ANDRÉ LICHNEROWICZ

Sur certains problèmes globaux relatifs au système des équations d'Einstein

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1939

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1939__226__1_0>

Série A, n° 1901
N° d'ordre : 2768

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR LE

GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

André LICHNEROWICZ

1re THÈSE. — SUR CERTAINS PROBLÈMES GLOBAUX RELATIFS AU SYSTÈME DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le , devant la Commission d'Examen.

MM. E. CARTAN ..... *Président*
G. DARMOIS..... } *Examinateurs*
A. DENJOY ..... }

PARIS
HERMANN et Cie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne 6

1939

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire .... M. MOLLIARD.

Doyen .... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires...

H. LEBESGUE.	DANGEARD.	H. ABRAHAM.
Émile PICARD.	LESPIEAU.	Charles FABRY.
Léon BRILLOUIN.	MARCHIS.	Léon BERTRAND.
GUILLET.	VESSIOT.	P. WINTREBERT.
PÉCHARD.	PORTIER.	O. DUBOSCQ.
FREUNDLER.	MOLLIARD.	BOHN.
AUGER.	LAPICQUE.	E. RABAUD.
G. BERTRAND.		

PROFESSEURS

M. CAULLERY	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Émile BOREL	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN	T	Chimie physique.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON	T	Recherches physiques.
J. DRACH	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles PÉREZ	T	Zoologie.
M. GUICHARD	T	Analyses et mesures chimiques.
Paul MONTEL	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
L. BLARINGHEM	T	Botanique.
G. JULIA	T	Mécanique analytique et mécan. céleste.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY	T	Pétrographie.
N	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH	T	Physique
G. BRUHAT	T	Physique théorique et physique céleste.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE	T	Physique générale et radioactivité.
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	T	Botanique.
M. JAVILLIER	T	Chimie biologique.
ROBERT-LÉVY	T	Physiologie comparée.
F. PICARD		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
E. ESCLANGON	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE		Physique du Globe.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Mathématiques génér.
PÉRÈS		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronaut.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures
CHAZY	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches physiques
DUPONT	T	Théories chimiques.
LANQUINE	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON		Mathématiques génér.
BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON		Chimie organique.
G. DARMOIS		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
CHATTON	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
Jacques BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
Mme JOLIOT-CURIE		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL		Biologie végétale (P. C. B.).
CABANNES		Enseignement de Physique.
GRASSÉ		Biologie animale (P. C. B.).
PRÉVOST		Chimie (P. C. B.).
BOULIGAND		Mathématiques.
CHAUDRON		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire .... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire .... D. TOMBECK.

A MES PARENTS

INTRODUCTION

La théorie relativiste de la gravitation repose essentiellement d'une part sur les équations d'Einstein qui limitent par des conditions purement locales, la généralité des potentiels de gravitation, d'autre part sur les conditions relatives à la compatibilité dans un même champ de solutions extérieures et intérieures de ces équations. C'est au moyen de ces dernières conditions que l'on a pu définir dans quel cas un champ extérieur peut être considéré comme effectivement produit par un ensemble de masses matérielles. Cette définition présente malheureusement de très sérieuses difficultés et introduit des problèmes de nature essentiellement globale. Aussi curieux que cela puisse paraître, cette question, sans doute de beaucoup la plus importante pour la théorie, a été jusqu'ici relativement négligée.

Dès la découverte de la première solution connue des équations d'Einstein, celle de Schwarzschild, est apparue la nécessité d'établir une liaison étroite entre les singularités du champ extérieur et l'introduction de masses matérielles dans ce champ. Tout d'abord toute singularité du champ, pour conduire à un modèle d'univers effectif, doit pouvoir être meublée par une distribution matérielle produisant un champ intérieur régulier, l'ensemble des divers champs intérieurs ainsi construits et du champ extérieur devant être régulier partout. C'est lorsque ces conditions seront remplies que l'on pourra considérer le champ de gravitation extérieur comme effectivement produit par l'ensemble des distributions matérielles considérées. Dans le modèle d'univers ainsi réalisé il doit être impossible d'introduire de nouvelles masses, sinon la définition précédente perdrait toute espèce de sens. Il semble donc qu'inversement on doive se limiter à la considération de champs extérieurs tels que, dans tout domaine où une distribution matérielle peut être introduite, le champ extérieur présente certaines singularités (proposition A). Il est clair que tous les champs extérieurs satisfaisant aux équations d'Einstein ne satisfont pas à cette proposition, mais que tout champ correspondant effectivement à une réalité physique doit y satisfaire. Nous avons été ainsi conduits à rechercher par quelles conditions on peut compléter l'axiomatique de la théorie pour que la proposition A soit satisfaite.

Cette proposition étant admise, un champ extérieur régulier partout ne peut contenir aucune masse matérielle. Si l'on veut pouvoir assigner comme cause unique aux effets de gravitation l'existence de masses matérielles, un tel champ doit être un champ sans gravitation, c'est-à-dire doit se réduire nécessairement à un champ euclidien (proposition B). Cette proposition présente une grande analogie avec un fait fondamental de la théorie des potentiels newtoniens : on sait en effet que, si l'on astreint un potentiel newtonien à la condition d'être constant à l'infini, il ne peut être régulier partout sans se réduire à une constante. Il faudra donc, là encore, rechercher à quelles conditions cette proposition est satisfaite et rapprocher les conditions obtenues de celles relatives à la proposition A.

Jusqu'ici l'étude de la proposition A n'a pas été abordée systématiquement et celle relative à la proposition B n'a été entreprise que par M. Charles Racine dans sa thèse. Ce travail contient en particulier de très beaux résultats sur les champs statiques orthogonaux ; mais l'auteur, ayant surtout en vue des applications relatives à des ds^2 approchés, a été amené ensuite à raisonner sur des familles d'espaces-temps dépendant de paramètres représentant des masses et par conséquent à signification physique peu claire dans un tel problème. De plus, sauf dans un travail récent relatif aux approximations dans le cas statique général, il s'est toujours borné à l'étude d'espaces-temps orthogonaux. Nous nous sommes donc efforcés de traiter ce problème d'un point de vue plus général, en évitant en particulier tout recours à des approximations qui sont toujours difficiles à justifier.

Pour la commodité du lecteur, nous avons cherché, au cours de ce travail, à rester assez élémentaires. Nous ne présupposons connues que les notions géométriques indispensables relatives à la théorie des espaces de Riemann.

Des trois chapitres de ce travail, le premier est consacré à un exposé d'ensemble, au point de vue qui nous intéresse, des faits fondamentaux de la théorie. La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des univers sans gravitation et à l'identité de ces univers avec les univers euclidiens, la seconde à une mise au point aussi précise que possible, de l'axiomatique de la théorie de la relativité générale. Nous commençons par analyser les conditions générales d'existence des solutions, en tenant compte, pour le cas non analytique, des travaux récents de M. STELLMACHER. Nous sommes ainsi amenés à effectuer une étude directe des variétés caractéristiques et bicaractéristiques des équations d'Einstein ; nous cherchons en particulier à déterminer une équation unique admettant les mêmes variétés caractéristiques que le système des équations d'Einstein. L'introduction des variétés isothermes se fait ainsi de la manière la plus naturelle et le mode d'exposition adopté fait clairement comprendre l'importance du rôle joué par ces variétés dans la théorie. Nous sommes alors en mesure de définir ce que l'on peut entendre, en relativité générale, par espace et temps et cette définition donne lieu à des relations mathématiques très précises, fort importantes pour la suite de ce travail. Ce chapitre se termine par une étude complète du champ intérieur, des conditions de raccordement de Schwarzschild et des problèmes correspondants de prolongement, étude qui met en évidence le rôle fondamental joué par les propositions A et B. Dans tout ce chapitre l'emploi de coordonnées de Gauss, souvent si commodes à cause de leur caractère intrinsèque, a été le plus possible évité, puisque les problèmes que nous nous posons ne sont pas des problèmes locaux.

Le chapitre II est consacré à l'étude des espaces-temps extérieurs réguliers partout ; après certains préliminaires relatifs aux conditions de fermeture des espaces-temps envisagés, nous énonçons des théorèmes sur l'impossibilité de certains extrema pour une fonction soumise à une opération elliptique généralisée, théorèmes qui servent de fondements à la théorie, et nous introduisons les tenseurs d'espace Ω_{ij} et P_{ij} qui permettent de simplifier certaines des équations d'Einstein. Nous sommes alors en mesure de démontrer la proposition B d'abord pour les espaces-temps statiques orthogonaux (théorème I), puis pour les espaces-temps statiques du type le plus général (théorème II). Nous procédons ensuite à l'étude des espaces-temps extérieurs conformes à un espace-temps statique, orthogonal ou non (théorèmes III et IV). Il est remarquable que la classe de ces espaces-temps qui sont « à expansion convexe dans le temps », jouissent, au point de vue de la proposition B, de propriétés tout à fait analogues à celles des espaces-temps statiques. Etendant alors les considérations précédentes à des espaces-temps extérieurs quelconques réguliers partout, nous étudions ce que l'on peut entendre dans ce cas par expansion convexe dans le temps et nous démontrons la proposition B pour de tels espaces-temps (théorèmes V, VI, VII). Ce chapitre se termine par la construction d'un espace-temps extérieur régulier partout et non partout euclidien ; cet exemple montre clairement que pour que la proposition B soit vérifiée, il faut effectivement adjoindre aux conditions de fermeture des conditions du genre de celles que nous avons introduites, limitant la propagation dans le temps des potentiels.

Au chapitre III, nous recherchons des théorèmes d'existence relatifs à des singularités du champ extérieur. Utilisant une extension faite par nous du théorème de Gauss, nous démontrons d'abord la proposition A dans le cas statique le plus général, puis nous étudions l'existence de singularités hors des masses pour des champs statiques orthogonaux. Enfin, abordant le cas des espaces-temps non statiques, nous démontrons un théorème très général relatif à des champs extérieurs analogues à ceux du chapitre II et à des champs intérieurs correspondant à des distributions matérielles en régime permanent ou en régime voisin d'un régime permanent.

Qu'il me soit maintenant permis d'exprimer ma respectueuse reconnaissance à M. Elie Cartan pour ses conseils éclairés, pour l'intérêt très bienveillant qu'il a pris à ce travail et pour les grandes facilités qu'il a bien voulu apporter à son impression. Je tiens à adresser mes sincères remerciements à M. Denjoy pour la sympathie qu'il m'a témoignée, à M. Chazy dont le très précieux ouvrage sur la théorie de la relativité et la mécanique céleste (1) m'a été d'un grand secours pour la première partie de ce travail, enfin à M. Racine qui a ouvert la voie dans laquelle je me suis engagé.

Ce travail n'aurait, sans doute, jamais vu le jour sans M. Georges Darmois qui me l'a suggéré et qui n'a cessé de me prodiguer ses conseils, ses encouragements et ses critiques. Son ouvrage sur les

---

(1) Jean Chazy. — *La théorie de la relativité et la mécanique céleste.* Gauthier-Villars, 1930.

équations de la gravitation einsteinienne [1] a été pour moi le plus sûr des guides. Je suis heureux d'exprimer ici ma respectueuse admiration et ma très profonde gratitude à celui dont je suis fier d'être l'élève.

---

[1] Georges Darmois. — *Mémorial des Sciences Mathématiques*, fasc. XXV, 1927.

CHAPITRE I

AXIOMATIQUE DE LA THÉORIE DE LA GRAVITATION

I. — FONDEMENTS DE LA THÉORIE

1. — On peut dire d'une manière générale qu'une représentation de l'univers est cohérente ou intrinsèque, lorsque tout ce qui constitue, dans cet univers, un être (géométrique, mécanique, physique) est défini à un même changement du système de référence près, les changements du système de référence permis différant selon la représentation de l'univers considérée. Le but de la théorie de la gravitation relativiste est de donner du « fait expérimental de l'interdépendance des mouvements des masses matérielles » (1) une explication présentant le caractère intrinsèque, c'est-à-dire covariante par rapport aux changements de système de référence permis.

L'explication donnée par Newton, au moyen de forces attractives, ne satisfait pas à cette exigence. Si nous représentons les phénomènes de la mécanique sur une variété numérique à quatre dimensions espace-temps, chaque point de la variété doit être considéré comme la superposition d'un point d'espace et d'un instant ; l'instant et le temps présentant un caractère absolu, les changements de coordonnées permis sont :

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x'(x, y, z, t) \\ y' &= y'(x, y, z, t) \\ z' &= z'(x, y, z, t) \\ t' &= t \end{aligned}\right.$$

Mais la théorie ne peut alors se développer qu'en faisant jouer un rôle privilégié à certains systèmes de référence : les systèmes d'axes de Galilée.

La théorie de la relativité se propose d'écarter ces difficultés,

(1) G. Darmois. — *Op. cit.*, p. 1.

en considérant le point de la variété ou événement comme présentant seul un caractère absolu, l'instant et le point d'espace étant tous deux considérés comme relatifs au système de référence. Les changements de système de référence permis sont alors tous les changements de coordonnées imaginables :

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x'(x, y, z, t) \\ y' &= y'(x, y, z, t) \\ z' &= z'(x, y, z, t) \\ t' &= t'(x, y, z, t) \end{aligned}\right.$$

satisfaisant seulement à des conditions de continuité et de biunivocité. La variété cesse d'être simplement numérique ; bien qu'encore amorphe elle devient géométrisable. Une fois douée d'une structure la variété constituera un *univers*.

2. Le postulat de la réciprocité et l'invariance du ds^2. — Il serait fastidieux et inutile de retracer, une fois encore, la genèse de la théorie de la relativité ; nous nous proposons seulement d'attirer l'attention sur les points qui nous semblent essentiels pour le présent travail (1).

La théorie relativiste de la gravitation est née de la théorie de la relativité restreinte, c'est-à-dire, comme nous allons le voir de la théorie d'un univers vide de matière, sans gravitation. L'organisation de la variété correspondant à un tel univers est basée sur le principe de la constance de la vitesse de la lumière dans le vide par rapport à tous les systèmes d'axes de Galilée. Du point de vue axiomatique ce principe nous fournit une définition du temps associé à un système d'axes de Galilée, l'ensemble formant un système galiléen de référence. L'espace, rapporté à un système d'axes de Galilée rectangulaires, admettant l'intervalle élémentaire

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

et t désignant le temps correspondant, le carré de la vitesse de la lumière par rapport à ce système d'axes est :

$$\frac{d\sigma^2}{dt^2} = C^2$$

(1) Pour plus de détails cf. l'excellent exposé de M. Jean Chazy dont nous nous sommes inspirés. — Jean Chazy, *op. cit.* Tome II, p. 3-29.

Pour tout déplacement élémentaire d'une onde lumineuse, l'expression :

$$ds^2 = C^2dt^2 - d\sigma^2$$

est nulle. D'après le principe de constance de la vitesse de la lumière, l'expression :

$$ds'^2 = C^2dt'^2 - d\sigma'^2$$

calculée dans un second système d'axes de Galilée, le temps t' étant le temps associé, est également nulle. Notre définition relative de t et t' est donc telle que ds^2 et ds'^2 s'annulent simultanément ; autrement dit il y a proportionnalité entre les deux formes quadratiques de différentielles considérées ; si M désigne le point de la variété à partir duquel a lieu le déplacement élémentaire, on a :

$$ds'^2 = f(M)ds^2$$

L'identification montre que $f(M)$ se réduit nécessairement à une constante, qui dépend de la vitesse relative des deux systèmes. Si l'on admet en outre *qu'il y a réciprocité entre les deux observateurs attachés aux deux systèmes de référence*, $f(M)$ se réduit identiquement à 1 et

$$ds'^2 = ds^2$$

Nous sommes donc conduits à l'invariance du ds^2 par l'hypothèse de réciprocité entre les deux observateurs ; en fait cette hypothèse n'est peut-être pas nécessaire : on a pu concevoir par exemple que seul l'un des observateurs est réel et que l'autre est purement fictif ; c'est l'observateur réel qui se projette par la pensée dans le second système. On est alors conduit à admettre que c'est seulement l'équation :

$$ds^2 = 0$$

qui reste invariante par changement de coordonnées, ds^2 restant seulement conforme à lui-même. C'est là une conception distincte de celle d'Einstein et qui pourrait être approfondie à la lumière de certains travaux d'E. Cartan (1). Tout en restant fidèle, dans ce travail à l'hypothèse habituelle, nous nous efforcerons de distinguer nettement les éléments géométriques covariants à l'équation $ds^2 = 0$, des éléments covariants au ds^2 ; il nous semble que les premiers ont un sens physique plus immédiat que les seconds.

---

(1) E. Cartan. — *Proc. Int. Math.* Congress Toronto 1924 ; t. 1 ; p. 92-93.

En particulier il apparaîtra au chapitre II qu'au point de vue des problèmes qui font l'objet du présent travail, les ds^2 conformes aux ds^2 statiques jouissent de propriétés analogues à celles des ds^2 statiques.

3. Phénomène élémentaire et univers sans gravitation. — Effectuons maintenant l'un quelconque des changements de coordonnées permis ; il nous fait passer du système galiléen de référence x, y, z, t à un système de coordonnées arbitraires x^1, x^2, x^3, x^4 ; le ds^2 galiléen

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

est transformé en le ds^2 euclidien le plus général, à un carré positif et trois carrés négatifs :

$$ds^2 = g_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4)$$

La loi de propagation de la lumière qui est donnée pour un système galiléen de référence par l'équation $ds^2 = 0$ s'exprime de la même manière relativement aux coordonnées x^λ, l'énoncé ainsi obtenu étant invariant.

4. — Nous appellerons phénomène élémentaire la loi de mouvement d'une masse infiniment petite placée dans l'univers et soustraite à toute action électrique ou de contact. Si nous concevons *le phénomène élémentaire comme étant en liaison invariante avec le ds^2 et strictement déterminé par lui*, comme le ds^2 galiléen est à coefficients constants, le phénomène élémentaire doit être, relativement à un système galiléen, partout identique à lui-même. Lorsque la masse d'épreuve est éloignée de tout autre masse, elle constitue un point matériel isolé et admet, relativement à un système galiléen de référence, un mouvement rectiligne uniforme ; il doit donc en être de même partout : la masse d'épreuve doit pouvoir être considérée partout comme isolée. Par suite dans l'hypothèse énoncée, un ds^2 euclidien n'est susceptible de représenter qu'un univers vide de matière, sans gravitation. Dans ces conditions, nous nous adresserons, pour représenter des univers non vides à des ds^2 plus généraux que le ds^2 euclidien et nous considérerons la variété espace-temps correspondante comme un espace de Riemann défini par ce ds^2 et qui détermine complètement le phénomène élémentaire.

Comment s'effectue cette détermination ? Les mouvements rectilignes et uniformes relatifs à un système galiléen, correspondent à des géodésiques du ds^2 galiléen. Par suite c'est de cette manière que nous pouvons concevoir la liaison entre le phénomène élémentaire et le ds^2 euclidien (mouvements d'inertie dans un univers vide) ou le ds^2 plus général introduit (1).

Il est alors clair qu'un ds^2 qui n'est pas euclidien correspond nécessairement à un univers gravitationnel, c'est-à-dire non vide. En effet une masse d'épreuve introduite dans un univers vide de matière constitue un point matériel isolé ; il doit donc exister un système de coordonnées interprétables en termes d'espace et de temps, par rapport auquel le mouvement de la masse d'épreuve est un mouvement rectiligne uniforme :

$$x^1 = a^1x^4 + b^1 ; \qquad x^2 = a^2x^4 + b^2 ; \qquad x^3 = a^3x^4 + b^3$$

les a et les b étant des constantes. Or on démontre aisément que tout espace de Riemann dont les géodésiques peuvent être représentées par de telles équations est nécessairement euclidien. Ainsi *les univers vides de matière doivent coïncider avec les univers euclidiens.*

II. — AXIOMATIQUE

Dans la suite de ce chapitre nous nous efforcerons de donner les conditions mathématiques strictement essentielles au développement de la théorie, n'indiquant les interprétations physiques correspondantes que lorsqu'elles ont pour l'objet de ce travail une importance particulière.

1. — Un univers est représenté par un espace de Riemann à 4 dimensions défini par la donnée d'une métrique :

$$ds^2 = g_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4)$$

forme quadratique invariante de différentielles qui détermine l'intervalle élémentaire, c'est-à-dire le carré de la distance de deux points infiniment voisins dans la variété espace-temps.

(1) Dans l'exposé axiomatique il est préférable de n'expliciter que plus tard cette liaison : nous montrerons qu'on peut déduire sa forme des conditions de raccordement posées par Schwarzschild et du caractère conservatif de certains tenseurs.

Les $g_{\lambda\mu}$ correspondant à un système de coordonnées déterminé, sont des fonctions des coordonnées x^λ et définissent complètement, par rapport à ce système, le phénomène élémentaire de gravitation ; ce sont les dix potentiels de gravitation relatifs à ce système.

Nous supposerons essentiellement que dans ce système de coordonnées, les $g_{\lambda\mu}$ sont des fonctions de x^λ, admettant des dérivées partielles des trois premiers ordres ; dans les domaines considérés les $g_{\lambda\mu}$ sont supposés continus ainsi que leurs dérivées premières, *les dérivées secondes peuvent être discontinues.* Ces conditions sont invariantes pourvu que l'on n'admette que des changements de coordonnées dérivables jusqu'au quatrième ordre, les dérivées premières et secondes correspondantes étant continues.

Nous supposerons aussi qu'il existe dans les domaines considérés un point où la forme quadratique qui définit le ds^2 est du type hyperbolique normal à un carré positif et trois carrés négatifs :

$$ds^2 = P^2 - Q^2 - R^2 - S^2$$

Le discriminant g de la forme quadratique étant une fonction constinue des x^λ, celle-ci sera du même type tant que g ne s'annulera pas ; cette condition est conservée par des changements de coordonnées à déterminant fonctionnel non nul. Les points où le ds^2 n'est pas du type hyperbolique normal et en particulier les points où g s'annule doivent être considérés comme singuliers pour l'univers. L'équation $ds^2 = 0$ définit dans ces conditions, en chaque point régulier de la variété un *hypercône élémentaire* réel C, lieu des directions spatio-temporelles dans lesquelles se propage la lumière à partir de ce point.

2. Notations. — Pour expliciter le caractère hyperbolique normal du ds^2 ou parfois pour faire jouer à certaines hypersurfaces un rôle particulier, nous serons amenés à introduire des indices ne pouvant prendre que les trois valeurs 1, 2, 3 ; les indices latins seront réservés à ce cas, les indices grecs pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4. Sauf indication contraire l'indice 4 correspondra à la variable présentant le caractère temporel étudié plus loin

$$f(x^1 x^2, x^3, x^4)$$

étant une fonction quelconque dérivable des x^λ, nous poserons :

$$\frac{\partial f}{\lambda x \partial} = \partial_\lambda f$$

En particulier si $x^{\lambda'} = f^{\lambda'}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ définit un changement de coordonnées nous poserons :

$$\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} = \partial_{\lambda} x^{\lambda'} = A_{\lambda}^{\lambda'}$$

Inversement :

$$\partial_{\lambda'} x^{\lambda} = A_{\lambda'}^{\lambda}$$

Ainsi le changement de coordonnées se traduira pour le tenseur fondamental par la formule :

$$g_{\lambda'\mu'} = A_{\lambda'}^{\lambda} A_{\mu'}^{\mu} g_{\lambda\mu}$$

Nous désignerons par ∇_λ l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ attachée à l'espace de Riemann ; pour un vecteur v^μ on a par exemple :

$$\nabla_\lambda v^\mu = \partial_\lambda v^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} v^\nu$$

Nous désignerons enfin par $R_{\lambda\mu}$ les composantes du tenseur de Ricci relatif à l'espace :

$$R_{\lambda\mu} = \partial_\alpha \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} - \partial_\lambda \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} \Gamma_{\lambda\mu}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\beta} \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}$$

Pour tout vecteur v^μ on a l'identité :

(2-1) $$R_{\lambda\mu} v^\mu = \nabla_\mu(\nabla_\lambda v^\mu) - \nabla_\lambda(\nabla_\mu v^\mu)$$

3. Les équations indéfinies du champ. — EINSTEIN a été conduit aux équations aux dérivées partielles qui doivent limiter la généralité des potentiels du champ par deux conditions essentielles : d'une part ces équations doivent généraliser les équations de LAPLACE et POISSON qui déterminent localement le potentiel newtonien, d'autre part elles doivent former un ensemble invariant par tout changement de coordonnées permis. Nous écrirons ces équations sous la forme :

(3-1) $$S_{\lambda\mu} = \chi T_{\lambda\mu}$$

symétrique par rapport aux indices λ et μ et où χ désigne un facteur constant. Les quantités $T_{\lambda\mu}$ sont de signification purement mécanique et décrivent au point considéré l'état de la matière en mouvement (cas intérieur), ou bien, dans les régions non balayées par la matière, sont identiquement nulles (cas extérieur). Ces quantités généralisent ainsi le second membre de l'équation de POISSON, nous reviendrons sur leur choix ultérieurement.

Les $S_{\lambda\mu}$ de signification purement géométrique sont astreintes aux deux conditions suivantes :

1° *Elles ne dépendent que des $g_{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres et sont linéaires par rapport aux dérivées du second ordre.*

2° *Elles sont les composantes d'un tenseur conservatif.*

$$g^{\lambda\mu}\nabla_{\lambda}S_{\mu\nu} = 0 \tag{3-2}$$

En effet par un choix convenable du système de coordonnées, on peut donner *a priori* à quatre potentiels des valeurs arbitraires, au moins dans une région de l'espace ; si les quantités $S_{\lambda\mu}$ étaient totalement indépendantes, les six potentiels restant devraient vérifier (par exemple dans le cas extérieur) dix conditions indépendantes. Nous imposerons donc au tenseur $S_{\lambda\mu}$ les quatre conditions (3-2).

La détermination des quantités $S_{\lambda\mu}$ trouvées intuitivement par EINSTEIN, a été effectuée au moyen d'une méthode régulière par ELIE CARTAN qui démontra (1) que les seuls tenseurs satisfaisant aux deux conditions précédentes sont les tenseurs :

$$S_{\lambda\mu} = h[R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(R + k)]$$

où h et k désignent deux constantes. Les équations aux dérivées partielles correspondantes s'écrivent :

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(R + k) = \chi T_{\lambda\mu}$$

en supprimant le facteur h surabondant. Nous ne considérerons dans la suite que les équations à constante k nulle, la théorie qui va suivre étant d'ailleurs immédiatement généralisable aux équations à constante k non nulle (2). Les équations indéfinies du champ sont donc, dans le cas intérieur :

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}R = \chi T_{\lambda\mu} \tag{3-3}$$

et dans le cas extérieur :

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}R = 0 \qquad \text{ou} \qquad R_{\lambda\mu} = 0 \tag{3-4}$$

(1) E. CARTAN. — Sur les équations de la gravitation d'Einstein (*Journal de Mathématique*, t. I, 1922, p. 141, 203).

(2) Les équations à constante k non nulle (mais très petite) ne sont utilisées que pour certaines études cosmologiques (univers d'Einstein, de de Sitter).

4. — Les équations générales du champ dans le cas extérieur peuvent s'écrire :

$$R_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(R + k)g_{\lambda\mu}$$

Sous cette forme leur signification géométrique est immédiate : l'espace-temps hors des masses ne doit, en chaque point, admettre aucune direction principale de Ricci privilégiée.

Le problème extérieur :

5. — Le problème essentiel de toute théorie de la gravitation est ce qu'on pourrait appeler le problème du déterminisme ; dans la théorie classique il s'énonçait ainsi : connaissant l'état d'un système de masses à un instant t_0 (conditions initiales), déterminer l'état de ce système à un instant t quelconque. Mais d'une part en relativité il n'est pas de variable temporelle privilégiée, d'autre part nous ne savons pas encore d'une manière précise ce que l'on doit entendre par caractère spatial ou temporel. Il en résulte que nous devons faire porter les « conditions initiales » par une hypersurface S *a priori* quelconque et que nous aboutissons, pour un espace-temps extérieur, à l'énoncé suivant :

Etant donné le champ de gravitation sur une hypersurface S au moyen des potentiels et de leurs dérivées premières, déterminer le champ de gravitation extérieur dans tout son domaine d'existence.

Comment le champ de gravitation se propage-t-il dans la variété à partir de l'hypersurface S ? On reconnaît là, posé dans toute sa généralité, le problème de Cauchy relatif au système d'équations aux dérivées partielles :

$$R_{\lambda\mu} = 0$$

et à des conditions aux limites données sur S.

6. — Nous pouvons toujours supposer que l'hypersurface S qui porte les « conditions initiales » est définie par l'équation :

$$x^4 = 0$$

La donnée sur S des potentiels $g_{\lambda\mu}$ détermine les dérivées premières $\partial_i g_{\lambda\mu}$ tangentes à S ; les conditions initiales comprendront, outre les valeurs des potentiels, les valeurs sur S des dérivées $\partial_4 g_{\lambda\mu}$ (dérivées d'indice 1 par rapport à S). Nous nous proposons de déterminer les valeurs sur S des dérivées partielles successives des potentiels ; cette recherche nous permettra de préciser dans quelles conditions peuvent se produire, à la traversée de S, des discontinuités des dérivées d'ordre supérieur au premier et (du moins dans le cas où les données sont analytiques) d'étudier l'existence et l'unicité des solutions.

Les seules dérivées secondes qui peuvent être discontinues à la traversée de S sont les dérivées $\partial_{44}\, g_{\lambda\mu}$ (dérivées d'indice 2) ; une simple dérivation sur S fournit les valeurs de toutes les autres dérivées secondes. Il nous faut donc mettre en évidence les dérivées d'indice 2 dans les équations :

$$(6\text{-}1)\quad R_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}[\partial_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} + \partial_{\beta\mu} g_{\alpha\lambda} - \partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}] + K_{\lambda\mu}(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) = 0$$

où les $K_{\lambda\mu}$ ne dépendent que des potentiels et de leurs dérivées premières. A ce point de vue, les équations se partagent en trois groupes :

$$(6\text{-}2)\qquad R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{44}\partial_{44} g_{ij} + F_{ij}(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, \partial_{\gamma k} g_{\alpha\beta}) = 0$$

$$(6\text{-}3)\qquad \left\{ \begin{aligned} R_{i4} &= +\frac{1}{2} g^{j4}\partial_{44} g_{ij} + \Phi_i(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, \partial_{\gamma k} g_{\alpha\beta}) = 0 \\ R_{44} &= -\frac{1}{2} g^{ij}\partial_{44} g_{ij} + \Psi(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, \partial_{\gamma k} g_{\alpha\beta}) = 0 \end{aligned} \right.$$

F_{ij}, Φ_i, Ψ n'étant fonctions que des potentiels et de leurs dérivées d'indice inférieur à 2, ont sur S des valeurs connues. On voit que *si g^{44} est différent de zéro*, le premier groupe d'équations fournit les valeurs sur S des six dérivées $\partial_{44}\, g_{ij}$. Il est à noter qu'aucun groupe d'équations ne contient les dérivées $\partial_{44} g_{\lambda 4}$. Cela ne doit pas nous surprendre : la donnée sur S des potentiels et de leurs dérivées premières laisse subsister la possibilité de changements de variables conservant S point par point et les valeurs sur S de $g_{\lambda\mu}$ et de $\partial_4\, g_{\lambda\mu}$; de tels changements de variables ne modifient pas les valeurs de $\partial_{44}\, g_{ij}$, mais permettent de donner à $\partial_{44}\, g_{\lambda_4}$ des valeurs arbitraires, en particulier permettent d'annuler éventuellement leurs discontinuités qui apparaissent alors comme des singularités artificielles. Nous pouvons toujours supposer que, pour un *même* système de coordonnées, les $\partial_{44}\, g_{\lambda 4}$ n'ont pas de discontinuités sur S ([1]).

([1]) Autrement dit deux systèmes de coordonnées, définis de part et d'autre de S et se raccordant le long de S, peuvent être considérés comme formant un

A cette réserve près, *les dérivées secondes des potentiels sont continues pour toute hypersurface pour laquelle g^{44} est différent de zéro.* Il est clair que cette conclusion s'étend aux dérivées successives des potentiels : il suffit, pour s'en rendre compte, de dériver les équations (6-2) par rapport à x^4. Au total cette étude ne fait intervenir que les équations (6-2) à l'exclusion des équations (6-3).

7. — Donnons-nous sur une hypersurface S des données de Cauchy telles que, sur S, g^{44} soit différent de zéro. Si ces données sont analytiques, nous sommes assurés qu'elles déterminent (au changement de variables près signalé ci-dessus) une solution unique des équations (6-2), solution dont nous connaissons le développement selon les puissances croissantes de x^4.

Il nous faut encore satisfaire aux équations (6-3). Les premiers membres $R_{\lambda 4}$ de ces équations sont liés aux R_{ij} par les quatre conditions de conservation du tenseur $S_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} R$. Ces conditions s'écrivent :

$$g^{\alpha\beta}[\partial_\alpha R_{\lambda\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} R_{\lambda\gamma} - \Gamma^\gamma_{\alpha\lambda} R_{\beta\gamma}] - \frac{1}{2}\partial_\lambda R = 0.$$

Elles peuvent, pour toute solution de (6-2), être mises sous la forme :

$$\lambda = i; \qquad g^{44}\partial_4 R_{i4} = - g^{h4}\partial_h R_{i4} + g^{\alpha\beta}\Gamma^4_{\alpha\beta} R_{i4} + g^{\alpha\beta}\Gamma^4_{\alpha i} R_{\beta 4} + g^{\alpha 4}\Gamma^h_{\alpha i} R_{h4} + \frac{1}{2}\partial_i R$$

$$\lambda = 4; \qquad \frac{1}{2} g^{44}\partial_4 R_{44} = - g^{h\alpha}\partial_h R_{\alpha 4} + g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} R_{\gamma 4} + 2g^{\alpha\beta}\Gamma^4_{\alpha 4} R_{\beta 4} + 2g^{\alpha 4}\Gamma^h_{\alpha 4} R_{h4}$$

où

$$R = 2g^{i4}R_{i4} + g^{44}R_{44}$$

Pour toute solution de (6-2) les $R_{\lambda 4}$ vérifient donc un système de quatre équations aux dérivées partielles, linéaires et homogènes ; ce système pouvant être résolu par rapport aux $\partial_4 R_{\lambda 4}$ (puisque g^{44} est différent de zéro au voisinage de S) n'admet pour des données sur S nulles, d'autre solution que la solution nulle. Par suite si une solution de (6-2) (analytique ou non) satisfait aux équations (6-3)

---

même système de coordonnées lorsqu'ils assurent la continuité à la traversée de S des quatre quantités considérées. Une circonstance analogue sera étudiée à propos des conditions de Schwarzschild.

sur l'hypersurface S, elle satisfait à ces équations dans tout le domaine d'espace-temps considéré [1]. Ainsi pour que les équations (6-3) soient vérifiées, il faut et il suffit que les données de CAUCHY, correspondant à la solution de (6-2) envisagée, satisfassent aux quatre conditions obtenues en reportant dans les équations (6-3) les valeurs des $\partial_{44}\, g_{ij}$ tirées de (6-2) soit :

$$g^{4j}R_{ij} + g^{44}R_{i4} = 0 \qquad g^{44}R_{44} - g^{ij}R_{ij} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\text{(7-1)} \qquad S_i^4 = R_i^4 = 0 \qquad S_4^4 = R_4^4 - \frac{1}{2}R = 0$$

Finalement, pourvu que les données de Cauchy satisfassent aux quatre conditions précédentes et soient telles que, sur S, g^{44} soit différent de zéro le système des équations d'Einstein admet, dans le cas analytique, une solution unique. En particulier, dans ce cas, si deux solutions des équations d'EINSTEIN admettent les mêmes données de CAUCHY sur une hypersurface S telle que g^{44} soit différent de zéro, elles coïncident à un changement de coordonnées près (théorème d'unicité). Ce dernier résultat a été tout récemment étendu par M. STELLMACHER [2] au cas où les données sur S ne sont pas supposées analytiques. Il serait extrêmement important de généraliser d'une manière analogue le théorème d'existence ; on peut espérer y parvenir en utilisant des méthodes d'approximations successives inspirées de celles de H. LEWY. Malheureusement elles se révèlent ici comme d'une application particulièrement délicate.

8. Les variétés caractéristiques. — Les conclusions générales sont différentes dans le cas où l'hypersurface S est telle que, le long de S, g^{44} est identiquement nul : il peut exister une infinité de solutions des équations (6-1) correspondant aux mêmes données de CAUCHY sur S [3] ; les dérivées secondes des potentiels peuvent être discontinues à la traversée de S. On reconnaît là des résultats classiques de la théorie des équations aux dérivées partielles (variétés caractéristiques) ou des théories générales de la propagation (surfaces d'onde). L'étude faite au cours des paragraphes précédents montre ainsi que les *hypersurfaces satisfaisant*

---

[1] Le système des équations (6-1) est un système en involution.

[2] *Mathematische Annalen*, t. 115, 1937, p. 136-152.

[3] Cf. G. DARMOIS, *op. cit.*, p. 10-13.

à la condition $g^{44} = 0$ jouent le rôle de variétés caractéristiques pour les équations d'Einstein.

Mettons cette condition fondamentale sous une forme invariante. Si la variété S est définie par l'équation :

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$$

il nous faut effectuer le changement de variable $x^{4'} = f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ et

$$g^{4'4'} = A^{4'4'}_{\lambda\,\mu} g^{\lambda\mu} = g^{\lambda\mu}\partial_\lambda f \partial_\mu f$$

Les variétés caractéristiques sont donc les variétés solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\text{(8-1)} \qquad \Delta_1 f = g^{\lambda\mu}\partial_\lambda f\, \partial_\mu f = 0$$

dont le premier membre $\Delta_1 f$ généralise le paramètre différentiel du premier ordre de Beltrami. La signification géométrique de cette équation est immédiate : les variétés caractéristiques sont les variétés tangentes en chaque point au cône C attaché à ce point. Le cône C est le cône caractéristique des équations (6-1).

Il importe de noter que les variétés caractéristiques constituent des éléments géométriques covariants à l'équation $ds^2 = 0$: deux ds^2 conformes l'un à l'autre admettent les mêmes variétés caractéristiques.

9. Bicaractéristiques des équations d'Einstein. — Les variétés V caractéristiques des équations d'Einstein, peuvent être engendrées au moyen des multiplicités caractéristiques de l'équation (8-1), chaque multiplicité étant constituée par l'ensemble d'une courbe caractéristique et d'éléments de contact attachés à chaque point de cette courbe et tangents à cette courbe. On donne aux courbes L_0 caractéristiques de (8-1) le nom de *bicaractéristiques des équations d'Einstein.*

1° En un point M de l'espace-temps le plan tangent à une variété V touche le cône élémentaire C attaché à M selon une génératrice G. Il résulte de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre que la génératrice G est la tangente à la courbe caractéristique L_0 associée à V en M ; autrement dit le long des courbes caractéristiques de (8-1) $ds^2 = 0$. Les courbes L_0 sont de longueur nulle.

2° Désignons par $2H(x^\alpha, \partial_\beta f)$ le premier membre de l'équation (8-1) et posons $y_\lambda = \partial_\lambda f$. Il vient :

$$2H(x^\alpha, y_\beta) = g^{\lambda\mu} y_\lambda y_\mu$$

Les multiplicités caractéristiques de l'équation (8-1) sont les solutions du système d'équations différentielles :

$$\frac{dx^1}{\frac{\partial H}{\partial y_1}} = \cdots = \frac{dx^4}{\frac{\partial H}{\partial y_4}} = \frac{df}{2H} = -\frac{dy_1}{\frac{\partial H}{\partial x^1}} = \cdots = -\frac{\partial y^4}{\frac{\partial H}{\partial x^4}} = dt$$

où t désigne une variable auxiliaire. Elles satisfont en particulier au système différentiel :

$$\text{(9-1)} \qquad (a) \quad \frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}; \qquad (b) \quad \frac{dy_\beta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^\beta}$$

Des équations (9-1) (a) on tire :

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = g^{\alpha\beta} y_\beta \quad \text{ou} \quad y_\beta = g_{\beta\lambda} \frac{dx^\lambda}{dt}$$

On reconnaît dans le système (9-1), le système des équations canoniques d'Hamilton relatif à la fonction hamiltonienne $H(x^\alpha, y_\beta)$ et qui détermine par suite les géodésiques de :

$$ds^2 = 2H\left(x^\alpha, g_{\beta\lambda} \frac{dx^\lambda}{dt}\right) dt^2 = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dy^\mu$$

Ainsi les bicaractéristiques des équations d'Einstein sont les *géodésiques de longueur nulle du ds^2* (géodésiques tangentes en chacun de leurs points aux cônes C). Ces lignes sont, comme les variétés caractéristiques, covariantes à l'équation $ds^2 = 0$.

Les géodésiques de longueur nulle issues d'un même point M de l'espace-temps engendrent une hypersurface caractéristique admettant le point M comme point singulier et qui est appelée *conoïde caractéristique* de sommet M. Le cône C de sommet M est le cône des tangentes en M. Nous appellerons intérieur du conoïde caractéristique au voisinage de M la région qui correspond à l'intérieur du cône C [1].

---

[1] Étendant un résultat classique de la théorie, des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, M. STELLMACHER a récemment démontré dans toute sa généralité la proposition suivante (cf. Mémoire cité au § 7) :

Étant donnée une solution des équations d'Einstein (analytique ou non) déterminée par ses données de Cauchy relatives à une hypersurface S orientée dans l'espace (Cf. § 12), les valeurs des dix potentiels en tout point M suffisam-

En rassemblant les divers résultats obtenus, on voit que le champ de gravitation présente, en relativité, *le caractère d'un phénomène de propagation ;* les variétés caractéristiques V, le long desquelles peuvent se produire les discontinuités du champ, jouent le rôle de surfaces d'ondes gravifiques et les bicaractéristiques L_0 celui de rayons gravifiques.

Il est clair d'autre part que les variétés V, tangentes en chacun de leurs points au cône C, lieu des directions spatio-temporelles de propagation de la lumière, sont aussi les surfaces d'ondes lumineuses, les géodésiques L_0 de longueur nulle déterminant spatio-temporellement les rayons lumineux.

On voit qu'il y a identité entre les lois de propagation de la lumière et du champ de gravitation.

10. Variétés isothermes. — Au système des équations d'Einstein, nous allons faire correspondre une équation à une seule fonction inconnue (fonction ne figurant d'ailleurs que par ses dérivées) qui admet les mêmes variétés caractéristiques que le système d'Einstein. D'une manière plus précise, nous allons chercher les équations aux dérivés partielles du second ordre linéaire et homogènes qui satisfont aux deux conditions suivantes :

a) l'équation admet en chaque point le cône C comme cône caractéristique,

b) le premier membre de l'équation est susceptible d'une interprétation géométrique et doit par conséquent être invariant dans tout changement de coordonnées.

Les équations satisfaisant à la première condition sont de la forme :

$$g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}f - H^{\rho}\partial_{\rho}f = 0$$

ou

$$g^{\lambda\mu}(\partial_{\lambda\mu}f - \Pi^{\rho}_{\lambda\mu}\partial_{\rho}f) = 0$$

---

ment voisin de S, ne dépendent que des données relatives au domaine de S intérieur au conoïde caractéristique de sommet M.

Cette proposition apparaîtra comme très naturelle si l'on observe que, lorsque M′ est suffisamment voisin de M, les deux points M et M′ peuvent être joints par une ligne d'univers partout orientée dans le temps ou partout orientée dans l'espace (cf. par. 12) selon que M′ est intérieur ou extérieur au conoïde caractéristique de sommet M. L'énoncé précédent traduit donc simplement ce que M. Stellmacher appelle la « structure causale » de l'espace-temps.

en introduisant, au lieu des H^ρ, les quantités auxiliaires surabondantes $\Pi^\rho_{\lambda\mu}$. En vertu de la condition d'invariance (indépendante du tenseur fondamental) les quantités :

$$\partial_\lambda(\partial_\mu f) - \Pi^\rho_{\lambda\mu}\partial_\rho f$$

sont les composantes d'un tenseur à deux indices covariants ; $\partial_\mu f$ étant un vecteur covariant, l'indice λ est un indice de dérivation covariante ; les $\Pi^\rho_{\lambda\mu}$ sont les coefficients d'une connexion affine d'ailleurs arbitraire :

$$\Pi^\rho_{\lambda\mu} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} + X^\rho_{\lambda\mu}$$

où $X^\rho_{\lambda\mu}$ est un tenseur quelconque à trois indices.

L'équation la plus générale répondant à la question est donc :

$$g^{\lambda\mu}(\partial_{\lambda\mu} f - \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\partial_\rho f) - v^\rho\partial_\rho f = 0$$

v^ρ désignant un vecteur arbitraire. Au reste une équation à vecteur v^ρ non nul correspond géométriquement à un espace-temps doué d'une connexion affine $\Pi^\rho_{\lambda\mu}$ qui diffère de la connexion $\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$ de l'espace de Riemann. Nous ne considérerons par suite que l'équation à vecteur v^ρ nul :

$$\Delta_2 f \equiv g^{\lambda\mu}(\partial_{\lambda\mu} f - \Gamma^\rho_{\lambda\mu}\partial_\rho f) = 0 \tag{10-1}$$

L'équation (10-1) admet les mêmes caractéristiques et bicaractéristiques que le système des équations d'Einstein. La signification géométrique du premier membre est immédiate : $\Delta_2 f = \nabla_\lambda (g^{\lambda\mu}\partial_\mu f)$ est la divergence du gradient de f et généralise ainsi le paramètre différentiel du second ordre de BELTRAMI. Les variétés à trois dimensions, solutions de l'équation (10-1), généralisent les variétés isothermes de l'espace ordinaire ; il est clair qu'elles doivent jouer dans la théorie un rôle important.

11. — L'espace-temps étant rapporté aux coordonnées $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$, $x^{4'}$, désignons par $f(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'})$ une solution de l'équation (10-1) (¹). Si nous effectuons le changement de variables :

$$x^\rho = f(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, x^{4'})$$

(¹) Une telle solution est déterminée par les données de Cauchy sur une hypersurface S qui n'est ni caractéristique ni tangente à une caractéristique.

ρ ayant une valeur déterminée d'ailleurs quelconque, les variétés $x^\rho = C$ constituent une famille de variétés isothermes. On donne à la coordonnée x^ρ le nom de *coordonnée isotherme* ; pour une telle coordonnée :

$$\Delta_2 x^\rho \equiv - g^{\lambda\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} = 0 \tag{11-1}$$

Revenons à des coordonnées quelconques. Les quantités $\Delta_2 x^\rho$ étant étroitement liées à la propagation du champ, interviennent d'une manière simple dans les composantes du tenseur de Ricci [1]. Les équations d'Einstein peuvent ainsi, dans le cas général, se mettre indifféremment sous l'une ou l'autre forme :

$$R_{\lambda\mu} \equiv -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\alpha}\partial_\mu(\Delta_2 x^\alpha) - \frac{1}{2} g_{\mu\alpha}\partial_\lambda(\Delta_2 x^\alpha) + H_{\lambda\mu}(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) = 0 \tag{11-2}$$

$$R^{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\partial_\alpha(\Delta_2 x^\mu) - \frac{1}{2} g^{\mu\alpha}\partial_\alpha(\Delta_2 x^\lambda) + K^{\lambda\mu}(g^{\alpha\beta}, \partial_\gamma g^{\alpha\beta}) = 0 \tag{11-3}$$

Il résulte des expressions (11-3) que lorsque la coordonnée x^ρ est isotherme, l'équation $R^{\rho\rho} = 0$ ne contient pas d'autres dérivées secondes que celles de $g^{\rho\rho}$. On voit ainsi que l'on peut isoler, au point de vue des dérivées secondes, 1, 3 ou 6 potentiels $g^{\lambda\mu}$ en supposant que le système de coordonnées a 1, 2 ou 3 coordonnées isothermes. Si toutes les coordonnées sont isothermes (11-2) et (11-3) deviennent :

$$R_{\lambda\mu} \equiv -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} + H_{\lambda\mu}(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) = 0$$

$$R^{\lambda\mu} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} g^{\lambda\mu} + K^{\lambda\mu}(g^{\alpha\beta}, \partial_\gamma g^{\alpha\beta}) = 0$$

et la séparation des potentiels est complète. C'est en mettant les équations d'Einstein sous une forme équivalente qu'est apparue primitivement le caractère de propagation du champ, particulier à la théorie de la Relativité [2]. L'importance des coordonnées isothermes, qui sont en relation étroite avec cette propagation, apparaîtra maintes fois de la manière la plus nette dans les chapitres suivants.

---

(1) Cf. Chazy, *op. cit.* Tome II, p. 147.

(2) Cf. Einstein, Sitzungsb. Berlin 1918, p. 155-167 ; De Donder, *mém. Sc. Math.*, fasc., VIII et XIV ; G. Darmois, *op. cit.*, p. 18-19.

12. L'espace et le temps. — Les considérations qui suivent sont relatives à un ds^2 quelconque du type hyperbolique normal, extérieur ou intérieur (1).

On dit qu'une ligne d'univers L est *orientée dans le temps* en un point M de l'espace-temps lorsqu'elle est tangente en M à une direction intérieure au cône C ; cette direction étant définie par les dx^λ, la quantité

$$ds^2 = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu$$

calculée en M est positive. La ligne L est orientée dans l'espace lorsque cette quantité est négative, elle est tangente à une bicaractéristique lorsque $ds^2 = 0$.

On dit qu'une hypersurface S est *orientée dans l'espace* en M lorsque son élément plan tangent en M est extérieur au cône C ; l'hypersurface étant définie par l'équation $f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$, la quantité :

$$\Delta_1 f = g^{\lambda\mu} \partial_\lambda f \partial_\mu f$$

calculée en M est positive. L'hypersurface S est orientée, dans le temps lorsque cette quantité est négative, elle est tangente à une caractéristique lorsque $\Delta_1 f = 0$.

13. — Un ds^2 ne peut être interprété physiquement que dans les domaines de régularité dans lesquels il existe une famille à 1 paramètre d'hypersurfaces S $[f(x^1 ... x^4) = C]$ *orientées dans l'espace* en tous les points du domaine considéré et une famille à 3 paramètres de lignes d'univers L $[\varphi(x^1 ... x^4) = h, \Psi(x^1 ... x^4) = k, \chi(x^1 ... x^4) = l]$ *orientés dans le temps* en tous les points du même domaine. Effectuons un changement du système de coordonnées tel que les hypersurfaces S deviennent les variétés $x^4 =$ const. et les lignes L les lignes où x^4 varie seul. Dans ce système de coordonnées nous dirons que la variable x^4 est une variable temporelle, x^1, x^2, x^4 définissant les variables spatiales correspondantes. Les hypersurfaces $x^4 =$ const. seront appelées sections d'espaces, les lignes où x^4 varie seul, lignes de temps. Nous supposerons toujours, dans la suite de ce travail, que l'espace-temps est rapporté à un tel système de coordonnées.

(1) Les équations du cas intérieur ne différant des équations extérieures que par la présence d'un second membre, les variétés solutions de (8-1) sont encore caractéristiques pour les ds^2 intérieurs. Cf. ci-dessous par. 20.

Les lignes de temps étant partout orientées dans le temps :

$$ds^2 = g_{44}(dx^4)^2 > 0$$

et dans les domaines considérés, g_{44} *est une quantité essentiellement positive.* Les sections d'espace étant partout orientées dans l'espace

$$\Delta_1 x^4 > 0$$

et g^{44} *est aussi une quantité essentiellement positive.*

Les cas où g^{44} et g_{44} s'annulent, cas correspondant respectivement à une ligne de temps tangente à une bicaractéristique et à une section d'espace tangente à une caractéristique, sont formellement écartés.

L'ensemble des deux propriétés $g_{44} > 0$ et $g^{44} > 0$ caractérise l'espace et le temps.

Théorème : en tout point régulier de l'espace-temps, les deux formes quadratiques $g^{ij} X_i X_j$ *et* $g_{ij} X^i X^j$ *sont définies négatives.*

Dans la forme quadratique fondamentale :

$$g_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu$$

forme qui est du type hyperbolique normal, faisons apparaître le carré associé à la variable x^4 :

$$g_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu = \frac{1}{g_{44}} (g_{41}X^1 + g_{42} X^2 + g_{43}X^3 + g_{44}X^4)^2 + \Phi(X^1, X^2, X^3)$$

Le carré ainsi mis en évidence est positif puisque g_{44} est positif, la forme Φ est donc définie négative. Effectuons, dans l'identité ci-dessus, la substitution $X^\lambda = g^{\lambda\alpha} X_\alpha$ à module $g \neq 0$. Il vient :

$$g^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu = \frac{1}{g_{44}} (X_4)^2 + \Phi\big(g^{i\alpha} X_\alpha\big)$$

Pour $X^4 = 0$, cette identité se réduit à :

$$g^{ij} X_i X_j = \Phi(g^{ik} X_k)$$

Φ étant une forme définie négative, il en est de même pour la forme quadratique $g^{ij} X_i X_j$. Il est clair que corrélativement, g^{44} étant positif, la forme $g_{ij} X^i X^j$ est aussi définie négative.

14. — Nous allons maintenant signaler trois cas spéciaux particulièrement importants :

1° Si la coordonnée x^4 est *isotherme*, les sections d'espace sont des variétés isothermes

$$g^{\lambda\mu} \Gamma^4_{\lambda\mu} = 0$$

2° Un espace-temps est dit *statique* s'il existe un système de coordonnées (x^1, x^2, x^3, x^4) tel que les potentiels $g_{\lambda\mu}$ correspondants soient tous indépendants de x^4. Cette condition est conservée dans tout changement de coordonnées ne modifiant pas les lignes de temps et tel que la nouvelle variable temporelle $x^{4'}$ soit liée à l'ancienne par une relation de la forme :

$$x^{4'} = A(x^1, x^2, x^3)x^4 + B(x^1, x^2, x^3)$$

Ne peuvent être statiques que les espaces-temps admettant un groupe d'isométrie dont les trajectoires sont partout orientées dans le temps.

15. 3° **Les espaces-temps orthogonaux.** — Nous dirons qu'un espace-temps a été mis sous forme orthogonale ou plus brièvement est orthogonal, lorsqu'il est rapporté à un système de coordonnées tel que les lignes de temps soient orthogonales aux sections d'espace. Analytiquement cette propriété se traduit par les conditions :

$$g_{4i} = 0 \qquad \text{ou} \qquad g^{4i} = 0$$

le ds^2 prenant alors la forme :

$$ds^2 = g_{44}(dx^4)^2 + g_{ij}dx^i dx^j$$

Nous noterons que dans ce cas :

$$g_{44}g^{44} = 1$$

L'interprétation physique de ces systèmes de coordonnées est très simple : les deux nappes du cône C sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire $dx^4 = 0$. Désignons par M (x^λ) le sommet du cône C et par M_1' ($x^i + dx^i$, $x^4 + dx^4$) et M_2' ($x^i + dx^i$, $x^4 - dx^4$) deux points symétriques appartenant respectivement aux deux nappes de C ; MM_1' représente le déplacement infiniment petit associé à un rayon lumineux allant du point d'espace A (x^i) au point d'espace A' ($x^i + dx^i$) dans le temps dx^4 (ceci au voisinage de l'instant x^4) ; de même M_2' M peut être considéré comme représentant, aux infiniments petits d'ordre supérieur près, le déplacement infiniment petit associé à un rayon lumineux allant de A' à A dans le même temps dx^4. Le choix des variables d'espace et de temps est donc tel que l'aller et le retour d'un rayon lumineux s'effectuent, pour un déplacement infiniment petit, dans le même temps.

16. Les équations du champ intérieur — le tenseur $T_{\lambda\mu}$. — Comme on l'a vu au par. 3 les équations du champ intérieur s'écrivent :

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} R = \chi T_{\lambda\mu} \tag{16-1}$$

Le tenseur $T_{\lambda\mu}$ introduit au second membre (tenseur d'énergie de la matière) doit décrire complètement la matière en mouvement. La connaissance parfaite de ce tenseur nécessiterait une théorie parfaite de la constitution de la matière. Il faudra donc nous contenter comme en mécanique classique, d'une schématisation plus ou moins raffinée à laquelle correspondra un tenseur $T_{\lambda\mu}$ plus ou moins complexe, représentant au mieux l'état de la matière. Ce tenseur contiendra différents termes correspondant aux différentes sortes d'énergies que peut admettre celle-ci ; le terme le plus important expérimentalement est celui qui correspond à l'énergie pondérable, puis vient l'énergie provenant des forces de pression, énergie qui est très petite vis-à-vis de la première mais très grande par rapport à toutes les autres (viscosité, énergie du champ électro-magnétique, etc...)

Pour des problèmes de mécanique relativiste, nous utiliserons de préférence l'un ou l'autre des deux schémas suivants.

1° Nous ne ferons figurer, en première approximation, dans le tenseur d'énergie que l'énergie pondérable de la matière. Dans ce cas, appelé *cas schématique intérieur*, nous poserons :

$$T^{\lambda\mu} = \rho u^{\lambda} u^{\mu} \tag{16-2}$$

Les éléments introduits sont :

a) un scalaire *essentiellement positif* ρ qui mesure la densité de la matière relative à un observateur lié à l'instant considéré, à la particule matérielle considérée.

b) un vecteur unitaire u^{λ} appelé vitesse généralisée de la particule matérielle. Les trajectoires du champ de vecteurs u^{λ} sont appelées lignes de courant. Le vecteur u^{λ}, étant unitaire, est orienté dans le temps :

$$g_{\lambda\mu} u^{\lambda} u^{\mu} = 1$$

2° Nous pourrons compléter le tenseur d'énergie en y faisant figurer l'énergie correspondant aux forces de pression superficielles.

Dans ce cas, appelé *cas de fluide parfait*, nous poserons :

$$T^{\lambda\mu} = \rho u^{\lambda} u^{\mu} - p g^{\lambda\mu} \qquad p > 0 \tag{16-3}$$

Le scalaire p introduit représente la pression du fluide ; il est très petit par rapport à la densité $\rho - p$ de la matière au repos. Ces deux scalaires sont liés par l'équation d'état :

$$\rho - p = \varphi(p)$$

où φ est une fonction non décroissante.

17. — En contractant les équations (16-1) il vient :

$$R = -\chi T$$

Les équations du champ intérieur peuvent donc se mettre sous la forme

$$R_{\lambda\mu} = \chi \left[T_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} T\right] \tag{17-1}$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse du fluide parfait ; T étant égale à $\rho - 4p$ on a :

$$R_{\lambda\mu} = \chi \left[\rho u_\lambda u_\mu - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(\rho - 2p)\right] \tag{17-1}$$

Sous cette forme, il est aisé de déterminer les directions principales de l'espace-temps, ce sont les directions conjuguées communes aux deux cônes :

$$g_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad R_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu = 0$$

ou

$$g_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu = 0 \qquad \text{et} \qquad u_\lambda u_\mu X^\lambda X^\mu = (u_\lambda X^\lambda)^2 = 0$$

c'est-à-dire les directions conjuguées communes au cône C et à un hyperplan double, orthogonal à la ligne de courant. Les directions principales sont donc la direction de la ligne de courant et toutes les directions perpendiculaires. Un espace-temps intérieur admet, dans le cas du fluide parfait (et aussi dans le cas schématique intérieur $p = 0$) une seule direction principale privilégiée.

18. Les conditions de conservation. — Le tenseur $S_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} R$ étant conservatif, il en est de même pour le tenseur $T_{\lambda\mu}$. On peut mettre les conditions de conservation sous la forme

$$\nabla_\lambda(T^{\lambda\mu}) = 0$$

Nous allons envisager séparément le cas schématique intérieur et le cas du fluide parfait. Dans l'un et l'autre cas le vecteur u^λ est unitaire de telle sorte que :

$$u_\mu \nabla_\lambda u^\mu = 0 \tag{18-1}$$

1° *Cas schématique intérieur.* — Les conditions de conservation s'écrivent :

$$\nabla_\lambda(\rho u^\lambda u^\mu) = 0$$

En tenant compte de (18-1), il vient :

$$\nabla_\lambda(\rho u^\lambda) = 0 \tag{18-2}$$

$$u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = 0 \tag{18-3}$$

La signification géométrique de ces équations est très simple: (18-2) exprime que la divergence du vecteur $\rho\, u^\lambda$, vitesse matérielle généralisée, est nulle, (18-3) que les lignes du courant sont des géodésiques du ds^2.

2° *Cas du fluide parfait.* — Un calcul immédiat montre que :

$$\nabla_\lambda(\rho u^\lambda) = u^\lambda \partial_\lambda p \tag{18-4}$$

$$u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu = \frac{\partial_\lambda p}{\rho}(g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu) \tag{18-5}$$

Ces équations diffèrent peu des équations correspondantes du cas schématique intérieur, les seconds membres étant pratiquement très petits par rapport aux premiers ; (18-4) exprime que la divergence de la vitesse matérielle généralisée est égale à la dérivée de la pression le long de la ligne de courant. L'interprétation géométrique des équations (18-5) a été donnée par EISENHART [1] : les lignes de courant, qui diffèrent peu de géodésiques du ds^2, sont rigoureusement géodésiques de :

$$\overline{ds^2} = e^{2\psi} ds^2 \qquad \psi = \int \frac{dp}{\rho}$$

Soit en effet $\bar{u}^\lambda = \bar{e}^\psi\, u^\lambda$ le vecteur collinéaire à u^λ et de mesure 1 relativement à $\overline{ds^2}$. Si $\overline{\nabla}_\lambda$ désigne l'opérateur correspondant de dérivation covariante

$$u^\lambda\, \overline{\nabla}_\lambda\, \bar{u}^\mu = e^{-2\psi}(u^\lambda\, \overline{\nabla}_\lambda\, u^\mu - \partial_\lambda \psi u^\lambda u^\mu)$$

or :

$$u^\lambda\, \overline{\nabla}_\lambda\, u^\mu = u^\lambda\, \nabla_\lambda\, u^\mu - \partial_\lambda \psi (g^{\lambda\mu} - 2u^\lambda u^\mu)$$

---

[1] EISENHART. — *Transactions of. Am. Math. Soc.*, 1924, p. 210.

Il vient par suite :

$$\bar{u}^\lambda \bar{\nabla}_\lambda \bar{u}^\mu = e^{-2\psi}[u^\lambda \nabla_\lambda u^\mu - \partial_\lambda \psi (g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu)]$$

Si $\partial_\lambda \psi = \dfrac{\partial_\lambda p}{\rho}$, $\bar{u}^\lambda \bar{\nabla}_\lambda \bar{u}^\mu$ est nul et les lignes de courant sont des géodésiques de $\overline{ds^2}$.

19. Le problème intérieur. — Si nous nous plaçons dans le cas schématique intérieur, les équations du champ s'écrivent :

$$(19\text{-}1) \qquad \begin{cases} R_{\lambda\mu} = \chi\rho[u_\lambda u_\mu - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}] \\ g^{\lambda\mu} u_\mu u_\lambda = 1 \quad \text{avec la condition } \rho > 0 \end{cases}$$

Etant données, sur une hypersurface S, les valeurs des potentiels $g_{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées premières, nous nous proposons de déterminer les valeurs sur S des dérivées successives des potentiels ainsi que les valeurs de ρ, des u_λ et de leurs dérivées. Comme dans le problème extérieur, nous supposerons que l'hypersurface S est définie par l'équation $x^4 = 0$ et qu'elle n'est tangente en aucun de ses points au cône C ($g^{44} \neq 0$). Dans ces conditions le système (19-1) est équivalent au système des équations (19-2), (19-3), (19-4)

$$(19\text{-}2) \qquad R_{ij} = \chi\rho[u_i u_j - \frac{1}{2} g_{ij}]$$

$$(19\text{-}3) \qquad \begin{cases} R_i^4 = \chi\rho u_i u^4 \\ R_4^4 - \frac{1}{2} R = \chi\rho u_4 u^4 \end{cases}$$

$$(19\text{-}4) \qquad g^{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu = 1 \quad \text{avec la condition } \rho > 0$$

Les équations (19-3) ne contenant aucune dérivée d'indice 2 (cf. par. 7, et formules 7-1), les données de CAUCHY déterminent les valeurs sur S des quantités :

$$R_i^4 = S_i^4 \qquad R_4^4 - \frac{1}{2} R = S_4^4$$

On tire des équations (19-3) :

$$u_\lambda = \frac{S_\lambda^4}{\chi\rho u^4}$$

et en reportant dans (19-4)

$$\chi\rho u^4 = g^{\lambda\mu} S_\lambda^4 S_\mu^4 = \Omega^{44}$$

Nous supposerons que la quantité Ω^{44} qui a sur S une valeur connue, y est différente de zéro. Il vient dans ces conditions :

$$u_\lambda = \frac{S_\lambda^4}{\Omega^{44}}; \qquad u^4 = \frac{S^{44}}{\Omega^{44}}; \qquad \chi\rho = \frac{(\Omega^{44})^2}{S^{44}}$$

ρ étant essentiellement positif, nécessairement :

$$S^{44} = R^{44} - \frac{1}{2} g^{44} R > 0$$

ρ et u_λ étant connus, les équations (19-2) fournissent les valeurs sur S des dérivées $\partial_{44}\, g_{ij}$. *Ainsi si g^{44} et Ω^{44} sont différents de zéro, si S^{44} est positif, les quantités u_λ, ρ, $\partial_{44}\, g_{ij}$ ont sur S des valeurs bien déterminées et ne peuvent être discontinues à la traversée de S* (1).

Observons d'autre part que nos inconnues doivent satisfaire aux conditions de conservation (18-2) et (18-3) que nous écrirons sous la forme :

$$\text{(19-5)} \qquad \left\{ \begin{aligned} u^4\partial_4\rho + \rho\partial_4 u^4 &= A(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, u^\alpha, \partial_i u^\alpha, \rho, \partial_i\rho) \\ u^4\partial_4 u^\lambda &= B^\lambda(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_\beta, u^\alpha, \partial_i u^\alpha) \end{aligned} \right.$$

Les seconds membres prennent sur S des valeurs connues ; u^4 étant différent de zéro puisque S^{44} est différent de zéro, les équations (19-5) fournissent les valeurs de $\partial_4 u^\lambda$ et $\partial_4\rho$. Des dérivations successives par rapport à la variable x^4, effectuées soit sur (19-2) soit sur (19-5), fournissent les valeurs de toutes les dérivées cherchées.

Au point de vue de l'existence et de l'unicité de la solution, les considérations précédentes nous permettent (du moins dans le cas analytique (2)) d'affirmer que, moyennant les hypothèses énoncées, les données de Cauchy sur S déterminent une solution et une seule du système (19-2), (19-5) qui satisfasse sur S aux équations (19-3) et (19-4). Les équations (19-5) étant les conditions de conservation, les équations (19-3) et (19-4) sont alors vérifiées partout. Le problème de Cauchy relatif au système (19-1) admet, dans les hypothèses énoncées, une solution unique.

---

(1) Il se produit pour les potentiels $g_{\lambda 4}$ une circonstance identique à celle étudiée dans le cas du problème extérieur.

(2) Le théorème d'unicité a été étendu par M. Stellmacher au cas où les données ne sont pas supposées analytiques.

20. — Examinons plus attentivement les hypothèses faites. Dans ce but donnons-nous effectivement un champ intérieur et cherchons les hypersurfaces S à la traversée desquelles peuvent se produire des discontinuités.

Il en est ainsi :

a) lorsque S est tangent au cône C ($g^{44} = 0$) ;

b) lorsque les deux conditions $\Omega^{44} = 0$ et $S^{44} = 0$ sont simultanément satisfaites, c'est-à-dire lorsque S *est tangente à une ligne de courant ou engendrée par des lignes de courant* ($u^4 = 0$).

Il est impossible de satisfaire seulement à l'une des deux conditions du *b*) : si S^{44} étant nul, Ω^{44} était différente de zéro, ρ devrait être infini, si, Ω^{44} étant nul, S^{44} était différent de zéro, ρ devrait être nul et u^4 infini.

Dans le cas du fluide parfait, les conclusions sont analogues. En dehors des variétés caractéristiques partout tangentes au cône C et des variétés engendrées par des lignes de courant, il s'introduit une nouvelle classe de variétés exceptionnelles constituée par les fronts d'onde de l'hydrodynamique classique.

21. Condition de raccordement de Schwarzschild. — Considérons un modèle d'univers à plusieurs masses ; chacune de ces masses engendre un tube d'univers limité par une hypersurface S [1]. A l'intérieur d'un tube d'univers, le ds^2 est intérieur et satisfait aux équations (3-3) ; à l'extérieur de tous les tubes d'univers le ds^2 est extérieur et satisfait aux équations (3-4). Nous supposerons qu'il est toujours possible de rapporter l'univers à des systèmes de coordonnées tels que, dans les différentes régions envisagées, les potentiels et leurs dérivées premières soient continus (cf. par. 1)

Comment les deux ds^2 se raccordent-ils sur la frontière S d'un tube d'univers ? Il est naturel de poser, avec SCHWARZSCHILD, la condition *qu'il existe un système de coordonnées* (que nous désignerons par $x^{\lambda'}$) *tel que les potentiels et leurs dérivées premières soient continus à la traversée de S*. Mais il se présente alors des difficultés en tout point analogues à celles rencontrées dans les par. 6 et 19 ; on n'est assuré que cette condition est conservée que pour des changements de coordonnées à dérivées secondes continues, à la

[1] On verra ultérieurement que la frontière d'un tube d'univers est aussi bien ponr le champ intérieur que pour le champ extérieur partout orientée dans le temps.

traversée de S. Par suite si nous nous donnons effectivement les deux ds^2 dans un même système de coordonnées (K), il paraît difficile, lorsque les potentiels relatifs à (K) et leurs dérivés premières ne sont pas continus à la traversée de S, de savoir si ces deux ds^2 satisfont ou non à la condition de raccordement de SCHWARZSCHILD.

La solution de ces difficultés nous sera donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on effectue un changement de coordonnées quelconque tel que S soit, dans le nouveau système, définie par l'équation $x^4 = 0$, les potentiels g_{ij} relatifs à ce nouveau système sont continus à la traversée de S ; si le changement de coordonnées est à dérivées premières continues, les potentiels $g_{\lambda\mu}$ ainsi que les dérivées premières des potentiels g_{ij}, sont continus à la traversée de S.*

Dans le cas général et d'après nos notations, les seules quantités $A_\lambda^{\lambda'}$ qui puissent être discontinues, sont de la forme $A_4^{\lambda'}$. Or

$$g_{ij} = A_i^{\lambda'} A_j^{\mu'} g_{\lambda'\mu'}$$

Si les $A_4^{\lambda'}$ sont eux-mêmes continus à la traversée de S, il en est de même pour les dérivées $\partial_i A_4^{\lambda'}$ et les quantités :

$$\partial_4 g_{ij} = A_i^{\lambda'} A_j^{\mu'} A_4^{\rho'} \partial_{\rho'} g_{\lambda'\mu'} + \left[A_j^{\mu'} \partial_i A_4^{\lambda'} + A_i^{\lambda'} \partial_j A_4^{\mu'}\right] g_{\lambda'\mu'}$$

sont continues à la traversée de S.

Considérons en particulier un changement de coordonnées tel que, dans le nouveau système, les potentiels $g_{\lambda 4}$ prennent quatre valeurs imposées ; S étant orientée dans le temps, il est possible par exemple de réaliser les conditions :

$$g_{i4} = 0 \qquad g_{44}(= g^{44}) = -1$$

Il suffit pour cela de mener, en chaque point de S et de part et d'autre, la géodésique normale à S ; ces géodésiques seront les lignes le long desquelles la coordonnée x^4 varie seule, la valeur absolue de cette coordonnée coïncidant avec celle de l'arc de géodésique mesuré à partir de S. Un tel système de coordonnées est appelé système de coordonnées de Gauss relatif à S. Dans ces conditions :

$$ds^2 = -dx^{4^2} + g_{ij}dx^i dx^j$$

En vertu du théorème précédent, les g_{ij} sont continus à la traversée de S. Par suite le vecteur qui a pour composantes $A_4^{\lambda'}$ dans le système primitif, vecteur qui est normal à S de part et d'autre et dont le carré du module est égal à -1, est continu à la traversée de S. Le changement de coordonnées étant à dérivées premières continues, les dérivées $\partial_4 g_{ij}$ des potentiels sont continues à la traversée de S.

Au total la condition initiale est équivalente à la suivante : *dans le système de coordonnées de Gauss relatif à S* (système lié invariantivement à S et aux ds^2) *les potentiels et leurs dérivées premières sont continus à la traversée de S.* Sous cette forme, il est facile de voir directement si deux ds^2, donnés dans un système (K) quelconque, se raccordent ou non.

22. Problèmes de raccordement ; prolongement de l'intérieur vers l'extérieur. — Etant donné un ds^2 intérieur limité à une hypersurface quelconque S, nous proposons de rechercher s'il existe un ds^2 extérieur se raccordant le long de S, au sens de SCHWARZSCHILD avec le ds^2 intérieur. Nous dirons que nous traitons le problème du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur.

THÉORÈME. — *Pour que le problème du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur admette une solution unique, il faut et il suffit :*

1° *que l'hypersurface S soit engendrée par des lignes de courant du champ intérieur ;*

2° *que, dans le cas du fluide parfait, la pression p, s'annule le long de S.*

La condition est nécessaire.

Supposons qu'il existe un ds^2 extérieur se raccordant le long de S avec le ds^2 intérieur ; il existe alors un sytème de coordonnées tel que les potentiels et leurs dérivées premières soient continus à la traversée de la variété S. Cette variété étant supposée définie par l'équation $x^4 = 0$, les quantités :

$$S_i^4 = R_i^4 \qquad S_4^4 = R_4^4 - \frac{1}{2} R$$

qui ne dépendent que des dérivés d'indice 1 par rapport à S sont aussi continues à la traversée de S. Ces quantités sont d'ailleurs nulles dans tout l'espace-temps extérieur et par suite sur S. Or pour que les quantités S_λ^4 relatives au champ intérieur s'annulent sur S, il faut et il suffit que u^4 dans le cas schématique intérieur, u^4 et p dans le cas du fluide parfait, prennent partout sur S la valeur zéro.

La condition est suffisante.

L'hypersurface S étant supposée engendrée par des lignes de courant, *est partout orientée dans le temps*. Dans ces conditions, nous pouvons toujours supposer (bien que ce ne soit pas strictement indispensable) que dans le voisinage de S le ds^2 intérieur a été rapporté aux coordonnées de Gauss. Il est alors clair que le problème posé est le problème extérieur relatif à une variété S non tangente au cône C, les données de CAUCHY vérifiant sur S les quatre conditions :

$$R_i^4 = 0 \qquad R_4^4 - \frac{1}{2} R = 0$$

Nous savons qu'un tel problème admet, du moins dans le cas analytique, une solution unique, l'existence de cette solution n'étant d'ailleurs assurée que dans un certain voisinage de S. Au-delà de ce voisinage, la solution peut présenter des singularités et disparaître. L'interprétation de telles singularités nous sera donnée par l'étude du problème inverse.

23. Prolongement de l'extérieur vers l'intérieur. — Etant donné un ds^2 extérieur limité à une hypersurface S, nous nous proposons de rechercher s'il existe un ds^2 intérieur se raccordant avec lui le long de S. *A priori* l'hypersurface S ne peut être quelconque. S'il existe un ds^2 intérieur, répondant à la question, S doit être engendrée par des lignes de courant de ce ds^2. Or dans le cas schématique intérieur, ces lignes sont des géodésiques du ds^2 intérieur et par suite, des géodésiques du ds^2 extérieur. Ainsi, *la frontière S doit être dans ce cas engendrée par des géodésiques du ds^2 extérieur*, géodésiques d'ailleurs orientées dans le temps. Il en est sensiblement de même dans le cas du fluide parfait : p devant s'annuler sur S, le ds^2 d'Eisenhart se réduit sur S au ds^2 frontière et les lignes de courant qui engendrent S sont des géodésiques du ds^2 frontière, très voisines de géodésiques du ds^2 extérieur [1].

---

[1] Revenons au phénomène élémentaire de gravitation ; considérons le tube d'univers décrit, par une masse matérielle très petite ; dans le cas schématique intérieur ce tube est nécessairement, engendré par des géodésiques du ds^2 extérieur. Il en est encore ainsi à très peu près (puisque la partie principale

Si nous passons en coordonnées de Gauss, le problème posé apparaît comme un problème intérieur relatif à une variété S qui peut être engendrée par des lignes de courant ; nous avons vu que c'est là un cas exceptionnel où le problème de Cauchy considéré n'est pas correctement posé. Cette circonstance traduit un fait bien connu dans la théorie classique ; il n'existe pas toujours une distribution matérielle réelle (à densité positive) produisant à l'extérieur des masses un champ de gravitation donné ; s'il en existe une, il en existe une infinité. On voit, et cela apparaîtra encore plus clairement dans la suite, combien la circonstance précédente est liée étroitement au caractère essentiellement positif des masses considérées.

24. — Les singularités [1] présentées par un champ extérieur (cf. par. 22) ne peuvent avoir, par elles-mêmes, aucune espèce de signification physique. Un ds^2 extérieur ne peut être interprété physiquement que lorsqu'il est possible de faire disparaître ces singularités en les « meublant », c'est-à-dire lorsqu'il est possible de choisir des tubes d'univers S entourant les diverses singularités du champ extérieur et tels qu'il existe, pour chaque S, un champ intérieur régulier partout à l'intérieur de S et se raccordant sur S avec le champ extérieur. Il est à noter que les problèmes de prolongement de l'extérieur vers l'intérieur ainsi posés sont essentiellement des problèmes globaux, alors que les problèmes envisagés aux par. 6-19-23 sont des problèmes purement locaux, la régularité de leurs solutions ne devant être assurée qu'au voisinage de S.

Si l'on peut « meubler », au sens précédent, les singularités, du champ extérieur, le ds^2 provenant de la réunion des divers champs intérieurs et du champ extérieur (pris hors des frontières S) est régulier dans tout le domaine envisagé. Ce ds^2 constitue la représentation géométrique d'un univers où le champ de gravitation

---

de l'énergie est toujours l'énergie pondérable) pour un tenseur matériel du type le plus général. Dans ces conditions, quelle que soit la structure adoptée pour le tenseur $T_{\lambda\mu}$, la ligne d'univers décrite par une masse infiniment petite est toujours à la limite, une géodésique du champ de gravitation extérieur. La loi élémentaire de la gravitation apparaît ainsi comme une conséquence des conditions de conservation et des conditions de raccordement du champ intérieur et du champ extérieur.

[1] Les ds^2 extérieurs étant les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du type hyperbolique, leurs singularités se propagent indéfiniment dans le temps (cf. chapitre II).

extérieur peut être considéré comme produit par les diverses masses introduites (¹).

25. Les deux propositions fondamentales. — Il est naturel de penser que tout champ extérieur donné, interprétable physiquement, porte en lui-même, en quelque sorte, l'empreinte des masses matérielles susceptibles de le produire : si l'on a pu meubler toutes les singularités d'un champ extérieur, il doit être impossible d'introduire dans le champ une nouvelle masse compatible avec ce champ. Ainsi ce sont les singularités d'un champ extérieur qui doivent donner la distribution des masses matérielles capables de projeter ce champ : un champ extérieur étant donné, tout tube d'univers de ce champ qui peut être meublé en masse, doit contenir à son intérieur une singularité du champ.

Il nous apparaît donc comme essentiel de n'envisager que des champs de gravitation vérifiant la proposition suivante :

Proposition A. — *L'introduction de masses matérielles dans un champ extérieur donné ne peut s'effectuer que dans des domaines où ce champ admet des singularités.*

La recherche de conditions à adjoindre aux conditions locales d'Einstein pour que cette proposition soit vérifiée, fera l'objet du chapitre III de ce travail.

Il résulte de la proposition A que si un espace-temps extérieur est régulier partout, il ne peut contenir aucune masse matérielle. Un tel espace-temps constitue la représentation d'un univers vide de matière. Or nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que tout univers vide de matière doit nécessairement être euclidien. Nous sommes donc amenés à n'envisager que les espaces-temps extérieurs vérifiant la proposition suivante :

Proposition B. — *Tout espace-temps extérieur régulier partout est nécessairement euclidien.*

Nous verrons qu'il n'en est pas ainsi pour les espaces-temps extérieurs les plus généraux. Il nous faudra donc essayer de compléter l'axiomatique de la théorie par des conditions telles que la proposition B soit vérifiée. C'est ce second problème sensiblement moins difficile que le premier, que nous allons étudier au chapitre II.

(¹) C'est ce qui apparaît d'une manière particulièrement claire dans le cas du ds^2 extérieur de Schwarzschild (cf. Chazy, *op. cit.*, t. II, p. 96-123).

CHAPITRE II

ESPACES-TEMPS EXTÉRIEURS RÉGULIERS PARTOUT

1. Régularité d'un espace-temps. — Nous allons, pour plus de clarté, rassembler les diverses conditions de régularité signalées au cours du chapitre I. Un espace-temps rapporté à un système de coordonnées (x^λ) est *régulier* dans un domaine D lorsqu'il satisfait dans ce domaine aux conditions suivantes :

1° Les potentiels relatifs au système (x^λ) et leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre sont des fonctions continues des coordonnées.

2° Le ds^2 est du type hyperbolique normal à un carré positif et trois carrés négatifs ; le discriminant g est essentiellement négatif et ne peut s'annuler en aucun point du domaine D.

3° L'espace-temps se trouve rapporté à des lignes de temps et à des sections d'espace ; x^4 désignant toujours la variable qui présente le caractère temporel, les quantités g_{44} et g^{44} sont essentiellement positives et ne peuvent s'annuler en aucun point du domaine D ; les deux formes quadratiques $g_{ij}X^iX^j$ et $g^{ij}X_iX_j$ sont, dans ce domaine, définies négatives (1).

Lorsque la variable x^4 varie entre deux valeurs quelconques arbitrairement voisines, a et b, la variété $x^4 =$ const. correspondante balaye une certaine région non limitée dans le champ des variables (x^i) et que nous désignerons par (R). Nous dirons qu'un espace-temps est *régulier partout* (dans l'espace) lorsqu'il existe un système de coordonnées (x^λ) et une région (R) correspondante tels que l'espace-temps, rapporté au système (x^λ), soit régulier dans tout domaine D appartenant à (R).

---

(1) Nous dirons encore lorsque ces trois conditions sont remplies, que le système (x^λ) est, pour l'espace-temps considéré, un système de référence régulier.

2. — Domaine à l'infini d'un espace-temps. — Considérons un espace-temps rapporté à un système de coordonnées (x^λ) et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Sur toute variété $x^4 =$ const. d'une région (R), il existe des points pour lesquels la « distance r » mesurée par l'expression :

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

surpasse toute valeur donnée à l'avance.

2° L'espace-temps, rapporté au système (x^λ), est partout régulier dans (R), sauf peut-être dans certains domaines tout entiers situés à distance finie.

Dans la région où l'espace-temps est régulier, chaque section d'espace peut être considérée comme un espace de RIEMANN rapporté aux coordonnées (x^i) et admettant la métrique :

$$-\,d\sigma^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

Dans cette région, traçons, sur les diverses sections d'espace, des courbes L partant d'un point M_0 arbitraire et s'éloignant à l'infini, c'est-à-dire contenant des points M en lesquels r peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. Si, quelle que soit L, la longueur

$$\sigma = \int_{M_0}^{M} \sqrt{-\,g_{ij}dx^i dx^j}$$

augmente indéfiniment avec r, nous dirons que l'espace-temps considéré admet *un domaine à l'infini dans l'espace* et que le système de coordonnées (x^λ) est régulier dans ce domaine à l'infini.

3. Comportement asymptotique euclidien. — Lorsqu'un espace-temps extérieur quelconque admet un domaine à l'infini dans l'espace, les points de ce domaine à l'infini (c'est-à-dire les points pour lesquels r est supérieur à un nombre donné M arbitrairement grand) peuvent être considérés comme la représentation géométrique des points de l'univers situés à très grande distance des masses. Dans ce domaine à l'infini, l'univers doit être sensiblement euclidien, puisque toute masse élémentaire qui y est introduite peut être regardée comme isolée. Pour un certain choix du système de coordonnées (x^λ) et pour des valeurs de r suffisamment grandes, le ds^2 extérieur doit ainsi être très voisin du ds^2 euclidien (1) :

$$ds^2 = \delta_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu \qquad \text{avec} \qquad \delta_{\lambda\mu} \begin{cases} = 0 \text{ pour } \lambda \neq \mu \\ = -1 \text{ pour } \lambda = \mu = i \\ = 1 \text{ pour } \lambda = \mu = 4 \end{cases}$$

Il apparaît donc comme naturel de supposer qu'il existe, pour les espaces-temps extérieurs admettant un domaine à l'infini, un système de coordonnées (x^λ) régulier dans ce domaine à l'infini et tel que les potentiels $g_{\lambda\mu}$ correspondants tendent uniformément vers les quantités $\delta_{\lambda\mu}$ lorsqu'on s'éloigne à l'infini sur les sections d'espace d'une région (R).

Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que l'espace-temps extérieur considéré admet un *comportement asymptotique euclidien* (2).

4. Les hypothèses fondamentales. — Conformément aux considérations précédentes, nous n'envisagerons, dans ce chapitre, que des espaces-temps réguliers partout satisfaisant, pour un certain choix du système de coordonnées, à l'une ou à l'autre des deux hypothèses suivantes :

1° L'espace-temps est tel que les sections d'espace soient des espaces clos, sans frontières.

2° L'espace-temps admet un domaine à l'infini dans l'espace et, dans ce domaine, un comportement asymptotique euclidien.

Nous supposerons de plus, dans ce dernier cas, qu'il existe au moins un point à distance finie pour lequel g_{44} est inférieur ou égal à 1 ; il en est par exemple ainsi lorque, au voisinage de l'infini g_{44} est de la forme :

$$g_{44} = 1 - \varepsilon_{44}$$

ε_{44} étant un nombre positif tendant vers zéro quand on s'éloigne à l'infini. Lorsque l'espace-temps considéré est mis sous forme orthogonale, l'interprétation physique de cette condition est immédiate : dans le domaine à l'infini et pour le système de coordonnées considéré (qui est quasi-galiléen (3) dans ce domaine), la vitesse de la lumière est inférieure à C et tend asymptotique-

(1) La vitesse de la lumière est prise égale à l'unité.

(2) Pour plus de détails sur la notion de comportement asymptotique. Cf. CH. RACINE, thèse, p. 9-11.

(3) Cf. CHAZY. — *Op. cit.*, t. II, p. 125-126.

ment vers C quand on s'éloigne à l'infini (¹). Nous verrons que cette interprétation peut être considérée comme valable pour les diverses classes d'espaces-temps étudiées au cours de ce chapitre.

Nous désignerons désormais les deux hypothèses précédentes sous le nom d'*hypothèses* (H).

5. — Supposons que l'une des hypothèses (H) soit remplie, et considérons les diverses valeurs prises, sur une section d'espace déterminée, par la fonction g_{44} qui est partout positive ; la borne inférieure m de ces valeurs est effectivement atteinte en un point à distance finie de la section d'espace.

Il importe, pour la théorie que nous allons développer, de rapprocher de ce fait fondamental un théorème relatif aux opérations de type elliptique (²).

Désignons par a^{ij} et b^k des fonctions des variables x^i, supposées continues dans un certain domaine connexe $\mathcal{D}$; supposons de plus que, dans ce domaine, les a^{ij} satisfassent à des conditions de Hölder et que la forme quadratique qui admet les a^{ij} comme coefficients, soit définie positive. Considérons l'opération elliptique

$$\mathcal{F}V = a^{ij}\partial_{ij}V + b_k\partial^k V$$

relative à une fonction V régulière dans $\mathcal{D}$.

Théorème. — *Si $\mathcal{F}V$ est négatif ou nul dans le domaine connexe $\mathcal{D}$ et si la borne inférieure m de V est atteinte en un point de $\mathcal{D}$, la fonction V est partout égale à m dans $\mathcal{D}$.*

Si en particulier $\mathcal{F}V$ est identiquement nul dans $\mathcal{D}$ et si V atteint en un point de $\mathcal{D}$ soit sa borne inférieure, soit sa borne supérieure, la fonction V est nécessairement constante dans le domaine $\mathcal{D}$.

6. Les tenseurs d'espace Ω_{ij} et P_{ij}.

Considérons un espace-temps rapporté, dans un certain domaine, à un système de coordonnées régulier (x^λ) ; en tout point de ce domaine, l'élément linéaire est de la forme :

$$ds^2 = g_{44}(dx^4)^2 + 2g_{4i}dx^4dx^i + g_{ij}dx^idx^j$$

(¹) On pourra par exemple se reporter au ds^2 de Schwarzschild qui n'est d'ailleurs pas un ds^2 régulier partout ; pour ce ds^2, $g_{44} = 1 - \frac{2\mu}{C^2 r}$, μ étant essentiellement positif.

(²) Cf. G. Giraud. — Généralisation des problèmes sur les opérations de type elliptique (*Bull. des Sc. math.*, t. 56, 1932, p. 255-256).

où g_{44} est essentiellement positif et où $\overline{ds}^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ représente l'élément linéaire de la section d'espace S passant par le point considéré.

Posons :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\, \partial_4 g_{ij} \qquad P_{ij} = \frac{1}{2}\, (\partial_i g_{4j} - \partial_j g_{4i})$$

Lorsqu'on effectue un changement de coordonnées de la forme :

$$x^{i'} = f^{i'}(x^i) \qquad x^{4'} = x^4$$

les lignes de temps et les sections d'espace restent invariantes, les Ω_{ij} et les P_{ij} se transforment selon les formules :

$$\Omega_{i'j'} = A^{i\,j}_{i'j'}\, \Omega_{ij} \qquad P_{i'j'} = A^{i\,j}_{i'j'}\, P_{ij}$$

Par suite, si nous associons à chaque section d'espace S, l'espace de Riemann défini par la forme quadratique $g^{ij}\, X_i X_j$, les quantités Ω_{ij} peuvent être considérés comme définissant dans cet espace un tenseur symétrique et les quantités P_{ij} un tenseur antisymétrique. Nous désignerons respectivement par H^2 et L^2 les carrés des mesures de ces deux tenseurs :

$$H^2 = g^{ih} g^{jk} \Omega_{ij} \Omega_{hk} \qquad L^2 = \frac{1}{2}\, (g^{ih} g^{jk} - g^{ik} g^{jh}) P_{ij} P_{hk}$$

Le tenseur Ω_{ij} peut être regardé comme caractérisant la propagation dans le temps de l'élément linéaire $\overline{ds}^2$ des sections d'espace.

7. Equations d'Einstein dans le cas orthogonal. — Considérons un espace-temps extérieur rapporté, dans un certain domaine où il est régulier, à des lignes de temps et à des sections d'espaces orthogonales. Il lui correspond l'élément linéaire :

$$ds^2 = V^2 (dx^4)^2 + g_{ij} dx^i dx^j$$

Pour un tel ds^2, le tenseur P_{ij} est nul et le tenseur Ω_{ij} peut être considéré comme défini sur les sections d'espace, puisque les deux formes quadratiques $g_{ij}\, X^i X^j$ et $g^{ij} X_i X_j$ sont, dans ce cas, adjointes l'une de l'autre.

Posons :

$$\Omega^j_i = g^{jk} \Omega_{ik} \qquad K = \Omega^i_i$$

et désignons par $\overline{R}^j_i$ les composantes du tenseur de Ricci des sections d'espace. Avec ces notations, les équations d'EINSTEIN :

$$R_i^j = 0 \tag{7-2}$$

$$R_i^4 = 0 \tag{7-3}$$

$$R_4^4 - \frac{1}{2} R = 0 \tag{7-4}$$

vérifiées par l'espace-temps considéré, prennent la forme

$$\overline{R}_i^j + \frac{g^{jk}\nabla_k(\partial_i V)}{V} + \frac{1}{V}\partial_4\left(\frac{\Omega_i^j}{V}\right) + \frac{K}{V^2}\Omega_i^j = 0 \tag{7-2'}$$

$$\nabla_k\left[\frac{1}{V}(\Omega_i^k - g_i^k K)\right] = 0 \tag{7-3'}$$

$$\overline{R} + \frac{1}{V^2}(K^2 - H^2) = 0 \tag{7-4'}$$

Les équations (7-3′) et (7-4′) ne contiennent aucune dérivée d'indice 2.

L'équation $R_{44} = 0$ qui, dans le système précédent, peut remplacer l'équation (7-4′) se met ainsi sous la forme :

$$-\overline{\Delta}_2 V = \partial_4\left(\frac{K}{V}\right) + \frac{H^2}{V} \tag{7-5}$$

où $\overline{\Delta}_2 V$ représente le paramètre différentiel du second ordre relatif à une section d'espace.

8. Espace-temps statiques orthogonaux. — Nous ne considérons, dans ce paragraphe, que des espaces-temps statiques tels que les lignes de temps, trajectoires du groupe d'isométrie, soient les trajectoires orthogonales d'une famille d'hypersurfaces S. Si nous supposons ces espaces-temps rapportés aux hypersurfaces S et à leurs trajectoires orthogonales, leur élément linéaire peut toujours être mis sous la forme :

$$ds^2 = V^2(dx^4)^2 + g_{ij}dx^i dx^j \tag{8-1}$$

où les g_{ij} et V ne dépendent que des variables d'espace. Pour un tel ds^2 le tenseur d'espace Ω_{ij} est nul et les équations d'EINSTEIN (7-2′), (7-3′), (7-5) se réduisent aux équations :

$$\overline{R}_{ij} = -\frac{1}{V}\nabla_j(\partial_i V) \tag{8-2}$$

$$-\overline{\Delta}_2 V = 0 \tag{8-3}$$

Nous allons, relativement à cette classe importante d'espaces-temps, démontrer le théorème suivant dû à M. Charles RACINE [1].

THÉORÈME I. — *Considérons un espace-temps extérieur, statique et orthogonal, satisfaisant à l'une des hypothèses suivantes :*

1° *Les sections d'espace sont des espaces clos, sans frontière.*

2° *L'espace-temps admet un domaine à l'infini et, dans ce domaine à l'infini, un comportement asymptotique euclidien* [2].

Un tel espace-temps ne peut être régulier partout sans se réduire localement à l'espace-temps euclidien.

La métrique (8-1) étant supposée partout régulière, les potentiels et leurs dérivées premières et *secondes* sont des fonctions continues des variables d'espace, la fonction V est essentiellement positive et ne peut s'annuler en aucun point de l'espace ; de plus la forme quadratique $-\ g^{ij}\ X_iX_j$ est partout définie positive. Le premier membre $-\ \overline{\Delta}_2 V$ de l'équation (8-3) définit ainsi, dans tout domaine une opération elliptique $\mathcal{F}V$ satisfaisant aux hypothèses du paragraphe 5.

Dans le premier cas envisagé dans l'énoncé, V atteint effectivement sa borne inférieure en un point au moins de l'espace Dans le second cas, si V n'atteint pas sa borne inférieure en un point à distance finie de l'espace, cette borne inférieure, égale à l'unité, est atteinte à l'infini et c'est la borne supérieure de V qui est certainement atteinte en un point à distance finie. Mais il résulte de l'équation (8-3) et des considérations du paragraphe 5 que V ne peut admettre un tel extremum sans se réduire identiquement à une constante.

Dans les deux hypothèses envisagées la fonction V est donc constante dans tout domaine. Les $\overline{R}_{ij}$ étant nuls d'après les équations (8-2), le tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL relatif aux sections d'espace est identiquement nul. Les sections d'espace sont localement euclidiennes, ce qui démontre le théorème.

9. Espaces-temps statiques généraux. — Nous allons, dans ce paragraphe, démontrer la proposition B pour les espaces-temps extérieurs statiques les plus généraux. Nous les supposerons rapportés à des systèmes de référence (x^λ) tels que les lignes de temps

---

(1) Cf. CH. RACINE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 192, p. 1533.

(2) La partie des hypothèses (H) relative au signe à l'infini de $g_{44} - 1$ est ici inutile.

soient les trajectoires des groupes d'isométrie, les potentiels $g_{\lambda\mu}$ correspondants étant indépendants de la variable temporelle x^4.

Si nous posons, pour simplifier les notations :

$$g_{44} = \mathrm{U}$$

l'élément linéaire d'un tel espace-temps s'écrit :

$$(9\text{-}1) \qquad ds^2 = \mathrm{U}(dx^4)^2 + 2g_{4i}dx^4dx^i + g_{ij}dx^idx^j$$

où U, g_{4i}, g_{ij} ne dépendent que des variables d'espace. L'équation d'Einstein $\mathrm{R}_{44} = 0$ prend alors la forme :

$$\partial_i\Gamma^i_{44} + \Gamma^\lambda_{\lambda i}\Gamma^i_{44} - \Gamma^\mu_{4\lambda}\Gamma^\lambda_{4\mu} = 0$$

où

$$\Gamma^i_{44} = -\frac{1}{2}g^{ij}\partial_{ij}\mathrm{U}$$

Il vient par conséquent :

$$-\frac{1}{2}g^{ij}\partial_{ij}\mathrm{U} + a^i\partial_i\mathrm{U} = \Gamma^j_{4i}\Gamma^i_{4j}$$

les a^i désignant des fonctions des variables x^i continues dans tout domaine où (9-1) est régulier. Un calcul immédiat montre que (1) :

$$\Gamma^j_{4i}\Gamma^i_{4j} = -\mathrm{L}^2 + b^i\partial_i\mathrm{U}$$

les b^i étant des fonctions analogues aux a^i. Il en résulte que la fonction U vérifie une équation de la forme :

$$(9\text{-}2) \qquad -\frac{1}{2}g^{ij}\partial_{ij}\mathrm{U} + c^i\partial_i\mathrm{U} = -\mathrm{L}^2$$

les fonctions c^i étant continues dans tout domaine où (9-1) est régulier.

Ce résultat étant établi, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème II. — *Si un espace-temps extérieur statique du type le plus général satisfait à l'une des hypothèses (H), il ne peut être régulier partout sans se réduire localement à l'espace-temps euclidien* (2).

---

(1) Plus généralement, pour un espace-temps quelconque, on a l'identité :

$$\Gamma^j_{4i}\Gamma^i_{4j} = \mathrm{H}^2 - \mathrm{L}^2 + b^i\partial_i\mathrm{U}$$

Cette identité nous sera utile pour la démonstration du théorème IV (cf. par. 12).

(2) Ce théorème et le théorème IV (cf. ci-dessous, par. 12) ont fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus (cf. *C. R. Ac. Sc.*, t. 206, 1938, p. 313).

Si l'espace-temps (9-1) rapporté au système de coordonée (x^λ) est partout régulier, les potentiels et leurs dérivés premières et secondes sont des fonctions continues des variables d'espace, U est une fonction essentiellement positive, ne s'annulant en aucun point de l'espace ; de plus la forme quadratique $-\frac{1}{2} g^{ij} X_i X_j$ est partout définie positive. Dans ces conditions, le premier membre de l'équation (9-2) définit dans tout domaine une opération elliptique $\mathcal{F}U$ satisfaisant aux hypothèses du paragraphe 5 :

$$\mathcal{F}U = - L^2 \leqslant 0$$

Or, l'une des hypothèses (H) étant remplie, la fonction U atteint effectivement sa borne inférieure en un point à distance finie de l'espace. Il en résulte, d'après le théorème énoncé au paragraphe 5, que la fonction U est constante dans tout domaine et que par suite L^2 est identiquement nul :

$$P_{ij} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial_i g_{4j} = \partial_j g_{4i}$$

Il est donc possible de trouver une fonction θ (x^1, x^2, x^3) ne dépendant que des variables d'espace et telle que :

$$g_{4i} = \partial_i \theta$$

La fonction θ est ainsi définie dans tout l'espace à une constante additive près, ce qui est sans importance pour la suite.

Effectuons le changement de coordonnées :

$$x^1 = x^{1'} ; \quad x^2 = x^{2'} ; \quad x^3 = x^{3'} ; \quad x^4 = x^{4'} - \frac{1}{U} \theta(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$$

Dans ce changement de coordonnées, les lignes de temps ne sont pas modifiés, les potentiels se transforment selon les formules :

$$\begin{cases} g_{i'j'} = g_{ij} - \frac{1}{U} g_{4i} g_{4j} \text{ pour } \begin{cases} i = i' \\ j = j' \end{cases} \\ g_{4'i'} = g_{4i} - \partial_i \theta = 0 \text{ pour } i = i' \\ g_{4'4'} = g_{44} = U = \text{const.} \end{cases}$$

L'espace-temps considéré admet donc, dans le système de coordonnées $(x^{\lambda'})$ l'élément linéaire statique et orthogonal :

$$ds^2 = U(dx^{4'})^2 + g_{i'j'} dx^{i'} dx^{j'}$$

Le potentiel U étant constant, il résulte alors des équations (8-2) que les variétés $x^{4'} = $ const. sont localement euclidiennes, ce qui démontre le théorème.

10. Les espaces-temps extérieurs conformes à des espaces-temps statiques. — Un espace-temps extérieur est conforme à un espace-temps statique lorsque son élément linéaire peut, pour un certain choix du système de coordonnées, être mis sous la forme :

$$ds^2 = e^{2\theta} d\sigma^2$$

où $d\sigma^2$ désigne un élément linéaire statique et θ une fonction de point arbitraire.

L'importance de ces espaces-temps tient à une circonstance que nous avons déjà signalée à diverses reprises : les deux éléments linéaires ds^2 et $d\sigma^2$ définissant, en chaque point de l'univers, un même cône élémentaire C, les rayons gravifiques et surfaces d'onde gravifiques, relatifs, à l'espace-temps extérieur considéré, coïncident avec les éléments analogues associés à l'espace-temps statique d'élément linéaire $d\sigma^2$. Si

$$x^4 = f(x^1, x^2, x^3)$$

représente une surface d'onde quelconque relative au ds^2, toutes les variétés

$$x^4 - C = f(x^1, x^2, x^3)$$

où C désigne une constante arbitraire, sont aussi surfaces d'onde pour le ds^2.

Nous dirons qu'un espace-temps conforme à un espace-temps statique est à *expansion convexe* dans une région déterminée de l'univers, lorsque, en tout point de cette région, $\partial_{44}\theta$ est négatif ou nul. Il est clair que la condition ainsi posée est invariante dans tout changement de coordonnées conservant le caractère statique de $d\sigma^2$ (1). Dans les deux paragraphes qui vont suivre, nous n'envisagerons que les espaces-temps qui sont *partout* (dans l'espace) à *expansion convexe.*

11. Espaces-temps extérieurs conformes à des espaces-temps statiques orthogonaux. — Nous allons, tout d'abord, étudier le cas où l'espace-temps extérieur considéré est conforme à un espace-temps statique orthogonal (2) ; il admet alors, pour un choix

(1) C'est-à-dire dans tout changement de coordonnées ne modifiant pas les lignes de temps et tel que

$$x^{4'} = A(x^1, x^2, x^3)\, x^4 + B(x^1, x^2, x^3)$$

cf. chapitre 1, 2e partie, 14.

(2) Certains résultats de ce paragraphe ont été publiés dans une Note aux *Comptes rendus* (Cf. C. R., Acad. Sc., t. 206, 1938, p. 157)

déterminé du système de coordonnées, l'élément linéaire :

(11-1) $$ds^2 = e^{2\theta}d\sigma^2 = V^2(dx^4)^2 + g_{ij}dx^i dx^j$$

Les composantes Ω_{ij} du tenseur de propagation de l'espace sont proportionnelles aux g_{ij} :

$$\Omega_{ij} = g_{ij}\partial_4\theta \qquad \Omega_i^j = g_i^j\partial_4\theta$$

En contractant il vient :

$$H^2 = 3(\partial_4\theta)^2 \qquad K = 3\partial_4\theta$$

L'équation d'Einstein (7-5) prend ainsi la forme :

(11-2) $$-\overline{\Delta}_2 V = 3\,\frac{\partial_{44}\theta}{V}$$

Nous démontrerons, en premier lieu, le théorème suivant :

Théorème III. — *Si un espace-temps extérieur, conforme à un espace-temps statique orthogonal, est à expansion convexe dans le temps et satisfait à la seconde hypothèse (H), il ne peut être régulier partout sans se réduire localement à l'espace-temps euclidien.*

Si la métrique (11-1) est partout régulière dans une région (R), la fonction V est, dans cette région, essentiellement positive et admet des dérivées secondes continues relativement aux variables d'espace. Dans ces conditions, le premier membre $-\overline{\Delta}_2 V$ de l'équation (11-2) définit sur chaque section d'espace de (R) une opération de type elliptique vérifiant les hypothèses du paragraphe 5 : l'espace-temps étant à expansion convexe dans le temps $-\overline{\Delta}_2 V$ est, partout dans (R), négatif ou nul. Or, d'après la seconde hypothèse (H), la fonction V, sur chaque section d'espace, atteint effectivement sa borne inférieure en un point à distance finie. Cette fonction est par suite indépendante des variables d'espace et, comme elle prend à l'infini la valeur 1, elle est partout égale à 1 dans (R). L'espace-temps considéré est donc nécessairement statique, ce qui démontre le théorème.

Si l'on suppose maintenant que (11-1) admet des sections d'espace qui soient des espaces clos, sans frontière, quelques difficultés se présentent. L'espace-temps considéré étant toujours à expansion convexe, le raisonnement précédent montre que V est encore indépendant des variables d'espace et que par suite :

$$\partial_{44}\theta = 0 \qquad \theta = \alpha(x^1, x^2, x^3)x^4$$

Les équations (7-2′) et (7-3′) s'écrivent alors :

$$\overline{R}_i^j = -\frac{2\alpha^2}{V^2} g_i^j \qquad \partial_i \alpha = 0$$

α est donc une constante absolue et les sections d'espace admettent des directions principales totalement indéterminées. Mais rien ne nous permet d'affirmer, dans l'état de nos hypothèses, que la constante α est nulle. Cette constante serait nulle et les sections d'espace localement euclidiennes si l'on supposait non seulement que $\partial_{44}\theta$ est partout négatif ou nul mais encore qu'il existe une constante positive β telle que $\partial_{44}\theta + \beta(\partial_4\theta)^2$ soit partout négatif ou nul. Nous verrons que pour $\beta = 1$ c'est là un cas particulier d'un théorème applicable à des espaces-temps extérieurs beaucoup plus généraux.

En résumé, dans l'une et l'autre des hypothèses (H), un espace-temps extérieur, conforme à un espace-temps statique orthogonal, ne peut être régulier partout s'il est tel que $\partial_{44}\theta$ soit essentiellement négatif (non nul).

12. Espace-temps extérieur conforme à un espace-temps statique général. — Considérons un espace-temps extérieur conforme à un espace-temps statique général : il admet, pour un certain choix du système de coordonnées, un élément linéaire de la forme :

$$ds^2 = U(dx^4)^2 + 2g_{4i}dx^4dx^i + g_{ij}dx^idx^j = e^{2\theta}d\sigma^2 \tag{12-1}$$

où $d\sigma^2$ représente un élément linéaire statique et U le potentiel g_{44}. De plus pour abréger nous désignerons désormais par θ' et θ'' les dérivées $\partial_4\theta$ et $\partial_{44}\theta$. Avec ces notations, il vient :

$$\partial_4 g_{\lambda\mu} = 2\theta' g_{\lambda\mu} \qquad \Omega_{ij} = \theta' g_{ij} \qquad H^2 = \theta'^2[2 + (g_{44}g^{44})^2]$$

$$\Gamma_{44}^{\lambda} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\partial_\mu U + 2\theta' g_4^\lambda \qquad \Gamma_{\lambda 4}^{\lambda} = 4\theta'$$

$$\partial_4 U = 2\theta' U \qquad \partial_{44} U = 2(\theta'' + 2\theta'^2)U$$

Nous n'envisagerons, dans ce paragraphe, que les espaces-temps pour lesquels il est possible de choisir la coordonnée x^4 de façon que *les sections d'espace soient*, *relativement au* ds^2, *des variétés isothermes* ; par suite :

$$\Gamma_{\lambda\mu}^4 g^{\lambda\mu} = 0 \tag{12-2}$$

Nous allons, pour un tel espace-temps, former explicitement l'équation d'EINSTEIN $R_{44} = 0$; nous prendrons cette équation sous la forme :

$$\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{44} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{44} = \partial_4 \Gamma^\lambda_{\lambda 4} + \Gamma^\mu_{4\lambda}\Gamma^\lambda_{4\mu} \tag{12-3}$$

et désignerons respectivement par C et D son premier membre et son second membre. Dans ces conditions :

$$C = -\frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}U + a^i\partial_i U - \frac{1}{2}(\partial_\lambda g^{4\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}g^{4\mu})\partial_4 U + 2(\theta'' + 4\theta'^2)$$

les a^i désignant des fonctions des x^λ continues dans tout domaine où (12-1) est régulier. Or :

$$\partial_\lambda g^{4\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}g^{4\mu} = -\Gamma^4_{\lambda\mu}g^{\lambda\mu} = 0$$

$$-\frac{1}{2} g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda\mu}U = -\frac{1}{2} g_{ij}\partial_{ij}U + c^i\partial_i U - 2(g^{4\lambda}\partial_\lambda\theta')U + g_{44}g^{44}(\theta'' - 2\theta'^2)$$

les c^i désignant des fonctions analogues aux a^i ; on a d'autre part, en dérivant (12-2) par rapport à x^4 :

$$g^{4\lambda}\partial_\lambda\theta' = 0$$

Au total nous obtenons pour C l'expression suivante :

$$C = -\frac{1}{2} g^{ij}\partial_{ij}U + d^i\partial_i U + \theta''(2 + g_{44}g^{44}) + 2\theta'^2(4 - g_{44}g^{44})$$

où d^i désigne la somme de a^i et de c^i.

Explicitons D de la même manière :

$$D = 4\theta'' + \Gamma^j_{4i}\Gamma^i_{4j} + 2\Gamma^4_{4i}\Gamma^i_{44} + (\Gamma^4_{44})^2$$

Or un calcul aisé montre que (1)

$$\begin{cases} \Gamma^j_{4i}\Gamma^i_{4j} = H^2 - L^2 + b^i\partial_i U = \theta'^2[2 + (g_{44}g^{44})^2] - L^2 + b^i\partial_i U \\ 2\,\Gamma^4_{4i}\Gamma^i_{44} = 2\theta'^2 g_{44}g^{44}(1 - g_{44}g^{44}) + e^i\partial_i U \\ (\Gamma^4_{44})^2 = \theta'^2(2 - g_{44}g^{44})^2 + f^i\partial_i U \end{cases}$$

Par suite :

$$D = -L^2 + h^i\partial_i U + 4\theta'' + 2\theta'^2(3 - g_{44}g^{44})$$

les b^i, e^i, f^i, h^i désignant des fonctions analogues aux a^e.

En reportant les expressions de C et D dans l'équation (12-3) on voit *que la fonction U doit vérifier une équation de la forme* :

$$-\frac{1}{2} g^{ij}\partial_{ij}U + k^i\partial_i U = -L^2 + \theta''(2 - g_{44}g^{44}) - 2\theta'^2 \tag{12-4}$$

(1) Se reporter à une note du paragraphe 9

les fonctions k^i étant continues dans tout domaine où (12-1) est régulier. De plus le coefficient de θ'' dans cette équation est essentiellement positif puisque :

$$2 - g_{44}g^{44} = 1 - \frac{g^{ij}g_{4i}g_{4j}}{g_{44}}$$

Ce résultat étant établi, nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Si un espace-temps extérieur, conforme à un espace-temps statique et à expansion convexe dans le temps, satisfait à l'une des hypothèses (H), s'il est de plus tel que ses sections d'espace soient des variétés isothermes, il ne peut être régulier partout sans se réduire localement à l'espace-temps euclidien.*

Si la métrique (12-1) est partout régulière dans une région (R), le premier membre de l'équation (12-4) définit sur chaque section d'espace de (R) une opération elliptique $\mathcal{F}$U satisfaisant aux hypothèses du paragraphe 5 ; l'espace-temps étant à expansion convexe dans le temps, $\mathcal{F}$U est, partout dans (R), négatif ou nul. Or d'après les hypothèses (H), sur chaque section d'espace la fonction U atteint effectivement sa borne inférieure en un point à distance finie. Il en résulte que cette fonction est indépendante des variables d'espace et que le second membre de l'équation (12-4) est identiquement nul, par suite :

$$\theta' \equiv 0$$

L'espace-temps considéré est donc nécessairement statique, ce qui démontre le théorème :

13. Espaces-temps quelconques réguliers partout. — Nous avons étudié jusqu'ici des espaces-temps extérieurs réguliers partout admettant certaines particularités géométriques simples : espaces-temps statiques et espaces-temps conformes à un espace-temps statique ; nous avons vu que, pour cette dernière classe d'espaces-temps, la condition d'être à expansion convexe dans le temps joue, au point de vue de la proposition B, un rôle fondamental. Nous sommes ainsi conduits à chercher s'il existe, pour des espaces-temps extérieurs quelconques, une condition présentant une significtion physique analogue et qui soit telle que les espaces-temps qui y satisfont vérifient la proposition B.

Nous supposerons que l'espace-temps extérieur considéré est rapporté à un système de coordonnées orthogonal régulier ; il admet alors l'élément linéaire :

$$ds^2 = V^2 (dx^4)^2 + g_{ij}\, dx^i dx^j \tag{13-1}$$

V et les g_{ij} satisfaisant aux équations (7-2′), (7-3′) et à l'équation (7-5) :

$$-\bar{\Delta}_2 V = \partial_4\left(\frac{K}{V}\right) + \frac{H^2}{V}$$

C'est sur cette dernière équation qu'en vertu de considérations des paragraphes 5-8-11 doit reposer essentiellement la démonstration de la proposition B. Nous allons transformer cette équation en explicitant le terme $\partial_4\left(\frac{K}{V}\right)$:

$$\frac{K}{V} = g^{ij}\frac{\Omega_{ij}}{V}$$

Si nous posons :

$$\Pi_{ij} = \frac{\Omega_{ij}}{V}$$

les Π_{ij}, comme les Ω_{ij}, définissent sur les sections d'espace un tenseur symétrique lié à la propagation dans le temps de ses sections d'espace et qui peut remplacer avantageusement, pour un espace-temps orthogonal, le tenseur Ω_{ij} ; avec ces notations, il vient :

$$\frac{K}{V} = g^{ij}\Pi_{ij} \qquad \partial_4\left(\frac{K}{V}\right) = g^{ij}\partial_4\Pi_{ij} - 2\frac{H^2}{V}$$

les $\partial_4\Pi_{ij}$ définissant encore un tenseur d'espace. L'équation (7-5) prend ainsi la forme :

$$-\bar{\Delta}_2 V = g^{ij}\partial_4\Pi_{ij} - \frac{H^2}{V}$$

Le second membre de cette équation contient, en dehors d'un terme essentiellement négatif ou nul, un terme qui peut être *à priori* de signe quelconque. Nous sommes donc amenés à imposer à l'espace-temps (13-1) une condition telle que ce terme soit lui aussi négatif ou nul. Une telle condition nous sera fournie par le lemme suivant :

14. Lemme. — *Si* $\varphi = a_{ij}\, X^i X^j$ et $\psi = b^{ij}\, X_i X_j$ *désignent* *deux formes quadratiques définies positives à trois variables, la quantité*

$$\delta = a_{ij}b^{ij} (i, j = 1, 2, 3)$$

est essentiellement positive (¹).

Nous désignerons par $\overline{\psi} = b_{ij}\, X^i X^j$ la forme réciproque de la forme ψ ; la forme $\overline{\psi}$ comme la forme ψ est nécessairement définie positive. Les deux cônes représentés, dans l'espace des variables X^i, par les équations $\overline{\psi} = 0$ et $\varphi = 0$ admettent un trièdre conjugué commun réel dont les arêtes sont les droites doubles des cônes décomposés appartenant au faisceau :

$$\varphi + \lambda\overline{\psi} = (a_{ij} + \lambda b_{ij}) X^i X^j = 0$$

Or un cône de ce faisceau ne peut contenir une direction réelle que s'il correspond à une valeur réelle et négative de λ. Il en résulte que l'équation aux λ des cônes décomposés :

$$\| a_{ij} + \lambda b_{ij} \| = 0$$

admet trois racines réelles et négatives ; leur somme $-\delta = -a_{ij}b^{ij}$ est donc essentiellement négative, ce qui démontre le lemme énoncé.

15. — Revenons à l'espace-temps extérieur considéré ; la fonction V correspondante satisfait à l'équation (13-2) que nous mettrons sous la forme

$$-\bar{\Delta}_2 V = -\delta - \frac{H^2}{V}$$

avec

$$\delta = -g^{ij}\partial_4\Pi_{ij}$$

La forme quadratique $-g^{ij} X_i X_j$ est définie positive. Nous supposerons que la forme quadratique $\partial_4\Pi_{ij}\, X^i X^j$, si elle ne se réduit pas identiquement à zéro, est elle aussi définie positive ; c'est là une condition invariante dans tout changement de coordonnées de la forme :

$$x^{i'} = f^{i'}(x^i) \qquad x^{4'} = x^4$$

et qui régit d'une manière simple l'expansion dans le temps des

(¹) Le résultat énoncé est valable quelque soit le nombre des variables des formes quadratiques considérées, mais il ne nous sera utile que dans le cas de trois variables.

sections d'espace de (13-1). Moyennant cette condition, la quantité δ est, en vertu du lemme précédent, essentiellement positive ou nulle et le second membre de (13-2) négatif ou nul.

Ce résultat étant établi, nous sommes en mesure de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Si un espace-temps extérieur orthogonal satisfait à l'une des hypothèses (H) et si la forme quadratique admettant les $\partial_4\Pi_{ij}$ pour coefficients est définie positive, l'espace-temps considéré ne peut être régulier partout sans se réduire localement à l'espace-temps euclidien.*

Si la métrique (13-1) est partout régulière dans une région (R), le premier membre $-\bar{\Delta}_2 V$ de l'équation (13-2) définit, sur chaque section d'espace de (R), une opération de type elliptique satisfaisant aux hypothèses du paragraphe 5 ; la forme quadratique admettant les $\partial_4\Pi_{ij}$ pour coefficients étant définie positive, $-\bar{\Delta}_2 V$ est, partout dans (R), négatif ou nul. Or d'après les hypothèses (H), sur chaque section d'espace la fonction V atteint effectivement sa borne inférieure en un point à distance finie. Il en résulte que la fonction V est indépendante des variables d'espace et que le second membre de (13-2) est identiquement nul, ce qui entraîne :

$$\Omega_{ij} = 0$$

Ainsi les potentiels g_{ij} ne dépendent que des variables d'espace. Effectuons alors sur (13-1) le changement de coordonnées régulier :

$$x^{i'} = x^i \qquad x^{4'} = \int V(x^4)dx^4$$

Les potentiels g_{ij} ne sont pas modifiés et la fonction V se trouve réduite à l'unité. L'espace-temps extérieur considéré est donc nécessairement statique, ce qui démontre le théorème.

Dans le cas particulier où l'espace-temps (13-1) est conforme à un espace-temps statique orthogonal, on a (notations du paragraphe 12)

$$\partial_4\Pi_{ij} = (\theta'' + \theta'^2)\,\frac{g_{ij}}{V}$$

Si la quantité $\theta'' + \theta'^2$ est partout négative ou nulle, la forme quadratique admettant les $\partial_4\Pi_{ij}$ pour coefficients est définie positive et le théorème V s'applique (¹) ; on retrouve ainsi, sous une forme moins serrée, les résultats du paragraphe 11 de ce chapitre.

16. — Supposons maintenant que l'on choisisse des variétés isothermes pour sections d'espace de (13-1) ; nous allons montrer que, dans ce cas, on peut remplacer, dans l'énoncé du théorème V, le tenseur d'espace $\partial_4\Pi_{ij}$ par le tenseur d'espace $\partial_4\Omega_{ij}$.

Les sections d'espace étant des variétés isothermes, la fonction V et la quantité K sont liées par la relation :

$$K = \frac{\partial_4 V}{V}$$

L'équation (7-5) peut par suite être mise sous la forme :

$$(16\text{-}1) \qquad -\bar{\Delta}_2 V = \frac{1}{V}\left[g^{ij}\,\partial_4\Omega_{ij} - \left(\frac{\partial_4 V}{V}\right)^2 - H^2\right]$$

Si la forme quadratique admettant les $\partial_4\Omega_{ij}$ pour coefficients est définie positive, le second membre de l'équation (16-1) est, en vertu du lemme du paragraphe 14, essentiellement négatif ou nul. Un raisonnement en tout point identique à celui du théorème V nous montre alors que l'espace-temps considéré, s'il est régulier partout, se réduit nécessairement à un espace-temps statique. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Si un espace-temps extérieur orthogonal satisfait à l'une des hypothèses (H) et si, les sections d'espace étant des variétés isothermes, la forme quadratique admettant les $\partial_4\Omega_{ij}$ pour coefficients est définie positive, l'espace-temps considéré ne peut être régulier partout sans se réduire localement à l'espace-temps euclidien.*

17. — Nous dirons qu'un espace-temps, extérieur ou non, est *normal* s'il satisfait aux hypothèses du paragraphe 16, c'est-à-dire si, les sections d'espace étant des variétés isothermes, la forme quadratique admettant les $\partial_4\Omega_{ij}$ pour coefficients est définie positive. Nous allons envisager dans ce paragraphe les espaces-temps extérieurs conformes à un espace-temps normal, c'est-à-dire les

(¹) La condition $\theta'' + \theta'^2 \leqslant 0$ peut être mise sous une forme plus simple ; si l'on pose $\Lambda = e^\theta$. cette condition s'écrit :

$$\Lambda'' \leqslant 0$$

espaces-temps extérieurs pour lesquels l'élément linéaire (13-1) peut être mis sous la forme :

$$ds^2 = e^{2\theta}\overline{ds}^2 = e^{2\theta}[\overline{V}^2(dx^4)^2 + \overline{g}_{ij}dx^i dx^j]$$

où $\overline{ds}^2$ définit un espace-temps normal.

Nous supposerons de plus que la quantité $\theta'' + \theta'^2$ est partout (dans l'espace) négative ou nulle, nous dirons dans ce cas que l'espace-temps extérieur considéré est à expansion convexe relativement à l'espace-temps normal.

Si nous posons :

$$\overline{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2}\,\partial_4 \overline{g}_{ij} \qquad\qquad \overline{K} = \overline{\Omega}^i_i$$

d'après nos hypothèses, la forme quadratique admettant les $\partial_4 \overline{\Omega}_{ij}$ pour coefficients est définie positive et :

$$\overline{K} = \frac{\partial_4 \overline{V}}{\overline{V}}$$

Il vient alors, par un calcul immédiat :

$$g^{ij}\partial_4 \Pi_{ij} = \frac{e^{-\theta}}{\overline{V}}\,[\overline{g}^{ij}\partial_4 \overline{\Omega}_{ij} - \overline{K}^2 + 3(\theta'' + \theta'^2)]$$

Sur cette expression, il apparaît clairement que la quantité $g_{ij}\,\partial_4 \Pi_{ij}$ est essentiellement négative ou nulle. Il en est donc de même pour le second membre de l'équation (13-2), ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème VII. — *Si un espace-temps extérieur orthogonal, satisfaisant à l'une des hypothèses* (*H*), *est conforme à un espace-temps normal et à expansion convexe relativement à lui, il ne peut être régulier partout sans se réduire localement à l'espace-temps euclidien.*

18. Espaces-temps réguliers partout et non localement euclidiens. — La longue étude qui précède nous a amené à imposer aux espaces-temps extérieurs considérés une condition limitant la propagation dans le temps des potentiels (conditions des théorèmes V, VI, VII). On pourrait se demander si une telle condition est vraiment nécessaire pour assurer la proposition (B). Nous pourrons répondre par l'affirmative si nous montrons qu'il existe effectivement des espaces-temps extérieurs, réguliers partout, satisfaisant à l'une des hypothèses (H) et qui ne sont pas localement euclidiens.

M. Charles RACINE, dans sa thèse, donne un exemple d'un tel espace-temps (1). Cet exemple qui, d'un point de vue purement analytique, est un succès (2), présente malheureusement l'inconvénient d'être d'une grande complication et la raison pour laquelle il réussit n'apparaît pas clairement.

Nous allons, dans les derniers paragraphes de ce chapitre, construire, par une méthode fort simple, des exemples d'espaces-temps extérieurs réguliers partout, à comportement asymptotique euclidien, et qui cependant ne sont pas partout localement euclidiens. Le principe de notre méthode sera le suivant : ayant construit un espace-temps extérieur (non euclidien), régulier dans un domaine à distance finie dans l'espace et s'étendant sur une épaisseur finie de temps, nous le prolongerons dans tout l'espace en le raccordant le long d'une variété caractéristique, avec un espace-temps euclidien. L'espace-temps formé par la juxtaposition de ces deux espaces-temps extérieurs sera ainsi régulier partout et à comportement asymptotique euclidien.

19. — Nous envisagerons, avec M. Georges DARMOIS (3) les éléments linéaires de la forme :

$$ds^2 = e^{2\gamma}dx^3dx^4 - e^{2\alpha}(dx^1)^2 - e^{2\beta}(dx^2)^2 \tag{19-1}$$

où les fonctions, α, β, γ, ne dépendent que des variables x^3 et x^4. Ces variables sont manifestement caractéristiques et le raccordement de deux des éléments linéaires considérés le long d'une de ces caractéristiques pourra s'effectuer de la manière la plus simple. Les éléments linéaires considérés définiront des espaces-temps extérieurs si les fonctions α, β, γ, satisfont aux trois conditions (4) :

(1) Cf. RACINE, *thèse*, p. 23-37.

(2) Dans l'exemple envisagé, les potentiels sont même des fonctions analytiques régulières des coordonnées employées. Cette particularité, qui ne se conserve naturellement pas lorsque l'on change ces coordonnées, ne présente d'ailleurs qu'un intérêt purement mathématique.

(3) Cf. G. DARMOIS, *op. cit.*, p. 13-14.

(4) Ces éléments linéaires se déduisent par un changement de variables simple des ds^2 statiques à symétrie axiale de LEVI-CIVITA et CHAZY ; cf. CHAZY : *sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité* (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1924, p. 17-38). En particulier les conditions (19-2) et (19-3) peuvent être déduites aisément des conditions classiques de LEVI-CIVITA (cf. G. DARMOIS, *op. cit.*, p. 35).

(19-2) $$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^3 \partial x^4} - \frac{1}{2(x^3 - x^4)}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x^3} - \frac{\partial\alpha}{\partial x^4}\right) = 0$$

(19-3) $$\begin{cases} \beta = -\alpha + \log(x^3 - x^4) + \text{const.} \\ \gamma = -\alpha + \int (x^3 - x^4)\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x^3}\right)^2 dx^3 - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x^4}\right)^2 dx^4\right] + \text{const.} \end{cases}$$

L'équation (19-2) n'est autre que l'équation E $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, classique en physique mathématique et qui s'intègre aisément par la méthode de Riemann. Si α est une solution de (19-2), β est connue et la fonction γ se détermine par une quadrature de différentielle totale.

Considérons en premier lieu la solution $\alpha = 0$, $\beta = \log(x^3 - x^4)$, $\gamma = 0$ des équations (19-2) et (19-3). Il lui correspond l'élément linéaire :

$$ds^2 = dx^3 dx^4 - (dx^1)^2 - (x^3 - x^4)^2 (dx^2)^2$$

élément linéaire qui définit manifestement un espace-temps euclidien ; il suffit, pour s'en rendre compte, d'effectuer le changement de variables :

(19-4) $$x^1 = z; \quad x^2 = \frac{\varphi}{2}; \quad x^3 = t + r; \quad x^4 = t - r$$

L'élément linéaire considéré prend alors la forme de Minkowski

(19-5) $$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 - r^2 d\varphi^2$$

où nous devons envisager r, φ, z comme des coordonnées cylindriques d'espace et où t représente le temps. L'espace tout entier peut d'ailleurs être obtenu en supposant que r est une variable essentiellement positive ou nulle, à condition de considérer φ comme une variable angulaire définie à un multiple de 2π près.

Nous sommes ainsi conduits à effectuer sur (19-1) le changement de variables (19-4), ce qui donne (1) :

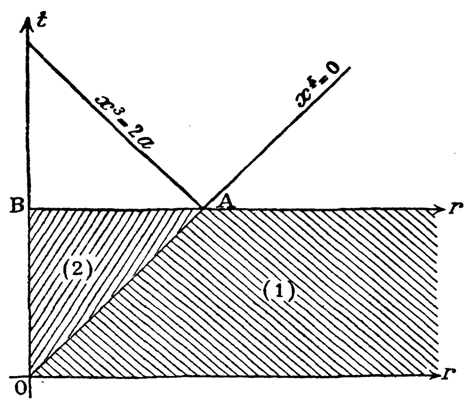
(19-6) $$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\gamma} dr^2 - e^{2\alpha} dz^2 - e^{-2\alpha + 2\beta_0} r^2 d\varphi^2$$

et à étendre à (19-6) l'interprétation des coordonnées donnée ci-dessus. Ayant ainsi défini, pour la classe d'espaces-temps considérée, ce que nous devons entendre par espace et temps, nous nous proposons de construire un espace-temps (19-6) régulier dans tout l'espace et sur l'épaisseur finie de temps

$$0 \leqslant t \leqslant a$$

(1) Dans l'équation (19-6) β_0 représente la constante arbitraire figurant dans l'expression (19-3) de β.

a désignant un nombre positif donné d'ailleurs arbitraire. Le domaine de régularité désiré sera représenté, dans le plan des variables (r, t) par la demi-bande indéfinie limitée par les deux demi-droites Or ($t = 0$) et Br ($t = a$) et par le segment OB (cf. fig.). La caractéristique $x^4 = t - r = 0$, qui rencontre Br au point A ($r = t = a$) partage le domaine considéré en deux régions numérotées (1) et (2), la région (1) correspondant à $x^4 < 0$ et la région (2) à $x^4 > 0$. Si nous adoptons dans la région (1) l'élément linéaire euclidien (19-5), il nous faut alors construire un élément linéaire (19-6), non euclidien, régulier dans toute la région (2)



et se raccordant avec (19-5), le long de OA, au troisième ordre près.

20. — Considérons la fonction α définie dans le domaine :

$$0 \leqslant x^4 < x^3 \leqslant 2a$$

par les formules suivantes (1) :

$$(20,1) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \int_0^{x^4} u_{2a,y}\varphi(y)dy \\ u_{2a,y} &= \frac{2a - y}{\sqrt{(2a - x^4)(x^3 - y)}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma\right) \\ \sigma &= \frac{(2a - x^3)(x^4 - y)}{(2a - x^4)(x^3 - y)} \end{aligned} \right.$$

Dans ces formules, $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma\right)$ désigne, selon une notation clas-

(1) Cf. DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. II, p. 81-84.

sique, la série hypergéométrique associée aux quatre nombres considérés et $\varphi(y)$ une fonction arbitraire que nous supposerons négative ou nulle dans l'intervalle $(0,2a)$. La fonction α est régulière dans le domaine envisagé : lorsque y croît de 0 à x^4, σ décroît depuis la valeur $\frac{(2a - x^3)x^4}{(2a - x^4)x^3}$ (inférieure à 1) jusqu'à la valeur zéro, donc reste constamment inférieure à 1, ce qui assure la convergence de la série hypergéométrique introduite.

Les formules (20-1) ne sont qu'un cas particulier des formules classiques résultant de l'application à l'équation $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de la méthode de RIEMANN [1] ; la fonction α qu'elles définissent satisfait donc à l'équation (19-2). De plus, sur la caractéristique $x^4 = 0$, cette fonction se réduit identiquement à zéro. Nous allons donc chercher à quelles conditions il faut soumettre la fonction $\varphi(y)$, pour que, sur cette caractéristique, $\frac{\partial\alpha}{\partial x^4}$ et $\frac{\partial^2\alpha}{(\partial x^4)^2}$ soient aussi identiquement nuls. On a :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x^4} = \sqrt{\frac{2a - x^4}{x^3 - x^4}}\,\varphi(x^4) + \int_0^{x^4} \frac{\partial(u_{2a,y})}{\partial x^4}\,\varphi(y)dy$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{(\partial x^4)^2} = \sqrt{\frac{2a - x^4}{x^3 - x^4}}\,\varphi'(x^4) + \Lambda\varphi(x^4) + \int_0^{x^4} \frac{\partial^2(u_{2a,y})}{(\partial x^4)^2}\,\varphi(y)dy$$

Λ désignant une quantité qui reste finie pour $x^4 = 0$. Par suite $\frac{\partial\alpha}{\partial x^4}$ et $\frac{\partial^2\alpha}{(\partial x^4)^2}$ seront identiquement nuls le long de OA, si l'on suppose que pour $y = 0$ la fonction $\varphi(y)$ s'annule ainsi que sa dérivée première. Si cette condition est remplie, la fonction α et toutes ses dérivées partielles des deux premiers ordres s'annulent le long de la caractéristique $x^4 = 0$. La fonction γ, qui vérifie les formules :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{\partial x^3} &= -\frac{\partial\alpha}{\partial x^3} + (x^3 - x^4)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x^3}\right)^2 \\ \frac{\partial\gamma}{\partial x^4} &= -\frac{\partial\alpha}{\partial x^4} - (x^3 - x^4)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x^4}\right)^2 \end{aligned}\right.$$

est alors telle que toutes ses dérivées partielles des deux premiers ordres s'annulent pour $x^4 = 0$. Cette fonction dépendant encore d'une constante arbitraire, on peut toujours choisir cette cons-

[1] Cf. DARDOUX, *op. cit.*, t. II, p. 82-83, formules (20), (22), (23).

tante de façon que la fonction considérée se réduise identiquement à zéro pour $x^4 = 0$.

Les fonctions α et γ étant ainsi déterminées, l'élément linéaire extérieur :

$$ds^2 = e^{2\gamma}dt^2 - e^{2\gamma}dr^2 - e^{2\alpha}dz^2 - e^{-2\alpha}r^2d\varphi^2 \tag{20-2}$$

est régulier dans toute la région (2) sauf peut-être sur le segment OB ($r = 0$) et se raccorde avec (19-5) le long de OA au troisième ordre près.

Il reste à examiner la régularité de (20-2) sur le segment OB. Sur ce segment la fonction α est encore parfaitement définie, mais le discriminant de (20-2) s'annule. Cette singularité pourra être considérée comme une simple singularité polaire provenant du système de coordonnées utilisé, si l'on montre que la fonction $(\gamma + \alpha)$ se réduit identiquement à zéro le long de OB. Or :

$$\frac{\partial(\gamma + \alpha)}{\partial t} = (x^3 - x^4)\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x^3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x^4}\right)^2\right]$$

avec :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x^3} = -\sqrt{\frac{2a - x^4}{x^3 - x^4}}\,\varphi(x^4) + \mathrm{A}; \quad \frac{\partial\alpha}{\partial x^4} = +\sqrt{\frac{2a - x^4}{x^3 - x^4}}\,\varphi(x^4) + \mathrm{B}$$

A et B désignant deux quantités restant finies pour $x^3 = x^4$. Il en résulte que $\frac{\partial(\gamma + \alpha)}{\partial t}$ et par suite $(\gamma + \alpha)$ sont identiquement nuls le long de OB.

La métrique provenant de la juxtaposition des deux éléments linéaires (19-5) et (20-2) nous fournit donc un exemple d'une métrique extérieure, à comportement asymptotique euclidien (seconde hypothèse (H)), qui est partout régulière, sans être partout localement euclidienne.

21. — En résumé, au cours de ce chapitre, il nous est apparu de la manière la plus nette que, pour pouvoir assurer la proposition (B) pour une classe déterminée d'espaces-temps extérieurs, et par conséquent pour pouvoir considérer ces espaces-temps comme ayant véritablement un sens physique, il faut que les espaces-temps envisagés satisfassent à des conditions de deux types.

1° Des conditions relatives à la fermeture des sections d'espace et dont la signification physique est très claire (hypothèses (H)).

2° Des conditions relatives à la propagation dans le temps des potentiels. Nous avons été conduits à des conditions de ce genre par l'étude des espaces-temps extérieurs statiques ou conformes à un espace-temps statique qui vérifient la proposition (B). Les diverses conditions obtenues ont des expressions mathématiques peu différentes et des significations physiques analogues ; on peut dire en somme que les sections d'espace des espaces-temps envisagés doivent avoir une expansion relative dans le temps « suffisamment convexe ». Au cours du troisième chapitre, nous rencontrerons à nouveau des conditions de ce type.

CHAPITRE III

SUR LES SINGULARITÉS DU CHAMP EXTÉRIEUR

1. — Nous nous proposons dans ce chapitre de rechercher quelles conditions il faut adjoindre aux conditions d'EINSTEIN pour que la proposition A soit vérifiée, c'est-à-dire pour pouvoir affirmer l'existence de singularités du champ extérieur dans tout domaine meublable de ce champ. La méthode utilisée dans la suite pour établir des théorèmes d'existence relatifs à de telles singularités, nous a été suggérée par l'étude de la proposition correspondante en gravitation newtonienne. Nous nous permettrons donc, pour mieux mettre en lumière les points qui nous intéressent, de rappeler en quelques lignes les considérations très élémentaires que nous allons généraliser.

Désignons par U_e le potentiel newtonien associé à un champ extérieur quelconque ; il satisfait, dans tout domaine de régularité, à l'équation de LAPLACE :

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad.}\, U_e) = 0$$

Par suite si Σ désigne une surface fermée limitant un domaine où U_e est régulier, le flux à travers Σ du vecteur champ :

$$h = \mathrm{grad.}\, U_e$$

est certainement nul.

Supposons que dans un certain volume V de l'espace, limité à une surface S, on puisse introduire une masse matérielle concourant à produire hors de V le champ extérieur considéré. Le potentiel intérieur U_i, associé à cette distribution matérielle, est régulier dans V et satisfait en chaque point de V à l'équation de POISSON :

$$\mathrm{div.}\,(\mathrm{grad.}\, U_i) = 4\pi f \rho$$

où ρ désigne la densité de matière essentiellement positive. La compatibilité du champ extérieur avec la distribution matérielle considérée se traduit par le raccordement sur S, au second ordre près des deux potentiels U_e, et U_i, de telle sorte que sur S :

$$h = \text{grad. } U_e = \text{grad. } U_i$$

L'intégration de l'équation de Poisson dans le domaine V où U_i est régulier nous amène alors au théorème de Gauss.

$$\text{flux}_{\mathrm{S}}\, h = 4\pi f \iiint \rho dv$$

Il résulte immédiatement de l'équation précédente que, le flux du vecteur champ à travers la surface S étant essentiellement positif, le potentiel U_e ne peut être régulier dans V.

Pour étendre ce mode de démonstration au problème relativiste qui nous intéresse, nous sommes conduits à rechercher s'il existe des *vecteurs d'espace*, pouvant jouer le rôle de vecteur champ ne dépendant par conséquent que des potentiels et de leurs dérivées premières et dont la divergence soit essentiellement positive dans le cas d'un ds^2 intérieur et nulle — ou négative — dans le cas d'un ds^2 extérieur. Cette divergence devra par suite faire intervenir, d'une manière simple, certains des seconds membres des équations d'Einstein.

2. Equation d'Einstein scalaire dans l'espace. — Il est clair que la divergence d'un vecteur d'espace est une quantité présentant sur les sections d'espace le caractère scalaire, c'est-à-dire invariante par tout changement de coordonnées ne portant que sur les coordonnées d'espace. Parmi les équations d'Einstein, la seule qui présente ce caractère est l'équation relative à R_4^4 (1). Elle s'écrit dans le cas extérieur :

$$R_4^4 = 0 \tag{2-1}$$

et dans l'hypothèse du fluide parfait (2)

$$R_4^4 = \frac{1}{2}\chi[\rho(2u^4u_4 - 1) + 2p] \tag{2-2}$$

Le second membre de l'équation (2-2) est essentiellement positif ; en effet, si l'on tient compte du caractère unitaire du vecteur u^λ

(1) D'après notre convention habituelle, nous supposons ici que la variable x^4 est la variable présentant le caractère temporel.

(2) Cf. l'équation (17-1) du chapitre I.

le coefficient $(2u_4u^4 - 1)$ de la densité de matière dans (2-2) peut se mettre sous la forme :

$$2u^4u_4 - 1 = g^{44}(u_4)^2 - g^{ij}v_iu_j$$

La forme quadratique $g^{ij}\, u_i\, u_j$ étant définie négative, ce coefficient est positif et il en est de même du second membre de l'équation (2-2). Nous sommes ainsi conduits à essayer de faire jouer aux équations (2-1) et (2-2) les rôles respectivement joués, en gravitation newtonienne, par les équations de Laplace et de Poisson, et à faire apparaître dans R_4^4 la divergence d'un vecteur d'espace dont les composantes ne dépendent que des potentiels et de leurs dérivées premières.

3. Extension du théorème de Gauss. — Généralisant une remarque de M. E. T. Whittaker [1] relative aux ds^2 statiques orthogonaux, nous allons donner une identité permettant, grâce à un certain choix du vecteur champ h d'étendre le théorème de Gauss au cas statique le plus général [2]. Afin d'alléger les notations, nous conviendrons, dans les calculs qui vont suivre, de placer entre parenthèses des indices qui ne doivent être en aucun cas l'objet de dérivation covariante (indices morts) ; ainsi $\nabla_\alpha g^{\lambda(\mu)}$ sera défini par l'équation suivante :

$$\nabla_\alpha g^{\lambda(\mu)} = \partial_\alpha g^{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\alpha\rho} g^{\rho\mu}$$

Avec cette convention, l'identité (2-1) du premier chapitre, identité qui est relative à un ds^2 arbitraire, peut, pour tout vecteur v^λ, être mise sous la forme :

$$R_{\lambda\mu} v^\lambda = \nabla_\lambda[\nabla_{(\mu)} v^\lambda] - \nabla_\mu[\nabla_{(\lambda)} v^\lambda] \tag{3-1}$$

Dans cette identité, donnons à l'indice μ la valeur 4 et posons :

$$v^\lambda = g^{\lambda(4)} = \mathrm{grad}^\lambda x^4 \qquad h^\lambda = \nabla_{(4)} v^\lambda$$

Il vient :

$$R_4^4 = \nabla_\lambda h^\lambda - \nabla_4[\nabla_{(\lambda)} v^\lambda] \tag{3-2}$$

Évaluons le terme complémentaire $\nabla_4 \nabla[_{(\lambda)} v^{(\lambda)}]$; par un calcul facile on a successivement :

$$\nabla_{(\alpha)} v^\lambda = -\Gamma^4_{\alpha\mu} g^{\lambda\mu}$$

---

[1] Cf. E. T. Whittaker, *Proc. Roy. Soc. of London*, série A, 149, 1935, p. 384.

[2] On pourra aussi se reporter à une note aux C. R. (*C. R. Acad. Sc.*, t. 205, p. 25) où nous avons donné cette identité sous une forme légèrement différente.

et :

$$\nabla_4[\nabla_{(\lambda)}\rho^\lambda] = -\partial_4(\Gamma^4_{\lambda\mu}g^{\lambda\mu}) + \frac{1}{2}\Gamma^4_{\lambda\mu}\partial_4 g^{\lambda\mu}$$

Au total nous aboutissons à l'identité suivante :

$$\text{(3-3)} \qquad R^4_4 = \nabla_\lambda h^\lambda + \partial_4(\Gamma^4_{\lambda\mu}g^{\lambda\mu}) - \frac{1}{2}\Gamma^4_{\lambda\mu}\partial_4 g^{\lambda\mu}$$

où nous avons posé :

$$h^\lambda = -\Gamma^4_{4\mu}g^{\lambda\mu}$$

Notons en particulier que pour $\lambda = 4$, la composante h^4 est égale à $\frac{1}{2}\partial_4 g^{44}$.

4 — Supposons maintenant que le ds^2 considéré soit du type statique le plus général. L'identité (3-3) se réduit alors à la forme très simple :

$$R^4_4 = \nabla_\lambda h^\lambda$$

avec

$$h^i = -\Gamma^4_{4\mu}g^{i\mu} = \Gamma^i_{4\mu}g^{4\mu}; \quad h^4 = 0$$

Les quantités h^i définissent ainsi sur chaque section d'espace un vecteur d'espace h dont la divergence, calculée dans l'espace-temps est égale à R^4_4. Par suite si S désigne une hypersurface fermée limitant un volume V dans lequel le ds^2 considéré est régulier :

$$\text{(4-1)} \qquad \text{flux}_S\, h = \iiiint_V R^4_4 \sqrt{-g}\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4$$

Cette formule peut être considérée comme généralisant la formule qui, dans la théorie newtonienne de la gravitation, traduit le théorème de GAUSS. Elle va nous permettre de démontrer la proposition A dans le cas statique le plus général (1).

5. Existence de singularités matérielles dans le cas statique. — Supposons, en premier lieu, que nous nous donnions un champ intérieur *statique*, rapporté à ses lignes de temps et à des sections

(1) Il est clair que R^4_4 est encore égal à la divergence de h lorsque le ds^2 considéré est conforme à un ds^2 statique, les variétés x^4 = const. étant supposées isothermes (cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. 205, p. 25). Malheureusement, la composante h^4 ne se réduisant pas à zéro on ne peut se servir de cette remarque pour le problème qui nous intéresse.

d'espace correspondantes et proposons-nous d'étudier, pour un certain choix de l'hypersurface frontière, le champ extérieur associé.

Le caractère statique du champ intérieur considéré ne correspondra à aucune réalité physique si les lignes de temps, trajectoires du groupe d'isométrie du champ, sont susceptibles de sortir du tube d'univers auquel nous devons limiter ce champ. Il nous faudra donc définir ce tube d'univers par une hypersurface qui soit engendrée non seulement par des lignes de courant, mais encore par des lignes de temps, de façon qu'aucune ligne de temps ne puisse traverser cette hypersurface. Il est facile de réaliser une telle hypersurface. Donnons-nous, dans un domaine où le champ intérieur est régulier, une surface à deux dimensions engendrée par des lignes de courant (1) et par chaque point de cette surface, menons la ligne de temps passant par ce point. Nous définissons ainsi en général (2) une hypersurface S répondant à la question. Effectuons en effet un changement de coordonnées ne modifiant ni les lignes de temps ni les sections d'espace et tel que S soit définie par l'équation $x^3 = 0$; soient u^λ les composantes, dans ce nouveau système de coordonnées, du vecteur vitesse généralisée. Le champ considéré étant statique :

$$\partial_4 u^\lambda = 0$$

Par suite u^3, qui s'annule sur la surface à deux dimensions considérée, est identiquement nul sur S, ce qui nous montre que S est bien engendrée par des lignes de courant.

Ayant ainsi choisi l'hypersurface S limitant le champ intérieur, nous déterminerons le champ extérieur associé comme il a été indiqué à la fin du chapitre premier : le système de coordonnées que nous venons d'introduire définit sur S un système de trois coordonnées x^1, x^2, x^4 que nous compléterons, pour passer en coordonnées de Gauss, par la distance géodésique normale. Avec ces coordonnées, nous connaissons, pour le champ extérieur considéré, un système de conditions initiales porté par $S(x^3 = 0)$ et qui demeure invariant par le groupe :

$$\overline{x}^4 = x^4 + h$$

(1) On peut par exemple envisager les lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée, partout orientée dans l'espace.

(2) Il n'y a exception que dans le cas évident où les lignes de temps coïncident avec les lignes de courant.

Le champ extérieur unique, déterminé par ces conditions initiales, admet par suite le même groupe ; il est donc nécessairement statique, les lignes de temps qui lui correspondent se déduisant de celles qui engendrent S par la construction même de Gauss.

6. — Inversement supposons que nous nous donnions un champ extérieur statique du type le plus général, rapporté à un système de coordonnées (x^λ) et considérons dans ce champ un tube d'univers limité à une hypersurface $S(x^3 = 0)$ engendrée par des lignes de temps. Nous nous proposons de montrer que si ce tube d'univers peut être meublé par une distribution matérielle produisant un champ intérieur statique, le champ extérieur donné ne peut être supposé régulier à l'intérieur de S. Dans ce but nous allons tout d'abord étudier le raccordement le long de S des deux champs extérieur et intérieur considérés.

Nous désignerons par $(x^{\lambda'})$ le système de coordonnées de Gauss relatif au champ extérieur et associé sur S aux trois variables x^1, x^2, x^4. Le changement de coordonnées qui fait passer des variables (x^λ) aux variables $(x^{\lambda'})$ sera de la forme :

$$\begin{cases} x^i = f^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \\ x^4 = A(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})x^{4'} + B(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \end{cases}$$

et se réduira sur $S(x^3 = 0 ; x^{3'} = 0)$ à :

$$x^1 = x^{1'} \qquad x^2 = x^{2'} \qquad x^4 = x^{4'}$$

Dans ce changement de coordonnées on a en particulier :

$$\text{(6-1)} \qquad A^i_{4'} = 0 \qquad \partial_\mu A^i_{4'} = 0$$

Évaluons les valeurs sur S des composantes

$$h^i = g^{4\mu}\,\Gamma^i_{4\mu}$$

en fonction des potentiels correspondant aux coordonnées de Gauss et de leurs dérivées. En tenant compte de (6-1), un calcul facile nous conduit à l'expression suivante :

$$\text{(6-2)} \qquad h^i = A^{4i}_{\lambda' i'} g^{\lambda'\mu'} \Gamma^{i'}_{4'\mu'}$$

Envisageons maintenant le cas du champ intérieur. Celui-ci étant régulier par hypothèse dans tout le tube d'univers, nous supposerons qu'il est possible de le rapporter à un système de coordonnées régulier se raccordant le long de S au second ordre près avec le système de référence (x^{λ}) du champ extérieur. Dans ces conditions, si nous adoptons pour le champ intérieur les mêmes notations que pour le champ extérieur, les quantités $A^{\lambda}_{\lambda'}$, qui caractérisent le passage des coordonnées locales de Gauss $(x^{\lambda'})$ aux coordonnées globales (x^{λ}) et les quantités $g^{\lambda'\mu'}\Gamma^{i'}_{4'\mu'}$, qui ne dépendent que des potentiels correspondant aux coordonnées de Gauss et de leurs dérivées premières admettent le long de S les mêmes valeurs pour les deux champs. Il résulte alors de l'équation (6-2) valable pour le champ intérieur comme pour le champ extérieur, que le long de l'hypersurface considérée, les vecteurs h attachés aux deux champs coïncident.

7. — Ce résultat étant établi, nous sommes en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Dans un champ extérieur statique, tout tube d'univers qui peut être meublé statiquement contient nécessairement des singularités du champ extérieur.*

Soient Σ_e et Σ_e' deux sections d'espace arbitraires du champ extérieur, Σ_i et Σ_i' les deux sections d'espace du champ intérieur qui se raccordent avec les précédentes le long de la paroi S du tube d'univers. Nous désignerons par D le domaine à trois dimensions déterminé sur S par l'un ou l'autre groupe de sections d'espace et nous appellerons V_e et V_i les deux hypervolumes limités respectivement à D, Σ_e, Σ_e' et à D, Σ_i, Σ_i'. Appliquons à l'hypervolume V_i l'équation (4-1) dans le cas du champ intérieur ; le flux de h à travers les sections d'espace Σ_i et Σ_i' étant nul, cette équation prend ici la forme suivante :

$$\text{flux}_{D}\,\underline{h} = \iiiint_{V_i} R^4_4 \sqrt{-g}\,dx^1dx^2dx^3dx^4 \tag{7-1}$$

En vertu des considérations du paragraphe 2 R^4_4 est une quantité essentiellement positive ; par suite le flux à travers D du vecteur h est lui aussi essentiellement positif et ne peut, en aucun cas, se réduire à zéro. Or, si le champ extérieur considéré était régulier dans V_e, le même raisonnement appliqué au champ extérieur et à l'hypervolume V_e correspondant conduirait à la relation :

$$\text{flux}_{D}\underline{h} = 0 \tag{7-2}$$

Il en résulte que l'intégration qui figure au second membre de la formule (4-1) ne peut être effectuée dans le cas du champ extérieur et que par suite ce champ ne peut être supposé régulier dans le domaine V_e, ce qui démontre le théorème.

8. Singularités hors des masses d'un champ extérieur statique. — Considérons un modèle d'univers constitué par plusieurs masses en équilibre produisant à l'intérieur des tubes d'univers associés des champs intérieurs statiques et par suite, hors de ces masses, un champ extérieur lui-même statique. Un tel modèle d'univers, dans lequel des masses coexistantes restent en équilibre, ne doit pas *à priori* pouvoir être compatible avec l'axiomatique de la théorie de la gravitation.

D'après les considérations faites au paragraphe 24 du chapitre I nous sommes conduits à penser que cette incompatibilité doit se traduire de la manière suivante : le champ total constitué par les divers champs intérieurs et par le champ extérieur pris hors des masses ne peut être régulier partout. Or, d'après l'axiomatique de la théorie, les champs intérieurs sont toujours réguliers dans les domaines qu'ils meublent. Il en résulte que le champ extérieur devra présenter hors des masses certaines singularités. Ces singularités pourront d'ailleurs être envisagées comme constituant la représentation de l'énergie que l'on devra fournir pour maintenir en équilibre les masses considérées. Une telle circonstance a été signalée, pour le ds^2 à symétrie axiale par M. Charles Racine [1]. Nous nous proposons, dans le paragraphe qui va suivre, d'établir l'existence de telles singularités pour des champs statiques orthogonaux.

9. — Les masses matérielles figurant dans l'univers considéré seront en nombre fini et occuperont des domaines finis dans l'espace. La topologie de cet univers sera de plus telle que les sections d'espace du champ extérieur soient des espaces clos, sans frontière. Nous supposerons enfin que les champs intérieurs et le champ extérieur introduits peuvent être représentés par des espaces-temps statiques orthogonaux.

Les masses matérielles étant en équilibre, nous devrons annuler

---

(1) Cf. *Thèse*, p. 20-21.

les trois composantes d'espace de la vitesse généralisée et, pour chacune des masses considérées, les lignes de courant coïncideront avec les lignes de temps. Dans ces conditions, les sections d'espace associées aux divers champs se raccorderont le long des hypersurfaces frontières et nous pourrons appeler espace associé à l'univers la variété obtenue en limitant ces sections d'espace aux tubes frontières correspondants.

Moyennant les hypothèses qui précèdent, l'élément linéaire de l'univers peut s'écrire :

$$ds^2 = V^2(dx^4)^2 + g_{ij}dx^i dx^j$$

les différentes fonctions introduites ne dépendant que des coordonnées d'espace et la fonction V se réduisant à une constante [1], sur les frontières limitant les tubes d'univers. Au paragraphe 4 du présent chapitre, nous avons établi, pour les champs statiques, l'équation :

$$\nabla_\lambda h^\lambda = R_4^4 \tag{9-1}$$

Pour des champs statiques orthogonaux, on voit aisément que l'équation (9-1) peut être mise sous la forme :

$$-\frac{\overline{\Delta}_2 V}{V} = R_4^4 \tag{9-2}$$

où les notations sont identiques à celles du chapitre II. Dans le cas du champ extérieur et conformément à l'équation (8-3) du chapitre II (9-1) se réduit à (9-3)

$$-\overline{\Delta}_2 V = 0 \tag{9-3}$$

Plaçons-nous alors dans l'espace associé à l'univers et considérons les valeurs prises par la fonction V, relative au champ extérieur, à la surface des masses et hors des masses. Dans ce domaine fermé, la fonction V doit atteindre effectivement sa borne supérieure. *Or ceci ne peut avoir lieu sur aucune des surfaces frontières* (à deux dimensions). Désignons en effet par S une telle surface, la quantité — $\overline{\Delta}_2$ V relative au champ intérieur correspondant est, en vertu de l'équation (9-2), essentiellement positive à l'intérieur de S ; il en résulte que le flux du vecteur — grad. V à travers la surface S est certainement positif. Comme la fonction

---

[1] Les lignes de temps qui engendrent des hypersurfaces frontières sont en effet des géodésiques de ces variétés.

V est constante sur S, elle ne peut atteindre sa borne supérieure sur cette surface, car l'orientation de — grad. V en chaque point de S serait alors telle que le flux de ce vecteur à travers S soit négatif.

Ainsi la fonction considérée ne peut atteindre sa borne supérieure qu'en dehors des masses. Dans ces conditions, si le champ extérieur était régulier partout hors des masses, en vertu de l'équation (9-3) la fonction V se réduirait à une constante et le champ extérieur à un champ euclidien.

10. Existence de singularités matérielles dans un champ extérieur quelconque. — Dans les paragraphes qui vont suivre, nous nous proposons d'étudier l'existence de singularités matérielles pour un champ extérieur qui ne sera plus supposé statique. Le champ extérieur considéré étant rapporté à un système de coordonnées orthogonal, régulier pour ce champ, nous nous donnerons un tube d'univers limité à une hypersurface S engendrée par des lignes de temps et que nous pourrons toujours définir par l'équation $x^3 = 0$. Nous supposerons que ce tube d'univers peut être meublé par une distribution matérielle produisant un champ intérieur compatible avec le champ extérieur et nous rapporterons ce champ à un système de coordonnées orthogonal régulier, déterminant sur S le même système de référence que celui relatif au champ extérieur. Avec de tels systèmes de coordonnées, l'élément linéaire associé à l'un ou l'autre des deux champs peut s'écrire :

$$ds^2 = V^2 (dx^4)^2 + g_{ij}dx^i dx^j \tag{10-1}$$

Pour atteindre le but que nous nous proposons, il nous faut tout d'abord mettre sous une forme commode celle des équations d'Einstein qui présente dans l'espace le caractère scalaire. Au paragraphe 13 du chapitre II, nous avons démontré que pour un espace-temps extérieur orthogonal, cette équation peut s'écrire :

$$-\overline{\Delta}_2 V = g^{ij}\partial_4 \Pi_{ij} - \frac{H^2}{V} \tag{10-2}$$

C'est cette équation que nous adopterons pour le champ extérieur envisagé. Dans le cas du champ intérieur et conformément à l'équation (7-5) du chapitre II, l'équation d'Einstein considérée sera prise sous la forme :

$$-\overline{\Delta}_2 V = VR_4^4 + \partial_4\left(\frac{K}{V}\right) + \frac{H^2}{V} \tag{10-3}$$

11. — Dans tout ce qui suit, nous allons nous placer à un instant déterminé de la durée, instant que nous désignerons par x^4 et les hypothèses que nous allons expliciter pour le champ extérieur et pour le champ intérieur ne seront supposées remplies qu'à l'instant considéré. Les sections d'espace associées aux deux champs et à l'instant x^4 déterminent sur S un même domaine à deux dimensions que nous désignerons dans la suite par D.

Comme au chapitre II, nous supposerons qu'à l'instant x^4 et dans les domaines de régularité intérieurs au tube d'univers, la forme quadratique admettant pour coefficients les $\partial_4 \Pi_{ij}$ associés au champ extérieur est *définie positive* (expansion convexe dans le temps). Moyennant cette hypothèse, le second membre de l'équation (10-2) sera, dans ces domaines, essentiellement négatif.

Dans le cas du champ intérieur, l'étude correspondante du signe du second membre de (10-3) présente d'assez sérieuses difficultés du fait du terme $\partial_4\left(\frac{K}{V}\right)$ qui y figure. Mais nous allons voir que, moyennant des hypothèses très naturelles et présentant une signification physique claire, ce terme peut être considéré comme négligeable. Nous plaçant dans l'hypothèse du fluide parfait, nous supposons que dans le tube d'univers considéré la matière se meut lentement par rapport à la lumière. Cette hypothèse peut être traduite de la manière suivante : les composantes d'espaces u^i de la vitesse généralisée ainsi que leurs dérivées sont supposées très petites par rapport à la composante temporelle u^4.

Dans ces conditions l'équation de continuité :

$$\nabla_\lambda(\rho u^\lambda) = u^\lambda \partial_\lambda p \tag{11-1}$$

va nous fournir facilement une expression de la quantité $K = \Gamma^i_{i4}$ Développons l'équation (11-1) en mettant en évidence les composantes d'espaces u^i, il vient

$$\frac{\partial_i u^i}{u^4} + \left[\Gamma^\lambda_{\lambda i} + \frac{\partial_i(\rho - p)}{\rho}\right]\frac{u^i}{u^4} + \frac{\partial_4 u^4}{u^4} + \Gamma^\lambda_{\lambda_4} + \frac{\partial_4(\rho - p)}{\rho} = 0 \tag{11-2}$$

où

$$\Gamma^\lambda_{\lambda_4} = K + \frac{\partial_4 V}{V}$$

Or, en dérivant par rapport au temps la relation :

$$V^2(u^4)^2 + g_{ij}u^i u^j = 1$$

on obtient :

$$\frac{\partial_4 u^4}{u^4} = -\frac{\partial_4 V}{V} - \frac{1}{2V^2}\frac{\partial_4(g_{ij}u^i u^j)}{(u^4)^2}$$

On a ainsi en reportant dans (11-2) la valeur précédente de $\frac{\partial_4 u^4}{u^4}$

$$(11\text{-}3)\quad \frac{\partial_i u^i}{u^4} + \left[\Gamma^\lambda_{\lambda i} + \frac{\partial_i(\rho - p)}{\rho}\right]\frac{u^i}{u^4} - \frac{1}{2V^2}\frac{\partial_4(g_{ij}u^iu^j)}{(u^4)^2} + K + \frac{\partial_4(\rho - p)}{\rho} = 0.$$

L'équation (11-3) montre que, dans l'hypothèse faite, K et $\frac{\partial_4(\rho - p)}{\rho}$ ne diffèrent que de quantités très petites. Si nous supposons alors que le fluide qui meuble le tube d'univers est tel que les quantités $\frac{\partial_4(\rho - p)}{\rho}$ et $\frac{\partial_{44}(\rho - p)}{\rho}$ soient nulles ou négligeables, c'est-à-dire si nous supposons que le fluide est en régime permanent ou en régime voisin d'un régime permanent, les quantités K et ∂_4 K, seront elles-mêmes négligeables.

En résumé, relativement à la distribution matérielle fluide qui meuble le tube d'univers, nous ferons les deux hypothèses suivantes :

1° la vitesse de la matière, dans le tube d'univers donné, est très faible vis-à-vis de la vitesse de propagation de la lumière.

2° le fluide considéré est en régime permanent ou en régime très voisin d'un régime permanent.

Dans ces conditions le signe du second membre de (10-3) est le signe commun des termes VR^4_4 et $\frac{H^2}{V}$ ce second membre est donc essentiellement positif.

12. — Les deux champs considérés ont été rapportés à deux systèmes de coordonnées (x^λ) assurant la régularité de ces champs dans les domaines où cela est possible. Il nous faut donc étudier, comme dans le cas statique général, le raccordement des deux champs considérés à la frontière S du tube d'univers. Comme, dans ce cas nous supposerons que le système de coordonnées (x^λ) correspondant au champ intérieur se raccorde le long de S au second ordre près avec le système de référence relatif au champ extérieur. Avec des notations identiques à celles du par. 6, les quantités $A^{\lambda'}_\lambda$, qui caractérisent le passage des coordonnées (x^λ) aux coordonnées locales de Gauss ($x^{\lambda'}$) admettent sur S les mêmes valeurs pour les deux champs. Le long de S on a en particulier :

$$A^{i'}_4 = 0; \qquad A^{4'}_4 = 1$$

de plus, les sections d'espace associées à (x^{λ}) étant tangentes le long de S aux sections d'espace associées à $(x^{\lambda'})$

$$A_3^{4'} = 0$$

Dans ces conditions les potentiels $g_{\lambda\mu}$ associés aux deux champs et leurs dérivées prises tangentiellement à S admettent sur cette hypersurface les mêmes valeurs ; il en est ainsi en particulier pour le potentiel $g_{44} = V^2$ et il est facile de vérifier que cette conclusion peut s'étendre à la dérivée $\partial_3 g_{44}$. En effet si nous dérivons par rapport à x^3 l'équation :

$$g_{44} = A_4^{\lambda'} {}_4^{\mu'} g_{\lambda'\mu'}$$

il vient :

$$\partial_3 g_{44} = A_3^{\nu'} \partial_{\nu'} g_{4'4'} + 2 g_{4'4'} \partial_3 A_4^{4'}$$

avec

$$\partial_3 A_4^{4'} = \partial_4 A_3^{4'} = 0$$

Il en résulte immédiatement que, le long de l'hypersurface considérée, les vecteurs $\overline{\text{grad.}}$ V. calculés dans l'espace sont identiques pour les deux champs.

13. — Ce résultat étant établi, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème : *Si l'on peut, dans un champ extérieur donné, meubler un tube d'univers par une distribution matérielle produisant un champ intérieur compatible avec le champ extérieur et si ces deux champs satisfont respectivement aux hypothèses du par. 11, le champ extérieur considéré ne peut être régulier à l'intérieur du tube d'univers.*

Désignons en effet par V_e et V_i les volumes à trois dimensions délimités par le tube d'univers sur les sections d'espace associées, à l'instant x^4, aux deux champs considérés. Le champ intérieur étant régulier dans V_i, il résulte de l'équation (10-3), que le flux à travers D du vecteur d'espace ($-\overline{\text{grad.}}$ V) est essentiellement positif. Or, si le champ extérieur était régulier dans V_e, le flux à travers D de ce même vecteur devrait être négatif en vertu de l'équation (10-2). Le champ extérieur présente donc nécessairement des singularités dans le domaine envisagé.

14. — Résumons les résultats principaux de ce chapitre. Tout d'abord nous avons réussi à établir la proposition A pour des espaces-temps statiques du type le plus général ; pour de tels espaces-temps, les deux propositions A et B sont donc toujours satisfaites simultanément. C'est là, au point de vue du but que nous nous proposions, un résultat fondamental.

Ayant ensuite abordé l'étude des espaces-temps quelconques rapportés à des systèmes de coordonnées orthogonaux, nous avons été amenés à imposer aux espaces-temps extérieurs des conditions identiques à celles du chapitre II. Ainsi dans les différents cas étudiés, la liaison étroite qui existait *à priori* entre la proposition A et la proposition B se traduit, de la manière la plus satisfaisante, par une similitude profonde des méthodes et des résultats.

Relativement aux distributions matérielles introduites, nous avons été conduits à expliciter et à utiliser deux sortes d'hypothèses. D'une part la vitesse de chacune des particules matérielles qui constituent le fluide susceptible de meubler un tube d'univers, a été supposée petite vis-à-vis de la vitesse de propagation de la lumière ; d'autre part le fluide considéré a été supposé en régime très voisin d'un régime permanent. Au point de vue physique ces conditions apparaissent comme très naturelles et seront toujours réalisées dans un modèle d'univers effectif. Il semble d'ailleurs bien difficile de ne pas avoir recours à de telles hypothèses, la proposition considérée devant pouvoir aider à caractériser les univers qui correspondent à une réalité physique. Nous pourrons donc conclure en insistant sur une idée qui nous a guidé tout au long de ce travail, mais qui prend seulement maintenant tout son sens : malgré la généralité en apparence très grande des espaces et des tenseurs introduits dans la théorie de la relativité générale, les espaces-temps gravitationnels qui ont effectivement une signification physique présentent, tout au moins au point de vue de l'ordre de grandeur des éléments qui les caractérisent, de très remarquables particularités.

BIBLIOGRAPHIE

E. Cartan. — Sur les équations de la gravitation d'Einstein (*Journal de Mathématique*, t. 1, 1922, p. 141-203).

J. Chazy. — Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité (*Bull. Soc. math. de France*, 1924, p. 17-38). La théorie de la relativité et la mécanique céleste (Gauthier-Villars, 1930).

G. Darmois. — Les équations de la gravitation einsteinienne (*Mémorial des Sc. Math.*, fasc. XXV, 1927).

De Donder. — Introduction à la gravifique einsteinienne (*Mémorial des Sc. Math.*, fasc. VIII, 1925). Théorie des champs gravifiques (*Mémorial des Sc. Math.*, fasc. XIV, 1925).

Einstein. — *Sitzungsb. Berlin* 1918, p. 155-167. Quatre conférences sur la théorie de la relativité faites à l'université de Princeton (trad. M. Solovine : Gauthier-Villars, 1925).

Eisenhart. — *Transactions of the American Mathematical Society*, 1924, p. 206.

G. Giraud. — Généralisation des problèmes sur les opérations de type elliptique (*Bull. des Sc. math.*, t. 56, 1932, p. 235).

Lichnerowicz. — Notes aux *C. R. Acad. des Sc.*, t. 205, 1937, p. 25 ; t. 206, 1938, p. 157 ; t. 206, 1938, p. 313.

Racine. — Note aux *C. R. Acad. des Sc.*, t. 192, 1931, p. 1533. Le problème des n corps dans la théorie de la relativité (Thèse, Gauthier-Villars, 1934).

Stellmacher. — *Mathem. Annalen*, t. 115, 1937, p. 136-152.

E. T. Whittaker. — *Proc. Roy. Soc. of London*, Série A, t. 149, 1935, p. 384.

TABLE DES MATIÈRES

Imprimé par R. BUSSIÈRE, Saint-Amand (Cher), France. — 30-6-1939