suivante : au moment t_0, deux distances mutuelles s'annullent, tandis que la troisième a une valeur finie bien déterminée et différente de zéro. Une pareille singularité peut être appelée choc binaire double ou bien choc binaire composé.

Sur la proposition de M. Chazy nous avons étudié les chocs binaires doubles dans les trois cas où pendant leur mouvement les trois corps forment constamment un triangle isocèle, et qui d'ailleurs ne se ramènent pas au problème des deux corps : ou bien les trois corps se meuvent dans un plan fixe et y ont un axe de symétrie fixe, ou bien ils se meuvent dans l'espace et présentent un plan de symétrie fixe ou un axe de symétrie fixe [14]).

Problème isocèle plan avec axe de symétrie

2. Prenons d'abord le cas où les trois corps se meuvent dans un plan fixe et y ont un axe de symétrie fixe dans ce plan.

Soit G le centre de gravité des trois masses m, m, M, $2z$ la distance entre les masses m, et ξ la distance de M au centre de gravité des masses égales.

Nous avons le système différentiel

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -\dfrac{2m+M}{(\xi^2+z^2)^{3/2}}\,\xi; \\[2ex] \dfrac{d^2 z}{dt^2} = -\left[\dfrac{m}{4z^3} + \dfrac{M}{(\xi^2+z^2)^{3/2}}\right] z \end{cases}$$

qui admet l'intégrale première

$$(2)\qquad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{M}{2m+M}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2z} + \frac{2M}{(\xi^2+z^2)^{1/2}} + h.$$

Un choc binaire double a lieu lorsque

$$R^2 = z^2 + \xi^2 = z^2\,[1 + (\xi/z)^2] = z^2\,(1 + X^2) = 0, \text{ avec } z \neq 0,$$

donc lorsque $X = \pm i$. Introduisons avec X une autre variable $Y = d\xi/dz$. En tenant compte de l'intégrale (2), le système différentiel (1) devient

$$(3)\qquad \frac{dX}{Y-X} = \frac{dY}{\dfrac{\left(1+\dfrac{M}{2m+M}Y^2\right)\left\{Y\left[\dfrac{m}{4}+\dfrac{M}{(1+X^2)^{3/2}}\right]-\dfrac{2m+M}{(1+X^2)^{3/2}}X\right\}}{\dfrac{m}{2}+\dfrac{2M}{(1+X^2)^{1/2}}+hz}} = \frac{dz}{z}$$

[14]) Cf. Chazy, Bulletin Astronomique, tome 1, 1921.

3. Multiplions les trois dénominateurs du système (3) par l'expression

$$\frac{m}{2}(1+X^2)^{3/2}+2M(1+X^2)+hz(1+X^2)^{3/2}.$$

Nous obtenons

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{(Y-X)(1+X^2)\left[\dfrac{m}{2}(1+X^2)^{1/2}+2M+hz(1+X^2)^{1/2}\right]} = \\[2ex] \dfrac{dY}{\left(1+\dfrac{M}{2m+M}Y^2\right)\left[\dfrac{m}{4}Y(1+X^2)^{3/2}+MY-(2m+M)X\right]} = \\[2ex] \dfrac{dz}{z(1+X^2)\left[\dfrac{m}{2}(1+X^2)^{1/2}+2M+hz(1+X^2)^{1/2}\right]} \end{cases}$$

Envisageons les points singuliers du système (4) donnés par les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} X^2+1=0 \\ MY-(2m+M)X=0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad X=+i \qquad Y=i\frac{2m+M}{M},$$

$$(7)\qquad X=-i \qquad Y=-i\frac{2m+M}{M}.$$

Nous allons développer les trois dénominateurs du système (4) au voisinage de

$$X+i=U=0 \quad , \quad Y+i\frac{2m+M}{M}=y=0.$$

Considérons tout d'abord l'expression $(1+X^2)^{1/2}$. On a

$$(1+X^2)^{1/2}=(X+i)^{1/2}(X-i)^{1/2}=U^{1/2}(U-2i)^{1/2}$$

$$(U-2i)^{1/2}=A_0+A_1U+A_2U^2+\dots$$

Si nous élevons au carré la dernière égalité nous obtenons les valeurs des coefficients A. On a $A_0^2 = -2i$, ce qui donne deux valeurs pour A_0

$$A_0 = 1 - i \quad , \quad A_0 = -1 + i .$$

Une fois A_0 fixé les autres A sont déterminés d'une manière unique. La fonction $(U - 2i)^{1/2}$ admet donc deux branches holomorphes au voisinage de $U = 0$, et les deux développements obtenus convergent si $|U| < |2i| = 2$. Mais $(1 + X^2)^{1/2}$ n'est pas holomorphe au voisinage de $U = 0$, à cause du facteur $U^{1/2}$. En posant $U^{1/2} = x$, $dU = 2x\,dx$, nous obtenons un système différentiel aux dénominateurs holomorphes. On a

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(1 + X^2)^{1/2} = A_0 x + \frac{1}{2A_0} x^3 + \frac{1}{16 i A_0} x^5 + S_7(x) \\ &1 + X^2 = -2 i x^2 + S_4(x) \\ &(1 + X^2)^{3/2} = -2 i A_0 x^3 + S_5(x) . \end{aligned} \right.$$

Ensuite

$$(9) \qquad Y - X = -i \frac{2m}{M} + y - x^2$$

$$(10) \qquad \begin{aligned} &(1 + X^2) \left[\frac{m}{2} (1 + X^2)^{1/2} + 2M + hz (1 + X^2)^{1/2} \right] = \\ &\qquad -4 i M x^2 - 2 i A_0 \left(\frac{m}{2} + h z_0 \right) x^3 + S_4 (x, y, z - z_0). \end{aligned}$$

Nous désignerons dorénavant par $S_n(x, y, z, \ldots)$, ou brièvement par S_n, une série entière par rapport aux variables mises en évidence, qui peuvent d'ailleurs être en nombre quelconque, laquelle série commence par des termes du degré n. Enfin $S(x, y, z, \ldots)$ ou simplement S désigne une série qui ne s'annulle pas avec les variables qu'elle contient.

$$(11) \qquad \begin{aligned} &(Y - X)(1 + X^2) \left[\frac{m}{2} (1 + X^2)^{1/2} + 2M + hz (1 + X^2)^{1/2} \right] = \\ &\qquad -8 m x^2 - 4 \frac{m}{M} A_0 \left(\frac{m}{2} + h z_0 \right) x^3 - 4 i M x^2 y + S_4 (x, y, z - z_0) \end{aligned}$$

$$(12) \qquad 1 + \frac{M}{2m + M} Y^2 = -2 \frac{m}{M} - 2 i y + \frac{M}{2m + M} y^2$$

$$
(13) \quad \begin{aligned} &\frac{m}{4}\,\mathrm{Y}\,(1+\mathrm{X}^2)^{3/2} + \mathrm{M\,Y} - (2m+\mathrm{M})\,\mathrm{X} = \\ &\mathrm{M}\,y - (2m+\mathrm{M})\,x^2 - \frac{m}{2}\,\frac{2m+\mathrm{M}}{\mathrm{M}}\,\mathrm{A}_0\,x^3 + \mathrm{S}_4\,(x, y, z - z_0) \end{aligned}
$$

$$
(14) \quad \begin{aligned} &\left(1 + \frac{\mathrm{M}}{2m+\mathrm{M}}\,\mathrm{Y}^2\right)\left[\frac{m}{4}\,\mathrm{Y}\,(1+\mathrm{X}^2)^{3/2} + \mathrm{M\,Y} - (2m+\mathrm{M})\,\mathrm{X}\right] = -2my + \\ &2m\,\frac{2m+\mathrm{M}}{\mathrm{M}}\,x^2 + m^2\,\frac{2m+\mathrm{M}}{\mathrm{M}^2}\,\mathrm{A}_0\,x^3 + 2i\,(2m+\mathrm{M})\,x^2 y + \\ &\qquad \frac{\mathrm{M}^2}{2m+\mathrm{M}}\,y^3 + \mathrm{S}_4\,(x, y, z - z_0). \end{aligned}
$$

$$
(15) \quad \begin{aligned} &z\,(1+\mathrm{X}^2)\left[\frac{m}{2}\,(1+\mathrm{X}^2)^{1/2} + 2\mathrm{M} + h\,z\,(1+\mathrm{X}^2)^{1/2}\right] = -4i\mathrm{M}z_0 x^2 - \\ &2i\,\mathrm{A}_0\,z_0\left(\frac{m}{2} + hz_0\right)x^3 - 4i\,\mathrm{M}\,x^2\,(z - z_0) + \mathrm{S}_4\,(x, y, z - z_0). \end{aligned}
$$

4. Nous avons donc à étudier et à mettre en évidence les solutions du système suivant

$$
(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{-4mx - 2\frac{m}{\mathrm{M}}\mathrm{A}_0\left(\frac{m}{2} + hz_0\right)x^2 - 2i\mathrm{M}xy + 2i(\mathrm{M}-m)x^3 - \left[i\left(\frac{m}{2} + hz_0\right) + 2\frac{m}{\mathrm{M}}h\right]\mathrm{A}_0 x^2 y + \mathrm{S}_4} = \\ &\frac{dy}{-2my + 2m\frac{2m+\mathrm{M}}{\mathrm{M}}x^2 - 2i\mathrm{M}y^2 + m^2\frac{2m+\mathrm{M}}{\mathrm{M}^2}\,\mathrm{A}_0 x^3 + 2i\,(2m+\mathrm{M})\,x^2 y + \frac{\mathrm{M}^2}{2m+\mathrm{M}}\,y^3 + \mathrm{S}_4} = \\ &\frac{dz}{-4i\,\mathrm{M}\,z_0 x^2 - 2i\,\mathrm{A}_0\,z_0\left(\frac{m}{2} + h\,z_0\right)\,x^3 - 4i\,\mathrm{M}\,x^2\,(z - z_0) + \mathrm{S}_4}. \end{aligned} \right.
$$

En divisant les dénominateurs du système (16) par $-\,2m$, il est de la forme

$$
(17) \quad \frac{dx}{2x + \mathrm{S}_2\,(x, y, z - z_0)} = \frac{dy}{y + \mathrm{S}_2\,(x, y, z - z_0)} = \frac{dz}{2i\,\frac{\mathrm{M}}{m}\,z_0\,x^2 + \mathrm{S}_3\,(x, y, z - z_0)}.
$$

Le système (17) admet la multiplicité singulière à une dimension

$$
x = 0, \quad y = 0, \quad z = z_0 \quad \text{(quelconque)}.
$$

Au voisinage de chaque point de cette multiplicité l'équation caractéristique admet deux racines positives $+1$ et $+2$, et une racine nulle.

Conformément au théorème[6]) enoncé par M. Chazy, le système (17) admet en chaque point de cette multiplicité singulière, des solutions qui engendrent deux autres multiplicités.

La première s'obtient en exprimant les variables x, y, z par des séries entières convergentes s'annulant avec les variables qui correspondent aux racines négatives de l'équation caractéristique. Puisque ces racines n'existent pas il résulte que x, y, z sont identiquement nulles et aucun mouvement ne correspond à cette multiplicité.

La deuxième multiplicité s'obtient en exprimant $z - z_0$ en série entière par rapport aux variables x et y, s'annulant avec ces variables. Pour déterminer cette série considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(18) \qquad (2x + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x} + (y + \ldots)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(2i\frac{M}{m} z_0 x^2 + \ldots\right)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Par la substitution de $z_0 + S_1(x, y; z_0)$ à la place de z, dans les coefficients de l'équation (18) et de $-z + z_0 + S_1(x, y; z_0)$ à la place de f, il faut que l'équation qui reste soit une identité en x et y. Ce faisant, après l'identification on trouve

$$(19) \qquad z = z_0 + S_2(x, y; z_0) = z_0 + i\frac{M}{2m} z_0 x^2 + S_3(x, y; z_0)$$

5. Maintenant si nous substituons cette expression de z dans les deux premiers rapports nous obtenons en x et y un système de la forme

$$(20) \qquad \frac{dx}{2x + S_2(x, y; z_0)} = \frac{dy}{y + S_2(x, y; z_0)}$$

dont l'équation caractéristique admet les racines $+1$ et $+2$.

Il semble au premier abord que nous sommes dans un cas d'exception, puisqu'une racine est le double de l'autre, et que des logarithmes s'y introduisent. Nous montrerons que cette circonstance n'as pas lieu. Pour chercher les solutions du système (20) nous considérons les deux équations aux derivées partielles

$$(21) \qquad \begin{cases} (2x + \alpha_{20} x^2 + \alpha_{30} x^3 + \alpha_{21} x^2 y + S_4)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \\ \qquad + (y + \beta_{20} x^2 + \beta_{02} y^2 + \beta_{30} x^3 + \beta_{21} x^2 y + S_4)\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2f \\ (2x + \alpha_{20} x^2 + \alpha_{30} x^3 + \alpha_{21} x^2 y + S_4)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \\ \qquad + (y + \beta_{20} x^2 + \beta_{02} y^2 + \beta_{30} x^3 + \beta_{21} x^2 y + S_4)\dfrac{\partial f}{\partial x} = f. \end{cases}$$

Les coefficients α et β sont bien connus, ils sont les mêmes que dans les deux premiers dénominateurs du système (16), où à la place de z on met sa valeur (19), divisés évidemment par $-2m$. Il est à remarquer que z n'entre pas dans ces dénominateurs, qu'à partir des termes du quatrième ordre. Cherchons une intégrale de la première équation (21), qui s'annulle nécessairement avec x et y, soit

$$
\begin{aligned}
f &= \lambda_{10} x + \lambda_{01} y + \lambda_{20} x^2 + \lambda_{11} xy + \lambda_{02} y^2 + S_3(x, y) \\
&= \sum_{i+k=1}^{\infty} \lambda_{ik} \, x^i y^k
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Nous obtenons pour les coefficients λ

$$
\left\{
\begin{array}{l}
2\lambda_{10} = 2\lambda_{10}\,; \quad \lambda_{10} \text{ arbitraire} \\
\lambda_{01} = 2\lambda_{01}\,; \quad \lambda_{01} = 0 \\
\alpha_{20}\lambda_{10} + 4\lambda_{20} + \beta_{20}\lambda_{01} = 2\lambda_{20}\,; \quad 2\lambda_{20} = -\alpha_{20}\lambda_{10} \\
3\lambda_{11} = 2\lambda_{11}\,; \quad \lambda_{11} = 0 \\
2\lambda_{02} + \beta_{02}\lambda_{01} = 2\lambda_{02}\,; \quad \lambda_{02} \text{ arbitraire} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
\right.
\tag{23}
$$

Les coefficients des termes suivants sont bien déterminés puisque l'expression $2(p_1 - 1) + p_2$, où p_1 et p_2 sont des entiers positifs, ne peut être nulle que si $p_1 = 0$, $p_2 = 2$, ou $p_1 = 1$, $p_2 = 0$. Or, cette chose était à craindre seulement pour les coefficients λ compris dans le tableau (23), où l'on voit que cela n'arrive pas. En effet, on n'a pas des équations qui soient incompatibles en λ; elles sont ou bien identiquement satisfaites, d'où résultent des λ arbitraires, ou bien d'autres équations d'où résultent des λ complètement déterminés.

Si nous considérons maintenant la seconde équation (21), on trouve d'après la même remarque que tout-à-l'heure, que cette équation aux dérivées partielles admet une solution qui s'annulle avec les variables x et y, et qui commence par le terme en y puisque c'est son coefficient qui est arbitraire. L'expression $2p_1 + p_2 - 1$ analogue à la précédente ne s'annulle que si $p_1 = 0$, $p_2 = 1$. En construisant le tableau analogue au (23) on voit qu'il n'y a pas des équations incompatibles en λ.

Il résulte que l'équation (20) admet une infinité de solutions passant toutes à l'origine, et qui sont données par

$$[(2x + S_2(x, y)]^{1/2} = C\,[(y + S_2(x, y)] \tag{24}$$

d'oú

$$2x + S_2(x, y) = C\,[y + S_2(x, y)]^2 \tag{25}$$

ce qui donne

$$x = y^2 \, S(y) \tag{26}$$

6. L'intégrale première du système (3) peut s'écrire

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = \frac{1 + \dfrac{M}{2m + M} Y^2}{\dfrac{m}{2} + \dfrac{2M}{(1 + X^2)^{1/2}} + hz}$$

ou encore

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 = y^2 \, S(y). \tag{27}$$

Mais d'après les deux derniers rapports du système (16) on a

$$dz = y^2 \, S(y) \, dy. \tag{28}$$

Par substitution dans (27) on trouve

$$\left(\frac{dt}{dy}\right)^2 = y^8 \, S(y). \tag{29}$$

et ensuite

$$\frac{dt}{dy} = y^4 \, S(y). \tag{30}$$

Si t_0 désigne une constante arbitraire, on a

$$t - t_0 = y^5 \, S(y). \tag{31}$$

Cette dernière égalité nous donne

$$y = (t - t_0)^{1/5}. \, S[(t - t_0)^{1/5}]. \tag{32}$$

En tenant compte de (26) et (32), l'équation (19) nous donne

$$\boxed{z = z_0 + y^4 \, S(y) = z_0 + (t - t_0)^{4/5} \, S[(t - t_0)^{1/5}]}\,. \tag{33}$$

Mais puisque

$$x = y^2 \, S(y) = (t - t_0)^{2/5} \, S[(t - t_0)^{1/5}] = U^{1/2} = (X + i)^{1/2},$$

on en déduit

$$X + i = (t - t_0)^{4/5} \, S[(t - t_0)^{1/5}]$$

$$X = \frac{\xi}{z} = -i + (t - t_0)^{4/5} \, S[(t - t_0)^{1/5}]$$

d'où

(34) $$\boxed{\xi = -iz_0 + (t-t_0)^{4/5}\,S[(t-t_0)^{1/5}]}\,.$$

De (33) et (34) on déduit

$$R^2=\xi^2+z^2=(t-t_0)^{4/5}\,S[(t-t_0)^{1/5}]$$

(35) $$\boxed{R=(t-t_0)^{2/5}\,S[(t-t_0)^{1/5}]}\,.$$

Nous avons donc obtenu des développements de ξ, z, R suivant les puissances entières et positives de $(t-t_0)^{1/5}$. Lorsque t tend vers t_0, R tend vers zéro, étant un infiniment petit d'ordre $^2/_5$ par rapport à $t-t_0$.

Les solutions que nous venons d'étudier dépendent de 4 constantes arbitraires: t_0, z_0, la constante h de l'intégrale première et enfin la constante C qui s'introduit par l'intégration du (20).

La convergence de nos développements est assurée par la méthode des séries majorantes de Poincaré.

La multiplicité (19) n'est autre chose que ce qui correspond à la surface de Poincaré, lieu des caractéristiques d'un système différentiel du second ordre, en un col du système.

Problème isocèle dans l'espace, avec plan de symètrie

7. Nous prenons l'origine au centre de gravité des trois masses m, m, M et le plan de symétrie comme plan $\xi 0 \eta$. $2z$ signifie le double de la distance $(z>0)$, de chacune des masses m, au plan de symétrie. Soient ξ, η les coordonnées de M par rapport au centre de gravité.

Le système différentiel du problème s'écrit

(36) $$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2} &= -\left[\frac{m}{4z^3}+\frac{M}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\right]z \\ \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\frac{2m+M}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,\xi \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\frac{2m+M}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\,\eta \end{aligned}\right.$$

avec $\rho^2=\xi^2+\eta^2$. Le système (36) admet l'intégrale première

(37) $$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\frac{M}{2m+M}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right]=\frac{m}{2z}+\frac{2M}{R}+h$$

R désigne la distance de la masse M à chacune des masses m. En partant du système (36) d'ordre six, nous arriverons à un autre du quatrième ordre, en éliminant la différentielle dt, et en utilisant l'intégrale (37). Un choc binaire double a lieu lorsque

$$R^2 = z^2 + \xi^2 + \eta^2 = z^2\left[1 + \left(\frac{\xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{z}\right)^2\right] = z^2(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2) = 0$$

avec $z \neq 0$. Il est donc avantageux d'introduire comme nouvelles variables $\xi_1 = \xi/z$, $\eta_1 = \eta/z$, et de même $\xi_2 = d\xi/dz$, $\eta_2 = d\eta/dz$. On a sans peine

$$\frac{dz}{z} = \frac{d\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{d\eta_1}{\eta_2 - \eta_1}.$$

Avec ces nouvelles variables l'intégrale (37) s'écrit

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1}{z}\,\frac{\dfrac{m}{2} + \dfrac{2M}{(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)^{1/2}} + hz}{1 + \dfrac{M}{2m + M}(\xi_2^2 + \eta_2^2)} \tag{38}$$

Le système différentiel d'ordre quatre est

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dz}{z(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)\dfrac{\dfrac{m}{2}(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)^{1/2} + 2M + hz(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)^{1/2}}{1 + \dfrac{M}{2m + M}(\xi_2^2 + \eta_2^2)}} = \\
&\frac{d\xi_1}{(\xi_2 - \xi_1)(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)\dfrac{\dfrac{m}{2}(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)^{1/2} + 2M + hz(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)^{1/2}}{1 + \dfrac{M}{2m + M}(\xi_2^2 + \eta_2^2)}} = \\
&\frac{d\eta_1}{(\eta_2 - \eta_1)(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)\dfrac{\dfrac{m}{2}(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)^{1/2} + 2M + hz(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)^{1/2}}{1 + \dfrac{M}{2m + M}(\xi_2^2 + \eta_2^2)}} = \\
&\frac{d\xi_2}{-(2m + M)\xi_1 + \left[\dfrac{m}{4}(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)^{3/2} + M\right]\xi_2} = \\
&\frac{d\eta_2}{-(2m + M)\eta_1 + \left[\dfrac{m}{4}(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)^{3/2} + M\right]\eta_2}.
\end{aligned}\right. \tag{39}$$

On voit que le système (4) admet la multiplicité singulière à deux dimensions définie par

$$
(40)\qquad \left\{\begin{aligned}
&z \text{ quelconque}\\
&1+\xi_1^2+\eta_1^2=0\\
&\mathrm{M}\,\xi_2-(2m+\mathrm{M})\,\xi_1=0\\
&\mathrm{M}\,\eta_2-(2m+\mathrm{M})\,\eta_1=0
\end{aligned}\right.
$$

L'étude des chocs binaires doubles se réduit donc à la recherche et à la représentation des solutions du système différentiel (39) au voisinage d'un point $z_0 \neq 0$, ξ_1^0, η_1^0, ξ_2^0, η_2^0, situé sur la multiplicité (40). On peut par exemple donner une représentation paramétrique de cette multiplicité en posant

$$z \text{ quelconque},\ \xi_1=\pm i\cos\theta,\ \eta_1=\pm i\sin\theta$$

$$\xi_2=\pm i\frac{2m+\mathrm{M}}{\mathrm{M}}\cos\theta,\ \eta_2=\pm i\frac{2m+\mathrm{M}}{\mathrm{M}}\sin\theta.$$

Il est à remarquer que

$$1+\frac{\mathrm{M}}{2m+\mathrm{M}}\left[\left(\xi_2^0\right)^2+\left(\eta_2^0\right)^2\right]=-2\frac{m}{\mathrm{M}}\neq 0.$$

8. Nous procédons maintenant aux développements des dénominateurs du système (39) dans le voisinage d'un système de valeurs $z_0 \neq 0$, ξ_1^0, η_1^0, ξ_2^0, η_2^0. Seulement ces dénominateurs ne sont pas holomorphes à cause du facteur $(1+\xi_1^2+\eta_1^2)^{1/2}$. En introduisant une nouvelle inconnue

$$(1+\xi_1^2+\eta_1^2)^{1/2}=\mathrm{X}$$

nous obtenons un système du cinquième ordre holomorphe au voisinage de z^0, ξ_1^0, η_1^0, ξ_2^0, η_2^0, $\mathrm{X}=0$ et d'une forme plus condensée.

$$
(41)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dz}{z X^2\left(\frac{m}{2} X+2M+hzX\right)} = \frac{d\xi_1}{X^2 (\xi_2 - \xi_1)\left(\frac{m}{2} X+2M+hzX\right)} = \\
&\frac{d\eta_1}{X^2 (\eta_2-\eta_1)\left(\frac{m}{2} X+2M+hzX\right)} = \\
&\frac{d\xi_2}{\left[-(2m+M)\xi_1+\left(\frac{m}{4}X^3+M\right)\xi_2\right]\left[1+\frac{M}{2m+M}(\xi_2^2+\eta_2^2)\right]} = \\
&\frac{d\eta_2}{\left[-(2m+M)\eta_1+\left(\frac{m}{4}X^3+M\right)\eta_2\right]\left[1+\frac{M}{2m+M}(\xi_2^2+\eta_2^2)\right]} = \\
&\frac{dX}{X\left(\frac{m}{2}X+2M+hzX\right)(1-X^2+\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)}
\end{aligned}
\right.
$$

ou bien après développement dans le voisinage de

$$
z - z_0 = 0, \quad \xi_1 - \xi_1^0 = x_1 = 0, \quad \eta_1 - \eta_1^0 = y_1 = 0
$$

$$
\xi_2 - \xi_2^0 = x_2 = 0, \quad \eta_2 - \eta_2^0 = y_2 = 0, \quad X = 0,
$$

et en divisant par $-2m$ tous les dénominateurs, on obtient

$$
(42)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dz}{-\frac{M}{m} z_0 X^2 + P_3} = \frac{dx_1}{-\frac{M}{m}(\xi_2^0-\xi_1^0)X^2+P_3} = \frac{dy_1}{-\frac{M}{m}(\eta_2^0-\eta_1^0)X^2+P_3} = \\
&\frac{dx_2}{x^2-\frac{2m+M}{M}x_1-\frac{M}{m}\frac{M}{2m+M}\xi_2^0 x_2^2+\frac{M}{m}\xi_2^0 x_1 x_2+\frac{M}{m}\eta_2^0 x_1 y_2-\frac{M}{m}\frac{M}{2m+M}\eta_2^0 x_2 y_2+P_3} = \\
&\frac{dy_2}{y_2-\frac{2m+M}{M}y_1-\frac{M}{m}\frac{M}{2m+M}\eta_2^0 y_2^2+\frac{M}{m}\xi_2^0 x_2 y_1-\frac{M}{m}\frac{M}{2m+M}\xi_2^0 x_2 y_2+\frac{M}{m}\eta_2^0 y_1 y_2+P_3} = \\
&\frac{dX}{2X-\frac{M}{m}\xi_2^0 x_1 X-\frac{M}{m}\xi_1^0 x_2 X-\frac{M}{m}\eta_2^0 y_1 X-\frac{M}{m}\eta_1^0 y_2 X+\frac{1}{M}\left(\frac{m}{2}+hz_0\right)X^2+P_3}
\end{aligned}
\right.
$$

P_3 désigne un polynome par rapport à z, x_1, y_1, x_2 y_2, X, qui commence par des termes du troisième ordre, sans être toujours le même.

L'équation caractéristique du système (42) admet en chaque point de la multiplicité singulière, trois racines nulles, deux racines positives égales à $+1$ et une troisième racine positive égale à $+2$.

9. Nous appliquons le théorème de M. Chazy au système (42) lequel admet en chaque point de la multiplicité singulière, des solutions qui engendrent deux autres multiplicités. La première s'obtient en exprimant les variables z, x_1, y_1, qui correspondent à des racines nulles de léquation caractéristique, par des séries entières des variables x_2, y_2, X, correspondant aux racines positives de l'équation caractéristique. Ces séries sont de la forme

$$(43)\qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= S_2(x_2, y_2, X; z_0, \theta_0) \\ y_1 &= S_2(x_2, y_2, X; z_0, \theta_0) \\ z - z_0 &= S_2(x_2, y_2, X; z_0, \theta_0) \end{aligned} \right. ,$$

comme nous allons le montrer. Pour obtenir les coefficients des séries (43) nous considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(44)\qquad \begin{aligned} &\left(-\frac{M}{m} z_0 X^2 + P_3\right)\frac{\partial f}{\partial z} + \left[-\frac{M}{m}(\xi_2^0 - \xi_1^0) X^2 + P_3\right]\frac{\partial f}{\partial x_1} + \\ &\left[-\frac{M}{m}(\eta_2^0 - \eta_1^0) X^2 + P_3\right]\frac{\partial f}{\partial y_1} + \left(x_2 - \frac{2m+M}{M} x_1 + P_2\right)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \\ &+\left(y_2 - \frac{2m+M}{M} y_1 + P_2\right)\frac{\partial f}{\partial y_2} + (2X + P_2)\frac{\partial f}{\partial X} = 0. \end{aligned}$$

On substitue dans les coefficients de cette équation, à la place de x_1, y_1, z, leurs expressions définies par (43), et en même temps on met successivement à la place de f

$$\begin{aligned} &-x_1 + S_2(x_2, y_2, X; z_0, \theta_0) \\ &-y_1 + S_2(x_2, y_2, X: z_0, \theta_0) \\ &-z + z_0 + S_2(x_2, y_2, X; z_0, \theta_0), \end{aligned}$$

et des trois identités qu'on obtient de cette manière, on détermine les coefficients des développements (43),

$$(45)\qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= -\frac{M}{4m}(\xi_2^0 - \xi_1^0) X^2 + S_3(x_2, y_2, X; z_0, \theta_0) \\ y_1 &= -\frac{M}{4m}(\eta_2^0 - \eta_1^0) X^2 + S_3(x_2, y_2, X; z_0, \theta_0) \\ z - z_0 &= -\frac{M}{4m} z_0 X^2 + S_3(x_2, y_2, X; z_0, \theta_0) \end{aligned} \right.$$

10. Par substitution des expressions (45), de x_1, y_1, et z dans les trois derniers dénominateurs du système différentiel (42) nous obtenons un système à trois inconnues

$$(46)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dx_2}{x_2-\dfrac{M}{m}\dfrac{M}{2m+M}\xi_2^0 x_2^2+\dfrac{2m+M}{4m}(\xi_2^0-\xi_1^0)X^2-\dfrac{M}{m}\dfrac{M}{2m+M}\eta_2^0 x_2 y_2+S_3}=\\ \dfrac{dy_2}{y_2-\dfrac{M}{m}\dfrac{M}{2m+M}\eta_2^0 y_2^2+\dfrac{2m+M}{4m}(\eta_2^0-\eta_1^0)X^2-\dfrac{M}{m}\dfrac{M}{2m+M}x_2 y_2+S_3}=\\ \dfrac{dX}{2X-\dfrac{M}{m}\xi_1^0 x_2 X-\dfrac{M}{m}\eta_1^0 y_2 X+S_3}\end{array}\right.$$

L'équation caractéristique de ce système différentiel admet des racines situées toutes sur la partie positive de l'axe réel, dont $+1$ racine double, et $+2$ qui peut s'obtenir par une combinaison linéaire, à coefficients entiers et positifs, des deux autres $+1$ et $+1$. Pourtant les logarithmes ne s'introduisent pas dans la représentation des solutions du système (46). Les inconnues x_2 et y_2 s'expriment à l'aide des séries entières en la racine carrée de X, x_2 commençant par $C_1\sqrt{X}$, y_2 par $C_2\sqrt{X}$, C_1 et C_2 etant des constantes arbitraires Ces solutions sont de la forme

$$(47)\quad\left\{\begin{array}{ll}x_2=\sqrt{X}\,S(\sqrt{X}); & \xi_2=\xi_2^0+\sqrt{X}\,S\sqrt{X})\\ y_2=\sqrt{X}\,S(\sqrt{X}); & \eta_2=\eta_2^0+\sqrt{X}\,S\sqrt{X})\end{array}\right.$$

d'où l'on obtient, par conséquent

$$(48)\quad\left\{\begin{array}{ll}x_1=X^2\,S(\sqrt{X}); & \xi_1=\xi_1^0+X_2\,S\sqrt{X})\\ y_1=X^2\,S(\sqrt{X}); & \eta_1=\eta_1^0+X_2\,S\sqrt{X})\\ z-z_0=X^2\,S(\sqrt{X}) & \end{array}\right.$$

11. L'intégrale première (38) donne

$$(49)\quad\left(\frac{dt}{dz}\right)^2=X\,S(\sqrt{X})$$

Mais on a d'après le système différentiel (42)

$$(50)\quad dz=X\,S(\sqrt{X})\,dX$$

de sorte que (49) devient

$$\left(\frac{dt}{dX}\right)^2 = X^3 S(\sqrt{X}); \quad \frac{dt}{dX} = (\sqrt{X})^3 S(\sqrt{X})$$

ou bien

$$\frac{dt}{d\sqrt{X}} = (\sqrt{X})^4 S(\sqrt{X}). \tag{51}$$

Si t_0 désigne une constante arbitraire on a

$$t - t_0 = (\sqrt{X})^5 S(\sqrt{X}),$$

d'où par inversion

$$\sqrt{X} = (t-t_0)^{1/5} S[(t-t_0)^{1/5}], \tag{52}$$

ou encore

$$(1 + \xi_1^2 + \eta_1^2)^{1/2} = X = (t-t_0)^{2/5} S[(t-t_0)^{1/5}]. \tag{53}$$

Nous obtenons finalement pour ξ, η, z

$$\boxed{\begin{aligned} z &= z_0 + (t-t_0)^{4/5} S[(t-t_0)^{1/5}] \\ \xi &= z\xi_1 = z_0 \xi_1^0 + (t-t_0)^{4/5} S[(t-t_0)^{1/5}] \\ \eta &= z\eta_1 = z_0 \eta_1^0 + (t-t_0)^{4/5} S[(t-t_0)^{1/5}] \end{aligned}}. \tag{54}$$

On a

$$R^2 = z^2 + \xi^2 + \eta^2 = (t-t_0)^{4/5} S[(t-t_0)^{1/5}]$$

d'où

$$\boxed{R = (t-t_0)^{2/5} S[(t-t_0)^{1/5}]}. \tag{55}$$

Nous montrons donc qu'au voisinage d'un choc binaire double les coordonnées et les distances sont développables en séries entières suivant les puissances de $(t-t_0)^{1/5}$, et dont on peut démontrer la convergence à l'aide des séries majorantes de Poincaré.

Les solutions avec choc binaire double dépendent d'un nombre de constantes arbitraires égal à l'ordre du système différentiel qui est six dans ce cas. Ces constantes sont: t_0, h la constante de l'intégrale première, z_0 et θ_0 les deux paramètres qui fixent la position d'un point sur la multiplicité singulière et enfin les deux constantes C_1 et C_2 qui s'introduisent par l'intégration du système différentiel (46).

Quelles qu'elles soient les valeurs de ces constantes, la solution correspondante comportera un choc binaire double.

Nous avons dit que les solutions de (42) engendrent en chaque point de la multiplicité singulière, deux autres multiplicités. La première nous l'avons mise déjà en évidence, elle est définie par les équations (43) ou (45).

Pour obtenir la seconde multiplicité, lieu des solutions, nous exprimons les variables x_1, y_1, z qui correspondent aux racines nulles de l'équation caractéristique, ainsi que les variables x_2, y_2, X correspondant aux racines positives de cette équation, par des séries entières des variables qui correspondent à des racines négatives de l'équation caractéristique et s'annulant avec ces dernières variables. Mais les variables correspondant aux racines négatives, n'existent pas, donc z, x_1, y_1, x_2, y_2 et X sont identiquement nulles et par conséquent aucun mouvement ne correspond à cette multiplicité.

Problème isocèle dans l'espace, avec axe de symétrie

12. Nous prenons l'origine des coordonnées au centre de gravité des trois masses m, m, M, et Oz comme axe de symétrie. Soient $2x$ et $2y$ les coordonnées de l'une des masses m par rapport à l'autre et $r=(x^2+y^2)^{1/2}$ la distance de chacune des masses égales, à l'axe de symétrie. ζ désigne la distance de M au centre de gravité des masses m.

Les équations du mouvement sont

$$(56)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=-\left[\dfrac{m}{4r^3}+\dfrac{M}{(x^2+y^2+\zeta^2)^{3/2}}\right]x \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2}=-\left[\dfrac{m}{4r^3}+\dfrac{M}{(x^2+y^2+\zeta^2)^{3/2}}\right]y \\[2ex] \dfrac{d^2\zeta}{dt^2}=-\dfrac{2m+M}{(x^2+y^2+\zeta^2)^{3/2}} \end{cases}$$

avec l'intégrale première

$$(57)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{M}{2m+M}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2=\frac{m}{2r}+\frac{2M}{R}+h.$$

Nous avons noté par R la distance de M à l'une des masses m, $R^2=\zeta^2+x^2+y^2=r^2+\zeta^2$. Un choc binaire double a lieu lorsque $R^2=r^2+\zeta^2=0$ avec $r\neq 0$, donc avec $\zeta\neq 0$. Cela étant il est indiqué de prendre comme nouvelles variables $x_1=x/\zeta$, $y_1=y/\zeta$ et ensuite $x_2=dx/d\zeta$, $y_2=dy/d\zeta$

En utilisant l'intégrale première et en éliminant la différentielle dt, nous remplacerons le système différentiel du sixième ordre, par un autre du quatrième ordre. On a tout d'abord

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{dx_1}{x_2 - x_1} = \frac{dx_2}{y_2 - y_1}$$

L'intégrale des forces vives se met facilement sous la forme

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\zeta}\,\frac{\dfrac{m}{2(x_1^2+y_1^2)^{1/2}} + \dfrac{2\mathrm{M}}{(1+x_1^2+x_1^2)^{1/2}} + h\zeta}{x_2^2+y_2^2+\dfrac{\mathrm{M}}{2m+\mathrm{M}}} \tag{58}$$

Le système différentiel auquel nous arrivons s'écrit

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\zeta}{\zeta(1+x_1^2+y_1^2)\,\dfrac{\dfrac{m(1+x_1^2+y_1^2)^{1/2}}{2(x_1^2+y_1^2)^{1/2}}+2\mathrm{M}+h\zeta(1+x_1^2+y_1^2)^{1/2}}{\dfrac{\mathrm{M}}{2m+\mathrm{M}}+x_2^2+y_2^2}} = \\
&\frac{dx_1}{(x_2-x_1)(1+x_1^2+y_1^2)\,\dfrac{\dfrac{m(1+x_1^2+y_1^2)^{1/2}}{2(x_1^2+y_1^2)^{1/2}}+2\mathrm{M}+h\zeta(1+x_1^2+y_1^2)^{1/2}}{\dfrac{\mathrm{M}}{2m+\mathrm{M}}+x_2^2+y_2^2}} = \\
&\frac{dy_1}{(y_2-y_1)(1+x_1^2+y_1^2)\,\dfrac{\dfrac{m(1+x_1^2+y_1^2)^{1/2}}{2(x_1^2+y_1^2)^{1/2}}+2\mathrm{M}+h\zeta(1+x_1^2+y_1^2)^{1/2}}{\dfrac{\mathrm{M}}{2m+\mathrm{M}}+x_2^2+y_2^2}} = \\
&\frac{dx_2}{-\left[\dfrac{m(1+x_1^2+y_1)^{3/2}}{4(x_1^2+y_1^2)^{3/2}}+\mathrm{M}\right]x_1+(2m+\mathrm{M})x_2} = \\
&\frac{dy_2}{-\left[\dfrac{m(1+x_1^2+y_1^2)^{3/2}}{4(x_1^2+y_1^2)^{3/2}}+\mathrm{M}\right]y_1+(2m+\mathrm{M})y_2}
\end{aligned}\right. \tag{59}$$

Ce système différentiel admet la multiplicité singulière à deux dimensions, définie par

$$(60)\quad \begin{cases} \zeta \text{ quelconque} \\ 1+x_1^2+y_1^2=0 \\ (2m+M)\,x_2-Mx_1=0 \\ (2m+M)\,y_2-My_1=0, \end{cases}$$

L'étude des chocs binaires doubles se réduit à la représentation des solutions du système différentiel (59) au voisinage d'un point $\zeta_0\neq 0$, x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0 situé sur la multiplicité singulière, dont une représentation paramétrique peut être

$$\zeta \text{ quelconque.} \qquad x_1=\pm i\cos\theta, \qquad y_1=\pm i\sin\theta$$

$$x_2=\pm i\frac{M}{2m+M}\cos\theta, \quad y_2=\pm i\frac{M}{2m+M}\sin\theta.$$

On a

$$(x_2^0)^2+(y_2^0)^2+\frac{M}{2m+M}=\frac{2mM}{(2m+M)^2}\neq 0.$$

13. Pour avoir des dénominateurs holomorphes nous introduisons une nouvelle inconnue

$$(1+x_1^2+y_1^2)^{1/2}=X.$$

et nous allons développer les dénominateurs du système

$$(61)\quad \begin{cases} \dfrac{d\zeta}{\zeta X^2\left[\dfrac{mX}{2(X^2-1)^{1/2}}+2M+h\zeta X\right]}=\dfrac{dx_1}{(x_2-x_1)X^2\left[\dfrac{mX}{2(X^2-1)^{1/2}}+2M+h\zeta X\right]}= \\ \dfrac{dy_1}{(y_2-y_1)X^2\left[\dfrac{mX}{2(X^2-1)^{1/2}}+2M+h\zeta X\right]}= \\ \dfrac{dx_2}{\left\{-x_1\left[\dfrac{mX^3}{4(X^2-1)^{3/2}}+M\right]+(2m+M)x_2\right\}\left(x_2^2+y_2^2+\dfrac{M}{2m+M}\right)}= \\ \dfrac{dy_2}{\left\{-y_1\left[\dfrac{mX^3}{4(X^2-1)^{3/2}}+M\right]+(2m+M)y_2\right\}\left(x_2^2+y_2^2+\dfrac{M}{2m+M}\right)}= \\ \dfrac{dX}{X\left[\dfrac{mX}{2(X^2-1)^{1/2}}+2M+h\zeta X\right](1-X^2+x_1x_2+y_1y_2)} \end{cases}$$

au voisinage d'un système de valeurs

$$\zeta - \zeta_0 = 0, \quad x_1 - x_1^0 = \xi_1 = 0, \quad y_1 - y_1^0 = \eta_1 = 0$$

$$x_2 - x_2^0 = \xi_2 = 0, \quad y_2 - y_2^0 = \eta_2 = 0, \; X = 0.$$

L'expression $(X^2 - 1)^{1/2}$ admet deux développements. Le système qu'on obtient après la division de tous les dénominateurs par $2m\,M/(2m + M)$ est

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\zeta}{\frac{2m+M}{m}\zeta_0 X^2 + S_3} = \frac{d\xi_1}{\frac{2m+M}{m}(x_2^0 - x_1^0) X^2 + S_3} = \frac{d\eta_1}{\frac{2m+M}{m}(y_2^0 - y_1^0) X^2 + S_3} = \\ &\frac{d\xi_2}{\xi_2 - \frac{M}{2m+M}\xi_1 + \frac{(2m+M)^2}{mM} x_2^0 \xi_2^2 - \frac{2m+M}{m} x_2^0 \xi_1 \xi_2 - \frac{2m+M}{m} y_2^0 \xi_1 \eta_2 + \frac{(2m+M)^2}{mM} y_2^0 \xi_2 \eta_2 + S_3} = \\ &\frac{d\eta_2}{\eta_2 - \frac{M}{2m+M}\eta_1 + \frac{(2m+M)^2}{mM} y_2^0 \eta_2^2 - \frac{2m+M}{m} x_2^0 \eta_1 \xi_2 + \frac{(2m+M)^2}{mM} x_2^0 \eta_2 \xi_2 - \frac{2m+M}{m} y_2^0 \eta_1 \eta_2 + S_3} = \\ &\frac{dX}{2X + \frac{2m+M}{m} X \left(x_2^0 \xi_1 + x_1^0 \xi_2 + y_2^0 \eta_1 + y_1^0 \eta_2 \right) + \frac{1}{M} \left(h\zeta_0 + \frac{m}{2} A_0 \right) X^2 + S_3} \end{aligned} \right.$$

où $A_0^2 = -1$. L'équation caractéristique du système (62) admet zéro comme racine triple, la racine double $+1$, et $+2$ comme racine simple.

Les solutions du système (62) engendrent en chaque point de la multiplicité singulière (60) deux autres multiplicités. L'une d'elles s'obtient en exprimant les inconnues du système différentiel (62) par des séries entières, des variables correspondant aux racines négatives de l'équation caractéristique, s'annulant avec ces variables. Les racines négatives n'existent pas, il s'ensuit que ζ, ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, X sont indentiquement nulles et il ne correspond aucun mouvement, par rapport à cette multiplicité.

L'autre multiplicité s'obtient en exprimant les variables ζ, ξ_1, η_1, qui correspondent à des racines nulles de l'équation caractéristique par des séries entières des variables ξ_2, η_2, X et qui sont

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= S_2(\xi_2, \eta_2, X; \zeta_0, \theta_0) \\ \eta_1 &= S_2(\xi_2, \eta_2, X; \zeta_0, \theta_0) \\ \zeta - \zeta_0 &= S_2(\xi_2, \eta_2, X; \zeta_0, \theta_0). \end{aligned} \right.$$

Pour la détermination des coefficients nous partons de l'équation aux dérivées partielles

$$(64)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{2m+M}{m}\zeta_0 X^2 + S_3\right)\frac{\partial f}{\partial \zeta} + \left[\frac{2m+M}{m}(x_2^0 - x_1^0)X^2 + S_3\right]\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \\ &\left[\frac{2m+M}{m}(y_2^0 - y_1^0)X^2 + S_3\right]\frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \left(\xi_2 - \frac{M}{2m+M}\xi_1 + S_2\right)\frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \\ &\left(\eta_2 - \frac{M}{2m+M}\eta_1 + S_2\right)\frac{\partial f}{\partial \eta_2} + (2X + S_2)\frac{\partial f}{\partial X} = 0 . \end{aligned}$$

Nous mettons dans cette équation, à la place de ξ_1, η_1, $\zeta - \zeta_0$, leurs expressions (63) à coefficients indéterminés, et nous remplaçons f successivement par

$$\begin{aligned} -\xi_1 + S_2(\xi_2, \eta_2, X; \zeta_0, \theta_0) \\ -\eta_1 + S_2(\xi_2, \eta_2, X; \zeta_0, \theta_0) \\ -\zeta + \zeta_0 + S_2(\xi_2, \eta_2, X; \zeta_0, \theta_0). \end{aligned}$$

Nous arrivons aux expressions de ξ_1, η_1, ζ :

$$(65)\quad \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2m+M}{4m}(x_2^0 - x_1^0)X^2 + S_3(\xi_2, \eta_2, X; \zeta_0, \theta_0) \\ \eta_1 &= \frac{2m+M}{4m}(y_2^0 - x_1^0)X^2 + S_3(\xi_2, \eta_2, X; \xi_0, \theta_0) \\ \zeta - \zeta_0 &= \frac{2m+M}{4m}\zeta_0 \quad X^2 \qquad + S_3(\xi_2, \eta_2, X; \zeta_0, \theta_0) \end{aligned} \right.$$

14 Nous avons déterminé les multiplicités engendrées par les solutions du système (62). Pour mettre en évidence ces solutions mêmes, il nous reste à considérer le système

$$(66)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\xi_2}{\xi_2 + \frac{(2m+M)^2}{mM}x_2^0\xi_2^2 - \frac{M}{4m}(x_2^0 - x_1^0)X^2 + \frac{(2m+M)^2}{mM}y_2^0\xi_2\eta_2 + S_3} = \\ &\frac{d\eta_2}{\eta_2 + \frac{(2m+M)^2}{mM}y_2^0\eta_2^2 - \frac{M}{4m}(y_2^0 - y_1^0)X^2 + \frac{(2m+M)^2}{mM}x_2^0\xi_2\eta_2 + S_3} = \\ &\frac{dX}{2X + \frac{1}{M}\left(h\zeta_0 + \frac{m}{2}A_0\right)X^2 + \frac{2m+M}{m}(x_1^0\xi_2 + y_1^0\eta_2)X + S_3} \end{aligned} \right.$$

dont l'équation caractéristique admet les racines $+1, +1, +2$. ξ_2 et η_2 s'expriment par des séries entières en $\sqrt{X}$, ξ_2 commence par le terme $C_1 \sqrt{X}$, η_2 par $C_2 \sqrt{X}$, C_1 et C_2 étant des constantes,

$$(67) \qquad \begin{cases} \xi_2 = \sqrt{X}\, S(\sqrt{X}) \quad ; \quad x_2 = x_2^0 + \sqrt{X}\, S(\sqrt{X}) \\ \eta_2 = \sqrt{X}\, S(\sqrt{X}) \quad ; \quad y_2 = y_2^0 + \sqrt{X}\, S(\sqrt{X}), \end{cases}$$

et de même

$$(68) \qquad \begin{cases} \xi_1 = X^2\, S(\sqrt{X}) \quad ; \quad x_1 = x_1^0 + X^2\, S(\sqrt{X}) \\ \eta_1 = X^2\, S(\sqrt{X}) \quad ; \quad y_1 = y_1^0 + X^2\, S(\sqrt{X}) \\ \zeta - \zeta_0 = X^2\, S(\sqrt{X}) \end{cases}$$

15. En revenant à l'intégrale première nous avons

$$(69) \qquad \left(\frac{d\,t}{d\,\zeta}\right)^2 = X\, S(\sqrt{X})$$

et par les mêmes calculs que dans le cas précédent nous obtenons

$$(70) \qquad \sqrt{X} = (t - t_0)^{1/5}\, S\,[(t - t_0)^{1/5}],$$

par conséquent,

$$(71) \qquad (1 + x_1^2 + y_1^2)^{1/2} = X = (t - t_0)^{2/5}\, S\,[(t - t_0)^{1/5}]\,.$$

Ensuite il résulte

$$(72) \qquad \boxed{\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 + (t - t_0)^{4/5}\, S\,[(t - t_0)^{1/5}] \\ x = \zeta\, x_1 &= \zeta_0\, x_1^0 + (t - t_0)^{4/5}\, S\,[(t - t_0)^{1/5}] \\ y = \zeta\, y_1 &= \zeta_0\, y_1^0 + (t - t_0)^{4/5}\, S\,[(t - t_0)^{1/5}] \end{aligned}}$$

$$R^2 = \zeta^2 (1 + x_1^2 + y_1^2) = (t - t_0)^{4/5}\, S\,[(t - t_0)^{1/5}]$$

$$(73) \qquad \boxed{R = (t - t_0)^{2/5}\, S\,[(t - t_0)^{1/5}]}\,.$$

Les mêmes conclusions subsistent donc relativement aux chocs binaires doubles du problème isocèle dans l'espace avec axe de symétrie, que dans le problème isocèle avec plan de symétrie

Chocs triples imaginaires dans le problème isocèle plan avec axe de symétrie

16. Les chocs binaires réels, entre les deux masses égales, ont été étudiés par M. Caratzénis, dans sa thèse „Sur le problème plan et symétrique des trois corps".

Nous constatons qu'à part ces chocs, entre les masses égales, ce problème n'en admet pas d'autres: il n'existe pas entre les deux masses m, des chocs binaires imaginaires, que nous appelons chocs de M. Chazy.

Considérons le point singulier du système (4) défini par

$$X=Y=i\sqrt{\frac{2m+M}{M}},\ z=0, \tag{74}$$

pour lequel on a un choc triple imaginaire. et développons les trois dénominateurs au voisinage de ce point. Faisons la notation

$$X-i\sqrt{\frac{2m+M}{M}}=x\ ,\ Y-i\sqrt{\frac{2m+M}{M}}=y,$$

ce qui revient à développer les dénominateurs au voisinage de

$$x=y=z=0.$$

Nous obtenons le système

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{dx}{\lambda x-\lambda y+\alpha^1_{200}x^2+\alpha^1_{110}xy+\alpha^1_{101}xz+\alpha^1_{011}yz+S_3}=\\&\frac{dy}{\lambda y+\alpha^2_{110}xy+\alpha^2_{020}y^2+S_3}=\frac{dz}{-\lambda z+\alpha^3_{101}xz+\alpha^3_{002}z^2+S_3}\end{aligned}\right. \tag{75}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda=4m+\frac{m^2}{M}A_0,\ A_0^2=-2\frac{m}{M},\\&\alpha^1_{200}=ik\frac{3m^2-4M^2A_0}{MA_0},\ \alpha^1_{110}=-\alpha^1_{200},\ k=\sqrt{\frac{2m+M}{M}},\\&\alpha^1_{101}=2\frac{m}{M}hA_0,\ \alpha^1_{011}=-\alpha^1_{101},\ i^2=-1\\&\alpha^2_{110}=3\frac{m^2ik}{MA_0},\quad \alpha^2_{020}=\frac{i}{2}\frac{4M^2-4mM-3m^2A_0}{kM}\\&\alpha^3_{101}=-\alpha^1_{200},\quad \alpha^3_{002}=-\alpha^1_{101}.\end{aligned}\right. \tag{76}$$

En divisant les dénominateurs du système (75) par λ nous obtenons le système

$$(77) \qquad \frac{dx}{x - y + S_2(x, y, z)} = \frac{dy}{y + S_2(x, y, z)} = \frac{dz}{-z + S_2(x, y, z)}$$

dont l'équation caractéristique admet la racine double $+1$, et la racine -1. Si l'on cherche à déterminer une multiplicité

$$(78) \qquad z = S_2(x, y)$$

engendrée par les solutions de (77), nous arrivons à cette constatation, que tous les coefficients sont nuls dans le développement de z. Il n'existe donc pas de multiplicité analytique (78), sur laquelle soient situées les solutions du système (77). Nous nous proposons de revenir sur cette question, en cherchant par exemple si (77) admet des solutions asymptotiques à la solution $x = y = z = 0$, ainsi que de les représenter.

Vu et approuvé :
Paris, le 23 Janvier 1940
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
CH. MAURAIN

Vu et permis d'imprimer :
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS
G. ROUSSY