

THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

L. CAGNIARD

Réflexion et réfraction des ondes sismiques progressives

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1939

http://www.numdam.org/item?id=THESE_1939__225__R1_0

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

14 F uf 57 (54), 8°

Série A, 1893

N° D'ORDRE :

2760

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

L. CAGNIARD

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

- 1^{re} THÈSE. — RÉFLEXION ET RÉFRACTION DES ONDES SÉISMiques PROGRESSIVES.
- 2^e THÈSE. — PROPAGATION DES INTUMESCENCES DANS LES RIVIÈRES.

Soutenues le 1939, devant la Commission d'Examen.

MM. Ch. MAURAIN *Président.*
VILLAT } *Examineurs.*
PÉRÈS }



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1939

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

<i>Professeurs honoraires</i>	}	H. LEBESGUE.	FREUNDLER.	P. PORTIER.	LÉON BERTRAND.
		Émile PICARD.	AUGER.	M. MOLLIARD.	WINTREBERT.
		LÉON BRILLOUIN.	DANGEARD.	L. LAPICQUE.	O. DUBOSQ.
		GUILLET.	LESPIEAU.	G. BERTRAND.	BOHN.
		PÉCHARD.	MARCHIS.	H. ABRAHAM.	RABAUD.
		VESSIOT.	Charles FABRY.		

PROFESSEURS

<p>M. CAULLERY..... † Zoologie (Evolution des êtres organisés).</p> <p>Émile BOREL..... † Calcul des probabilités et Physique mathématique.</p> <p>Jean PERRIN..... † Chimie physique.</p> <p>E. CARTAN..... † Géométrie supérieure.</p> <p>A. COTTON..... † Recherches physiques.</p> <p>J. DRACH..... † Analyse supérieure et Algèbre supérieure.</p> <p>Charles PÉREZ... † Zoologie.</p> <p>M. GUICHARD..... † Analyse et mesures chimiques.</p> <p>Paul MONTEL... † Théorie des fonctions et théorie des transformations.</p> <p>L. BLARINGHEM... † Botanique.</p> <p>G. JULIA..... † Mécanique analytique et Mécanique céleste.</p> <p>C. MAUGUIN..... † Minéralogie.</p> <p>A. MICHEL-LÉVY... † Pétrographie.</p> <p>N..... † Mécanique expérimentale des fluides.</p> <p>A. DENJOY..... † Application de l'analyse à la Géométrie.</p> <p>L. LUTAUD..... † Géographie physique et Géologie dynamique.</p> <p>Eugène BLOCH... † Physique.</p> <p>G. BRUHAT..... † Physique théorique et Physique céleste.</p> <p>E. DARMOIS..... † Enseignement de Physique.</p> <p>A. DEBIERNE..... † Physique générale et Radio-activité.</p> <p>A. DUFOUR..... † Physique (P. C. B.).</p> <p>L. DUNOYER..... † Optique appliquée.</p> <p>A. GUILLIERMOND. † Botanique.</p> <p>M. JAVILLIER..... † Chimie biologique.</p> <p>ROBERT-LÉVY... † Physiologie comparée.</p> <p>F. PICARD..... † Zoologie (Évolution des êtres organisés).</p> <p>Henri VILLAT... † Mécanique des fluides et applications.</p> <p>Ch. JACOB..... † Géologie.</p> <p>P. PASCAL..... † Chimie générale.</p> <p>M. FRÉCHET... † Calcul différentiel et Calcul intégral.</p> <p>E. ESCLANGON... † Astronomie.</p> <p>M^{me} RAMART-LUCAS. † Chimie organique.</p>	<p>H. BÉGHIN..... † Mécanique physique et expérimentale.</p> <p>Foch..... † Mécanique expérimentale des fluides.</p> <p>PAUTHENIER..... † Physique (P. C. B.).</p> <p>De BROGLIE..... † Théories physiques.</p> <p>CHRÉTIEN..... † Optique appliquée.</p> <p>P. JOB..... † Chimie générale.</p> <p>LABROUSTE..... † Physique du Globe.</p> <p>PRENANT..... † Anatomie et Histologie comparées.</p> <p>VILLEY..... † Mécanique physique et expérimentale.</p> <p>COMBES..... † Physiologie végétale.</p> <p>GARNIER..... † Mathématiques générales.</p> <p>PÉRES..... † Mécanique théorique des fluides.</p> <p>HACKSPILL..... † Chimie minérale.</p> <p>LAUGIER..... † Physiologie générale.</p> <p>TOUSSAINT..... † Technique Aéronautique.</p> <p>M. CURIE..... † Physique (P. C. B.).</p> <p>G. RIBAUD..... † Hautes températures.</p> <p>CHAZY..... † Mécanique rationnelle.</p> <p>GAULT..... † Chimie (P. C. B.).</p> <p>CROZE..... † Recherches physiques.</p> <p>DUPONT..... † Théories chimiques.</p> <p>LANQUINE..... † Géologie structurale et Géologie appliquée.</p> <p>VALIRON..... † Mathématiques générales.</p> <p>BARRABÉ..... † Géologie structurale et Géologie appliquée.</p> <p>MILLOT..... † Biologie animale (P. C. B.).</p> <p>F. PERRIN..... † Théories physiques.</p> <p>VAVON..... † Chimie organique.</p> <p>G. DARMOIS..... † Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique.</p> <p>CHATTON..... † Biologie maritime.</p> <p>AUBEL..... † Chimie biologique.</p> <p>Jacques BOURCART † Géographie physique et Géologie dynamique.</p> <p>M^{me} JOLIOT-CURIE. † Physique générale et Radio-activité.</p> <p>PLANTFOL..... † Biologie végétale (P.C.B.).</p> <p>CABANNES..... † Enseignement de Physique.</p> <p>GRASSÉ..... † Biologie animale (P.C.B.).</p> <p>PRÉVOST..... † Chimie (P.C.B.).</p> <p>BOULIGAND..... † Mathématiques.</p> <p>CHAUDRON..... † Chimie (P. C. B.).</p>
--	---

Secrétaire..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.

A MONSIEUR

HENRI VILLAT

MEMBRE DE L'INSTITUT

Hommage de profonde
et respectueuse reconnaissance.

A MONSIEUR

HENRY GALBRUN

ACTUAIRE DE LA BANQUE DE PARIS ET DES PAYS-BAS

**Hommage de gratitude
et de respectueuse affection.**

A MESSIEURS

M. BRILLOUIN

C. MAURAIN

P. LANGEVIN

L. DE BROGLIE

G. BRUHAT

J. PÉRÈS

**En témoignage
de ma reconnaissance
respectueuse.**

AVANT-PROPOS

C'est un truisme d'énoncer que toute la science sismologique consiste dans l'étude de la propagation *d'ondes progressives*. Un séisme est déterminé en effet par une rupture soudaine d'équilibre de l'écorce terrestre dans certaine région du globe, et il se manifeste par l'extension progressive aux régions avoisinantes du mouvement provoqué par la perturbation initiale.

L'étude théorique de la propagation d'une onde conduit à la recherche des solutions d'une équation ou d'un système d'équations aux dérivées partielles, auxquelles sont adjointes certaines conditions aux limites et certaines conditions initiales.

Cependant, en dehors de bien rares exceptions, correspondant à des problèmes particulièrement simples, les méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles ne permettent pas d'obtenir les solutions véritables, complètes, « synthétiques » que le physicien désire.

C'est la raison principale pour laquelle les ouvrages de Sismologie théorique se bornent le plus souvent à décrire des états de *régime harmonique permanent*, analogues à ceux qu'on est conduit à envisager par exemple dans l'étude du rayonnement d'une antenne d'émission radiotélégraphique.

Le problème de l'état de régime harmonique permanent est en effet beaucoup plus simple que celui de l'onde progressive car, dans l'hypothèse que les élongations s'expriment par des fonctions sinusoïdales du temps, les équations du problème, supposées linéaires et homogènes, font place à de nouvelles d'où la variable temps disparaît. Ce problème

de l'état de régime harmonique permanent n'est d'ailleurs qu'un cas particulier, plus exactement un cas limite du problème de l'onde progressive et ne peut, même en l'absence d'ondes dites stationnaires, apporter que des renseignements bien incomplets et incertains sur le mécanisme général de la propagation : les physiciens font trop souvent une extrapolation hasardeuse en attribuant aux notions de vitesse de phase, de groupe, de propagation d'énergie une portée qu'elles n'ont pas nécessairement et en essayant de prévoir, à partir des formules de l'état *permanent*, quelle peut être l'allure du phénomène *transitoire*, c'est-à-dire de l'onde progressive.

Certes, en sommant des solutions sinusoïdales sous la forme d'une intégrale de Fourier on peut, lorsque les équations sont linéaires, espérer obtenir la solution du problème de propagation. Encore conviendrait-il — ce qu'on passe généralement sous silence — de vérifier après coup la correction du procédé en montrant par exemple que les dérivations sous le signe somme sont légitimes. Ce point supposé acquis, il subsiste cette difficulté que l'expression d'une fonction sous forme d'une série ou d'une intégrale de Fourier ne permet que très difficilement d'en discuter les propriétés ou d'en effectuer le calcul numérique.

On parvient certainement à une analyse beaucoup plus intéressante des phénomènes de propagation lorsque, à la suite de Hugoniot, on définit une surface de front d'onde comme le siège d'une discontinuité cinématique. On sait que les conséquences de cette définition ont été développées systématiquement par Hadamard ⁽¹⁾ dans ses « Leçons sur la propagation des ondes ». Cette manière d'envisager les problèmes de propagation est très élégante et très générale. Il convient cependant de remarquer, d'une part que le front d'onde n'est pas nécessairement le siège d'une discontinuité cinématique, d'autre part que la recherche des surfaces de front d'onde, de leur forme et de la grandeur de la discontinuité cinématique dont elles sont éventuellement le siège ne saurait constituer que l'étude d'une *propriété isolée*, généralement pas la plus intéressante, des fonctions par lesquelles peut s'exprimer la *solution complète*.

(1) J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique* (Hermann, Paris, 1900).

Notre but et notre méthode sont bien différents. Ils visent la découverte de solutions complètes et rigoureuses, « synthétiques », permettant une discussion approfondie, numérique s'il en est besoin, de certains problèmes assurément schématiques, mais néanmoins choisis parmi les plus typiques de la propagation d'une onde. C'est ainsi que le présent ouvrage traite de la solution et de la discussion du problème suivant :

« Deux milieux homogènes, isotropes, élastiques, indéfinis, sont séparés par une surface plane de contact. Dans l'un des milieux prend naissance une onde séismique progressive initialement sphérique, isotrope et de condensation. On se propose d'étudier ce que le phénomène devient à partir de l'instant où le *front avant* de l'onde incidente vient heurter la surface de séparation des deux milieux. »

A cause de son importance théorique, qui déborde la pure Séismologie, ce problème n'est pas nouveau. Il a été abordé, une seule fois d'ailleurs, il y a 35 ans, par Lamb ⁽¹⁾, dans un mémoire célèbre.

La présente étude sera plus générale que celle de Lamb, pour les raisons suivantes :

1° L'un des milieux de Lamb était le vide. Nos deux milieux seront quelconques.

2° Lamb plaçait l'origine de la perturbation *sur* la surface de séparation. Nous la placerons au sein d'un des milieux.

3° Lamb se bornait à étudier le mouvement des points situés *sur* la surface de séparation. Nous étudierons le mouvement d'un point quelconque choisi n'importe où au sein des deux milieux.

En raison de ce degré de généralité que ne revêtait pas le mémoire de Lamb, nous ferons apparaître plusieurs résultats nouveaux, parmi lesquels nous citerons :

1° Le mécanisme de la formation d'ondes à front conique lors de la réflexion totale. Ce curieux phénomène fut découvert empiriquement

(1) H. LAMB, *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid* (*Philos. Trans. of the Roy. Soc. of London*, 203 A, 1904, p. 1 à 42).

lors des premières tentatives de prospection par la méthode sismique, mais, en dépit d'une volumineuse littérature dans les revues spécialisées, il ne semble pas avoir reçu jusqu'à présent aucune explication satisfaisante.

2° La nature, peut-être assez inattendue, des discontinuités cinématiques dont les divers fronts d'onde peuvent être le siège.

3° La description des propriétés et de la structure de la pseudo-onde superficielle progressive dite *Onde de Rayleigh*.

4° L'existence d'autres pseudo-ondes superficielles progressives, d'un type distinct de celui de l'Onde de Rayleigh.

5° L'existence de pseudo-ondes de types variés, se propageant à l'intérieur des milieux et non plus le long de leur intersurface.

Nota. — L'auteur a traité, par cette même méthode, quatre autres problèmes typiques de propagation d'ondes progressives :

L. CAGNIARD, *Diffraction d'une onde progressive par un écran en forme de demi-plan* (*Journal de Phys.*, VII, t. 6, 1935, p. 310 et 369).

L. CAGNIARD, *Hydrodynamique fluviale. Régimes variables* (*Revue générale de l'Hydraulique*, t. 3, 1937, p. 128).

L. CAGNIARD, *Sur la propagation du mouvement dans les milieux visqueux* (*C. R. Ac. Sc.*, t. 204, 1937, p. 408).

L. CAGNIARD, *Sur la propagation d'un signal dans une atmosphère raréfiée ionisée* (*C. R. Ac. Sc.*, t. 208, 1939, p. 918).

Je remercie tout particulièrement mon ami M. J. Dubourdieu, qui a bien voulu contrôler « directement » que la solution obtenue vérifiait les équations indéfinies et les conditions aux limites, et avec qui j'ai pu discuter utilement maintes parties du présent ouvrage.

PLAN DE L'OUVRAGE

CHAPITRES I ET II.

Le problème dont l'étude fait l'objet du présent ouvrage est mis en équations au cours des deux premiers Chapitres (Notations. Équations indéfinies. Conditions aux limites. Conditions initiales. Discussion de la notion de source ponctuelle).

CHAPITRE III.

La solution du problème sera obtenue par la méthode d'intégration de Carson dont nous présentons un exposé nouveau en nous attachant à montrer qu'elle est fondée sur une succession d'hypothèses qui sont seulement « plausibles ». Une solution obtenue par cette méthode n'est donc recevable que si l'on peut vérifier *a posteriori*, par une substitution directe, qu'elle satisfait effectivement aux équations du problème. Malheureusement, dans les problèmes quelque peu compliqués, une vérification de ce genre sera presque toujours impraticable. Grâce à un lemme et à un théorème démontrés dans le Chapitre III, il suffira, pour effectuer ce contrôle, de constater que la solution possède certaines propriétés d'une nature très générale (N. B. : Dans une première lecture, on peut laisser de côté la démonstration des théorèmes et ne jeter qu'un coup d'œil rapide sur les considérations qui terminent le Chapitre).

CHAPITRE IV.

Pour appliquer la méthode, il faut d'abord déterminer les « coefficients exponentiels », c'est-à-dire obtenir une solution de régime, dépourvue d'ailleurs de toute signification physique, exprimée par des fonctions exponentielles du temps. Cette première partie du problème ne présente d'autre difficulté que celle de la discussion des racines d'une équation

irrationnelle quelque peu compliquée. Cette longue discussion est fondamentale pour la suite des raisonnements et apparaîtra comme celle de l'existence d'une onde de Rayleigh à l'interface de deux milieux quelconques. Néanmoins le lecteur pressé pourra passer rapidement sur cette discussion pour n'en retenir que le résultat : $D(u)$ admet deux racines imaginaires pures opposées, ou n'admet aucune racine (dans une portion du plan complexe délimitée par certaines coupures).

CHAPITRE V.

Les « facteurs de transmission », par lesquels la solution s'exprime immédiatement, sont obtenus en cherchant les transformées de Laplace des coefficients exponentiels, c'est-à-dire en résolvant une équation intégrale de première espèce. On parvient à ce résultat par une simple identification, à l'aide de changements de variable successifs effectués dans le plan imaginaire. En fait, c'est là que résidaient les principales difficultés du problème. La clef de la solution consiste à remarquer que les variables et paramètres de l'Optique géométrique (angles d'incidence, de réflexion, de réfraction, temps minimum de Fermat) s'introduisent tout naturellement dans le changement de variable qui s'impose.

CHAPITRE VI.

Nous étudions dans ce Chapitre les propriétés fondamentales de l'un des facteurs de transmission $B(\nu, \rho, z)$, qui s'exprime par une juxtaposition de fonctions analytiques définies de manières différentes dans les diverses régions de l'espace ρ, z, ν . Nous examinons principalement les discontinuités de $B(\nu, \rho, z)$ ou de sa dérivée $\frac{\partial}{\partial \nu} B(\nu, \rho, z)$, ou encore les singularités diverses que présentent, sur les surfaces de front d'onde, les fonctions par lesquelles s'exprime $B(\nu, \rho, z)$. Nous y parvenons en étudiant le prolongement analytique de chacune des fonctions dans les domaines limitrophes. (Malgré le caractère fondamental des résultats obtenus dans ce Chapitre, le lecteur pressé pourra, ici encore, se borner à un coup d'œil rapide.)

CHAPITRE VII.

Ensemble de la solution. Chapitre court et de lecture facile. Examiner particulièrement les figures qui illustrent le phénomène des Ondes coniques.

CHAPITRES VIII ET IX.

Nous y traitons deux cas particuliers (problème statique et problème harmonique), de peu d'intérêt pratique, qui peuvent être laissés de côté dans une première lecture.

CHAPITRES X, XI, XII ET XIII.

Nous discutons alors d'une manière approfondie un cas particulier important de l'onde progressive, celui où le second milieu est le vide. Les formules se simplifient beaucoup : aussi récrivons-nous les formules simplifiées en tête du Chapitre X. Dans le Chapitre X, nous étudions numériquement, avec diagrammes et courbes représentatives à l'appui, la propagation de discontinuités cinématiques éventuelles. Au Chapitre XI, nous assistons à la naissance de l'Onde de Rayleigh progressive et nous étudions cette onde superficielle, avec nombreuses courbes représentatives à l'appui, à la surface du sol ou en profondeur. Au Chapitre XII, nous étudions de la même manière une autre pseudo-onde superficielle, d'un type analogue à celui de l'Onde de Rayleigh qui, bien qu'elle soit une onde mixte (de condensation et de distorsion) se propage avec la vitesse radiale Ω_2 . Cette onde ne doit jouer d'ailleurs qu'un rôle effacé dans les séismogrammes de séismes lointains. Enfin, au Chapitre XIII nous mettons en évidence l'existence d'une autre pseudo-onde, sphérique et de distorsion.

CHAPITRE XIV.

Nous traitons ici l'Onde progressive dans le cas général de deux milieux quelconques (fronts d'onde coniques éventuels, au nombre de trois ou de cinq, pseudo-ondes variées, superficielles, sphériques, coniques, propagation des discontinuités cinématiques).



PREMIÈRE THÈSE

RÉFLEXION ET RÉFRACTION
DES
ONDES SÉISMiques PROGRESSIVES

CHAPITRE I.

NOTATIONS. ÉQUATIONS INDÉFINIES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.
CONDITIONS AUX LIMITES
SUR LA SURFACE DE SÉPARATION DES MILIEUX.

1. **Énoncé du problème.** — La surface de séparation de deux solides indéfinis, homogènes, isotropes et élastiques est choisie comme plan des xy d'un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (*fig. 1*).

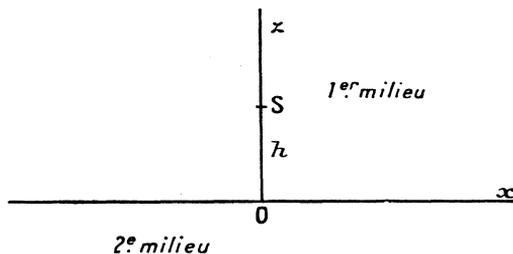


Fig. 1.

A l'instant zéro, tous les points des deux milieux envisagés sont au repos, et une source ponctuelle S , de coordonnées $0, 0, h > 0$, qu'on peut considérer comme une sphère pulsante de rayon infiniment petit ⁽¹⁾ commence à vibrer de manière que ses élongations soient constamment radiales et isotropes. La loi de ces élongations est une fonction arbitraire

⁽¹⁾ Nous reviendrons au Chapitre II sur la définition d'une telle source ponctuelle.

donnée du temps t . On se propose d'étudier la propagation de l'onde qui prend naissance. C'est en somme le problème général de la réflexion sur une surface plane d'une onde séismique sphérique, isotrope et de condensation.

Dans ce chapitre nous explicitons d'abord les notations employées, puis nous posons les équations indéfinies de propagation et les conditions aux limites à satisfaire sur le plan $z = 0$.

2. Notations. — Le milieu où se trouve la source S est dit « premier milieu », l'autre « second milieu ». Pour désigner les paramètres qui caractérisent les deux milieux, il est fait usage des mêmes lettres, mais en accentuant celles qui correspondent au second milieu.

Exemple : λ , μ , coefficients de Lamé du premier milieu;
 λ' , μ' , coefficients de Lamé du second milieu;

σ , densité de la matière;

Ω_1 , vitesse de phase des ondes harmoniques planes de condensation;

Ω_2 , vitesse de phase des ondes harmoniques planes de distorsion.

On sait que

$$\begin{aligned}\lambda &= \sigma(\Omega_1^2 - 2\Omega_2^2), \\ \mu &= \sigma\Omega_2^2.\end{aligned}$$

Comme λ est essentiellement positif, on conclut

$$v = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} > \sqrt{2}.$$

Dans le problème ici traité, l'axe Oz est axe de révolution pour les phénomènes. Aussi ferons-nous choix de coordonnées cylindriques ρ , φ , z (*fig. 2*)

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi.\end{aligned}$$

Par suite des conditions de symétrie, l'élongation n'a pas de composante tangentielle l_φ . De plus l_ρ et l_z sont indépendantes de φ .

D'après la théorie de l'élasticité

$$(1) \quad \begin{cases} l_\rho = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{\partial U}{\partial z}, \\ l_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{U}{\rho} \right), \end{cases}$$

Ψ et U désignant deux fonctions de ρ et z .

Ψ définit l'onde de condensation, la dilatation θ ayant l'expression

$$(2) \quad \theta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2};$$

U définit l'onde de distorsion.

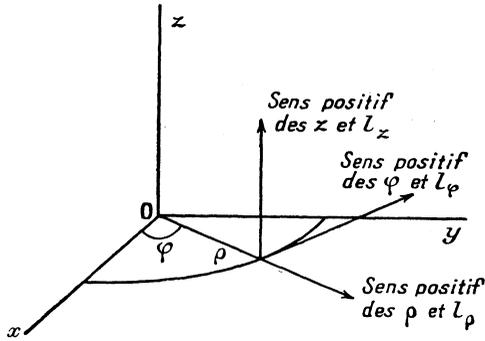


Fig. 2.

Les tensions normales et tangentielles ont les expressions suivantes :

Tensions normales

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_\rho = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial l_\rho}{\partial \rho} \\ N_\varphi = \lambda \theta + \frac{2\mu}{\rho} l_\rho \\ N_z = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial l_z}{\partial z}; \end{array} \right.$$

Tensions tangentielles

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_\rho = 0, \\ T_\varphi = \mu \left(\frac{\partial l_\rho}{\partial z} + \frac{\partial l_z}{\partial \rho} \right), \\ T_z = 0. \end{array} \right.$$

3. Équations indéfinies de propagation. — L'équation indéfinie de propagation

$$\Delta \Psi - \frac{1}{\Omega_1^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

devient en coordonnées cylindriques

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \frac{1}{\Omega_1^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}.$$

De même U satisfait à l'équation

$$(6) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{U}{\rho^2} = \frac{1}{\Omega_2^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Ces équations doivent être satisfaites à l'intérieur des deux milieux. Dans le second milieu Ω_1, Ω_2 doivent être remplacés, bien entendu, par Ω'_1, Ω'_2 .

4. Conditions aux limites pour $z = 0$ (surface de séparation). — A la traversée de la surface de séparation, l'élongation est continue

$$l_z = l'_z, \quad l_\rho = l'_\rho$$

ou

$$(7) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{U}{\rho} = \frac{\partial \Psi'}{\partial z} + \frac{\partial U'}{\partial \rho} + \frac{U'}{\rho},$$

$$(8) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial \Psi'}{\partial \rho} - \frac{\partial U'}{\partial z}.$$

Il en est de même des tensions normales et tangentielles à la surface de séparation,

$$N_z = N'_z, \quad T_\rho = T'_\rho, \quad T_\varphi = T'_\varphi$$

ou

$$(9) \quad \sigma \left[\frac{\Omega_1^2 - 2\Omega_2^2}{\Omega_1^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2\Omega_2^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \\ = \sigma' \left[\frac{\Omega_1'^2 - 2\Omega_2'^2}{\Omega_1'^2} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial t^2} + 2\Omega_2'^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial \rho \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U'}{\partial z} \right) \right]$$

et

$$(10) \quad \sigma \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\Omega_2^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \right] \\ = \sigma' \left[\frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} + 2\Omega_2'^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} \right) \right].$$

CHAPITRE II.

SPHÈRE PULSANTE EN MILIEU HOMOGENÈE ILLIMITÉ.
DÉFINITION DE LA SOURCE PONCTUELLE S. CONDITIONS INITIALES.

5. **Sphère pulsante en milieu homogène illimité (Riemann). Discontinuités cinématiques.** — Soit une sphère pulsante de centre S, de rayon R_0 , située dans un milieu illimité, élastique, homogène, isotrope, dont tous les points sont, à l'extérieur de la sphère, au repos à l'origine des temps (*fig. 3*).

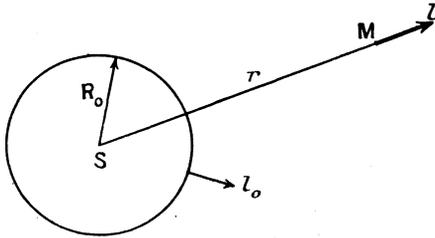


Fig. 3.

L'élongation radiale l_0 d'un point de la sphère R_0 est une fonction donnée de t

$$l_0 = l_0(t),$$

nulle pour $t = 0$.

On cherche à déterminer l'élongation l , évidemment radiale, d'un point M quelconque, en fonction de $\overline{SM} = r$ et de t . Rappelons en quelques mots la solution élémentaire de ce problème classique.

On a

$$(1) \quad l = \frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, t),$$

où le potentiel Ψ satisfait à l'équation

$$(2) \quad \Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{\Omega_1^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}.$$

L'intégrale générale de l'équation (2) a pour expression

$$(3) \quad \Psi = \frac{1}{r} [f(r + \Omega_1 t) + \varphi(r - \Omega_1 t)],$$

f et φ désignant deux fonctions continues quelconques, admettant des dérivées continues jusqu'au second ordre inclus (1).

On sait d'ailleurs et l'on montre immédiatement que, du fait des conditions initiales (élongations et vitesses nulles pour $r > R_0$, $t = 0$) et en raison de l'indétermination du potentiel Ψ , défini seulement à une fonction additive près de la seule variable t , le terme $\frac{1}{r} f(r + \Omega_1 t)$ peut être laissé de côté. On peut donc écrire la solution sous la forme

$$(4) \quad \Psi = \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{\Omega_1}\right),$$

où la fonction $F(u)$ est déterminée immédiatement lorsqu'on se donne $l_0(t)$. $F(u)$ est identiquement nulle pour $u \leq \frac{-R_0}{\Omega_1}$.

Ainsi, quel que soit le remplissage de la sphère R_0 , sans qu'il y ait lieu de prendre en considération les phénomènes dont son intérieur peut être le siège, l'état du mouvement à l'extérieur de la sphère est entièrement défini par la relation (4) lorsqu'on se donne la loi des élongations sur la sphère R_0 .

Toutefois, dans la relation (4) la fonction F n'est pas absolument arbitraire. En effet, dans la théorie d'élasticité qui conduit à l'équation (2), l'on pose *a priori* l'existence et la continuité des dérivées partielles qui interviennent dans cette équation. La solution (4) n'est donc immédiatement recevable que si $F''(u)$ existe et est continue quelle que soit la valeur de la variable u .

On doit avoir en particulier

$$F\left(-\frac{R_0}{\Omega_1}\right) = F'\left(-\frac{R_0}{\Omega_1}\right) = F''\left(-\frac{R_0}{\Omega_1}\right) = 0.$$

Cela implique que le mouvement d'un point de la sphère R_0 ne débute pas par une discontinuité de vitesse. Dans ces conditions, le mouvement d'un point du milieu, à l'instant $t = \frac{r - R_0}{\Omega_1}$ où ce point est atteint par le front de l'onde, ne débutera pas non plus par une discontinuité de vitesse.

(1) La fonction f peut n'être définie que pour des valeurs de son argument supérieures ou égales à R_0 .

L'hypothèse d'une discontinuité cinématique n'est d'ailleurs *le plus souvent* qu'une façon commode de décrire et d'exprimer mathématiquement une variation continue, mais rapide et de brève durée. Par exemple on dira qu'un piston, sur lequel repose un corps pesant maintenu primitivement immobile, démarre avec une vitesse nulle mais une accélération différente de zéro lorsqu'on lâche le corps pesant d'une façon instantanée. Comme l'instantanéité n'est jamais que relative, cette notion de discontinuité d'accélération exprime uniquement, en pareil cas, que pendant un temps très court, indiscernable à l'échelle où nous nous plaçons, l'accélération s'est accrue continûment depuis zéro jusqu'à une valeur finie.

On peut observer que la solution (4) reste valable si la dérivée $F'(u)$, tout en restant continue et dérivable, présente une variation de plus en plus rapide pour certaines valeurs de la variable. Or un coude étroit, à faible rayon de courbure, de la courbe représentative de $F'(u)$, équivaut physiquement, d'une manière complète, à la notion de discontinuité de vitesse. Une telle manière d'envisager les discontinuités cinématiques revient donc à admettre que la relation (4) exprime toujours la solution, même si la fonction F est absolument arbitraire, sous la seule réserve que cette solution conserve un sens physique indiscutable. C'est ainsi que nous éviterons d'envisager une discontinuité de F' , c'est-à-dire une discontinuité d'élongation, qui pourrait être interprétée comme une rupture de la matière.

En fait lorsque, comme dans les problèmes ici traités, on cherche à atteindre une solution « synthétique », l'hypothèse de l'existence de discontinuités cinématiques d'ordre peu élevé ne fait que compliquer l'étude. Pour supprimer ces difficultés qui ne sont pas inhérentes par nature au problème traité, il suffit de poser qu'on ne considérera que des solutions $\Psi(\rho, z, t)$, $U(\rho, z, t)$ admettant des dérivées continues jusqu'au second ordre inclus, ce qui exigera que la fonction $F(u)$ qui définit l'onde incidente émanant de la sphère pulsante admette elle-même des dérivées continues, parfois jusqu'au second ordre inclus seulement, mais parfois aussi, suivant la nature du problème particulier traité, jusqu'à un ordre plus élevé.

Il nous a paru plus rationnel et plus clair de supposer *d'abord* que la fonction $F(u)$, envisagée bien entendu comme *fonction d'une variable réelle* ⁽¹⁾, est continue et indéfiniment dérivable quel que

⁽¹⁾ Définir $F(u)$ pour des valeurs complexes de u peut être intéressant comme moyen d'étude, mais n'a aucun sens et ne présente aucune utilité au point de vue physique.

soit u . Par exemple $F(u)$ pourra avoir la définition suivante :

$$F(u) = \begin{cases} 0, & \text{pour } u \leq u_0 \quad \left(u_0 \geq \frac{-R_0}{\Omega_1} \right); \\ e^{\frac{1}{(u-u_0)(u-u_1)}}, & \text{pour } u_0 < u < u_1; \\ 0, & \text{pour } u \geq u_1. \end{cases}$$

Les solutions de ce genre ne seront donc pas holomorphes, ni même nécessairement analytiques. Au reste nous constaterons qu'en général il est impossible d'obtenir des solutions analytiques, plus précisément des solutions s'exprimant par une juxtaposition de fonctions analytiques définies séparément de manière différente dans diverses régions de l'espace ρ, z, t , qui soient exemptes de singularités sur la totalité des surfaces limitant ces régions (fronts d'onde).

C'est bien entendu seulement *dans une première partie* de notre étude que nous nous limiterons au cas d'une fonction $F(u)$ indéfiniment dérivable. *Ensuite*, par un passage à la limite, nous introduirons dans la théorie les généralisations indispensables en rétablissant en bloc les discontinuités cinématiques que nous avons exclues en premier lieu.

6. Conditions initiales. Source ponctuelle. — Revenons désormais au problème qui fait l'objet de notre étude. Supposons d'abord que la source est une sphère pulsante de centre S , de rayon non nul $R_0 < h$, entièrement située par conséquent dans le premier milieu. Les conditions initiales seront les mêmes que dans le problème précédent, savoir :

1° Tous les points de l'espace extérieur à la sphère R_0 sont au repos à l'origine des temps;

2° La loi des élongations sur la sphère R_0 est donnée par une fonction $l_0 = l_0(t)$ nulle pour $t = 0$.

Ainsi posé, le problème va comporter une infinité de phases successives dont chacune présentera des complications nouvelles par rapport à la précédente. C'est ainsi que le second milieu n'interviendra pas tant que le front de l'onde ne l'aura pas encore atteint. Dans cette première phase du phénomène, l'onde se propagera comme si le premier milieu était illimité, suivant les formules établies au début du présent chapitre.

A partir de l'instant $t = \frac{h - R_0}{\Omega_1}$ l'onde atteindra la surface de séparation.

Une seconde phase du phénomène, beaucoup plus complexe que la précédente, commencera à cet instant. Durant cette seconde phase

prendront naissance des ondes réfléchies et réfractées. Cette seconde phase prendra fin à partir du moment où l'une des ondes réfléchies atteindra la sphère R_0 et le problème deviendra un problème de diffraction par la sphère R_0 . Le problème se compliquera encore lorsqu'une nouvelle onde réfléchie atteindra la sphère R_0 , lorsque les ondes diffractées par la sphère R_0 atteindront à leur tour la surface de séparation, etc.

Ces considérations mettent en lumière qu'un problème de propagation ne peut en général recevoir une solution pratique que *jusqu'à une époque déterminée*. Dans le cas actuel, nous nous sommes limités à l'étude de la première et de la seconde phase du phénomène. Si l'onde initiale est plane, c'est-à-dire si la sphère R_0 est rejetée à l'infini, le phénomène ne comporte d'ailleurs que ces deux phases. Toutefois, même si l'onde initiale est sphérique, nos formules, strictement valables pour les première et deuxième phases seulement, exprimeront encore approximativement la solution pour des époques ultérieures, à la condition d'imaginer que le rayon R_0 est suffisamment petit pour que la perturbation apportée par la sphère sur les ondes de retour puisse être considérée comme négligeable.

On est ainsi conduit, en imaginant que R_0 tend vers zéro, à définir une source ponctuelle S où la fonction Ψ présentera une singularité. C'est à ce point de vue que nous nous placerons dans ce qui suit. L'énoncé mathématique du problème sera donc le suivant :

1° Ψ , U et leurs dérivées sont nulles dans tout l'espace pour $t = 0$;
2° Ψ et U sont des fonctions bornées, continues et indéfiniment dérivables des variables réelles ρ , z , t dans tout domaine borné de ces variables, exception faite sur la surface de séparation $z = 0$ et à la source ponctuelle S ;

3° Ψ , U et toutes leurs dérivées tendent vers des limites finies lorsqu'on fait tendre un point appartenant à l'un des milieux vers un point de la surface de séparation $z = 0$, mais ces limites ne sont pas nécessairement les mêmes suivant qu'on fait tendre vers un des points de la surface de séparation un point du premier milieu ou un point du second milieu ;

4° Au point S , la fonction U est bornée et indéfiniment dérivable. Il en est de même de la fonction

$$\Psi - \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{\Omega_1}\right),$$

$F(t)$ étant une fonction donnée indéfiniment dérivable quel que soit t , nulle ainsi que toutes ses dérivées pour $t \leq 0$;

5° Pour toute valeur finie de t , les points des deux milieux qui sont en mouvement, ou sont entrés en mouvement avant l'instant t , sont tous à distance finie de S . Dans un problème de ce genre, il n'y a donc pas de conditions à l'infini.

6° Enfin Ψ et U doivent satisfaire aux équations de propagation et aux conditions aux limites pour $z = 0$ qui ont été établies au Chapitre I.

7. Remarque. — Les six conditions énoncées ci-dessus sont suffisantes pour que les fonctions Ψ et U constituent une solution du problème. Une solution de ce genre, si elle existe — et nous verrons qu'elle existe dans le problème actuel — est nécessairement unique. S'il existait en effet deux solutions (Ψ_1, U_1) et (Ψ_2, U_2) satisfaisant aux conditions énoncées, les fonctions $\Psi_1 - \Psi_2$ et $U_1 - U_2$, qui ne présentent plus de singularité en S , définiraient un état vibratoire du milieu, dont l'absurdité apparaît par la considération des énergies cinétique et potentielle si l'on suppose que $\Psi_1 - \Psi_2$ et $U_1 - U_2$ ne sont pas telles qu'elles définissent une elongation identiquement nulle quels que soient ρ , z , t , c'est-à-dire si (Ψ_1, U_1) et (Ψ_2, U_2) ne déterminent pas des solutions physiquement identiques.

Cependant ces conditions, évidemment suffisantes, ne doivent pas être considérées *a priori* comme nécessaires. Il est même facile d'imaginer des problèmes d'un type similaire où elles seraient certainement trop restrictives. Si, par exemple, la source S est placée en l'un des foyers d'un miroir elliptique, la fonction Ψ présentera une singularité en l'autre foyer. On peut d'ailleurs concevoir des problèmes où les fonctions Ψ et U présenteraient des singularités très différentes de la singularité ponctuelle $\frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{\Omega_1}\right)$. Par exemple, dans le problème de la diffraction d'une onde par le bord d'un écran infiniment mince, il ne semblerait pas absurde *a priori* que le bord de l'écran se comportât comme une ligne singulière pour les fonctions Ψ et U .

Les conditions imposées à $\Psi - \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{\Omega_1}\right)$ et à U d'être bornées et indéfiniment dérivables quels que soient ρ , z , t , ne sont donc pas absolues. En fait, nous cherchons à déterminer ces fonctions sans nous préoccuper de ces dernières restrictions; s'il apparaît qu'elles présentent une singularité, il restera à discuter après coup si la solution obtenue est néanmoins recevable.



CHAPITRE III.

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE D'INTÉGRATION.

La méthode dite de « l'intégrale de Carson » permet l'intégration élégante de problèmes d'états transitoires régis par des équations différentielles linéaires (I). Si son intérêt purement mathématique peut, à ce point de vue, paraître assez restreint, nous verrons par contre que la méthode de « l'intégrale de Carson » est remarquablement adaptée à la découverte des solutions de problèmes tels que ceux envisagés ici, où il s'agit de trouver les intégrales particulières d'un système d'équations aux dérivées partielles satisfaisant à des conditions initiales qui s'expriment à l'aide d'une « fonction d'excitation » $F(t)$ arbitraire.

Nous exposerons d'abord comment une suite d'hypothèses « plausibles » concernant la forme des solutions laisse présumer que la méthode de l'intégrale de Carson doit vraisemblablement permettre la découverte de ces solutions. Nous démontrerons ensuite un théorème qui permettra en général de vérifier immédiatement après coup que les fonctions obtenues par la méthode de l'intégrale constituent effectivement la solution cherchée.

8. Succession d'hypothèses conduisant à l'équation intégrale de Carson. — Supposons connues les deux fonctions

$$(1) \quad \begin{cases} \Psi = \Psi(t, \rho, z), \\ U = U(t, \rho, z), \end{cases}$$

qui constituent la solution du problème ici traité, c'est-à-dire satisfont aux conditions requises à la fin du Chapitre II.

1° En désignant par u un paramètre arbitraire, le système

$$\begin{cases} \Psi(t + u, \rho, z), \\ U(t + u, \rho, z), \end{cases}$$

qu'on déduit de (1) en changeant l'origine des temps, constitue également

une solution du système d'équations aux dérivées partielles (équations de propagation et conditions aux limites pour $z = 0$), à l'exclusion toutefois des conditions initiales;

2° En désignant par p un nombre réel et positif, supposons que les intégrales

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \int_{-t}^{+\infty} e^{-p u} \Psi(t + u, \rho, z) du, \\ U_1 = \int_{-t}^{+\infty} e^{-p u} U(t + u, \rho, z) du \end{array} \right.$$

convergent, bien qu'il ne soit pas exclu par avance ⁽¹⁾ que Ψ et U , qui ne sont pas des *élongations*, deviennent infinis en même temps que u .

La présence du facteur $e^{-p u}$ sous le signe d'intégration, la continuité imposée à Ψ et U ainsi qu'à toutes leurs dérivées, enfin la nullité de toutes leurs dérivées par rapport à u pour $u = -t$ nous font prévoir que les dérivées de Ψ_1 et U_1 s'obtiennent simplement en dérivant Ψ et U sous le signe d'intégration.

En conséquence, nous ferons l'*hypothèse* que le système (Ψ_1, U_1) satisfait aux équations de propagation et aux conditions aux limites pour $z = 0$;

3° Par le changement de variable

$$v = t + u,$$

les fonctions Ψ_1 et U_1 deviennent

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = e^{p t} \int_0^{+\infty} e^{-p v} \Psi(v, \rho, z) dv = e^{p t} x_p(p, \rho, z), \\ U_1 = e^{p t} \int_0^{+\infty} e^{-p v} U(v, \rho, z) dv = e^{p t} y_p(p, \rho, z), \end{array} \right.$$

en posant

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_p(p, \rho, z) = \int_0^{+\infty} e^{-p v} \Psi(v, \rho, z) dv, \\ y_p(p, \rho, z) = \int_0^{+\infty} e^{-p v} U(v, \rho, z) dv. \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Dans le problème actuel nous verrons que Ψ et U deviennent, en général, infinis en même temps que u .

4° En S, y_p est bornée. x_p est la somme d'une fonction bornée et de la fonction

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho\nu} \frac{1}{r} F\left(\nu - \frac{r}{\Omega_1}\right) d\nu = \frac{1}{r} e^{-\frac{\rho r}{\Omega_1}} \int_0^{+\infty} e^{-\rho\nu} F(\nu) d\nu.$$

5° Quand le point (ρ, z) s'éloigne à l'infini, il est à présumer que les fonctions Ψ et U sont et restent nulles depuis $t = 0$ jusqu'à une époque de plus en plus lointaine, de sorte qu'il n'est pas nécessaire de conserver zéro pour limite inférieure des intégrales (4). On peut choisir une limite inférieure croissant indéfiniment en même temps que le point considéré s'éloigne à l'infini. Ce fait rend *vraisemblable* la décroissance exponentielle de x_p, y_p en fonction de ρ et de z .

6° On est ainsi conduit à essayer de déterminer *directement* une solution des équations aux dérivées partielles du problème (équations de propagation, conditions aux limites pour $z = 0$) qui soit de la forme

$$\begin{aligned} \psi_p &= e^{\rho t} X_p(\rho, z) \\ u_p &= e^{\rho t} Y_p(\rho, z) \end{aligned} \quad (p \text{ réel et positif),}$$

telle que X_p, Y_p décroissent exponentiellement quand ρ, z deviennent infinis, et restent bornées dans tout l'espace à l'exclusion de la source S où X_p doit, à un terme additif près borné, se réduire à $\frac{1}{r}$.

Une telle solution, à peu près dépourvue de toute signification physique, définit un état de régime exponentiel, analogue à l'état de régime harmonique. La découverte de cette solution constitue un problème beaucoup plus simple que le problème initial, par le fait que la variable temps disparaît des équations.

Il est d'ailleurs à remarquer que si les élongations, vitesses, tensions, décroissent exponentiellement, comme Ψ et U , à l'infini, la solution X_p, Y_p cherchée, si elle existe, est unique.

7° Supposons déterminée cette solution X_p, Y_p . En vertu de l'alinéa 4°, x_p et y_p sont respectivement proportionnels à X_p, Y_p , le facteur de proportionnalité étant

$$(5) \quad \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-\rho\nu} F(\nu) d\nu : \\ \left\{ \begin{aligned} x_p &= X_p \int_0^{+\infty} e^{-\rho\nu} F(\nu) d\nu, \\ y_p &= Y_p \int_0^{+\infty} e^{-\rho\nu} F(\nu) d\nu, \end{aligned} \right. \end{cases}$$

et l'on a en vertu de (3)

$$(6) \quad \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} \Psi(\nu, \rho, z) d\nu = X_p(p, \rho, z) \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} F(\nu) d\nu, \\ \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} U(\nu, \rho, z) d\nu = Y_p(p, \rho, z) \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} F(\nu) d\nu. \end{cases}$$

Posons d'autre part

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{X_p(p, \rho, z)}{p} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A(\nu, \rho, z) d\nu, \\ \frac{Y_p(p, \rho, z)}{p} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} B(\nu, \rho, z) d\nu. \end{cases}$$

$A(\nu, \rho, z)$ et $B(\nu, \rho, z)$ sont ainsi les transformées de Laplace des fonctions $\frac{X_p(p, \rho, z)}{p}$ et $\frac{Y_p(p, \rho, z)}{p}$. On les obtient à partir de X_p, Y_p en résolvant deux équations intégrales de première espèce, dites équations de Carson. Nous désignerons A et B sous le nom de « facteurs de transmission », F de « fonction d'excitation », X_p, Y_p de « coefficients exponentiels ». Les fonctions A, B, F, Ψ, U sont liées par les relations

$$(8) \quad \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-pu} \Psi(u, \rho, z) du = p \left[\int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A(\nu, \rho, z) d\nu \right] \left[\int_0^{+\infty} e^{-p\nu} F(\nu) d\nu \right], \\ \int_0^{+\infty} e^{-pu} U(u, \rho, z) du = p \left[\int_0^{+\infty} e^{-p\nu} B(\nu, \rho, z) d\nu \right] \left[\int_0^{+\infty} e^{-p\nu} F(\nu) d\nu \right]. \end{cases}$$

8° Dans l'une ou l'autre des relations (8) transformons le second membre en une intégrale double

$$(9) \quad \int_0^{+\infty} e^{-pu} \Psi(u) du = p \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-p(x+y)} A(x) F(y) dx dy,$$

et prenons comme nouvelles variables d'intégration $x + y$ et x

$$(10) \quad \int_0^{+\infty} e^{-pu} \Psi(u) du = p \int_0^{+\infty} e^{-pu} du \int_0^u A(x) F(u-x) dx.$$

D'autre part, intégrons par parties le premier membre de (10)

$$(11) \quad \int_0^{+\infty} e^{-pu} \Psi(u) du = \left[e^{-pu} \int_0^u \Psi(u) du \right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pu} \left[\int_0^u \Psi(u) du \right] du.$$

Comme suite aux hypothèses faites à l'alinéa 2°, nous *admettrons* que

$$e^{-\rho u} \int_0^u \Psi(u) du$$

s'annule pour u infini comme pour u égal à zéro. En définitive

$$(12) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\rho u} \Psi(u) du = \rho \int_0^{+\infty} e^{-\rho u} \left[\int_0^u \Psi(u) du \right] du.$$

D'où, d'après la relation (10)

$$(13) \quad \int_0^{\infty} e^{-\rho u} \left[\int_0^u \Psi(u) du \right] du = \int_0^{+\infty} e^{-\rho u} \left[\int_0^u A(x) F(u-x) dx \right] du,$$

dont une solution apparaît par identification des deux membres

$$(14) \quad \int_0^u \Psi(u) du = \int_0^u A(x) F(u-x) dx$$

et (en changeant le nom des variables)

$$(15) \quad \Psi(t, \rho, z) = \frac{d}{dt} \int_0^t F(t-\nu) A(\nu, \rho, z) d\nu = \int_0^t F'(t-\nu) A(\nu, \rho, z) d\nu,$$

en vertu des hypothèses faites sur la nature de la fonction F .

En prenant comme nouvelle variable $t - \nu$ on obtient l'expression équivalente

$$(15 \text{ bis}) \quad \Psi(t, \rho, z) = \int_0^t F'(\nu) A(t-\nu, \rho, z) d\nu.$$

De même

$$(16) \quad U(t, \rho, z) = \int_0^t F'(t-\nu) B(\nu, \rho, z) d\nu = \int_0^t F'(\nu) B(t-\nu, \rho, z) d\nu.$$

9. Vérification de l'exactitude de la solution. — Ainsi la méthode à suivre pour obtenir la solution (Ψ, U) consiste à déterminer directement les coefficients exponentiels X_ρ, Y_ρ puis les facteurs de transmission A et B par l'intégration de deux équations de Carson. Quand A et B sont connus, Ψ et U sont déterminés par les quadratures (15) et (16). Ces formules (15) et (16) dissocient d'une manière typique, d'une part ce qui dans le phénomène de propagation dépend uniquement du milieu, de sa configuration géométrique, de ses paramètres physiques et trouve son expression dans les facteurs de transmission A et B , d'autre part ce qui ne dépend que de la fonction arbitraire d'excitation.

Reste à vérifier que les fonctions Ψ et U obtenues par ce procédé définissent bien la solution du problème. Il ne suffit pas de constater que les hypothèses faites au cours du paragraphe précédent sont effectivement remplies par les fonctions Ψ et U trouvées. Il faut vérifier que ces fonctions satisfont aux six conditions imposées à la fin du Chapitre II.

En fait, il apparaîtra au premier examen que les cinq premières de ces conditions sont remplies par les fonctions obtenues. Il restera uniquement à vérifier que ces fonctions satisfont aux équations aux dérivées partielles (équations de propagation et conditions aux limites pour $z=0$).

Le théorème démontré ci-dessous réduira cette vérification à quelques constatations d'une grande simplicité concernant seulement des propriétés très générales des fonctions A et B .

10. Lemme (1). — *Soit une fonction $f(x)$ de la variable réelle x , définie pour $x \geq 0$, dont on sait qu'elle possède les propriétés suivantes :*

Dans tout intervalle fini de la variable, elle ne présente qu'un nombre fini de maxima et de minima et ne possède que des points de discontinuité réguliers de première espèce, également en nombre fini.

La fonction $f(x)$ est bornée pour toute valeur finie de x , mais il n'est pas exclu par avance qu'elle devienne infinie en même temps que x : en tout cas les intégrales

$$\int_b^{+\infty} e^{-p(x-a)} f(x) dx$$

sont supposées uniformément convergentes pour toutes les valeurs réelles du paramètre p supérieures à un nombre positif quelconque, a et b désignant deux nombres positifs dont le second est supérieur au premier.

En dehors de ces conditions très générales, la fonction $f(x)$ satisfait, quel que soit p réel et positif, à l'identité

$$\int_0^{+\infty} e^{-p.x} f(x) dx \equiv 0.$$

(1) Ce lemme est dû à Lerch. Il en existe plusieurs démonstrations [cf. par exemple Doetsch (G.), *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Berlin (Springer, 1931), p. 35, 107, 135, 405]. La démonstration qu'on trouvera ci-après nous semble cependant avoir le mérite d'être élémentaire et directe.

Il est alors nécessaire que la fonction $f(x)$ soit identiquement nulle, sauf peut-être pour $x = 0$.

Démonstration. — A. En multipliant les deux membres de l'identité par e^{px_0} on obtient

$$(17) \quad \int_0^{+\infty} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx \equiv 0.$$

Cette identité est assurée quels que soient les deux nombres p et x_0 positifs.

Partageons l'intervalle d'intégration $(0, +\infty)$ en quatre intervalles partiels

$$0, x_0; \quad x_0, x'_0; \quad x'_0, X; \quad X, +\infty$$

avec

$$0 < x_0 < x'_0 < X$$

$$(18) \quad \begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx \\ &= \int_0^{x_0} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx + \int_{x_0}^{x'_0} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx \\ &+ \int_{x'_0}^X e^{-p(x-x_0)} f(x) dx + \int_X^{+\infty} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx. \end{aligned}$$

On peut toujours, en vertu des conditions de convergence uniforme que nous supposons réalisées, déterminer un nombre X indépendant de p , de manière à satisfaire l'inégalité

$$\left| \int_X^{+\infty} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ε étant un nombre positif donné d'avance aussi petit qu'on voudra.

De plus, dans l'intervalle $(x_0, l > x_0)$ la fonction sous le signe somme est bornée

$$|e^{-p(x-x_0)} f(x)| < A,$$

A désignant une borne supérieure du module de $f(x)$ dans l'intervalle (x_0, l) . En choisissant x'_0 dans cet intervalle de telle façon que

$$A(x'_0 - x_0) < \frac{\varepsilon}{3},$$

on est assuré de l'inégalité

$$\left| \int_{x_0}^{x'_0} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

et cela quel que soit p , puisque A est indépendant de p .

Enfin l'intégrale

$$\int_{x_0}^x e^{-p(x-x_0)} f(x) dx,$$

dont les deux limites indépendantes de p ont été déterminées ci-dessus, tend vers zéro quand p croît indéfiniment. On peut donc trouver un nombre p_0 tel que l'inégalité

$$p > p_0$$

entraîne

$$\left| \int_{x_0}^x e^{-p(x-x_0)} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De là résulte ce premier point que l'intégrale

$$\int_0^{x_0} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx$$

tend vers zéro quand p augmente indéfiniment, quel que soit x_0 . Nous allons montrer que cela est impossible si $f(x)$ n'est pas identiquement nul.

B. En effet, précisons que x_0 est la plus petite valeur de x , nécessairement différente de zéro en vertu des propriétés de la fonction $f(x)$, qui amène le premier changement de signe quand x croît à partir de zéro. Plus précisément, nous posons que, dans l'intervalle fini

$$0 < x < x_0,$$

la fonction $f(x)$ n'est jamais négative, ou bien jamais positive.

Si, en dehors des points de discontinuité situés en nombre fini dans cet intervalle, la fonction $f(x)$ n'était pas constamment nulle, on pourrait, puisqu'elle ne présente pas un nombre infini de maxima et de minima dans cet intervalle, trouver deux nombres x_i et x_j

$$0 < x_i < x_j < x_0$$

tels que, lorsque x demeurerait compris dans l'intervalle (x_i, x_j)

$$x_i \leq x \leq x_j;$$

la fonction $f(x)$ conserverait un signe constant sans s'annuler. Soit B la borne inférieure, différente de zéro, du module de la fonction $f(x)$ quand x demeure dans l'intervalle (x_i, x_j) .

On a

$$\left| \int_0^{x_0} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx \right| \geq \left| \int_{x_i}^{x_j} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx \right| \geq B(x_j - x_i) e^{p(x_0-x_j)}.$$

Comme $x_0 - x_j$ est positif, le module de l'intégrale

$$\int_0^{x_0} e^{-p(x-x_0)} f(x) dx$$

croîtrait indéfiniment en même temps que p , ce qui, nous l'avons vu, est précisément exclu.

Il est donc nécessaire que, dans l'intervalle

$$0 < x < x_0,$$

la fonction $f(x)$ soit nulle sauf peut-être en certains points de discontinuité. Cette éventualité est d'ailleurs exclue, car les points de discontinuité en question ne seraient pas réguliers. Cependant $f(0)$ peut ne pas être nul.

C. On n'a pas encore démontré $f(x_0) = 0$ car x_0 peut être un point de discontinuité. Puisque $f(x_0 - 0) = 0$, on a

$$f(x_0 + 0) = \frac{f(x_0)}{2},$$

$f(x)$ va conserver le signe de $f(x_0)$ dans un nouvel intervalle

$$x_0 \leq x < x_1$$

ou, en tout cas, ne changera de signe qu'au bout d'un nouvel intervalle fini (x_0, x_1) .

On peut alors recommencer sur cet intervalle le raisonnement précédent. On montrera ainsi que $f(x)$ est nul dans tout cet intervalle, y compris par conséquent au point x_0 , pour lequel un doute subsistait, mais peut-être pas au point x_1 .

En renouvelant ce raisonnement un nombre fini de fois, on démontrera ainsi que $f(x)$ est nulle identiquement quelle que soit la valeur finie de x qu'on considère.

Remarque. — Si la fonction $f(x)$ est nulle sauf en certains points de discontinuité, l'identité

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx \equiv 0$$

est néanmoins assurée. C'est pourquoi, afin d'éliminer cette multiplicité infinie de solutions, sans intérêt pour le but poursuivi, nous avons convenu que les points de discontinuité éventuels de $f(x)$ étaient réguliers. Comme nous n'avons pas défini $f(-0)$, nous n'avons pu démontrer, par exception, que $f(0)$ était nul.

11. Théorème. — Soit $L[\psi]$ un opérateur différentiel linéaire et homogène d'ordre K , c'est-à-dire une combinaison linéaire et homogène de la fonction $\Psi(\rho, z, t)$ et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre K inclus

$$L[\psi] = a\psi + b_1\psi_\rho + b_2\psi_z + b_3\psi_t \\ + c_1\psi_{\rho^2} + c_2\psi_{z^2} + c_3\psi_{t^2} + c_4\psi_{z_t} + c_5\psi_{t_\rho} + c_6\psi_{\rho z} + \dots,$$

où les coefficients a, b_i, c_j, \dots sont des fonctions données des seules variables d'espace ρ, z .

On remplace ψ dans l'opérateur $L[\psi]$ par

$$e^{p t} x_p(\rho, z),$$

$x_p(\rho, z)$ étant une fonction dont on sait d'avance que ses dérivées partielles par rapport à ρ, z existent jusqu'à l'ordre K et qu'elle satisfait en outre à l'identité

$$x_p(\rho, z) = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A(\nu, \rho, z) d\nu,$$

quel que soit p réel et positif.

D'autre part la fonction $A(\nu, \rho, z)$ est supposée posséder les propriétés générales suivantes :

1° En un point $M(\rho, z)$ déterminé et situé à distance finie, $A(\nu, \rho, z)$ est une fonction de la seule variable ν qui, dans tout intervalle fini de cette variable, ne présente qu'un nombre fini de maxima et de minima et ne possède que des points de discontinuité $\nu_i(\rho, z)$ de première espèce, réguliers, également en nombre fini.

2° Nous ne considérons expressément qu'un domaine des variables ρ, z entièrement situé à distance finie et tel que, lorsque ρ et z appartiennent à ce domaine ou aux frontières de ce domaine, on n'a jamais

$$\nu_i(\rho, z) = \nu_j(\rho, z),$$

ν_i et ν_j désignant deux points de discontinuité généralement distincts, mais pouvant exceptionnellement se confondre pour certaines valeurs de ρ, z .

Pour fixer les idées, nous supposons que dans l'intervalle $(0, +\infty)$ de la variable ν , le nombre des ν_i est infini. Le théorème reste exact si les ν_i sont en nombre fini, sa démonstration se trouve même dans ce cas notablement simplifiée.

Nous supposons donc qu'on peut classer la suite infinie des v_i par valeurs croissantes

$$0 \leq v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_i < v_{i+1} < \dots,$$

cette classification étant valable uniformément dans tout le domaine (ρ, z) considéré.

Le nombre δ_s des v_i compris entre deux entiers consécutifs $s, s + 1$ est, au moins à partir d'un certain rang, supposé inférieur à

$$\lambda s^\alpha,$$

où λ et α sont deux constantes positives.

Les dérivées partielles des v_i sont supposées exister jusqu'à l'ordre K inclus. Lorsque i , donc v_i deviennent infinis, ces dérivées partielles restent bornées ou de module inférieur à

$$\mu v_i^\beta,$$

où μ et β sont deux constantes positives.

3° Lorsque v est compris entre deux points de discontinuité consécutifs v_i, v_{i+1} les dérivées partielles de A existent et sont continues jusqu'à l'ordre K inclus. Ces dérivées partielles tendent vers des limites, généralement distinctes, lorsque v tend vers v_i , soit par valeurs inférieures, soit par valeurs supérieures.

Lorsque v croît indéfiniment, A et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre K demeurent bornées ou de module inférieur à

$$v v^\gamma,$$

v et γ désignant deux constantes positives.

4° On suppose alors que l'identité

$$L[e^{\rho t} x_p(\rho, \rho, z)] \equiv 0$$

est assurée quel que soit p .

Le théorème affirme que

$$L \left[\int_0^t F'(t - v) A(v, \rho, z) dv \right] = 0$$

dans le domaine considéré des variables (ρ, z) si $F'(t - v)$ désigne une fonction arbitraire de la seule variable $t - v$, dont toutes les dérivées par rapport à cette variable existent, et qui est nulle ainsi que toutes ses dérivées pour $t - v = 0$.

Démonstration. — I. D'après les hypothèses faites, une dérivée partielle $\frac{\partial^m \mathbf{A}}{\partial \rho^p \partial z^q \partial v^{m-p-q}}$ n'existe pas quand $v = v_i$. Il nous sera utile de donner un sens au symbole $\frac{\partial^m \mathbf{A}}{\partial \rho^p \partial z^q \partial v^{m-p-q}}$ pour $v = v_i$ afin, par exemple, d'attribuer une signification à toute intégrale définie où le symbole en question entrerait sous le signe somme. Nous conviendrons que le point $v = v_i$ est un point régulier de discontinuité du symbole $\frac{\partial^m \mathbf{A}}{\partial \rho^p \partial z^q \partial v^{m-p-q}}$, étant bien entendu que la valeur ainsi définie de ce symbole pour $v = v_i$ n'est pas la dérivée partielle de \mathbf{A} pour $v = v_i$ puisque cette dérivée partielle n'existe pas en $v = v_i$.

II. Considérons d'abord la fonction

$$(19) \quad \Psi = \int_0^t \mathbf{F}'(t-v) \mathbf{A}(v, \rho, z) dv,$$

et supposons que t ne coïncide pas avec un point de discontinuité. On a

$$v_n < t < v_{n+1}$$

pour le point considéré de l'espace.

D'où

$$(20) \quad \Psi = \int_0^{v_1} \mathbf{F}'(t-v) \mathbf{A}(v) dv + \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{F}' \mathbf{A} dv + \dots + \int_{v_{n-1}}^{v_n} \mathbf{F}' \mathbf{A} dv + \int_{v_n}^t \mathbf{F}' \mathbf{A} dv.$$

Dans chaque intégrale, on peut dériver sous le signe somme. D'où par exemple

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} &= \int_0^{v_1} \mathbf{F}'(t-v) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho} dv \\ &+ \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{F}'(t-v) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho} dv + \dots + \int_{v_{n-1}}^{v_n} \mathbf{F}' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho} dv + \int_{v_n}^t \mathbf{F}' \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho} dv \\ &+ \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'(t-v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \rho} [\mathbf{A}(v_i-0, \rho, z) - \mathbf{A}(v_i+0, \rho, z)] \end{aligned}$$

ou

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} &= \int_0^t \mathbf{F}'(t-v) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \rho} dv \\ &+ \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'(t-v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \rho} [\mathbf{A}(v_i-0, \rho, z) - \mathbf{A}(v_i+0, \rho, z)]. \end{aligned}$$

Notons dès maintenant que $\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$ est une fonction continue de ρ, z, t , les points $t = v_i$ n'étant pas de discontinuité puisque $\mathbf{F}'(0) = 0$.

Nous formerons de même une dérivée seconde, par exemple $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial z}$.

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial z} &= \int_0^t F'(t-\nu) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu \\
 &+ \sum_{i=1}^n F'(t-\nu_i) \frac{\partial \nu_i}{\partial z} \left\{ \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right]_{\nu=\nu_i-0} - \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} \right]_{\nu=\nu_i+0} \right\} \\
 &+ \sum_{i=1}^n F'(t-\nu_i) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \nu_i}{\partial \rho} [\Lambda(\nu_i-0, \rho, z) - \Lambda(\nu_i+0, \rho, z)] \right\} \\
 &- \sum_{i=1}^n F''(t-\nu_i) \frac{\partial \nu_i}{\partial \rho} \frac{\partial \nu_i}{\partial z} [\Lambda(\nu_i-0, \rho, z) - \Lambda(\nu_i+0, \rho, z)] \\
 &\dots \dots \dots \text{etc.} \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Une dérivation par rapport à t se présente un peu différemment.
Soit

$$\begin{aligned}
 (24) \quad I &= \int_0^t F'(t-\nu) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu \\
 &= \int_0^{\nu_1} F'(t-\nu) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu \\
 &+ \int_{\nu_1}^{\nu_2} F' \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu + \dots + \int_{\nu_{n-1}}^{\nu_n} F' \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu + \int_{\nu_n}^t F' \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu.
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 (25) \quad \frac{\partial I}{\partial t} &= \int_0^{\nu_1} F''(t-\nu) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu \\
 &+ \int_{\nu_1}^{\nu_2} F''(t-\nu) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu + \dots + \int_{\nu_{n-1}}^{\nu_n} F'' \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu + \int_{\nu_n}^t F'' \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu.
 \end{aligned}$$

Intégrons par parties chacune de ces intégrales,

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\nu_1} F''(t-\nu) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu \\
 &= - \left[F'(t-\nu) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} \right]_0^{\nu_1} + \int_0^{\nu_1} F'(t-\nu) \frac{\partial^3 \Lambda}{\partial \rho \partial z \partial \nu} d\nu \\
 &= F'(t) \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} \right]_{\nu=+0} - F'(t-\nu_1) \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} \right]_{\nu=\nu_1-0} + \int_0^{\nu_1} F'(t-\nu) \frac{\partial^3 \Lambda}{\partial \rho \partial z \partial \nu} d\nu, \\
 &\int_{\nu_1}^{\nu_2} F''(t-\nu) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu = F'(t-\nu_1) \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} \right]_{\nu=\nu_1+0} \\
 &\quad - F'(t-\nu_2) \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} \right]_{\nu=\nu_2-0} + \int_{\nu_1}^{\nu_2} F'(t-\nu) \frac{\partial^3 \Lambda}{\partial \rho \partial z \partial \nu} d\nu, \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\int_{\nu_n}^t F''(t-\nu) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} d\nu = F'(t-\nu_n) \left[\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial \rho \partial z} \right]_{\nu=\nu_n+0} + \int_{\nu_n}^t F'(t-\nu) \frac{\partial^3 \Lambda}{\partial \rho \partial z \partial \nu} d\nu.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= \int_0^t F'(t - \nu) \frac{\partial^3 A}{\partial \rho \partial z \partial \nu} d\nu + F'(t) \left[\frac{\partial^2 A}{\partial \rho \partial z} \right]_{\nu=+0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n F'(t - \nu_i) \left[\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \rho \partial z} \right)_{\nu=\nu_i+0} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \rho \partial z} \right)_{\nu=\nu_i-0} \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (26) \quad \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \rho \partial z \partial t} &= \int_0^t F'(t - \nu) \frac{\partial^3 A}{\partial \rho \partial z \partial \nu} d\nu + F'(t) \left[\frac{\partial^2 A}{\partial \rho \partial z} \right]_{\nu=+0} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n F'(t - \nu_i) \left[\left(\frac{\partial^2 A}{\partial \rho \partial z} \right)_{\nu=\nu_i+0} - \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \rho \partial z} \right)_{\nu=\nu_i-0} \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n F''(t - \nu_i) \frac{\partial \nu_i}{\partial z} \left\{ \left[\frac{\partial A}{\partial \rho} \right]_{\nu=\nu_i-0} - \left[\frac{\partial A}{\partial \rho} \right]_{\nu=\nu_i+0} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n F''(t - \nu_i) \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \nu_i}{\partial \rho} [A(\nu_i - 0) - A(\nu_i + 0)] \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n F'''(t - \nu_i) \frac{\partial \nu_i}{\partial \rho} \frac{\partial \nu_i}{\partial z} [A(\nu_i + 0) - A(\nu_i - 0)]. \end{aligned}$$

Ce procédé de dérivation, évidemment général, montre d'abord que toutes les dérivées partielles de Ψ sont continues. Il en résulte que les formules ci-dessus restent valables même si t coïncide avec un des points de discontinuité. De plus il conduit à une relation de la forme

$$\begin{aligned} (27) \quad L \left[\int_0^t F'(t - \nu) \Lambda(\nu, \rho, z) d\nu \right] \\ = \int_0^t F'(t - \nu) L[\Lambda] d\nu + [a_{1,0} F'(t) + a_{2,0} F''(t) + \dots + a_{K,0} F^{(K)}(t)] \\ + \sum_{i=1}^n [a_{1,i} F'(t - \nu_i) + a_{2,i} F''(t - \nu_i) + \dots + a_{K,i} F^{(K)}(t - \nu_i)], \end{aligned}$$

les coefficients $a_{j,i}$ étant des fonctions de ρ et z , indépendantes du choix de la fonction F' .

Nous allons montrer que $L[\Lambda]$ est identiquement nul, ainsi que tous les coefficients $a_{j,i}$.

III. Dans ce but, nous nous proposons désormais de mettre sous une forme absolument parallèle l'expression

$$(28) \quad L \left[e^{\rho t} \int_0^{+\infty} e^{-\rho \nu} \Lambda(\nu, \rho, z) d\nu \right] = L \left[\int_0^{+\infty} e^{\rho(t-\nu)} \Lambda(\nu, \rho, z) d\nu \right]$$

qui d'autre part, par hypothèse, est identiquement nulle.

Le calcul actuel diffère du précédent sur les points suivants :

- 1° La fonction $F'(t - \nu)$ est remplacée par $e^{\rho(t-\nu)}$;
- 2° $e^{\rho(t-\nu)}$, ainsi que ses dérivées, ne s'annule pas pour $t - \nu = 0$;
- 3° La limite supérieure de l'intégrale est infinie.

Nous poserons :

$$(29) \quad \xi_p e^{\rho t} = \int_0^{\nu_N} e^{\rho(t-\nu)} \Lambda(\nu, \rho, z) d\nu.$$

L'expression de ξ_p ne diffère de celle de x_p qu'en ce sens que nous supposons finie la limite supérieure ν_N de l'intégrale. Nous calculerons d'abord les dérivées de ξ_p et nous montrerons qu'à la limite, pour ν_N infini, les dérivées de ξ_p tendent vers les dérivées de x_p . Nous ferons dépendre la limite ν_N d'un nombre N tel que, à tout nombre U donné d'avance aussi grand qu'on désire, on peut faire correspondre un nombre N_0 indépendant de ρ, z tel que l'inégalité

$$N > N_0$$

entraîne

$$\nu_N > U.$$

On y parvient par exemple en convenant que si N surpasse l'entier immédiatement inférieur n d'un nombre α ($0 < \alpha \leq 1$)

$$(30) \quad \nu_N = \nu_n(1 - \alpha) + \alpha \nu_{n+1}.$$

Calculons $\frac{\partial(\xi_p e^{\rho t})}{\partial \rho}$ à la manière dont nous avons calculé l'expression (21) à partir de (19)

$$(31) \quad \frac{\partial(\xi_p e^{\rho t})}{\partial \rho} = \int_0^{\nu_N} e^{\rho(t-\nu)} \frac{\partial \Lambda}{\partial \rho} d\nu + \sum_{i=1}^n e^{\rho(t-\nu_i)} \frac{\partial \nu_i}{\partial \rho} [\Lambda(\nu_i - 0) - \Lambda(\nu_i + 0)] \\ + e^{\rho(t-\nu_N)} \Lambda(\nu_N) \left[(1 - \alpha) \frac{\partial \nu_n}{\partial \rho} + \alpha \frac{\partial \nu_{n+1}}{\partial \rho} \right].$$

Ainsi la dérivée $\frac{\partial(\xi_p e^{\rho t})}{\partial \rho}$ apparaît comme une fonction continue de N . Elle est définie quel que soit ce nombre N . Il n'en aurait pas été de même si nous avions choisi une limite ν_N indépendante de ρ, z , de sorte que nous aurions rencontré des difficultés pour passer à la limite.

Ce parallélisme que nous avons constaté entre la formation de la dérivée $\frac{\partial(\xi_p e^{\rho t})}{\partial \rho}$ et celle de la dérivée $\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$ est général pour toutes les

dérivées partielles, de sorte que nous pouvons écrire immédiatement

$$(32) \quad \begin{aligned} L[e^{\rho t} \xi_p] &= \int_0^{+\infty} e^{\rho(t-\nu)} L[A] d\nu \\ &+ e^{\rho t} [a_{1,0} + p a_{2,0} + p^2 a_{3,0} + \dots + p^{k-1} a_{k,0}] \\ &+ \sum_{i=1}^n e^{\rho(t-\nu_i)} [a_{1,i} + p a_{2,i} + \dots + p^{k-1} a_{k,i}] \\ &+ e^{\rho(t-\nu_N)} [T_{1,N} + p T_{2,N} + \dots + p^{k-1} T_{k,N}], \end{aligned}$$

où les coefficients $a_{j,i}$ sont les mêmes que dans l'expression (27).

Lorsque N croît indéfiniment, l'expression (31) apparaît comme la somme d'une intégrale, d'une série et d'un terme complémentaire. Or les hypothèses faites sont suffisantes pour assurer la convergence uniforme de chacun de ces trois termes (1).

La limite de $\frac{\partial \xi_p}{\partial \rho}$ est donc égale à $\frac{\partial x_p}{\partial \rho}$. D'où

$$(33) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} (x_p e^{\rho t}) \\ = e^{\rho t} \left[\int_0^{+\infty} e^{-\rho \nu} \frac{\partial A}{\partial \rho} d\nu + \sum_{i=1}^{+\infty} e^{-\rho \nu_i} \frac{\partial \nu_i}{\partial \rho} [A(\nu_i - 0) - A(\nu_i + 0)] \right]. \end{aligned}$$

On obtiendrait des formules analogues pour les autres dérivées, de sorte

(1) Il suffit d'examiner plus particulièrement la convergence uniforme de la série. Considérons le groupe des ν_i dans l'intervalle des deux entiers consécutifs ($s, s+1$)

$$s \leq \nu_{i+a} < \nu_{i+a+1} < \dots < \nu_{i+b} < s+1,$$

et soit m le nombre entier tel que $m-1 < \nu_n \leq m$.

On a

$$\left| \sum_{i+a}^{i+b} e^{\rho(t-\nu_i)} \frac{\partial \nu_i}{\partial \rho} [A(\nu_i - 0, \rho, z) - A(\nu_i + 0, \rho, z)] \right| < 2 e^{\rho t} (\lambda + 1) \mu \nu s^\alpha (s+1)^{\beta+\gamma} e^{-\rho s}$$

ou, en désignant par C et C' deux constantes

$$\left| \sum_{i=1}^{i=n} e^{\rho(t-\nu_i)} \frac{\partial \nu_i}{\partial \rho} [A(\nu_i - 0, \rho, z) - A(\nu_i + 0, \rho, z)] \right| < C e^{\rho t} \sum_{s=m_0}^{m-1} [e^{-\rho s} s^\alpha (s+1)^{\beta+\gamma}] + C' e^{\rho t}.$$

Cette dernière série étant convergente, la série initiale converge uniformément.

qu'en définitive

$$(34) \quad L[e^{pt} x_p] = e^{pt} \left\{ \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} L[A] d\nu + a_{1,0} + pa_{2,0} + p^2 a_{3,0} + \dots + p^{K-1} a_{K,0} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-p\nu_i} [a_{1,i} + pa_{2,i} + \dots + p^{K-1} a_{K,i}] \right\}.$$

Si cette expression est identiquement nulle quel que soit p , il en sera de même de

$$(35) \quad \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} L[A] d\nu + a_{1,0} + pa_{2,0} + \dots + p^{K-1} a_{K,0} \\ + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-p\nu_i} [a_{1,i} + pa_{2,i} + \dots + p^{K-1} a_{K,i}] \equiv 0.$$

Or on peut toujours choisir p assez grand pour que le module de l'intégrale et celui de la somme de la série demeurent inférieurs à tout nombre positif donné d'avance aussi petit qu'on voudra. Ainsi l'expression

$$a_{1,0} + pa_{2,0} + \dots + p^{K-1} a_{K,0}$$

doit tendre vers zéro lorsque p croît indéfiniment. Cette condition entraîne

$$a_{1,0} = a_{2,0} = \dots = a_{K,0} = 0.$$

En multipliant le premier membre de (35) par e^{pU} où U désigne une constante

$$\nu_{n-1} \leq U < \nu_n,$$

on obtient l'identité

$$\int_0^{+\infty} e^{p(U-\nu)} L[A] d\nu + \sum_{i=1}^{\infty} e^{p(U-\nu_i)} [a_{1,i} + pa_{2,i} + \dots + p^{K-1} a_{K,i}] \equiv 0,$$

U étant fixé, on peut toujours choisir p assez grand pour que le module de

$$\int_U^{+\infty} e^{p(U-\nu)} L[A] d\nu$$

et celui de

$$\sum_{i=n}^{+\infty} e^{p(U-\nu_i)} [a_{1,i} + pa_{2,i} + \dots + p^{K-1} a_{K,i}]$$

demeurent inférieurs à tout nombre positif ε donné d'avance aussi petit qu'on voudra.

Donc l'expression

$$(36) \quad \int_0^U e^{p(U-v)} L[A] dv + \sum_{i=1}^{n-1} e^{p(U-v_i)} [a_{1,i} + \dots + p^{k-1} a_{k,i}]$$

doit tendre vers zéro quand p augmente indéfiniment.

Si nous supposons d'abord $U < v_1$, la formule (36) ne comporte que l'intégrale. En vertu du lemme, $L[A]$ est identiquement nulle pour $v < v_1$. $L[A]$ n'est d'ailleurs pas nécessairement nul pour $v = v_1$ mais sa valeur y est bornée, donc l'intégrale

$$\int_0^{v_1} e^{p(v_1-v)} L[A] dv$$

est nulle.

Si nous appliquons alors la formule (36) pour $U = v_1$ il apparaît que l'expression

$$a_{1,1} + pa_{2,1} + \dots + p^{k-1} a_{k,1}$$

doit être un infiniment petit quand p croît indéfiniment. D'où

$$a_{1,1} = a_{2,1} = \dots = a_{k,1} = 0.$$

On continuera ce raisonnement de proche en proche. Pour

$$v_1 < U < v_2$$

on démontrera que $L[A] = 0$. Donc $L[A]$ est nul également pour $v = v_1$ autrement le point de discontinuité de cette expression pour $v = v_1$ ne serait pas régulier, etc. . . , etc. . .

V. Pour toute valeur de t aussi grande qu'on désire mais finie, il n'existe qu'un nombre fini de points de discontinuités v_i compris entre 0 et t . En répétant le raisonnement ci-dessus un nombre de fois fini, on démontre que $L[A]$ est identiquement nul quand v est inférieur à t , et l'on prouve aussi la nullité de tous les coefficients $a_{j,i}$ qui interviennent dans la formule (27). Donc

$$L[\Psi] = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque I. — Le simple énoncé du théorème, dans lequel nous avons conservé à dessein les notations employées au cours de l'exposé de la méthode d'intégration, suffit à montrer comment ce théorème permettra de vérifier l'exactitude de la solution obtenue, si l'on peut

constater que les facteurs de transmission présentent bien les caractères généraux que requiert l'énoncé.

Une des particularités de la démonstration est de ne faire intervenir que des domaines bornés des variables d'espace et de temps. C'est là une des caractéristiques des problèmes de propagation d'ondes progressives, qui ne font jamais intervenir la notion de points à l'infini.

Remarque II. — L'énoncé du théorème suppose que F' est une fonction indéfiniment dérivable. La démonstration a mis en évidence que l'existence et la continuité des dérivées de F' n'étaient requises que jusqu'à $F^{(K)}$ inclus.

Remarque III. — L'énoncé du théorème suppose un opérateur $L[\Psi]$ dépendant d'une seule fonction Ψ . Il est clair qu'on peut envisager sans modification des opérateurs mixtes, relatifs à deux ou plusieurs fonctions, pourvu qu'ils restent linéaires et homogènes par rapport à l'ensemble des fonctions et de leurs dérivées. Les conditions aux limites pour $z = 0$ font intervenir des opérateurs doubles, dépendant des fonctions Ψ et U .

Remarque IV. — Nous avons supposé essentiellement au cours de l'énoncé que, dans le domaine borné des variables ρ , z ainsi que sur les limites de ce domaine, on n'avait jamais $v_i = v_j$.

Il peut arriver que sur certaines surfaces, le long de certaines lignes ou en certains points, deux ou plusieurs valeurs des v_i viennent à se confondre. Si une telle circonstance se présente, elle devra faire l'objet d'un examen particulier.

Remarque V. — Au cours de la démonstration, nous avons mis en évidence toute une série de relations

$$a_{i,j} = 0$$

entre les v_i , les $A(v_i)$ et leurs dérivées. Ces relations ne présentent pas un intérêt essentiel pour le but que nous poursuivons, car nous obtiendrons sous forme explicite l'expression des v_i et $A(v_i)$, sans avoir à utiliser ces relations. Cependant nous montrerons — comme on le prévoit facilement dès à présent — que les surfaces de front d'onde ont précisément pour équations

$$v_i = t$$

et que les valeurs des $A(v_i)$ sont en général caractéristiques des variations de grandeur des discontinuités cinématiques lorsque les surfaces de front d'onde sont le siège de telles discontinuités.

Les relations $\alpha_{i,j} = 0$ sont donc à rapprocher de celles qu'on peut obtenir directement à partir de la définition d'Hugoniot, sans avoir à recourir à l'intégration des équations de propagation.

Soit l'opérateur

$$L[\psi] = \Delta\psi - \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Il lui correspond les relations

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{1,i} &= \left\{ A \Delta v_i + 2 \left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial v_i}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial A}{\partial v} \left[\frac{1}{\Omega^2} + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}_{v_i+0}^{v_i-0} = 0, \\ \alpha_{2,i} &= A_{v_i+0}^{v_i-0} \left\{ \frac{1}{\Omega^2} - \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si nous supposons que

$$A_{v_i+0}^{v_i-0} = A(v_i - 0) - A(v_i + 0)$$

est différent de zéro, la relation $\alpha_{2,i} = 0$ s'écrit

$$(38) \quad \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{\Omega^2} = 0,$$

relation qui exprime que la surface mobile d'équation

$$v_i(x, y, z) = t$$

se déplace avec une vitesse normale égale à Ω .

En tenant compte de (38) la relation $\alpha_{1,i} = 0$ s'écrit alors

$$\left[A \Delta v_i + 2 \left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial A}{\partial v} \right) \right]_{v_i+0}^{v_i-0} = 0$$

ou

$$(39) \quad A_{v_i+0}^{v_i-0} \Delta v_i \pm \frac{2}{\Omega} \frac{d}{dn} (A_{v_i+0}^{v_i-0}) = 0,$$

en désignant par n une abscisse comptée sur la normale à la surface d'onde $v_i = t$. Dans cette relation, il convient d'adopter le signe $+$ si les n sont comptés positivement dans le sens de propagation, le signe $-$ dans le cas contraire.

L'équation différentielle (39) fait donc connaître la variation de la discontinuité $A_{v_i+0}^{v_i-0}$ tout le long du rayon Nn (normale à la surface d'onde) dès qu'on connaît la valeur de $A_{v_i+0}^{v_i-0}$ en un point de ce rayon.

Envisageons par exemple un front d'onde sphérique

$$v_i = \frac{r}{\Omega} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\Omega} \quad (r > 0).$$

D'où

$$\Delta v_i = \frac{2}{r\Omega}.$$

Les normales Nn se confondant avec les rayons des surfaces d'onde concentriques, nous poserons $n = r$ si l'onde diverge, $n = -r$ si l'onde converge, en choisissant l'origine des n au centre. Dans les deux cas, la relation (3g) devient

$$A_{v_i+0}^{v_i-0} \Delta v_i + \frac{2}{\Omega} \frac{d}{dr} (A_{v_i+0}^{v_i-0}) = 0$$

ou

$$\frac{A_{v_i+0}^{v_i-0}}{r} + \frac{d}{dr} (A_{v_i+0}^{v_i-0}) = 0, \quad A_{v_i+0}^{v_i-0} = \frac{C}{r},$$

C désignant une constante.

Il est à remarquer que les relations (38) et (3g) ont été obtenues en supposant $A_{v_i+0}^{v_i-0} \neq 0$. En général la relation $A_{v_i+0}^{v_i-0} = 0$ implique que le point $M(x, y, z)$ doit appartenir à certaines surfaces, à certaines lignes, ou coïncider avec certains points particuliers de l'espace. En pareil cas les relations (38) et (3g) subsistent sans modification. Sur ces surfaces ou lignes ou en ces points particuliers $A_{v_i+0}^{v_i-0}$ et $\frac{d}{dn} (A_{v_i+0}^{v_i-0})$ s'annulent.

Supposons par contre que $A_{v_i+0}^{v_i-0}$ soit identiquement nul. La relation $\alpha_{2,i} = 0$ est satisfaite sans plus, mais l'on a

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{v_i+0}^{v_i-0} + \left(\frac{\partial A}{\partial v} \right)_{v_i+0}^{v_i-0} \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0, \\ \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)_{v_i+0}^{v_i-0} + \left(\frac{\partial A}{\partial v} \right)_{v_i+0}^{v_i-0} \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0, \\ \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{v_i+0}^{v_i-0} + \left(\frac{\partial A}{\partial v} \right)_{v_i+0}^{v_i-0} \frac{\partial v_i}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

En reportant les valeurs de $\left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{v_i+0}^{v_i-0}$, $\left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)_{v_i+0}^{v_i-0}$, $\left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{v_i+0}^{v_i-0}$ tirées de (40) dans la relation $\alpha_{1,i} = 0$, il vient

$$\left(\frac{\partial A}{\partial v} \right)_{v_i+0}^{v_i-0} \left\{ \frac{1}{\Omega^2} - \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = 0.$$

D'où nous déduisons que la relation (38) est encore vérifiée si $\left(\frac{\partial A}{\partial v} \right)_{v_i+0}^{v_i-0}$ n'est pas identiquement nulle. En pareil cas, la surface de front d'onde se déplace donc toujours avec une vitesse égale à Ω .

12. **Seconde démonstration très simplifiée du théorème.** — Nous désignerons par

$$A^{\text{I}}(\nu), A^{\text{II}}(\nu), \dots, A^{\text{N}}(\nu), \dots,$$

les primitives successives de $A(\nu)$

$$A^{\text{I}}(\nu) = \int_0^\nu A(\nu) d\nu, \quad A^{\text{II}}(\nu) = \int_0^\nu A^{\text{I}}(\nu) d\nu, \quad \dots, \quad A^{\text{N}}(\nu) = \int_0^\nu A^{\text{N-1}}(\nu) d\nu.$$

Dans tout domaine des variables d'espace tel qu'on n'ait jamais dans ce domaine $\nu_i = \nu_j$ et pour toute valeur de ν sans excepter les valeurs $\nu = \nu_i$, on voit immédiatement que $A^{\text{I}}(\nu)$ est une fonction continue; que $A^{\text{II}}(\nu)$ est continue et admet des dérivées premières continues, que d'une manière générale $A^{\text{K+1}}(\nu)$ est continue et admet des dérivées continues jusqu'au $K^{\text{ième}}$ ordre inclus.

Si l'on effectue des intégrations successives par parties, on transforme l'expression de x_p de la manière suivante;

$$(41) \quad x_p = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A(\nu) d\nu \\ = p \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A^{\text{I}}(\nu) d\nu = \dots = p^N \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A^{\text{N}}(\nu) d\nu.$$

On transforme parallèlement l'expression de Ψ

$$(42) \quad \Psi = \int_0^t F'(t-\nu) A(\nu) d\nu \\ = \int_0^t F''(t-\nu) A^{\text{I}}(\nu) d\nu = \dots = \int_0^t F^{(\text{N+1})}(t-\nu) A^{\text{N}}(\nu) d\nu,$$

Si donc, au lieu de raisonner sur les expressions initiales de x_p et de Ψ comme nous l'avons fait au cours de la démonstration précédente, nous raisonnons sur les expressions équivalentes

$$(43) \quad x_p = p^{\text{K+1}} \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A^{\text{K+1}}(\nu) d\nu, \quad \Psi = \int_0^t F^{(\text{K+2})}(t-\nu) A^{\text{K+1}}(\nu) d\nu,$$

les dérivations sous le signe somme peuvent se faire immédiatement, sans la complication d'écritures introduite par l'existence de discontinuités ν_i .

La relation (27) devient simplement

$$(44) \quad L[\Psi] = \int_0^t F^{(K+2)}(t - \nu) L[A^{\overline{K+1}}(\nu)] d\nu,$$

et la relation (34)

$$(45) \quad L[x_p e^{\rho t}] = e^{\rho t} p^{K+1} \int_0^{+\infty} e^{-\rho \nu} L[A^{\overline{K+1}}(\nu)] d\nu \equiv 0,$$

d'où l'on conclut aussitôt

$$L[A^{\overline{K+1}}(\nu)] \equiv 0, \quad L[\Psi] \equiv 0.$$

Cette seconde démonstration apparaît d'autant plus simple que l'énoncé du lemme peut être lui-même simplifié, attendu qu'il n'est plus utile désormais d'envisager que la fonction $f(x)$ puisse être discontinue.

La première démonstration n'exige cependant l'existence et la continuité des dérivées de F que jusqu'à l'ordre K inclus. La seconde démonstration requiert cette existence et cette continuité jusqu'à l'ordre $K + 3$ inclus. La première démonstration semble donc un peu plus générale que la seconde, mais cet avantage est illusoire puisque nous pouvons nous affranchir ultérieurement de toutes restrictions concernant l'existence et la continuité des dérivées de F .

Nous avons cependant tenu à présenter la première démonstration, parce qu'elle nous a conduit à exprimer les dérivées de Ψ sous une forme qui servira dans l'étude des discontinuités cinématiques. D'autre part, cette première méthode démontrait la nécessité des relations $a_{i,j} = 0$ dont nous avons montré la signification importante.

Remarque I. — Lorsque la fonction $F(t)$ est indéfiniment dérivable quel que soit t , sans excepter $t = 0$, on peut toujours former deux expressions de x_p et Ψ , des types (41) et (42), dépendant d'une primitive $A^{\overline{N}}(\nu)$ d'un ordre aussi élevé qu'on désire. Il en résulte aussitôt que Ψ est alors une fonction indéfiniment dérivable par rapport à t , ρ , z (les valeurs $t = \nu_i$ ne faisant pas exception) dans tout domaine des variables d'espace où une égalité $\nu_i = \nu_j$ est exclue.

Remarque II. — Nous avons montré, en examinant particulièrement le cas de l'opérateur

$$L[\psi] = \Delta\psi - \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

que les relations $a_{i,j} = 0$ permettaient d'obtenir une équation différentielle faisant connaître la variation d'une discontinuité cinématique

éventuelle, tout le long d'un rayon, si l'on supposait que $A_{\nu_i+0}^{\nu_i-0}$ n'était pas identiquement nulle.

Cette remarque est susceptible d'une certaine généralisation. Supposons pour simplifier qu'il n'existe qu'un seul point de discontinuité, ν_i , que $A(\nu)$ soit identiquement nul pour $\nu < \nu_i$ et que $A(\nu)$ soit continu quels que soient ν, ρ, z dans le domaine des variables ρ, z que l'on considère. On écrira

$$(46) \quad x_\rho = \int_0^{+\infty} e^{-\rho\nu} A(\nu) d\nu = \frac{1}{\rho} \int_0^{+\infty} e^{-\rho\nu} \frac{\partial A}{\partial \nu} d\nu,$$

et sous une forme parallèle

$$(47) \quad \Psi = \int_0^t F'(t-\nu) A(\nu) d\nu = \int_0^t F(t-\nu) \frac{\partial A}{\partial \nu} d\nu.$$

On pourra reprendre les raisonnements effectués lors de la première démonstration en partant cette fois des nouvelles expressions (46) et (47), à la condition que les dérivées de A existent et satisfassent aux exigences de l'énoncé jusqu'à l'ordre $K+1$ inclus. Il pourra alors arriver que $\left(\frac{\partial A}{\partial \nu}\right)_{\nu=\nu_i+0}$ ne soit pas identiquement nulle. En ce cas on obtiendra une équation différentielle faisant connaître les variations de $\left(\frac{\partial A}{\partial \nu}\right)_{\nu=\nu_i+0}$ tout le long d'un rayon, cette équation étant identique à celle que satisfait $A(\nu_i+0)$ lorsque cette discontinuité n'est pas identiquement nulle. Nous reconnâtrons plus loin la signification concrète d'une discontinuité $\left(\frac{\partial A}{\partial \nu}\right)_{\nu_i+0}^{\nu_i-0}$. Lorsque le front de l'onde sphérique isotrope initiale est le siège d'une discontinuité cinématique d'ordre n , le front de l'onde $t = \nu_i$ est aussi le siège d'une discontinuité cinématique d'ordre n si $A_{\nu_i+0}^{\nu_i-0}$ n'est pas nul, le siège d'une discontinuité cinématique d'ordre $n+1$ si $A_{\nu_i+0}^{\nu_i-0}$ est nul et $\left(\frac{\partial A}{\partial \nu}\right)_{\nu_i+0}^{\nu_i-0} \neq 0$, etc. . . . , et la grandeur de cette discontinuité cinématique d'ordre $n+1$ est déterminée par la valeur de $\left(\frac{\partial A}{\partial \nu}\right)_{\nu_i+0}^{\nu_i-0}$.

Si $A(\nu)$ et $\frac{\partial A}{\partial \nu}$ sont continues, on pourra poursuivre le mode de raisonnement si les dérivées de A existent et satisfont aux exigences de l'énoncé jusqu'à l'ordre $K+2$ inclus. En continuant de proche en proche, on finira donc certainement, sauf dans deux cas exceptionnels, par obtenir une équation différentielle à laquelle satisfait la première discontinuité rencontrée $\left(\frac{\partial^p A}{\partial \nu^p}\right)_{\nu=\nu_i+0}$, cette équation déterminant la

grandeur de la discontinuité cinématique d'ordre $n + p$ dont le front d'onde est alors le siège.

Le premier cas exceptionnel correspond à la circonstance que $A, \frac{\partial A}{\partial v}, \dots, \frac{\partial^{p-1} A}{\partial v^{p-1}}$ sont continues et que $\frac{\partial^p A}{\partial v^p}$ ou encore certaines des dérivées partielles d'ordre inférieur à $K + p + 1$ cessent de satisfaire aux exigences de l'énoncé, en devenant par exemple infinies pour $v = v_1 + 0$.

Le deuxième cas exceptionnel correspond à la circonstance que A est indéfiniment dérivable par rapport à v quels que soient ρ, z, v sans excepter la valeur $v = v_1$.

13. Généralisation du théorème. — Pour les seules applications que nous traiterons ici, le théorème présente un degré de généralité excessif du fait que nous avons envisagé dans l'énoncé la possibilité d'une infinité de valeurs v_i . Il convenait néanmoins d'adopter ce point de vue pour permettre de traiter éventuellement d'autres problèmes comportant des réflexions, réfractions ou diffractions successives. Telles sont par exemple les généralisations les plus immédiates du problème ici traité, comportant l'hypothèse de l'existence de plus de deux milieux.

Cependant, nous rencontrerons dans certains cas particuliers (ondes coniques) des discontinuités $A(v_i)$ d'un caractère différent de celles que nous avons envisagées jusqu'à présent. Il pourra arriver que la fonction $A(v)$ ou certaines de ses dérivées partielles d'ordre inférieur à $K + 1$ deviennent infinies lorsque v tend vers v_i . En pareil cas la première démonstration du théorème tombera en défaut.

Cependant, à la seule condition que $A(v)$ soit une fonction intégrable, dans tout domaine $(0, v)$, c'est-à-dire que $A^{\overline{I}}(v)$ existe et soit une fonction continue de v , les formules (41) et (42) restent exactes, en supposant que F soit indéfiniment dérivable ou, tout au moins, que ses dérivées existent et soient continues jusqu'à un ordre suffisamment élevé. Si donc on peut trouver une primitive $A^{\overline{N}}(v)$ satisfaisant aux conditions requises de la fonction $A(v)$ dans l'énoncé du théorème, ou, ce qui revient au même, une primitive d'un ordre plus élevé encore, continue ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur à $K + 1$, la généralisation du théorème ira de soi en pareil cas.

14. Notion de front d'onde. — Une onde est ainsi définie par un facteur de transmission $A(v)$ dont le caractère fondamental est de présenter un, plusieurs ou une infinité de points de discontinuité

$\nu = \nu_i(x, y, z)$. L'onde est progressive lorsque $\Lambda(\nu)$ est identiquement nul pour $\nu < \nu_1$. La surface mobile d'équation

$$\nu_1(x, y, z) = t$$

représente alors la surface de front d'onde proprement dite séparant les points de l'espace qui sont restés constamment au repos jusqu'à l'instant t , des points de l'espace qui sont en mouvement ou n'ont pas été constamment au repos jusqu'à l'instant t . Les autres surfaces mobiles d'équation

$$\nu_i(x, y, z) = t \quad (i > 1),$$

qui n'atteignent un point déterminé de l'espace qu'à des instants postérieurs, se succédant dans l'ordre croissant des indices i , ont, elles aussi, une signification physique importante en général ⁽¹⁾, car leurs passages successifs en un même point M se traduisent souvent par un changement d'allure dans le mouvement de M.

De tels changements d'allure, plus ou moins reconnaissables, sont désignés sous le nom d' « impetus » en séismologie. Aussi, par une extension de la notion de front d'onde, dirons-nous également que toutes les surfaces d'équation $t = \nu_i$ sont des surfaces de front d'onde ⁽²⁾.

A vrai dire, dans l'énoncé du théorème, nous n'avions défini comme ν_i que les valeurs de ν pour lesquelles se présentait une discontinuité de $\Lambda(\nu)$ ou d'une de ses dérivées d'ordre inférieur à $K + 1$. L'ordre K ne joue cependant aucun rôle essentiel dans le nouveau point de vue adopté et il convient de définir comme point de discontinuité toute valeur de ν pour laquelle $\Lambda(\nu)$ n'est pas indéfiniment dérivable par rapport à ν, x, y ou z . Par exception la valeur V telle que

$$\Lambda(\nu) = 0, \quad \text{pour } \nu < V;$$

$$\Lambda(\nu) \neq 0, \quad \text{pour } \nu > V,$$

sera toujours considérée comme point de discontinuité

$$V = \nu_1,$$

⁽¹⁾ Si la fonction d'excitation $F(t)$ n'est pas indéfiniment dérivable.

⁽²⁾ Lorsque, avant d'envisager la solution $\Psi(t, x, y, z)$ nous étudierons la seule fonction $\Lambda(\nu, x, y, z)$, nous emploierons des abréviations de langage quelque peu incorrectes, mais qui se comprennent d'elles-mêmes : nous considérerons la variable ν comme un temps, nous dirons que la surface mobile $\nu = \nu_i(x, y, z)$ est une surface de front d'onde ou simplement un front d'onde, que l'instant $\nu = \nu_i(x, y, z)$ est l'instant de passage du front considéré au point $M(x, y, z)$.

même si $A(\nu)$ et toutes ses dérivées partielles sont nulles pour $\nu = V + 0$. Il n'échappera pas au lecteur que l'exposé présenté au cours de ce chapitre est quelque peu artificiel. En suivant un ordre peut être plus logique nous aurions pu nous borner actuellement aux considérations initiales sur l'intégrale de Carson envisagée seulement comme une méthode plausible de recherche des solutions. Nous aurions ensuite appliqué cette méthode et vérifié la correction des solutions obtenues. Il nous a semblé cependant préférable de ne pas demander au lecteur de nous suivre durant de longs chapitres sans qu'il sache où nous le menions. La description de la fonction $A(\nu)$ et de ses points de discontinuité ν_i s'adapte aux solutions trouvées. Nous ne pouvons pas prétendre que toute solution d'un problème d'ondes progressives régi par un système d'équations linéaires puisse être toujours défini à l'aide de facteurs de transmission, ni à plus forte raison que ces facteurs de transmission présentent obligatoirement la structure ici décrite.

(1) J. R. CARSON, *Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung (Erweiterte deutsche Bearbeitung von F. Ollendorf und K. Pohlhausen)*. Julius Springer, Berlin, 1929.

Voir également FRANK-VON MISES, *Differential-Gleichungen der Physik*, t. 1, 2^e édition, p. 817 à 829. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1930.



CHAPITRE IV.

DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS EXPONENTIELS.

15. Position du problème. — Dans ce chapitre, nous cherchons à déterminer deux fonctions

$$\left. \begin{aligned} \psi_p &= e^{\rho t} X_p(\rho, z) \\ u_p &= e^{\rho t} Y_p(\rho, z) \end{aligned} \right\} \text{ pour } z > 0; \quad \left. \begin{aligned} \psi'_p &= e^{\rho t} X'_p(\rho, z) \\ u'_p &= e^{\rho t} Y'_p(\rho, z) \end{aligned} \right\} \text{ pour } z < 0;$$

satisfaisant aux équations (5) et (6) du Chapitre I, qui deviennent

$$(1) \quad \frac{\partial^2 X_p}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 X_p}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial X_p}{\partial \rho} - \frac{p^2}{\Omega_1^2} X_p = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 Y_p}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 Y_p}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Y_p}{\partial \rho} - \frac{Y_p}{\rho^2} - \frac{p^2}{\Omega_2^2} Y_p = 0,$$

dans le premier milieu (côté de la source) et

$$(3) \quad \frac{\partial^2 X'_p}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 X'_p}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial X'_p}{\partial \rho} - \frac{p^2}{\Omega_1'^2} X'_p = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 Y'_p}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 Y'_p}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Y'_p}{\partial \rho} - \frac{Y'_p}{\rho^2} - \frac{p^2}{\Omega_2'^2} Y'_p = 0,$$

dans le second milieu.

De plus, ces fonctions doivent satisfaire, pour $z = 0$, aux quatre conditions aux limites (7), (8), (9), (10) du Chapitre I qui deviennent ici

$$(5) \quad \frac{\partial X_p}{\partial z} + \frac{\partial Y_p}{\partial \rho} + \frac{Y_p}{\rho} = \frac{\partial X'_p}{\partial z} + \frac{\partial Y'_p}{\partial \rho} + \frac{Y'_p}{\rho},$$

$$(6) \quad \frac{\partial X_p}{\partial \rho} - \frac{\partial Y_p}{\partial z} = \frac{\partial X'_p}{\partial \rho} - \frac{\partial Y'_p}{\partial z}$$

et

$$(7) \quad \begin{aligned} & \sigma \left[p^2 \frac{\Omega_1^2 - 2\Omega_2^2}{\Omega_1^2} X_p + 2\Omega_2^2 \left(\frac{\partial^2 X_p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Y_p}{\partial \rho \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Y_p}{\partial z} \right) \right] \\ &= \sigma \left[p^2 \frac{\Omega_1'^2 - 2\Omega_2'^2}{\Omega_1'^2} X'_p + 2\Omega_2'^2 \left(\frac{\partial^2 X'_p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 Y'_p}{\partial \rho \partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Y'_p}{\partial z} \right) \right], \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} & \sigma \left[p^2 Y_p + 2\Omega_2^2 \left(\frac{\partial^2 X_p}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial^2 Y_p}{\partial z^2} \right) \right] \\ &= \sigma \left[p^2 Y'_p + 2\Omega_2'^2 \left(\frac{\partial^2 X'_p}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial^2 Y'_p}{\partial z^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nous présumons d'autre part que X_p et Y_p , X'_p et Y'_p restent bornées, sauf au point S où X_p devient infinie comme $\frac{1}{r}$ à un terme additif près borné [$r = \sqrt{\rho^2 + (z-h)^2}$].

Enfin, quand le point M(ρ , z) s'éloigne à l'infini, les fonctions X_p , Y_p , X'_p , Y'_p doivent tendre vers zéro, si possible exponentiellement.

16. Hypothèse sur la forme des solutions. — Suivant un résultat classique, on peut écrire

$$\frac{1}{r} e^{-\frac{pr}{\Omega_1}} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_1^2}}} J_0(\lambda\rho) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_1^2}} |z-h|}.$$

J_0 désignant la fonction de Bessel d'ordre zéro, λ une variable d'intégration réelle, $|z-h|$ la valeur absolue de $z-h$.

Aussi chercherons-nous à satisfaire aux équations par des expressions de la forme suivante :

a. Dans le premier milieu (côté de la source) : $z > 0$

$$(9) \quad X_p = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_1^2}}} J_0(\lambda\rho) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_1^2}} |z-h|} + \int_0^{+\infty} f(\lambda) d\lambda J_0(\lambda\rho) e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_1^2}} z},$$

$$(10) \quad Y_p = \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda) d\lambda \left[\frac{d}{d\rho} J_0(\lambda\rho) \right] e^{-\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_1^2}} z}$$

b. Dans le deuxième milieu : $z < 0$

$$(11) \quad X'_p = \int_0^{+\infty} f'(\lambda) d\lambda J_0(\lambda\rho) e^{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_1^2}} z},$$

$$(12) \quad Y'_p = \int_0^{+\infty} \varphi'(\lambda) d\lambda \left[\frac{d}{d\rho} J_0(\lambda\rho) \right] e^{\sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_1^2}} z},$$

étant entendu que les accents de $f'(\lambda)$, $\varphi'(\lambda)$ rappellent qu'il s'agit du second milieu et ne sont pas à confondre avec des symboles de dérivation.

Nous admettons provisoirement que les dérivations par rapport à ρ et z sont effectuées correctement en dérivant sous le signe d'intégration.

Une fois déterminées les fonctions f , φ , f' , φ' il y aura lieu de vérifier que ce procédé de dérivation était légitime.

Dans ces conditions, les fonctions (9), (10), (11), (12) satisfont bien aux équations indéfinies (1), (2), (3), (4). Il reste à satisfaire aux conditions aux limites (5), (6), (7), (8).

17. Détermination de f , φ , f' , φ' . — En substituant dans les conditions aux limites, on obtient quatre équations linéaires en f , φ , f' , φ' . Nous poserons

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{\lambda^2 + \frac{P^2}{\Omega_1^2}} = \alpha, & \sqrt{\lambda^2 + \frac{P^2}{\Omega_2^2}} = \beta, \\ \sqrt{\lambda^2 + \frac{P^2}{\Omega_1'^2}} = \alpha', & \sqrt{\lambda^2 + \frac{P^2}{\Omega_2'^2}} = \beta'; \end{array} \right.$$

$$(14) \quad \frac{\sigma \Omega_2^2}{2(\sigma \Omega_2^2 - \sigma' \Omega_2'^2)} = C, \quad \frac{\sigma' \Omega_2'^2}{2(\sigma' \Omega_2'^2 - \sigma \Omega_2^2)} = C'.$$

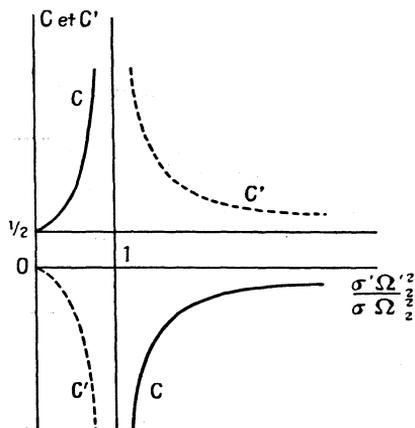


Fig. 4.

C et C' ne sont pas des paramètres indépendants, car

$$(15) \quad C + C' = \frac{1}{2}.$$

De plus, C et C' sont toujours opposés. Lorsqu'on donne au rapport $\frac{\sigma' \Omega_2'^2}{\sigma \Omega_2^2}$ toutes les valeurs possibles entre 0 et $+\infty$, C et C' sont supérieurs à $\frac{1}{2}$ ou négatifs (fig. 4).

Avec ces notations, les conditions aux limites deviennent

$$(16) \quad \alpha f(\lambda) + \alpha' f'(\lambda) + \lambda^2 \varphi(\lambda) - \lambda^2 \varphi'(\lambda) = \lambda e^{-h\alpha},$$

$$(17) \quad f(\lambda) - f'(\lambda) + \beta \varphi(\lambda) + \beta' \varphi'(\lambda) = -\frac{\lambda}{\alpha} e^{-h\alpha};$$

$$(18) \quad \begin{aligned} & \sigma \Omega_2^2 \left(\lambda^2 + \frac{P^2}{2\Omega_2^2} \right) f(\lambda) - \sigma' \Omega_2'^2 \left(\lambda^2 + \frac{P^2}{2\Omega_2'^2} \right) f'(\lambda) \\ & + \sigma \Omega_2^2 \lambda^2 \beta \varphi(\lambda) + \sigma' \Omega_2'^2 \lambda^2 \beta' \varphi'(\lambda) \\ & = -\sigma \Omega_2^2 \frac{\lambda}{\alpha} \left(\lambda^2 + \frac{P^2}{2\Omega_2^2} \right) e^{-h\alpha}, \end{aligned}$$

$$(19) \quad \begin{aligned} & \sigma \Omega_2^2 \alpha f(\lambda) + \sigma' \Omega_2'^2 \alpha' f'(\lambda) \\ & + \sigma \Omega_2^2 \left(\lambda^2 + \frac{P^2}{2\Omega_2^2} \right) \varphi(\lambda) - \sigma' \Omega_2'^2 \left(\lambda^2 + \frac{P^2}{2\Omega_2'^2} \right) \varphi'(\lambda) \\ & = \sigma \Omega_2^2 \lambda e^{-h\alpha}. \end{aligned}$$

Nous admettrons provisoirement que le déterminant Δ des coefficients des inconnues dans les quatre équations (16) à (19) ne s'annule pas quand λ varie de 0 à $+\infty$

$$(20) \quad \begin{aligned} \Delta = & \lambda^2 \left(\lambda^2 + \frac{P^2 C}{\Omega_2^2} + \frac{P^2 C'}{\Omega_2'^2} \right)^2 + \lambda^2 \alpha \alpha' \beta \beta' \\ & - \alpha \beta \left(\lambda^2 + \frac{P^2 C'}{\Omega_2'^2} \right)^2 - \alpha' \beta' \left(\lambda^2 + \frac{P^2 C}{\Omega_2^2} \right)^2 + \frac{P^4 C C'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} (\alpha \beta' + \alpha' \beta). \end{aligned}$$

Il vient alors

a. Dans le premier milieu (côté de la source) : $z > 0$

$$(21) \quad \begin{aligned} X_p = & \int_0^{+\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\alpha} J_0(\lambda \rho) e^{-\alpha|z-h|} - \int_0^{+\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\alpha} J_0(\lambda \rho) e^{-\alpha(z+h)} \\ & + z \int_0^{+\infty} \lambda d\lambda J_0(\lambda \rho) \frac{\lambda^2 \alpha' \beta \beta' + \beta' P^4 \frac{C C'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} - \beta \left(\lambda^2 + \frac{P^2 C'}{\Omega_2'^2} \right)^2}{\Delta} e^{-\alpha(z+h)}, \end{aligned}$$

$$(22) \quad \begin{aligned} Y_p = & 2 \int_0^{+\infty} \lambda d\lambda \left[\frac{d}{d\rho} J_0(\lambda \rho) \right] \\ & \times \frac{\left(\lambda^2 + \frac{P^2 C}{\Omega_2^2} + \frac{P^2 C'}{\Omega_2'^2} \right) \left(\lambda^2 + \frac{P^2 C'}{\Omega_2'^2} \right) - \alpha' \beta' \left(\lambda^2 + \frac{P^2 C}{\Omega_2^2} \right)}{\Delta} e^{-\alpha h - \beta z}. \end{aligned}$$

b. Dans le second milieu : $z < 0$

$$(23) \quad X'_p = \frac{2P^2 C}{\Omega_2^2} \int_0^{+\infty} \lambda d\lambda J_0(\lambda \rho) \frac{\beta \left(\lambda^2 + P^2 \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right) - \beta' \left(\lambda^2 + \frac{P^2 C}{\Omega_2^2} \right)}{\Delta} e^{-\alpha h + \alpha' z},$$

$$(24) \quad Y'_p = \frac{2P^2 C}{\Omega_2^2} \int_0^{+\infty} \lambda d\lambda \left[\frac{d}{d\rho} J_0(\lambda \rho) \right] \frac{\alpha' \beta - \left(\lambda^2 + \frac{P^2 C}{\Omega_2^2} + \frac{P^2 C'}{\Omega_2'^2} \right)}{\Delta} e^{-\alpha h + \beta' z}.$$

18. **Changement de variable** $\lambda = pu$. — Avant d'aller plus loin, nous poserons

$$(25) \quad \begin{cases} \lambda = pu, \\ a = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_1^2}}, & b = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_2^2}}, \\ a' = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_1'^2}}, & b' = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_2'^2}}; \end{cases}$$

$$(26) \quad D = \frac{\Delta}{p^6} = u^2 \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right)^2 + u^2 a a' b b' - ab \left(u^2 + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right)^2 - a' b' \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} \right)^2 + \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} (ab' + a'b).$$

Il vient

a. Dans le premier milieu (côté de la source) : $z > 0$

$$(27) \quad \frac{1}{p} X_p = \int_0^{+\infty} \frac{u du}{a} J_0(pu\rho) e^{-\rho a|z-h|} - \int_0^{+\infty} \frac{u du}{a} J_0(pu\rho) e^{-\rho a(z+h)} + 2 \int_0^{+\infty} u du J_0(pu\rho) \frac{u^2 a' b b' + b' \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} - b \left(u^2 + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right)}{D} e^{-\rho a(z+h)};$$

$$(28) \quad Y_p = 2 \int_{0j}^{+\infty} u du \left[\frac{d}{d\rho} J_0(pu\rho) \right] \times \frac{\left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right) \left(u^2 + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right) - a' b' \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} \right)}{D} e^{-\rho(a h + b z)}.$$

b. Dans le second milieu : $z < 0$

$$(29) \quad \frac{1}{p} X'_p = \frac{2C}{\Omega_2^2} \int_0^{+\infty} u du J_0(pu\rho) \frac{b \left(u^2 + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right) - b' \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} \right)}{D} e^{-\rho(a h - a' z)},$$

$$(30) \quad Y'_p = \frac{2C}{\Omega_2^2} \int_0^{+\infty} u du \left[\frac{d}{d\rho} J_0(pu\rho) \right] \frac{a' b - \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right)}{D} e^{-\rho(a h - b' z)}.$$

19. **Discussion des racines de D.** — Nous avons admis provisoirement que Δ (ou, ce qui revient au même, D) ne s'annule pas quand la variable réelle u varie de 0 à $+\infty$. Nous allons vérifier dans ce paragraphe qu'il en est bien ainsi mais il importe dès maintenant d'envisager l'équation

$$D = 0$$

d'un point de vue plus général, en supposant que u est une variable complexe. Nous verrons ultérieurement que cette discussion est identique à celle de l'existence des ondes de Rayleigh.

Afin que les radicaux a, a', b, b' représentent des fonctions uniformes, nous établissons dans le plan de la variable complexe u une coupure occupant un segment de l'axe des imaginaires pures entre les points $-\frac{i}{\Omega_2}$ et $\frac{i}{\Omega_2}$ ou $-\frac{i}{\Omega'_2}$ et $\frac{i}{\Omega'_2}$ suivant que c'est $\frac{1}{\Omega_2}$ ou $\frac{1}{\Omega'_2}$ qui représente le plus grand des quatre nombres

$$\frac{1}{\Omega_1}, \frac{1}{\Omega'_1}, \frac{1}{\Omega_2}, \frac{1}{\Omega'_2}.$$

Nous convenons que les radicaux désignent les racines arithmétiques lorsque u est réel et positif et nous suivons cette détermination par continuité quand u s'écarte de l'axe réel (*fig 5*). Soient du reste Q, Q'

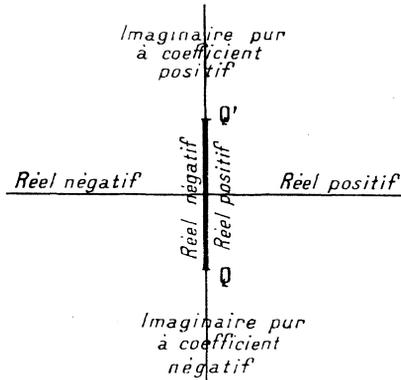


Fig. 5. — Plan de la variable u .

les deux points de ramification d'un de ces radicaux. Le radical est réel positif sur la partie droite de l'axe réel et sur le bord droit de la coupure, réel négatif sur la partie gauche de l'axe réel et le bord gauche de la coupure, imaginaire pure à coefficient positif quand u est sur l'axe imaginaire au-dessus de Q' , imaginaire pure à coefficient négatif quand u est sur l'axe imaginaire au-dessous de Q .

Quand le module de u est très grand, on a

$$(31) \quad \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega^2}} = u \left(1 + \frac{1}{\Omega^2 u^2} \right)^{\frac{1}{2}} = u \left(1 + \frac{1}{2\Omega^2 u^2} - \frac{1}{8\Omega^4 u^4} + \dots \right).$$

Pour déterminer le nombre des racines de l'équation $D = 0$ nous imaginons que l'image de u parcourt (*fig. 6*):

1° Un cercle (Σ), de rayon infiniment grand, dans le sens trigonométrique.

2° Un circuit (Σ') contournant la coupure infiniment près de cette coupure, en sens contraire du sens trigonométrique.

Comme D n'a pas de points singuliers à l'intérieur de (Σ) et (Σ'), le nombre des racines de D est égal au nombre de tours que l'image de D effectue autour de l'origine dans le sens trigonométrique.

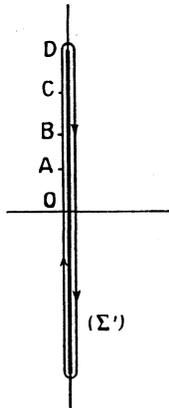


Fig. 6. — Plan de la variable u .

Parcours (Σ). — Quand u est sur le cercle (Σ), on a, en vertu de (31),

$$(32) \quad D = u^2 \left[\frac{3CC'}{\Omega_2^2 \Omega_1'^2} + \left(\frac{1}{4} - C' \right) \frac{1}{\Omega_2'^2} \left(\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right) + \left(\frac{1}{4} - C \right) \frac{1}{\Omega_2^2} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Omega_1^2 \Omega_1'^2} - \frac{1}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} \right) + \varepsilon \right],$$

ε tendant vers zéro quand le rayon du cercle (Σ) devient infini.

En vertu de (15) nous pouvons poser

$$C = \frac{1}{4} + K, \quad C' = \frac{1}{4} - K,$$

le nombre K étant extérieur à l'intervalle $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$. La quantité entre crochets, abstraction faite de ε , devient

$$(33) \quad q(K) = -\frac{3K^2}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} + K \left(\frac{1}{\Omega_1^2 \Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2 \Omega_2^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Omega_1^2 \Omega_1'^2} - \frac{1}{4 \Omega_2^2 \Omega_2'^2} \right).$$

$q(K)$ est un polynôme du second degré en K . Le coefficient de K^2 est essentiellement négatif.

$$q\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right),$$

$$q\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right);$$

$q\left(-\frac{1}{4}\right)$ et $q\left(\frac{1}{4}\right)$ sont essentiellement négatifs. Enfin la demi-somme des racines

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} \right)$$

est sûrement comprise entre $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$ puisque les rapports $\frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}$ et $\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2}$ sont tous deux inférieurs à $\frac{1}{2}$.

La quantité entre crochets dans (32) est donc toujours négative et ne s'annule pas puisque nous supposons que toutes les vitesses sont finies.

Quand u parcourt le cercle (Σ), l'image de D effectue deux tours complets autour de l'origine, dans le sens trigonométrique.

Parcours (Σ'). — Quand on change u en $-u$, D ne change pas. Quand on change u en l'imaginaire conjuguée, D se change en l'imaginaire conjuguée. Il nous suffira donc d'étudier le quart du parcours (Σ'), par exemple le bord gauche de la coupure au-dessus de l'axe réel (*fig 6*).

Dans ce parcours, u passe successivement devant les quatre points de ramification, A, B, C, D.

Nous supposons dans ce qui suit que les constantes C et C' sont différentes de zéro, nous réservant de traiter séparément ces deux cas particuliers où les formules se simplifient beaucoup.

I. L'image de u va de O à A.

Les quatre radicaux sont réels négatifs, u^2 également, D est réel et essentiellement négatif.

II. L'image de u va de A à B.

On a franchi en A le point de ramification de a ou de a' . a ou a' est une imaginaire pure à coefficient positif, les autres radicaux sont réels et négatifs. D est une imaginaire complète dont la partie réelle demeure négative ou exceptionnellement nulle. Quant au coefficient de la partie imaginaire, il est toujours positif.

III. L'image de u va de B à C.

Deux radicaux sont des imaginaires pures. Si ce sont a et b , la partie imaginaire de D a pour expression

$$\frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} (ab' + a'b).$$

Si ce sont a et a' , elle a pour expression

$$-ab \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} \right)^2 - a'b' \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} \right)^2 + \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} (ab' + a'b).$$

Si ce sont a' et b' , elle a pour expression

$$\frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} (ab' + a'b).$$

Dans tous les cas, le coefficient de i est essentiellement positif.

IV. L'image de u va de C à D.

Un seul radical demeure réel : il ne peut s'agir que de b ou de b' . Supposons que ce soit b' . Soit \mathcal{R} la partie réelle de D, \mathcal{J} le coefficient de sa partie imaginaire

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[D] &= u^2 \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right)^2 - ab \left(u^2 + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right)^2 + a'b \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2}, \\ \mathcal{J}[D] &= b' \mathcal{J} \left[u^2 aa'b - a' \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} \right)^2 + a \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} \right]. \end{aligned}$$

Pour n'avoir affaire qu'à des quantités réelles, posons

$$-u^2 = V > \frac{1}{\Omega_2^2}, \frac{1}{\Omega_2'^2} \text{ et } \frac{1}{\Omega_1'^2};$$

$$A = \sqrt{V - \frac{1}{\Omega_2^2}}, \quad B = \sqrt{V - \frac{1}{\Omega_2'^2}}, \quad A' = \sqrt{V - \frac{1}{\Omega_1'^2}},$$

il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[D] &= -V \left(\frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} - V \right)^2 + AB \left(\frac{C'}{\Omega_2'^2} - V \right)^2 - A'B \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2}, \\ \mathcal{J}[D] &= b' \left[VA A'B - A' \left(\frac{C}{\Omega_2^2} - V \right)^2 + A \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} \right]; \end{aligned}$$

$\mathcal{R}[D]$ et $\mathcal{J}[D]$ ne dépendent de Ω_2 et Ω_2' que par l'intermédiaire de A et A'. Considérons donc A et A' comme des paramètres, essentiellement > 0 . Par rapport à deux axes de coordonnées rectangulaires (*fig. 7*) où A est l'abscisse et A' l'ordonnée, l'équation $\mathcal{J}[D] = 0$ représente une hyperbole équilatère passant par l'origine et dont les asymptotes sont

caractérisées par une abscisse et une ordonnée essentiellement positives.

Dans la région quadrillée, le coefficient de la partie imaginaire est négatif, dans le reste du premier quadrant il est positif.

Quant à l'équation $\Re [D] = 0$, elle représente la tangente à l'une ou à l'autre branche de l'hyperbole ci-dessus au point de coordonnées;

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{V - \frac{C}{\Omega_2^2} - \frac{C'}{\Omega_2'^2}}{B} \quad V - \frac{C}{\Omega_2^2}, \\ A' &= \frac{V - \frac{C}{\Omega_2^2} - \frac{C'}{\Omega_2'^2}}{B} \quad V - \frac{C'}{\Omega_2'^2}. \end{aligned} \right.$$

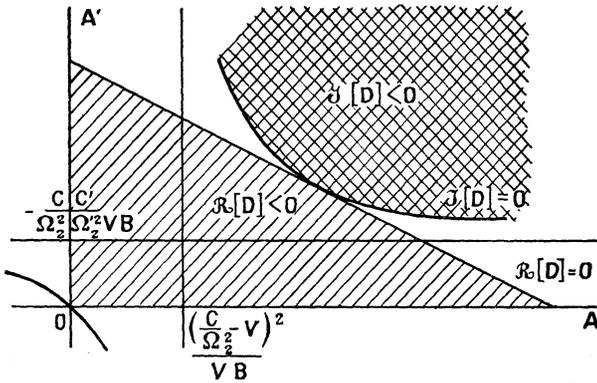


Fig. 7.

Dans la région hachurée, située au-dessous de la droite $\Re [D] = 0$, $\Re [D]$ est négatif.

On voit que jamais l'image de D ne passera dans le troisième quadrant puisque le coefficient de i ni la partie réelle ne seront simultanément négatifs.

D'autre part l'image de D ne passe pas par l'origine. En effet on ne peut pas attribuer à A et A' des valeurs arbitraires. Montrons qu'il en résulte que les équations (34) ne peuvent pas être satisfaites pour des valeurs admissibles de A et A' .

De la première des équations (34) on tire

$$AB = \frac{V - \frac{C}{\Omega_2^2} - \frac{C'}{\Omega_2'^2}}{V - \frac{C'}{\Omega_2'^2}} \left(V - \frac{C}{\Omega_2^2} \right).$$

Le premier membre est inférieur à V . Si C était négatif, donc C' positif, le second membre serait supérieur à V . C est donc nécessairement positif. Cela étant, la deuxième des équations (34), en tenant compte de l'équation (15), devient

$$(35) \quad C = \frac{V - A'B - \frac{1}{2\Omega_2'^2}}{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_2'^2}}$$

et la condition

$$C > \frac{1}{2}$$

entraînerait l'inégalité

$$V < \frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{\Omega_1'^2}{4\Omega_2^2},$$

qui ne peut être satisfaite sur le parcours actuel puisque

$$V > \frac{1}{\Omega_2^2}.$$

Si au lieu de supposer que c'est b' qui demeure seul réel sur le parcours CD , nous supposons maintenant que c'est b , il nous suffit de remarquer que D reste invariant quand on remplace Ω_1 par Ω_1' , Ω_2 par Ω_2' , C par C' et inversement, ce qui permet de conclure aussitôt que, dans ce cas également, l'image de D ne passe jamais par l'origine ni dans le troisième quadrant.

Il apparaît donc que, quand l'image de la variable u s'élève de O en D sur le bord gauche et supérieur de la coupure, l'image de $D(u)$ part d'un point situé sur la partie négative de l'axe réel sans jamais passer dans le troisième quadrant ni par l'origine, pour revenir en fin de parcours sur l'axe réel. Quand l'image de la variable redescend de D en O sur le bord droit de la coupure, l'image de $D(u)$ revient à son point de départ par un parcours symétrique; puis, lorsque l'image de u achève le parcours (Σ'), l'image de D parcourt une seconde fois le circuit fermé décrit ci-dessus. Il y a donc deux cas à envisager.

1° Supposons que, quand l'image de u est au point D , l'image de $D(u)$ est revenue sur la partie *positive* de l'axe réel. Quand l'image de u effectue le circuit (Σ') l'image de $D(u)$ tourne deux fois autour de l'origine dans le sens contraire du sens trigonométrique. $D(u)$ n'admet aucune racine, ni dans le plan complexe, ni sur la coupure.

2° Supposons que, quand l'image de u est au point D , l'image de $D(u)$ est revenue sur la partie *négative* de l'axe réel. Quand l'image de u effectue le circuit (Σ'), celle de $D(u)$ ne tourne pas autour de l'origine.

L'équation $D(u) = 0$ admet alors deux racines.

D'autre part, lorsque u est situé sur la partie de l'axe des imaginaires pures en dehors de la coupure, $D(u)$ est réel, *négatif* aux extrémités de la coupure, *positif* à l'infini sur l'axe imaginaire, comme il résulte de (32).

Les deux racines de $D(u)$ sont donc imaginaires pures, opposées, situées en dehors de la coupure. Nous les désignerons par

$$\pm \frac{i}{\Omega_R},$$

Ω_R étant inférieur à $\Omega_1, \Omega_2, \Omega'_1, \Omega'_2$.

Nous avons vérifié accessoirement que $D(u)$ ne s'annule jamais lorsque la variable u reste réelle et positive.

20. Discussion de la condition d'existence des racines. — La condition d'existence des racines, c'est-à-dire, comme nous le verrons plus loin, d'existence d'une onde de Rayleigh, s'explicité ainsi :

1° Si $\Omega'_2 > \Omega_2$

$$(36) \quad -\frac{1}{\Omega_2^2} \left(\frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right)^2 + \left(\frac{C}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2} \right)} \\ - \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} \sqrt{\left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_2'^2} \right)} < 0;$$

2° Si $\Omega_2 > \Omega'_2$

$$(37) \quad -\frac{1}{\Omega_2'^2} \left(\frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_2'^2} \right)^2 + \left(\frac{C'}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_2'^2} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right)} \\ - \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} \sqrt{\left(\frac{1}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right)} < 0.$$

Le second cas se déduit d'ailleurs immédiatement du premier par une permutation réciproque des lettres accentuées et des lettres non accentuées, à cause de la symétrie de D par rapport aux lettres accentuées et non accentuées.

Nous pouvons donc borner au premier cas et poser

$$\frac{\Omega_2'^2}{\Omega_2^2} = q > 1, \quad \frac{\sigma'}{\sigma} = s, \\ \frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} = \nu^2, \quad \frac{\Omega_1'^2}{\Omega_2'^2} = \nu'^2.$$

La condition (36) s'écrit alors

$$(38) \quad s^2 \left[4q^2 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{qv^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right)} - (2q - 1)^2 \right] + s \left[4q - 2 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{v^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right)} - 4q \sqrt{\left(1 - \frac{1}{qv^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right)} \right] - \left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{qv^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right)} \right] < 0.$$

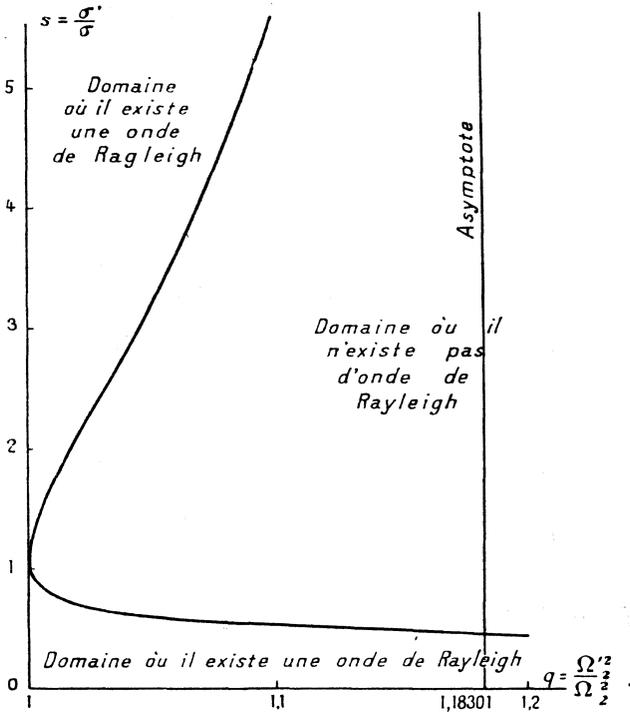


Fig. 8.

Une fois données les valeurs de v^2 , v'^2 , on est ramené à l'étude du signe d'un trinôme du second degré en s pour les diverses valeurs du paramètre q .

Nous nous sommes limités au cas de deux milieux solides au contact, en admettant comme le font habituellement les séismologues

$$v^2 = v'^2 = 3.$$

Dans un plan de coordonnées rectangulaires (q, s) (*fig. 8*) la condition d'existence des racines (c'est-à-dire d'une onde de Rayleigh) est que le point figuratif soit dans la région hachurée.

La région hachurée est limitée par une courbe qui a été construite point par point à l'aide du tableau ci-dessous.

Tableau des valeurs de $s = \frac{\sigma'}{\sigma}$ en fonction de $q = \frac{\Omega_2'^2}{\Omega_2^2} > 1$.

q .	s .	q .	s .
1.....	1	1,2.....	0,4398
1,01.....	1,817 et 0,7139	1,3.....	0,3828
1,02.....	2,190 0,6699	1,4.....	0,3406
1,03.....	2,546 0,6405	1,5.....	0,3076
1,04.....	2,912 0,6166	1,6.....	0,2809
1,05.....	3,310 0,5969	1,7.....	0,2574
1,06.....	3,752 0,5797	1,8.....	0,2398
1,07.....	4,256 0,5645	1,9.....	0,2236
1,08.....	4,849 0,5507	2.....	0,2096
1,09.....	5,553 0,5379	3.....	0,1293
1,10.....	6,415 0,5262	4.....	0,0938
1,11.....	7,500 0,5153	5.....	0,0736
1,12.....	8,917 0,5050	7.....	0,0515
1,13.....	10,857 0,4953	10.....	0,0355
1,14.....	13,684 0,4862	50.....	0,0069
1,15.....	18,209 0,4776	100.....	0,0034
1,16.....	26,644 0,4693		
1,17.....	48,000 0,4615		
1,18.....	210,959 et 0,4539		

On constate en particulier qu'il existe une onde de Rayleigh :

- 1° Si $\sigma' = 0$. Ce cas particulier sera d'ailleurs examiné directement.
- 2° Si $\Omega_2' = \Omega_2$.

Toutefois, dans le cas de deux solides au contact, l'existence d'une onde de Rayleigh apparaît comme plutôt exceptionnelle. Le rapport $\frac{\sigma'}{\sigma}$ pour les diverses roches ne s'écarte jamais beaucoup de l'unité. Dans ces conditions, une onde de Rayleigh ne peut exister que si Ω_2' et Ω_2 sont extrêmement voisines.

21. Justification a posteriori des dérivations sous le signe d'intégration. — La présence du facteur exponentiel rend uniformément convergentes les intégrales (27) à (30) et celles qu'on en a déduites par dérivation. Les dérivations sous le signe d'intégration qui ont été effectuées se trouvent donc justifiées à posteriori. D'autre part, quand ρ ou z deviennent infinis, ces intégrales tendent vers zéro. La décroissance est même sûrement exponentielle si z devient infini. Les fonctions X_ρ , Y_ρ , X'_ρ , Y'_ρ définies par les intégrales (27) à (30) satisfont bien aux conditions requises.

22. Premier cas particulier $\sigma' = 0$. — Les formules deviennent

$$(39) \quad \frac{1}{P} X_\rho = \int_0^{+\infty} \frac{u \, du}{a} J_0(pu \varphi) e^{-\rho a |z-h|} - \int_0^{+\infty} \frac{u \, du}{a} J_0(pu \varphi) e^{-\rho a(z+h)} \\ - 2 \int_0^{+\infty} bu^3 \, du J_0(pu \varphi) \frac{1}{\left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)^2 - abu^2} e^{-\rho a(z+h)};$$

$$(40) \quad Y_\rho = 2 \int_0^{+\infty} u \, du \left[\frac{d}{d\varphi} J_0(pu \varphi) \right] \frac{u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}}{\left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)^2 - abu^2} e^{-\rho(a h + b z)}.$$

Ces formules, relatives au premier milieu, sont indépendantes des propriétés du second milieu.

Les formules relatives au second milieu ne présentent quelque intérêt pratique que si le second milieu est l'air, dont nous considérons la densité comme négligeable. Nous devons poser alors

$$\Omega'_2 = 0,$$

il vient

$$(41) \quad \frac{1}{P} X'_\rho = \frac{1}{\Omega_2^2} \int_0^{+\infty} u \, du J_0(pu \varphi) \frac{u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}}{\left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)^2 - abu^2} e^{-\rho(a h - a' z)};$$

$$(42) \quad Y'_\rho = 0.$$

L'équation $D(u) = 0$, qui se réduit ici à

$$\left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)^2 - abu^2 = 0,$$

admet deux racines. Nous n'insisterons pas : c'est la discussion classique de Lord Rayleigh.

23. Deuxième cas particulier : $\sigma = 0$. — Les formules deviennent

$$(43) \quad \frac{1}{p} X_p = \int_0^{+\infty} \frac{u \, du}{a} J_0(pu \rho) e^{-\rho a |z-h|} - \int_0^{+\infty} \frac{u \, du}{a} J_0(pu \rho) e^{-\rho a(z+h)} \\ - 2 \int_0^{+\infty} u \, du J_0(pu \rho) \frac{b}{u^2 - ab} e^{-\rho a(z+h)},$$

$$(44) \quad Y_p = 2 \int_0^{+\infty} u \, du \left[\frac{d}{d\rho} J_0(pu \rho) \right] \frac{1}{u^2 - ab} e^{-\rho(a h + b z)},$$

$$(45) \quad X'_p = Y'_p = 0.$$

Il n'y a pas d'onde dans le second milieu. Il n'y a pas non plus d'onde de Rayleigh, le dénominateur $u^2 - ab$ n'ayant pas de racines.



CHAPITRE V.

DÉTERMINATION DU FACTEUR DE TRANSMISSION $B(\nu)$.

24. Première transformation de l'expression du coefficient exponentiel Y_p . — Le facteur de transmission $B(\nu)$ s'obtient en cherchant une solution de l'équation intégrale

$$(1) \quad \frac{Y_p}{p} = \frac{2}{p} \int_0^{+\infty} u \, du \left[\frac{d}{d\rho} J_0(pu\rho) \right] f(u) e^{-\nu(ah+bz)} = \int_0^{+\infty} e^{-\rho\nu} B(\nu) \, d\nu,$$

où l'on pose

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_1^2}}, \quad b = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_2^2}}, \\ a' = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_1'^2}}, \quad b' = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_2'^2}}. \\ f(u) = \frac{\left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2}\right) \left(u^2 + \frac{C'}{\Omega_2'^2}\right) - a'b' \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2}\right)}{\left\{ u^2 \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2}\right)^2 + u^2 a'a' b'b' - ab \left(u^2 + \frac{C'}{\Omega_2'^2}\right)^2 \right\} \cdot \\ \left. \begin{array}{l} - a'b' \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2}\right)^2 + \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} (ab' + a'b) \end{array} \right\}} \end{array} \right.$$

Pour atteindre notre but, nous effectuerons des changements de variable successifs de façon à donner à $\frac{Y_p}{p}$ une expression similaire à celle du second membre de (1). L'identification des deux membres permettra alors de déterminer aussitôt $B(\nu)$.

On a, pour x réel,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-ix \cos \omega} d\omega, \\ \frac{d}{dx} J_0(x) = -\frac{i}{\pi} \int_0^\pi e^{-ix \cos \omega} \cos \omega d\omega = \frac{2}{\pi} \mathcal{J} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ix \cos \omega} \cos \omega d\omega \right] \end{array} \right. \quad (1),$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$(4) \quad \frac{Y_p}{P} = \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega d\omega \int_0^{+\infty} u^2 f(u) du e^{-p(iu\rho \cos \omega + ah + bz)} \right].$$

25. **Étude d'un changement de variable.** — Pour permettre l'identification cherchée, nous sommes conduits à effectuer le changement de variable (u, v) défini par

$$(5) \quad iu\rho \cos \omega + h\sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_1^2}} + z\sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega_2^2}} = v,$$

où ω désigne un paramètre constant.

Dans l'intégrale (4), u est réel; a, b, a', b' désignent des racines arithmétiques. Le changement de variable (5) doit être cependant défini dans des conditions plus générales; ω sera toujours considéré comme réel ($0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}$); par contre, u et v pourront désigner des nombres complexes.

Dans le plan de la variable u , nous pratiquerons une coupure suivant un segment de l'axe imaginaire, de $-\frac{i}{\Omega_2}$ à $\frac{i}{\Omega_2}$. Les radicaux a et b sont alors des fonctions uniformes de u ; nous posons qu'ils se réduisent à des racines arithmétiques quand u est réel et positif. Cela étant, u désignera un nombre réel ou complexe du premier ou du quatrième quadrant. Il pourra devenir une imaginaire pure mais, en tous cas, à droite de la coupure.

La variable v désignera un nombre complexe du premier quadrant,

(1) Nous emploierons fréquemment dans la suite les notations $\mathcal{R}[f]$, $\mathcal{J}[f]$ pour désigner respectivement la partie réelle et le coefficient de i dans la partie imaginaire d'une quantité complexe f .

dont la partie réelle sera supérieure à

$$\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}.$$

Nous considérerons également des valeurs réelles de

$$\nu \geq \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}.$$

Cherchons à déterminer dans quelles conditions u est une fonction uniforme de ν . Nous imaginerons pour cela qu'on fait décrire à la variable u , dans le sens direct, le parcours ABCDEFGHA formé d'un demi-cercle ABC de rayon infiniment grand et d'un chemin CDEFGHA qui suit l'axe imaginaire à droite de la coupure (*fig. 9*).

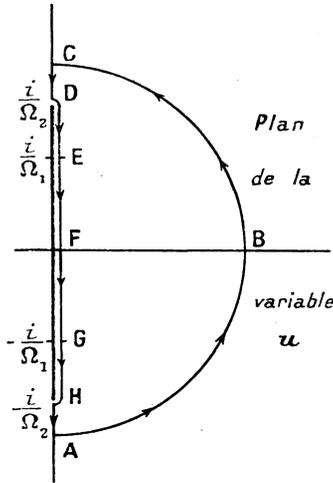


Fig. 9.

Nous allons étudier le chemin que parcourt l'image de ν .

Sur le demi-cercle ABC, quand le module de u est infiniment grand, on peut écrire

$$\nu = u(h + z + i\rho \cos \omega + \varepsilon),$$

ε désignant un infiniment petit.

Sur le parcours CFA, nous poserons $u = il$, l étant réel et variant de $+\infty$ à $-\infty$. L'allure du parcours de ν se déduit du tableau suivant :

$u.$	$l.$	$a.$	$b.$	$v.$
$\text{De} + i\infty \text{ à } \frac{i}{\Omega_2}$	$\text{De} + \infty \text{ à } \frac{1}{\Omega_2}$	$i\sqrt{l^2 - \frac{1}{\Omega_1^2}}$	$i\sqrt{l^2 - \frac{1}{\Omega_2^2}}$	$-l\rho \cos \omega + i\left(h\sqrt{l^2 - \frac{1}{\Omega_1^2}} + z\sqrt{l^2 - \frac{1}{\Omega_2^2}}\right)$
$\frac{i}{\Omega_2}$	$\frac{1}{\Omega_2}$	Id.	0	$-\frac{\rho \cos \omega}{\Omega_2} + ih\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}}$
$\text{De } \frac{i}{\Omega_2} \text{ à } \frac{i}{\Omega_1}$	$\text{De } \frac{1}{\Omega_2} \text{ à } \frac{1}{\Omega_1}$	Id.	$\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - l^2}$	$-l\rho \cos \omega + z\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - l^2} + ih\sqrt{l^2 - \frac{1}{\Omega_1^2}}$
$\frac{i}{\Omega_1}$	$\frac{1}{\Omega_1}$	0	Id.	$-\frac{\rho \cos \omega}{\Omega_1} + z\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}}$
$\text{De } \frac{i}{\Omega_1} \text{ à } 0$	$\text{De } \frac{1}{\Omega_1} \text{ à } 0$	$\sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - l^2}$	Id.	$-l\rho \cos \omega + h\sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - l^2} + z\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - l^2}$
0	0	$\frac{1}{\Omega_1}$	$\frac{1}{\Omega_2}$	$\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}$
$\text{De } 0 \text{ à } -\frac{i}{\Omega_1}$	$\text{De } 0 \text{ à } -\frac{1}{\Omega_1}$	$\sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - l^2}$	$-\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - l^2}$	$-l\rho \cos \omega + h\sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - l^2} + z\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - l^2}$
$-\frac{i}{\Omega_1}$	$-\frac{1}{\Omega_1}$	0	Id.	$\frac{\rho \cos \omega}{\Omega_1} + z\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}}$
$\text{De } -\frac{i}{\Omega_1} \text{ à } -\frac{i}{\Omega_2}$	$\text{De } -\frac{1}{\Omega_1} \text{ à } -\frac{1}{\Omega_2}$	$-i\sqrt{l^2 - \frac{1}{\Omega_1^2}}$	Id.	$-l\rho \cos \omega + z\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - l^2} - ih\sqrt{l^2 - \frac{1}{\Omega_1^2}}$
$-\frac{i}{\Omega_2}$	$-\frac{1}{\Omega_2}$	Id.	0	$\frac{\rho \cos \omega}{\Omega_2} - ih\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}}$
$\text{De } -\frac{i}{\Omega_2} \text{ à } -i\infty$	$\text{De } -\frac{1}{\Omega_2} \text{ à } -\infty$	Id.	$-i\sqrt{l^2 - \frac{1}{\Omega_2^2}}$	$-l\rho \cos \omega - i\left(h\sqrt{l^2 - \frac{1}{\Omega_1^2}} + z\sqrt{l^2 - \frac{1}{\Omega_2^2}}\right)$

En désignant par A', B', C', \dots les points du parcours de v qui correspondent aux images A, B, C, \dots de u , nous pouvons décrire comme suit l'allure du parcours de v (fig. 10).

$A' B' C'$ est un demi-cercle de rayon infiniment grand parcouru dans le sens direct, A' appartenant au quatrième quadrant. De C' en E' , v est une imaginaire complète dont la partie réelle est croissante. v est réel de E' en G' , puis devient de G' à A' une imaginaire complète du quatrième

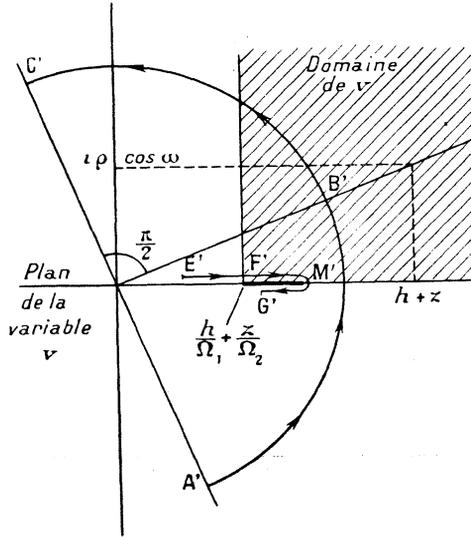


Fig. 10.

quadrant. Comme l'affixe de E' est inférieure à $\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}$, ce schéma permet de conclure qu'à tout nombre v du domaine précisé ci-dessus, à l'exclusion de l'axe réel, on peut faire correspondre une et une seule racine u de l'équation (5), qui est ainsi une fonction holomorphe et uniforme de v .

Cas des valeurs réelles de $v \geq \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}$. — De E' en F' , v est croissant, mais entre F' et G' , la dérivée $\frac{dv}{dl}$ change de signe. Soit l_0 une racine de la dérivée $\frac{dv}{dl}$ correspondant à une valeur de v comprise entre F' et G'

$$-\frac{1}{\Omega_1} \leq l_0 \leq 0.$$

Nous poserons

$$(6) \quad -l_0 = \frac{\sin \alpha}{\Omega_1} = \frac{\sin \beta}{\Omega_2} \quad \left(0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Il vient

$$(7) \quad \left(\frac{dv}{dl} \right)_{l=l_0} = -\rho \cos \omega - \frac{hl_0}{\sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - l_0^2}} - \frac{zl_0}{\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - l_0^2}} \\ = -\rho \cos \omega + h \operatorname{tang} \alpha + z \operatorname{tang} \beta = 0.$$

Soit enfin

$$(8) \quad h \operatorname{tang} \alpha = \rho_1 \cos \omega, \quad z \operatorname{tang} \beta = \rho_2 \cos \omega,$$

ρ_1 et ρ_2 sont positifs et l'on a, en vertu de (7),

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho.$$

D'où la construction géométrique suivante (fig. 11). Considérons

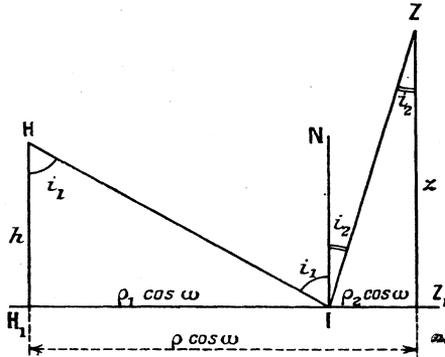


Fig. 11.

deux segments parallèles $\overline{HH_1} = h$, $\overline{ZZ_1} = z$, dont la distance $\overline{H_1Z_1}$ est égale à $\rho \cos \omega$. Soit I le point qui partage H_1Z_1 en deux segments respectivement égaux à $\rho_1 \cos \omega$ et $\rho_2 \cos \omega$. Soient enfin i_1, i_2 les angles que HI, ZI font avec la normale IN à H_1Z_1 . On a

$$(9) \quad \rho_1 \cos \omega = h \operatorname{tang} i_1, \quad \rho_2 \cos \omega = z \operatorname{tang} i_2.$$

D'où, en vertu de (8),

$$\alpha = i_1, \quad \beta = i_2$$

et la relation (6) devient

$$(10) \quad -l_0 = \frac{\sin i_1}{\Omega_1} = \frac{\sin i_2}{\Omega_2}.$$

Ainsi le point I est déterminé par la condition que les angles i_1, i_2 satisfassent à la relation

$$\frac{\sin i_1}{\Omega_1} = \frac{\sin i_2}{\Omega_2}.$$

La valeur commune de ces rapports est alors égale à $-l_0$.

Il vient ensuite

$$\begin{aligned} (11) \quad v(l_0) &= -l_0 \rho \cos \omega + h \sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - l_0^2} + z \sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - l_0^2} \\ &= \left(h \sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - l_0^2} - l_0 \rho_1 \cos \omega \right) + \left(z \sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - l_0^2} - l_0 \rho_2 \cos \omega \right) \\ &= \frac{\overline{HI}}{\Omega_1} + \frac{\overline{ZI}}{\Omega_2}. \end{aligned}$$

Cette valeur $v(l_0)$ que nous désignerons désormais par $v_0(\omega)$ pour rappeler qu'elle est fonction de ω a pour image M' le point le plus à droite du parcours F'G' (*fig. 10*). On a

$$v_0(\omega) \geq \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2},$$

l'égalité ayant lieu pour $\omega = \frac{\pi}{2}$.

$v_0(\omega)$ est une fonction continue de ω , dont la dérivée a pour valeur

$$(12) \quad \frac{d v_0(\omega)}{d \omega} = -i u_0 \rho \sin \omega.$$

v_0 est maximum pour $\omega = 0$. Dans ce cas, la figure 11 peut être interprétée en considérant la droite $H_1 Z_1$ comme la trace de la surface de séparation des deux milieux, H comme la source S et Z comme le point M (*fig. 12*). Les valeurs particulières de i_1, i_2 pour $\omega = 0$ seront désignées respectivement par I_1, I_2 , et nous poserons

$$\overline{SI} = R_1, \quad \overline{MI} = R_2.$$

La relation

$$(13) \quad \frac{\sin I_1}{\Omega_1} = \frac{\sin I_2}{\Omega_2}$$

est identique à la loi classique de réflexion d'un « rayon séismique » au sens de l'optique géométrique. Enfin

$$(14) \quad v_0(0) = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$$

donne la valeur de la durée de parcours, au sens du principe de Fermat. On peut prévoir que ces considérations géométriques vont jouer un rôle essentiel dans la suite : c'est pourquoi nous les avons introduites dès maintenant.

Si nous supposons que l'image de ν vient sur l'axe réel entre F' et M' , deux valeurs de u correspondent à ν . La valeur ν_0 est un point critique de la fonction $u(\nu)$. Aussi considérerons-nous le segment $F'M'$ (*fig. 10*) comme une coupure. Quand on suppose que le parcours CDEFGHA (*fig. 9*) est effectué, non plus suivant l'axe imaginaire, mais seulement

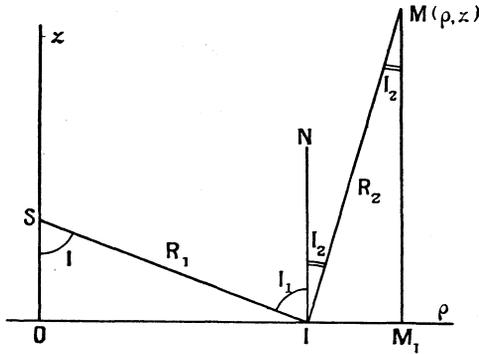


Fig. 12.

à distance infiniment petite de cet axe, le parcours $E'F'M'$ n'est lui-même qu'infiniment proche de l'axe réel et au-dessus de cet axe, le parcours $M'G'$ est au-dessous.

La coupure ménagée dans le plan de la variable ν impose donc, lorsque ν est réel et que l'équation (5) lui fait correspondre deux racines u , de choisir celle de ces deux racines dont le module est le plus petit.

26. Mise en œuvre du changement de variable $[u, \nu]$. — En effectuant le changement de variable (5), il vient

$$(15) \quad \int_0^{+\infty} u^2 f(u) e^{-\rho(iu\rho \cos\omega + ah + bz)} du \\ = \int_{H_\omega} [u(\nu, \omega)]^2 f[u(\nu, \omega)] \frac{\partial}{\partial \nu} [u(\nu, \omega)] e^{-\rho\nu} d\nu.$$

Le parcours d'intégration H_ω de la variable ν (*fig. 13*) dépend du para-

mètre $\cos \omega$. Il débute au point

$$v = \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}$$

et s'étend jusqu'à l'infini dans le premier quadrant, la partie réelle de v demeurant supérieure à $\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}$. De ce qui précède, résulte que

$$\frac{\partial}{\partial v} [u(v, \omega)]$$

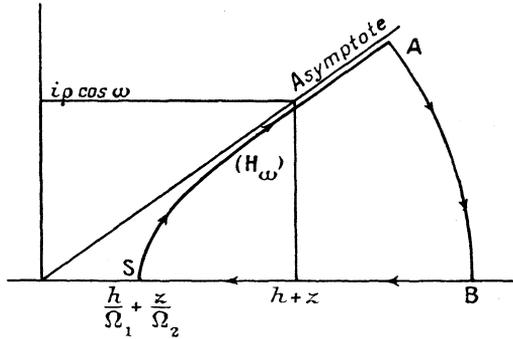


Fig. 13. — Plan de la variable v .

est partout bornée sur le parcours quel que soit ω , sauf à l'origine de ce parcours lorsque $\omega = \frac{\pi}{2}$. On a d'ailleurs,

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{1}{i \rho \cos \omega + u \left(\frac{h}{a} + \frac{z}{b} \right)}$$

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, cette dérivée est infinie à l'origine du parcours en même temps que $\frac{1}{u}$, mais, par suite du facteur u^2 , la fonction à intégrer tend vers zéro. La formule (15) est donc valable quel que soit ω .

Effectuons la seconde des intégrations (15), celle par rapport à v , suivant un parcours fermé SABS (*fig.* 13) tel que SA soit une partie du parcours H_ω , que l'arc AB s'éloigne à l'infini, et que le retour BS s'opère suivant l'axe réel au-dessus de la coupure (1). La fonction à

(1) Au voisinage du point critique v_0 , la dérivée $\frac{\partial u}{\partial v}$ devient infinie à la manière de $|v - v_0|^{-\frac{1}{2}}$.

intégrer étant holomorphe à l'intérieur du circuit SABS ⁽¹⁾ et la valeur de l'intégrale effectuée le long de AB tendant vers zéro, on peut écrire

$$(17) \int_{h, \omega} u^2 f(u) \frac{\partial u}{\partial v} e^{-\rho v} dv = \int_{\frac{h}{\Omega_1} + \frac{\bar{z}}{\Omega_2}}^{+\infty} [u(v, \omega)]^2 f[u(v, \omega)] \frac{\partial}{\partial v} [u(v, \omega)] e^{-\rho v} dv.$$

Dans cette dernière intégrale, la variable v est réelle.

27. Permutation de l'ordre des intégrations. — D'après (17), l'intégrale (4) devient

$$(18) \frac{Y_p}{P} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega d\omega \int_{\frac{h}{\Omega_1} + \frac{\bar{z}}{\Omega_2}}^{+\infty} \mathcal{J} \left\{ [u(v, \omega)]^2 f[u(v, \omega)] \frac{\partial}{\partial v} [u(v, \omega)] \right\} e^{-\rho v} dv.$$

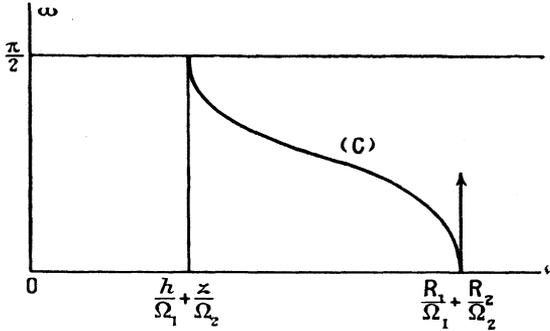


Fig. 14.

Dans le champ d'intégration $(0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}, v \geq \frac{h}{\Omega_1} + \frac{\bar{z}}{\Omega_2})$, la fonction

$$(19) \cos \omega \mathcal{J} \left[u^2 f(u) \frac{\partial u}{\partial v} \right] e^{-\rho v}$$

devient infinie, en même temps que $\frac{\partial u}{\partial v}$, tout le long de la courbe C (fig. 14) d'équation

$$v = v_0(\omega).$$

Aux deux extrémités de cette courbe C, les tangentes sont parallèles à l'axe des ω , en vertu de la relation (12).

⁽¹⁾ Les pôles éventuels de $f[u(v, \omega)]$ sont extérieurs au circuit, puisque les valeurs de u correspondantes sont imaginaires pures, à l'extérieur du segment $(-\frac{i}{\Omega_2}, \frac{i}{\Omega_2})$.

Lorsque l'on considère un point (ν, ω) du champ d'intégration infiniment proche d'un point (ν_1, ω_1) appartenant à la courbe C, on a

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 + \varepsilon(\nu, \omega)}{\sqrt{\frac{h}{\Omega_1^2 a^3} + \frac{z}{\Omega_2^2 b^3}}} \frac{1}{\sqrt{\nu - \nu_0(\omega)}}$$

ou

$$\frac{du}{d\nu} = -i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 + \varepsilon(\nu, \omega)}{\sqrt{\frac{h}{\Omega_1^2 a^3} + \frac{z}{\Omega_2^2 b^3}}} \frac{1}{\sqrt{\nu_0(\omega) - \nu}},$$

suivant que le point (ν, ω) est situé respectivement à droite ou à gauche de la courbe C. Les valeurs de a, b sont prises pour $\nu = \nu_1, \omega = \omega_1$. Les radicaux sont des racines arithmétiques. $\varepsilon(\nu, \omega)$ est une fonction de ν et ω , qui tend vers zéro lorsque ν et ω tendent simultanément vers ν_1 et ω_1 .

D'autre part, lorsque ν devient infini, la fonction (19) finit par conserver un signe constant, et son module est inférieur

$$M e^2 e^{-\nu},$$

M désignant une constante.

Il résulte de ces deux remarques (1) que la fonction (19) est intégrable dans le champ d'intégration (ω, ν) et qu'on a le droit d'invertir l'ordre des intégrations.

On peut remarquer au passage que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{J} \left[u^2 f(u) \frac{du}{d\nu} \right] \cos \omega d\omega$$

peut devenir, lorsque ν est infiniment voisin de $\nu_0(0)$, infiniment grande comme $\text{Log} |\nu - \nu_0(0)|$. C'est une constatation que nous aurons l'occasion de faire directement par la suite.

Première expression de B(ν). — L'intégrale (18) devient, en permutant l'ordre des intégrations,

$$(20) \quad \frac{Y_p}{P} = \frac{4}{\pi} \int_{\frac{\Omega_1 + z}{\Omega_2}}^{+\infty} e^{-\nu\nu} d\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{J} \left\{ [u(\nu, \omega)]^2 f[u(\nu, \omega)] \frac{\partial}{\partial \nu} [u(\nu, \omega)] \right\} \cos \omega d\omega.$$

(1) GOURSAT (E.), *Cours d'analyse mathématique*, t. 1, p. 32) et p. 332, 5^e édition (Gauthier-Villars, Paris, 1927).

Sous cette forme, l'identification de $\frac{Y_p}{P}$ avec le second membre de l'équation intégrale (1)

$$\int_0^{+\infty} e^{-p\nu} B(\nu) d\nu$$

fait connaître aussitôt une solution de cette équation

$$(21) \quad B(\nu) = \begin{cases} 0, & \text{pour } \nu < \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}, \\ \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{J} \left\{ [u(\nu, \omega)]^2 f[u(\nu, \omega)] \frac{\partial}{\partial \nu} [u(\nu, \omega)] \right\} \cos \omega d\omega, & \text{pour } \nu \geq \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}. \end{cases}$$

Nous allons désormais transformer cette expression compliquée de $B(\nu)$

28. Nouveau changement de variable $[\omega, u]$. — En supposant toujours expressément que les domaines respectifs des trois variables ou paramètres u, ν, ω demeurent ceux qui ont été définis précédemment, la relation (5) définit ω , pour une valeur donnée de ν , comme une fonction $\omega(u)$ de u . Nous effectuerons le changement de variable

$$\omega = \omega(u).$$

L'intégrale (21) devient alors, sous les réserves qui vont suivre :

$$(22) \quad [B(\nu)]_{\nu \geq \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}} = \frac{4}{\pi} \int_{C_\nu} \mathcal{J} \left\{ u^2 f(u) \frac{\partial}{\partial \nu} [u(\nu, \omega)] \frac{\partial}{\partial u} [\omega(\nu, u)] \right\} \cos[\omega(u, \nu)] du,$$

C_ν désignant le parcours de la nouvelle variable u . Pour légitimer l'expression (22), il nous faut cependant examiner si $\frac{\partial}{\partial u} [\omega(\nu, u)]$ ne devient pas infinie,

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial u} [\omega(\nu, u)] = \frac{i\rho \cos \omega + u \left(\frac{h}{a} + \frac{z}{b} \right)}{iu\rho \sin \omega}.$$

Or, cette dérivée est infinie dans plusieurs cas.

1° Si $\rho = 0$. Ce cas particulier sera examiné séparément au chapitre suivant.

2° Si $u = 0$. La condition $u = 0$ entraîne

$$\nu = \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}.$$

Inversement, si $v = \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}$, u est nul quel que soit ω et la relation (21) entraîne

$$B\left(\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}\right) = 0,$$

même si $\rho = 0$.

Il n'y a donc pas lieu d'examiner cette éventualité.

3° Si $a = 0$ (b ne peut s'annuler).

La condition $a = 0$ entraîne $i_1 = \frac{\pi}{2}$, ce qui ne peut se produire que si ρ est infini. Or, nous avons observé au Chapitre III que dans les problèmes de ce genre, il est inutile d'envisager que ρ ou z puissent devenir infinis.

4° Enfin $\frac{\partial}{\partial u} [\omega(v, u)]$ devient infinie quand ω tend vers zéro. L'étude qui va suivre montrera cependant que l'intégration (22), effectuée non plus suivant la totalité du parcours C_v , mais suivant une partie infiniment petite de C_v correspondant à l'intervalle d'intégration $(0, \alpha)$ de la variable ω dans (21), tend vers zéro en même temps que α , si l'on suppose

$$v \neq \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}.$$

Sous réserve de la vérification ultérieure du résultat annoncé à l'alinéa 4°, l'expression (22) est donc valable lorsque v est différent de $\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}$ ou de $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ et que ρ n'est pas nul.

Comme d'ailleurs, on peut attribuer à $B(v)$, en un point isolé, une valeur arbitraire, sans que cette fonction cesse d'être une solution de l'équation intégrale, la seule restriction réelle qui subsiste, est que ρ soit différent de zéro.

Poursuivons donc l'étude de l'intégrale (22). On a

$$\frac{\partial}{\partial v} [u(v, \omega)] \frac{\partial}{\partial u} [\omega(v, u)] = \frac{1}{iu\rho \sin[\omega(v, u)]}.$$

D'où

$$(24) \quad [B(v)]_{v > \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}} = \mathcal{I} \left[-\frac{4i}{\pi\rho} \int_{C_v} \cot[\omega(v, u)] f(u) u du \right] \\ = -\frac{4}{\pi\rho} \mathcal{R} \left[\int_{C_v} \cot[\omega(v, u)] f(u) u du \right].$$

On a, d'autre part,

$$iu\rho \cos \omega = v - ah - bz.$$

D'où

$$iu\rho \sin \omega = i\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2},$$

en choisissant pour détermination du radical celle qui, à l'extrémité du parcours C_ν correspondant à $\omega = \frac{\pi}{2}$, se réduit à une racine arithmétique : en effet, pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, u est réel et positif. Cette détermination initiale du radical est suivie par continuité tout le long de C_ν .

Il vient alors

$$\cot \omega = -i \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}}.$$

D'où, finalement,

$$(25) \quad [B(\nu)]_{\nu > \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}} = -\frac{4}{\pi\rho} \mathcal{J} \left[\int_{C_\nu} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u)u du \right].$$

Examinons sommairement l'allure du parcours C_ν . Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, u est réel. Pour $\omega \neq \frac{\pi}{2}$, u ne peut pas être réel. C'est une imaginaire du quatrième quadrant pouvant devenir imaginaire pure. Pour que ce soit une imaginaire pure, il faut et il suffit que ν soit inférieur à $\nu_0(\omega)$. En particulier, l'extrémité du parcours C_ν correspondant à $\omega = 0$ sera une imaginaire pure ou une imaginaire complète suivant que ν sera inférieur ou supérieur à $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$. Nous allons examiner séparément ces deux cas, après avoir étudié le radical $\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}$.

29. Étude du radical $\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}$. — Par élévation au carré, l'équation

$$(26) \quad u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2 = 0$$

conduit à une équation du quatrième degré en u , admettant, par conséquent, quatre racines, auxquelles correspondent des déterminations variées des radicaux a et b .

Nous considérerons toujours dans ce qui suit qu'une coupure a été ménagée dans le plan de la variable u , de $-\frac{i}{\Omega_2}$ à $\frac{i}{\Omega_2}$, assurant l'uniformité des radicaux et, d'autre part, que a et b désignent des racines arithmétiques lorsque u est réel et positif. Par cette limitation, certaines des quatre racines peuvent se trouver exclues.

On a

$$u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2 = (iu\rho + ah + bz - \nu)(-iu\rho + ah + bz - \nu),$$

de sorte que les racines de (26) sont celles de l'équation

$$(27) \quad iu\rho + ah + bz = v$$

ou de l'équation

$$(27 \text{ bis}) \quad -iu\rho + ah + bz = v.$$

Lorsque l'on considère v comme réel, ce que nous ferons ici, les racines de (27) et (27 bis) sont deux à deux imaginaires conjuguées. Il nous suffira d'étudier l'équation (27).

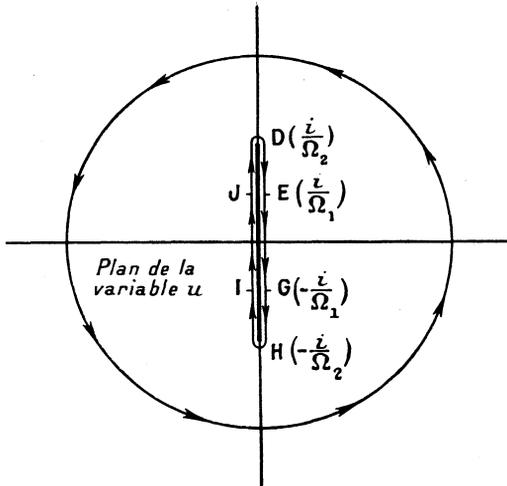


Fig. 15.

L'équation (27) n'est autre que l'équation (5) lorsqu'on pose dans cette dernière $\omega = 0$. Lorsqu'on se limite aux valeurs de u des premier ou quatrième quadrants, l'équation (27) admet donc, en vertu des résultats antérieurs, soit une seule racine dont l'image est précisément l'extrémité du parcours C_v correspondant à $\omega = 0$, soit deux racines, alors imaginaires pures, dont l'une a toujours pour image l'extrémité du parcours C_v . Ces deux racines imaginaires pures ne sont confondues que si

$$v = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}.$$

Nous aurons besoin cependant d'envisager aussi l'éventualité de racines du radical situées dans les deuxième ou troisième quadrants. Il suffit de compléter la discussion de l'équation (5).

Nous imaginerons cette fois (*fig.* 15), qu'on fait parcourir à la variable u

1° Un cercle de rayon infiniment grand, décrit dans le sens direct.

2° Un circuit enveloppant la coupure, décrit dans le sens inverse.

Lorsque u effectue le premier circuit, v parcourt également dans le sens direct un cercle de rayon infiniment grand.

D'autre part, nous avons déjà étudié le parcours $D'E'G'H'$ qui correspond à $DEGH$. Lorsque l'image de u est de l'autre côté de la coupure, il suffit de remarquer qu'à deux valeurs opposées de u correspondent deux valeurs opposées de v pour pouvoir tracer immédiatement l'allure du parcours de v (*fig.* 16).

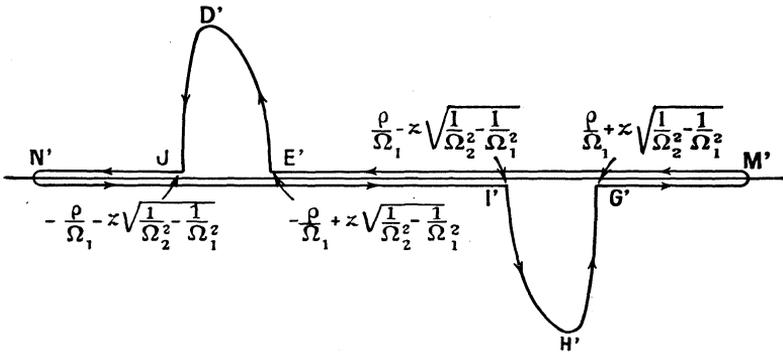


Fig. 16. — Plan de la variable v .

Ce schéma fait apparaître que, pour des valeurs réelles de v supérieures à $\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}$, l'équation (27) n'admet pas, dans le deuxième ni dans le troisième quadrant d'autres racines que celles que nous connaissons déjà et qui appartaient au quatrième quadrant.

En associant à ces racines leurs imaginaires conjuguées (du premier quadrant, par conséquent), on obtient toutes les racines de (27) dans le domaine de u qui seul nous importe.

Remarquons sans plus tarder que l'équation (26) n'admet une racine double à l'extrémité du parcours C_v correspondant à $\omega = 0$ que si $v = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$. La réserve faite au paragraphe précédent, alinéa 4°, est donc définitivement levée.

30. **Étude du cas** $\nu > \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$. — Nous allons déformer continûment le circuit C_ν dans la totalité du plan de la variable u , après avoir assuré par des coupures convenables l'uniformité de la fonction à intégrer.

En plus de a et b , la fonction $f(u)$ dépend des deux autres radicaux a' et b' . L'uniformité des quatre radicaux a, b, a', b' sera assurée par une coupure effectuée suivant le segment rectiligne $\left(-\frac{i}{\Omega_2}, \frac{i}{\Omega_2}\right)$ ou $\left(-\frac{i}{\Omega'_2}, \frac{i}{\Omega'_2}\right)$ suivant que Ω_2 ou Ω'_2 désigne la plus petite des quatre vitesses $\Omega_1, \Omega_2, \Omega'_1, \Omega'_2$.

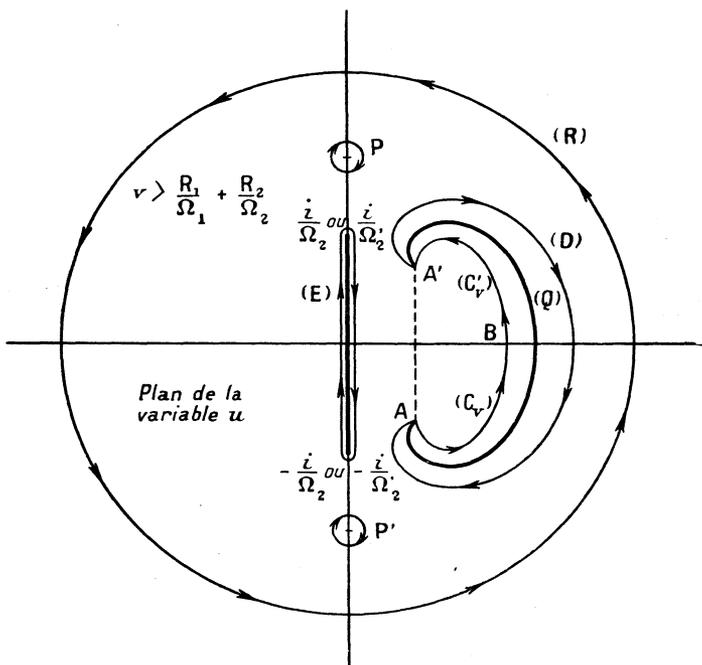


Fig. 17.

Désignons par A (quatrième quadrant) l'extrémité de C_ν correspondant à $\omega = 0$, par B (sur la partie positive de l'axe réel) l'extrémité de C_ν correspondant à $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Le radical du dénominateur a deux points critiques, d'une part A, d'autre part A', symétrique de A par rapport à l'axe réel (fig. 17).

L'uniformité du radical dénominateur sera assurée par la cou-

pure (Q) allant de A à A'. Pour fixer les idées, nous supposons que Q passe à droite de la courbe C_ν .

Soit C'_ν un parcours ($B \rightarrow A'$) symétrique de C_ν par rapport à l'axe réel. En deux points de C_ν , C'_ν symétriques par rapport à l'axe réel, les valeurs respectives de la fonction à intégrer sont imaginaires conjuguées.

D'où

$$(28) \quad [B(\nu)]_{\nu > \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}} = \frac{2i}{\pi\rho} \int_{C_\nu, C'_\nu} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u)u du.$$

L'idée la plus naturelle est alors de remplacer le parcours C_ν , C'_ν par le parcours direct AA' . C'est ainsi que nous avons procédé d'abord, après avoir calculé au préalable la valeur de u correspondant au début du parcours C. On est conduit de la sorte à substituer aux variables ν , ρ , z dont dépend $B(\nu)$, de nouvelles variables dont la définition fait intervenir une famille de surfaces ovoïdes de révolution. On parvient ainsi à mettre $B(\nu)$ sous une forme qui fait apparaître immédiatement ses propriétés essentielles, mais se prête beaucoup moins aux calculs numériques. Aussi substituons-nous à ce procédé peut-être plus élégant (1) un autre mode de calcul.

Nous effectuerons l'intégration (28) le long des circuits suivants :

- 1° Le circuit (R) parcouru dans le sens direct, extérieur à tous les autres circuits;
- 2° Le circuit (E), parcouru dans le sens inverse, appliqué sur les deux bords de la coupure ménagée sur l'axe des imaginaires;
- 3° Les circuits (P), (P') parcourus dans le sens inverse autour des deux pôles éventuels P, P' de $f(u)$;
- 4° Le parcours (C_ν), (C'_ν) décrit de A à A';
- 5° Le parcours (D), (D') allant de A' à A en passant à droite de la coupure Q.

On peut, sans changer la valeur des intégrales correspondantes, déformer les circuits (C_ν , C'_ν) d'une part et (D, D') d'autre part, façon à les appliquer respectivement sur les bords de la coupure Q. En deux points situés de part et d'autre de Q, le radical dénominateur a des valeurs opposées, les autres facteurs dans la fonction sous le signe

(1) *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 899 et p. 1005.

somme ont même valeur. D'où

$$\int_{(C_0, C'_0)} + \int_{(D, D')} = 2 \int_{(C_0, C'_0)},$$

de sorte que

$$(29) [B(\nu)]_{\nu > \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}} = -\frac{i}{\pi \rho} \int_{(R), (E), (P), (P')} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u) u du.$$

Les nouveaux parcours d'intégration sont tous indépendants de ν .

A. Calcul de

$$\int_{(R)} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u) u du,$$

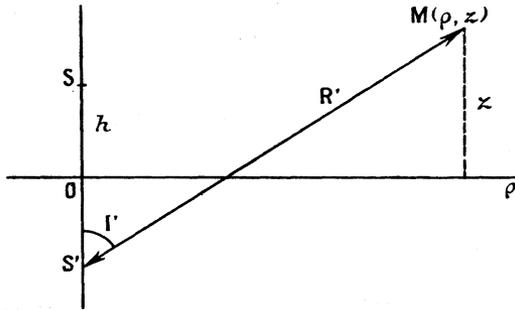


Fig. 18.

Soit

$$\alpha u + \beta + \frac{\gamma}{u} + \frac{\delta}{u^2} + \dots,$$

le développement en série de Laurent de la fonction sous le signe somme dans le domaine du point à l'infini.

$$(30) \int_{(R)} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u) u du = 2\pi i \gamma.$$

On trouve aisément

$$\gamma = M \left\{ N \cos I' + \frac{\sin^2 I'}{2R'} \left[\frac{h}{\Omega_1^2} + \frac{z}{\Omega_2^2} - \frac{3\nu^2}{R'} \right] \right\},$$

en désignant par S' le symétrique de la source S par rapport à la surface de séparation des deux milieux; par I' l'angle $SS'M$, par R' la distance $S'M$ (*fig.* 18).

M et N sont deux constantes, indépendantes de h, ρ, z, v , dont l'expression est du reste assez compliquée,

$$M = \frac{A}{A_1}, \quad N = \frac{B}{A} - \frac{B_1}{A_1},$$

avec

$$A = \frac{2C'}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right),$$

$$A_1 = \frac{3CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} - \frac{C}{\Omega_2^2} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right) - \frac{C'}{\Omega_2'^2} \left(\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right) \\ + \frac{1}{4} \left[\left(\sum_{i,j} \frac{1}{\Omega_i^2 \Omega_j^2} \right) - \frac{1}{\Omega_1^2 \Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2 \Omega_2'^2} \right],$$

$$B = \left(\frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right) \frac{C'}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{2} \frac{C}{\Omega_2^2} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2} \right)^2,$$

$$B_1 = -\frac{1}{2} \frac{C^2}{\Omega_2^2} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{C'^2}{\Omega_2'^2} \left(\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} \sum_i \left(\frac{1}{\Omega_i^2} \right) \\ + \frac{1}{4} \frac{C'}{\Omega_2'^2} \left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{C}{\Omega_2^2} \left(\frac{1}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2} \right)^2 + \frac{1}{8} \sum_{i,j,k} \left(\frac{1}{\Omega_i^2 \Omega_j^2 \Omega_k^2} \right) \\ - \frac{1}{16} \left[\left(\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right) + \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_1^2} + \frac{1}{\Omega_2^2} \right) \right].$$

B. Calcul de

$$\int_{(P), (P')} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} f(u) u du.$$

Cette intégrale est égale à

$$- 2\pi i (R_P + R_{P'}),$$

$R_P, R_{P'}$ désignant les deux résidus.

Les deux résidus étant des imaginaires conjuguées, on peut encore écrire

$$\int_{(P), (P')} = -4\pi i \mathcal{R}[R_P]$$

ou, en désignant les affixes des deux pôles P, P' par

$$(31) \quad \pm \frac{i}{\Omega_R} \quad (\Omega_R < \Omega_1, \Omega_1', \Omega_2, \Omega_2'), \\ \int_{(P), (P')} = -\frac{1}{2} i L \pi v x \frac{x^2 + \Lambda'^2}{x^2 \left(v^2 - \Lambda'^2 - \frac{\rho^2}{\Omega_R^2} \right) + 2v^2 \Lambda'^2},$$

où l'on pose

$$(32) \quad \begin{cases} \Lambda' = h \sqrt{\frac{1}{\Omega_R^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}} + z \sqrt{\frac{1}{\Omega_R^2} - \frac{1}{\Omega_2^2}}, \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\left(\nu^2 - \Lambda'^2 - \frac{\rho^2}{\Omega_R^2}\right) + \sqrt{\left(\nu^2 - \Lambda'^2 - \frac{\rho^2}{\Omega_R^2}\right)^2 + 4 \Lambda'^2 \nu^2}}. \end{cases}$$

Λ est une constante réelle, indépendante de h, ρ, z, ν , dont on obtient la valeur en remplaçant u par $\frac{i}{\Omega_R}$ dans

$$\frac{N(u)}{\frac{d}{du^2}[D(u)]},$$

$N(u)$ et $D(u)$ désignant respectivement le numérateur et le dénominateur de $f(u)$.

Nous discuterons ultérieurement sous une forme plus appropriée cette partie de l'intégrale $B(\nu)$, mais il apparaît dès maintenant qu'elle prend des valeurs particulièrement importantes quand ρ est grand par rapport à h et z (voisinage de la surface de séparation et grande distance de la source) et quand, de plus, se trouve réalisée la condition

$$\rho = \Omega_R \nu.$$

Ce terme est caractéristique de l'onde de Rayleigh, dont la vitesse est précisément égale à Ω_R .

C. Calcul de

$$\int_{(E)} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u) u \, du.$$

On peut former aisément son expression en intégrales réelles. Nous ne le ferons cependant pas à cause de la nécessité où l'on est d'envisager six cas différents, suivant l'ordre respectif dans lequel se placent les quatre vitesses

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \Omega_1', \quad \Omega_2'.$$

Toutes les intégrales rencontrées au cours de ce problème sont calculables numériquement ou graphiquement avec facilité. La complication apparente des formules tient uniquement au nombre élevé des paramètres, $B(\nu)$ dépendant, en plus de ν, ρ, z , des sept paramètres

$$h, \quad \sigma, \quad \sigma', \quad \Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \Omega_1', \quad \Omega_2'.$$

31. Étude du cas $\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2} < \nu < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ en supposant $\Omega_1 > \Omega_1'$. —

Quand ν est inférieur à $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$, le parcours C_ν débute en un point qui est l'image d'une imaginaire pure à droite de la coupure, entre 0 et $\frac{i}{\Omega_1}$. Il suit l'axe imaginaire à droite sur une certaine longueur et se termine en B sur l'axe réel. Il est entièrement décrit dans le quatrième quadrant.

La quantité sous le radical $\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}$ ne s'annule, dans l'ensemble du plan de la variable u (fig. 19), que sur la coupure déjà

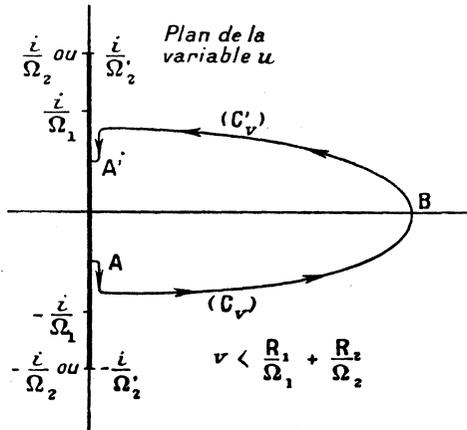


Fig. 19.

pratiquée le long de l'axe imaginaire, coupure qui suffit donc, sans plus, à assurer l'uniformité de ce radical.

Nous compléterons comme précédemment le parcours C_ν par un parcours C'_ν , symétrique de C_ν par rapport à l'axe réel. D'où

$$(33) \quad [B(\nu)]_{\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2} < \nu < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}} = \frac{2i}{\pi \rho} \int_A^{A'} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u) u \, du,$$

le parcours AA' pouvant être le parcours direct.

Or, sur le parcours direct AA' les radicaux

$$a, \quad b, \quad a', \quad b', \quad \sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}$$

sont tous réels. Il en est donc de même de

$$\frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} f(u)$$

et, par suite

$$B(v) = 0.$$

En d'autres termes, quand Ω_1 est la plus grande des quatre vitesses, le front de l'onde $B(v)$ correspond à $v = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$.

32. Étude du cas $\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2} < v < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ **en supposant** $\Omega'_1 > \Omega_1$. — La seule différence par rapport au cas précédemment envisagé est que le point $\frac{-i}{\Omega'_1}$ peut se placer entre O et A. Si cette circonstance se présente, le radical α' et peut-être aussi le radical β' ne sont plus réels sur le parcours direct AA' : la conclusion précédente n'est plus valable.

En d'autres termes, le front de l'onde est en avance sur l'instant

$$v = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}.$$

Pour que le point A coïncide avec le point d'affixe $\frac{-i}{\Omega'_1}$, il faut d'abord que $\frac{-i}{\Omega'_1}$ soit une racine de l'équation (27)

$$(34) \quad \frac{\rho}{\Omega'_1} + h \sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega'^2_1}} + z \sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega'^2_2}} = v.$$

Mais nous avons vu que l'équation (26) peut admettre deux racines, et que, s'il y a deux racines, il faut choisir celle de plus petit module pour obtenir le début A du parcours C_v .

Nous avons appris à distinguer ces deux racines : la dérivée

$$\frac{d}{du} [iu\rho + ah + bz]$$

est une imaginaire pure de coefficient positif pour celle des deux racines qui correspond à l'extrémité A de C_v , une imaginaire pure de coefficient négatif pour l'autre racine, d'où la condition supplémentaire à adjoindre à (34)

$$(35) \quad \rho \Omega'_1 - \frac{h}{\sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega'^2_1}}} - \frac{z}{\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega'^2_2}}} > 0.$$

Nous poserons

$$(36) \quad \sin l_1 = \frac{\Omega_1}{\Omega_1'}, \quad \sin l_2 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1'} \quad \left(0 < l_1, l_2 < \frac{\pi}{2} \right),$$

l_1 et l_2 sont les angles limites de réflexion totale au sens de l'optique géométrique.

On a

$$\cos l_1 = \Omega_1 \sqrt{\frac{1}{\Omega_1'^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2}}, \quad \cos l_2 = \Omega_2 \sqrt{\frac{1}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2}},$$

de sorte que les conditions (34) et (35) peuvent s'écrire

$$(37) \quad \rho \sin l_2 + z \cos l_2 = \Omega_2 v - h \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \cos l_1,$$

$$(37 \text{ bis}) \quad \rho > h \operatorname{tang} l_1 + z \operatorname{tang} l_2.$$

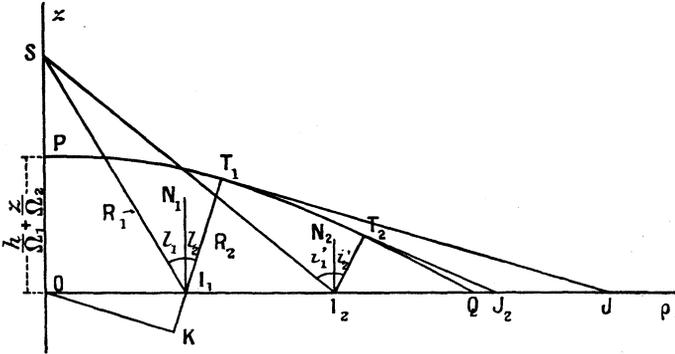


Fig. 20.

La surface définie par (37) est un cône de révolution autour de SS' dont la méridienne est la droite d'équation (37). La normale à la droite (37) fait avec la normale à la surface de séparation un angle égale à l_2 . La distance de la droite (37) à l'origine O est égale à

$$\Omega_2 v - h \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \cos l_1.$$

La droite se déplace donc parallèlement à elle-même vers le haut avec la vitesse Ω_2 (fig. 20).

Cherchons la position de cette droite (37) par rapport à la méridienne du front d'onde

$$(38) \quad v = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2},$$

qui représente une courbe parallèle à l'une des branches de l'hyperbole

$$\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} = 0.$$

Nous obtenons des points du front d'onde (38) en imaginant des « rayons réfléchis » SIM satisfaisant à la loi de la réflexion

$$\frac{\sin I_1}{\Omega_1} = \frac{\sin I_2}{\Omega_2}.$$

Comme on sait, IM est normal en M au front d'onde (38). Désignons en particulier par T₁ le point M tel que l'angle I₂ soit égal à l₂.

Il lui correspond un angle I₁ défini par

$$\sin I_1 = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \sin l_2 = \frac{\Omega_1}{\Omega'_1} = \sin l_1.$$

D'où

$$I_1 = l_1.$$

Calculons la distance de l'origine O à la tangente en T₁. Cette distance est égale à KT₁, en désignant par K la projection de O sur I₁T₁,

$$\begin{aligned} \overline{KT_1} &= R_2 + \overline{KI_1} = \left(\Omega_2 v - R_1 \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) + h \operatorname{tang} l_1 \sin l_2 \\ &= \Omega_2 v - h \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \cos l_1. \end{aligned}$$

Donc $\overline{KT_1}$ est précisément égal à la distance de la droite (37) à l'origine; la droite (37) est tangente en T₁ à la méridienne du front d'onde (38).

De plus, la coordonnée ρ du point T₁ de contact est égale à

$$h \operatorname{tang} l_1 + z \operatorname{tang} l_2,$$

La condition supplémentaire (37 bis) exprime donc que le point M(ρ , z) est extérieur au cône de révolution d'axe Oz et de méridienne I₁T₁. La position de I₁T₁ ne dépend pas de v . Ce cône est fixe.

Soit alors un point M(ρ , z) quelconque intérieur au cône fixe. Quel que soit v , le point A ne viendra jamais coïncider avec l'image de $\frac{-i}{\Omega'_1}$. Comme l'affixe de A est une fonction continue de v , ρ , z , A demeure donc soit entre 0 et $\frac{-i}{\Omega'_1}$, soit au-dessous de $\frac{-i}{\Omega'_1}$. Pour choisir entre ces deux alternatives, il suffit d'imaginer que ρ , z , v satisfont à la relation (37), c'est-à-dire que M est, à l'instant v , sur la surface du cône mobile défini par (37). C'est alors la seconde racine de l'équation (27), celle dont le module est le plus grand, dont l'image est confondue

avec A. Donc A est compris entre O et $\frac{-i}{\Omega_1}$. Il en résulte qu'à l'intérieur du cône fixe de méridienne I, T₁, B(ν) est identiquement nulle pour

$$\nu < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}.$$

Si le point M(ρ, z) est extérieur au cône fixe I, T₁, il existe une époque ν définie par (37) telle que A coïncide avec $\frac{-i}{\Omega_1}$. Pour des époques ν antérieures, A est compris entre O et $\frac{-i}{\Omega_1}$, donc B(ν) est identiquement nulle. Pour des époques ν postérieures, A est situé au-dessous de $\frac{-i}{\Omega_1}$, B(ν) n'est pas nul.

Le cône d'équation (37) constitue donc le front d'onde dans la partie de l'espace extérieure au cône fixe I, T₁.

Nous concluons par une dernière remarque : dès le début de l'étude de B(ν), nous avons obtenu le résultat que B(ν) est nul, de toutes façons, pour $\nu < \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}$.

Cette condition exprime que z est supérieur à \overline{OP} , P désignant le point le plus haut de la méridienne du front (38). La suite de notre étude limite donc de façon plus restrictive le domaine dans lequel B(ν) est nul.

33. Expression de B(ν) dans le domaine de l'onde à front conique à l'aide d'intégrales réelles. — On a

$$B(\nu) = \frac{2i}{\pi\rho} \int_{-\frac{i}{\Omega}}^{\frac{i}{\Omega}} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u)u \, du,$$

en désignant par $\frac{-i}{\Omega}$, $\frac{i}{\Omega}$ les affixes de A et A' : Ω est une fonction de ν, ρ, z. Nous aurons à distinguer deux cas.

a. Premier cas : $\frac{1}{\Omega_1} < \frac{1}{\Omega} < \frac{1}{\Omega_2}, \frac{1}{\Omega_1}, \frac{1}{\Omega_2}$.

$$(39) \quad B(\nu) = \frac{2}{\pi\rho} \int_{\frac{1}{\Omega_1^2}}^{\frac{1}{\Omega^2}} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{(\nu - ah - bz)^2 - m\rho^2}} \Phi_1(m) \, dm,$$

où l'on pose

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - m}, & b &= \sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - m}, & b' &= \sqrt{\frac{1}{\Omega_2'^2} - m}, \\
 \Phi_1(m) &= \frac{Q_1 R_1 - P_1 S_1}{R_1^2 + S_1^2}; \\
 P_1 &= \left(\frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} - m \right) \left(\frac{C'}{\Omega_2'^2} - m \right), \\
 Q_1 &= -b' \sqrt{m - \frac{1}{\Omega_1'^2}} \left(\frac{C}{\Omega_2^2} - m \right), \\
 R_1 &= \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} ab' - ab \left(\frac{C'}{\Omega_2'^2} - m \right)^2 - m \left(\frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} - m \right)^2, \\
 S_1 &= \sqrt{m - \frac{1}{\Omega_1'^2}} \left[b \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} - b' \left(\frac{C}{\Omega_2^2} - m \right)^2 - mabb' \right].
 \end{aligned}$$

Le radical $\sqrt{(\nu - ah - bz)^2 - m\rho^2}$ est une racine arithmétique.

b. Deuxième cas : $\frac{1}{\Omega_1'} < \frac{1}{\Omega_2'} < \frac{1}{\Omega} < \frac{1}{\Omega_1} < \frac{1}{\Omega_2}$. — Ce cas n'est à envisager que si Ω_2' est, comme Ω_1' , supérieur à Ω_1 . Il faut alors le prendre en considération lorsque ν est supérieur à la valeur définie par

$$(40) \quad \rho \sin l_2 + z \cos l_2 = \Omega_2 \nu - h \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \cos l_1,$$

et que l'on a

$$(41) \quad \rho > h \operatorname{tang} l_1 + z \operatorname{tang} l_2,$$

en posant

$$\sin l_1 = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}, \quad \sin l_2 = \frac{\Omega_2}{\Omega_2'}$$

les conditions (40) et (41) se déduisant simplement de (34) et (35) en substituant Ω_2' à Ω_1' .

Ces relations définissent aussi un « front conique » de méridienne $J_2 T_2$ tangent au front (38) à droite de T_2 (*fig. 20*). En employant le terme « Front » pour désigner cette nouvelle surface conique, nous anticipons d'ailleurs sur les résultats du chapitre suivant.

On a, dans ce cas,

$$(42) \quad B(\nu) = \frac{2}{\pi\rho} \int_{\frac{1}{\Omega_1'^2}}^{\frac{1}{\Omega_2'^2}} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{(\nu - ah - bz)^2 - m}} \Phi_1(m) dm + B_2(\nu),$$

le premier terme de $B(\nu)$ étant le même que l'expression (39), avec cette

différence que la limite finale de l'intégrale est la constante $\frac{1}{\Omega_2^2}$ et non plus la fonction $\frac{1}{\Omega_2}$ de ρ , z , v .

Le terme complémentaire $B_2(v)$ a pour expression

$$(43) \quad B_2(v) = \frac{2}{\pi \rho} \int_{\frac{1}{\Omega_2^2}}^{\frac{1}{\Omega_1^2}} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{(v - ah - bz)^2 - m}} \Phi_2(m) dm,$$

avec

$$a = \sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - m}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - m},$$

$$\Phi_2(m) = -\frac{P_2 S_2}{R_2^2 + S_2^2},$$

$$P_2 = \left(\frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} - m \right) \left(\frac{C'}{\Omega_2'^2} - m \right) + \left(\frac{C}{\Omega_2^2} - m \right) \sqrt{\left(m - \frac{1}{\Omega_1'^2} \right) \left(m - \frac{1}{\Omega_2'^2} \right)},$$

$$R_2 = mab \sqrt{\left(m - \frac{1}{\Omega_1'^2} \right) \left(m - \frac{1}{\Omega_2'^2} \right)} - m \left(\frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} - m \right)^2 \\ - ab \left(\frac{C'}{\Omega_2'^2} - m \right)^2 + \left(\frac{C}{\Omega_2^2} - m \right)^2 \sqrt{\left(m - \frac{1}{\Omega_1'^2} \right) \left(m - \frac{1}{\Omega_2'^2} \right)},$$

$$S_2 = \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} \left[a \sqrt{m - \frac{1}{\Omega_2'^2}} + b \sqrt{m - \frac{1}{\Omega_1'^2}} \right].$$



CHAPITRE VI.

PREMIÈRE ÉTUDE DU FACTEUR DE TRANSMISSION $B(\nu, \rho, z)$.

34. **Délimitation de quatre domaines à l'intérieur desquels $B(\nu, \rho, z)$ est continue et indéfiniment dérivable pour toutes valeurs de ν, ρ, z , le cas de $\rho = 0$ étant exclu.** — Désignons respectivement par PQ, J_1T_1, J_2T_2 , les positions occupées à l'instant ν par les méridiennes du front d'onde normal, du premier et du second front coniques (*fig. 21*).

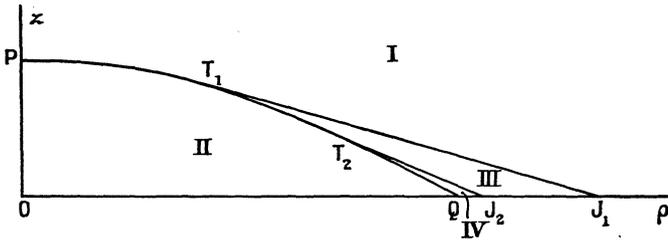


Fig. 21.

Nous dirons par abréviation que le système de valeurs essentiellement réelles ρ, z, ν appartient au domaine I lorsque le point $M(\rho, z)$ est situé dans la région I de la figure, en avant de tous les fronts d'onde. Nous distinguerons, conformément à la figure, trois autres domaines II, III, IV.

Dans certains cas le domaine IV n'existe pas, dans d'autres cas le domaine III et le domaine IV sont absents, mais, pour $\nu > \frac{h}{\Omega_1}$, il y a toujours un domaine I et un domaine II. Nous avons montré que, dans le domaine I, $B(\nu, \rho, z)$ est identiquement nulle. Dans les domaines II, III ou IV nous avons obtenu l'expression générale

$$(1) \quad B(\nu, \rho, z) = \frac{2i}{\pi\rho} \int_{c_u, c_\nu} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u)u \, du.$$

La fonction à intégrer présente des pôles dont la position ne dépend pas de ρ , de z , ni de ν . Dans la portion restreinte du plan complexe que nous avons seule étudiée, il ne peut exister que deux de ces pôles désignés par P, P'. Il existe en outre huit points critiques indépendants de ρ , z , ν dont les affixes sont $\pm \frac{i}{\Omega_1}$, $\pm \frac{i}{\Omega_2}$, $\pm \frac{i}{\Omega'_1}$, $\pm \frac{i}{\Omega'_2}$. Il faut considérer enfin les quatre points critiques du radical dénominateur dont les affixes, par contre, sont des fonctions (continues) de ρ , z , ν .

Les extrémités A, A' du parcours C_ν , C'_ν coïncident d'ailleurs avec deux des quatre points critiques du radical dénominateur, les deux autres sont sur le bord droit de la coupure, entre $-\frac{i}{\Omega_1}$ et $+\frac{i}{\Omega_1}$, ou dans les feuillets de Riemann exclus au cours du précédent chapitre : ils ne peuvent se confondre avec A, A' que si $\nu = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$.

Si ν , ρ , z ne satisfont pas à l'équation d'une surface d'onde, si, en outre, comme nous le supposons toujours, ρ ou z ne sont pas infinis, si ρ n'est pas nul, et si ν , ρ , z n'appartiennent pas au domaine I, A ni A' ne coïncident jamais avec un pôle ou un autre point critique.

En effet :

1° A ni A' ne peuvent pas coïncider avec un autre point critique du radical dénominateur, car il faudrait pour cela que ν fût égal à $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$, et pour que A et A' fussent confondus sur l'axe réel, il faudrait que ρ fût nul.

2° A ni A' ne coïncident pas avec les points critiques $\pm \frac{i}{\Omega'_1}$, $\pm \frac{i}{\Omega'_2}$, cette condition impliquant que ν , ρ , z satisfassent à l'équation du premier ou du second front conique.

3° A ni A' ne coïncident jamais, comme nous avons vu, avec P ou P', ni avec $\pm \frac{i}{\Omega_2}$, ils ne peuvent coïncider avec $\pm \frac{i}{\Omega_1}$ que si les valeurs de ρ , z , ν appartiennent au domaine I.

Dans ces conditions, nous pouvons donc toujours trouver un circuit fermé (S) n'enfermant que les seuls points critiques A, A', tournant autour de A, A' dans le sens inverse et ne passant par aucun des douze points critiques ni aucun des pôles. Lorsque A et A' sont situés sur l'axe imaginaire, il faut imaginer que le circuit S pénètre à l'intérieur d'un feuillet de Riemann (exemple *fig. 22*).

On a alors

$$(2) \quad \mathbf{B}(\nu, \rho, z) = \frac{i}{\pi\rho} \int_{(S)} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u)u \, du.$$

Si nous perdons de vue un instant le problème physique, où ν , ρ , z sont essentiellement réels, la relation (2), dans laquelle il n'est plus nécessaire de considérer ν , ρ , z comme des quantités essentiellement réelles, définit une fonction analytique holomorphe des variables ν , ρ , z .

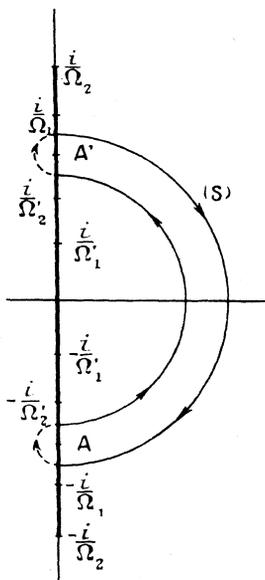


Fig. 22. — Exemple correspondant au domaine IV.

Plus précisément, on peut toujours définir trois domaines associés entourant respectivement les points réels ν_0 , ρ_0 , z_0 , constitués par exemple par trois cercles de rayon non nul, de centres respectifs ν_0 , ρ_0 , z_0 et tels que, pour n'importe quel système de valeurs ν , ρ , z appartenant à ces domaines, aucun des quatre points critiques mobiles du radical dénominateur ne s'approche infiniment près du contour S . $\mathbf{B}(\nu, \rho, z)$ est donc une fonction holomorphe à l'intérieur de ces domaines associés ⁽¹⁾.

(1) E. GOURSAT. *Cours d'Analyse Mathématique*, Gauthier-Villars, 1929, 5^e édition, t. II. p. 281.

Pour tout système de valeurs réelles ν, ρ, z appartenant aux domaines I, II, III ou IV, leurs frontières et l'axe de révolution exceptés, $B(\nu, \rho, z)$ est une fonction continue admettant des dérivées partielles continues de tout ordre. *Il ne peut exister d'autres fronts d'onde que la surface $\nu = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ ou les deux fronts coniques.*

35. **Étude de $B(\nu, \rho, z)$ pour $\rho = 0$.** — L'expression (1) a été établie en supposant essentiellement que ρ n'était pas nul. Pour $\rho = 0$ elle n'a d'ailleurs pas de sens ou, si l'on préfère, se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Cependant, pour $\rho = 0$ il apparaît que Y_ρ est nul, donc qu'une solution de l'équation intégrale est

$$(3) \quad B(\nu, 0, z) \equiv 0.$$

Supposons, ρ, z, ν étant réels, que ρ soit infiniment petit, A et A' tendant alors vers un même point de l'axe réel. Définissons le circuit (S) comme précédemment : $B(\nu, \rho, z)$ s'exprime par la relation (2).

On peut alors définir trois domaines associés entourant respectivement les points réels ν_0, z_0 ainsi que l'origine dans le plan complexe de la variable ρ ; débordant de toutes parts des cercles de rayon non nul et de centres $\nu_0, z_0, 0$; tels que, pour n'importe quel système de valeurs ν, ρ, z appartenant à ces domaines, aucun des quatre points critiques mobiles du radical dénominateur ne s'approche infiniment près du contour (S); tels enfin que l'expression

$$\frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} = \left[1 + \frac{u^2 \rho^2}{(\nu - ah - bz)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

puisse être développée en série entière de ρ , uniformément convergente pour toute valeur de u appartenant au contour S et toutes valeurs de ρ, z, ν choisies arbitrairement à l'intérieur des domaines associés.

Dans ces conditions, il est possible d'effectuer terme à terme l'intégration

$$(4) \quad \int_{(S)} \left[1 + \frac{u^2 \rho^2}{(\nu - ah - bz)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} f(u) u \, du,$$

et il apparaît que le développement de la fonction holomorphe (4) en série entière de $\nu - \nu_0, \rho, z - z_0$ ne contient que des termes renfermant

ρ^2 ou une puissance paire de ρ , car le terme indépendant de ρ

$$\int_{(S)} f(u)u \, du$$

est nul.

En multipliant cette série entière par $\frac{i}{\pi\rho}$, on obtient un développement ne contenant que des termes en ρ ou des puissances impaires de ρ . La fonction holomorphe de ν, ρ, z qu'il représente est égale à $B(\nu, \rho, z)$ si ρ n'est pas nul et, puisqu'elle s'annule identiquement pour $\rho = 0$, elle est encore, en vertu de (3), égale à $B(\nu, \rho, z)$ pour $\rho = 0$.

L'exception faite au paragraphe précédent pour le cas de $\rho = 0$ n'a donc plus d'objet désormais.

36. Étude de $B(\nu, \rho, z)$ dans le domaine II, à la frontière du domaine I.

— Lorsque ν, ρ, z sont réels et que $\nu = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$, les points A et A' sont respectivement en A_0, A'_0 sur l'axe imaginaire. L'affixe u_0 de A_0 est une racine double du radical dénominateur.

Comme nous supposons que les valeurs ν, ρ, z appartenant au domaine II sont infiniment proches du domaine I, cela revient à dire que tous les points de ramification $-\frac{i}{\Omega_1}, -\frac{i}{\Omega_2}, -\frac{i}{\Omega'_1}, -\frac{i}{\Omega'_2}$ sont au-dessous de A_0 .

Soit L (*fig. 23*) un point de l'axe imaginaire situé au-dessous de A_0 et au-dessus des quatre points de ramification $-\frac{i}{\Omega_k}$. Soit L' le symétrique de L par rapport à l'origine.

Lorsque ν, ρ, z sont réels et appartiennent au domaine II, fermons le parcours ouvert L'L par le retour direct LL' effectué sur le bord droit de la coupure. L'intégration (2) effectuée de L à L' suivant l'axe imaginaire donne un résultat nul, de sorte que l'on a

$$(5) \quad B(\nu, \rho, z) = \frac{i}{\pi\rho} \int_{L'}^L \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u)u \, du,$$

et l'on peut comme précédemment définir trois domaines associés autour des points réels ρ_0, z_0, ν_0 du domaine II; tels qu'aucun point critique ne s'approche infiniment près du parcours L'L lorsque ρ, z, ν demeurent à l'intérieur des domaines associés; tels enfin qu'il existe dans ces domaines associés, des valeurs réelles de ρ, z, ν appartenant au domaine I.

L'expression (5) définit, à l'intérieur des domaines associés, une fonction holomorphe de ρ, z, v identique à $B(v, \rho, z)$ lorsque v, ρ, z appartiennent au domaine II, et constituant un prolongement analytique de $B(v, \rho, z)$ dans le domaine I. Ainsi la fonction $B(v, \rho, z)$ admet

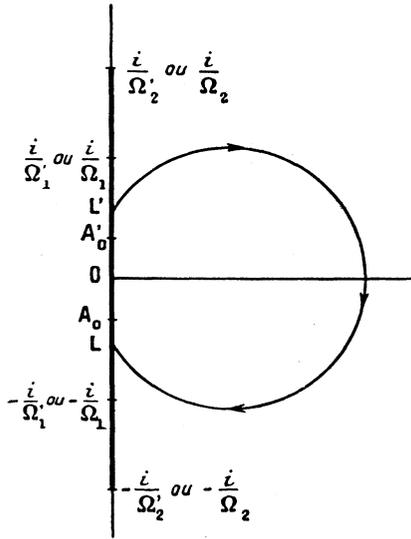


Fig. 23.

deux expressions analytiques distinctes dans les domaines I et II. Pour des valeurs réelles de v, ρ, z , lorsque v tend vers $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ par valeurs supérieures, B et toutes ses dérivées partielles tendent vers des limites finies. La fonction $v = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ jouit des propriétés des points de discontinuité $v_i(\rho, z)$ décrits au Chapitre III.

37. Limite de $B(v, \rho, z)$ quand v tend vers $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ par valeurs supérieures, à la frontière des domaines I et II. — Cette limite joue un rôle essentiel dans l'étude de la propagation des discontinuités cinématiques. Il importe donc de la calculer.

A et A' étant très voisins de l'axe des imaginaires pures, soient K et K' leurs projections sur cet axe. Remplaçons le parcours direct AA' par

le parcours $AKK'A'$. Notons que l'intégrale prise de K à K' est nulle (fig. 24). D'où

$$(6) \quad B(v, \rho, z) = \frac{2i}{\pi\rho} \int_{\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{K'A'}} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} f(u) u \, du$$

$$= -\frac{4}{\pi\rho} \mathcal{Y} \left[\int_{\overrightarrow{AK}} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} f(u) u \, du \right].$$

Écrivons

$$u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2 = (iu\rho + ah + bz - v)(-iu\rho + ah + bz - v).$$

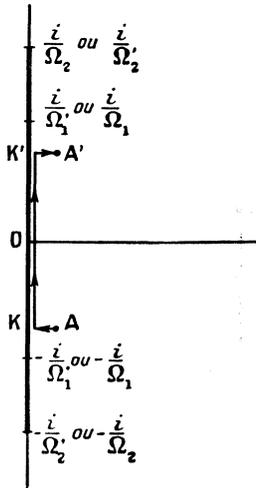


Fig. 24.

Le premier facteur seul s'annule au point A , dont nous désignons l'affixe par U . Si nous prolongeons analytiquement a et b à gauche de l'axe imaginaire, c'est-à-dire si nous pénétrons à l'intérieur des feuillets de Riemann, il s'annule également pour $u = U^*$, en désignant par U^* le nombre complexe qui se déduit de U par changement de signe de sa partie réelle.

Si, laissant par exemple ρ et z fixes, nous faisons tendre v vers $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$, U et U^* ont une limite commune U_0 imaginaire pure. La fonction

$$iu\rho + ah + bz - v = \varphi(u) - v,$$

nulle pour $u = U$, peut être développée en série entière de $u - U$ au

voisinage de $u = U$ sous la forme

$$(7) \quad iu\rho + ah + bz - \nu \\ = (u - U)\varphi'(U) + \frac{(u - U)^2}{2!}\varphi''(U) + \frac{(u - U)^3}{3!}\varphi'''(U) + \dots,$$

d'où

$$(8) \quad K(u) = \frac{iu\rho + ah + bz - \nu}{U - u} \\ = -\varphi'(U) - \frac{u - U}{2!}\varphi''(U) - \frac{(u - U)^2}{3!}\varphi'''(U) + \dots$$

La fonction $K(u)$, nulle pour $u = U^*$, peut être développée en série entière de $u - U^*$ sous la forme

$$(9) \quad K(u) = (u - U^*)K'(U^*) + \frac{(u - U^*)^2}{2!}K''(U^*) + \dots,$$

ou

$$(10) \quad K(u) = (u - U^*) \left[-\frac{\varphi''(U)}{2} - \frac{1}{3}(U^* - U)\varphi'''(U) + \dots \right] \\ + \frac{(u - U^*)^2}{2!}K''(U^*) + \dots$$

On a donc sur le parcours \overrightarrow{AK}

$$(11) \quad iu\rho + ah + bz - \nu = (u - U^*)(U - u) \left[-\frac{\varphi''(U_0)}{2} \right] [1 + \varepsilon(u)],$$

la fonction $\varepsilon(u)$ tendant uniformément vers zéro quand ν tend vers $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$.

Soit $B\left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o, \rho, z\right)$ la limite de $B(\nu, \rho, z)$ quand ν tend vers $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$.

$$(12) \quad B\left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o, \rho, z\right) = \frac{-\frac{4}{\pi\rho} \mathcal{G}(U_0) \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} - a_0 h - b_0 z\right) f(U_0)}{\sqrt{\left(\frac{h}{a_0^3 \Omega_1^2} + \frac{z}{b_0^3 \Omega_2^2}\right) i U_0 \rho}} \\ \times \lim \mathcal{A} \left[\int_U^{\frac{U+U^*}{2}} \frac{1 + \varepsilon'(u)}{\sqrt{(u - U^*)(U - u)}} du \right].$$

a_0, b_0 étant les valeurs de a, b pour $u = U_0$, les radicaux désignant les racines arithmétiques, $\varepsilon'(u)$ une fonction de u qui tend uniformément vers zéro sur le parcours d'intégration.

En posant

$$(13) \quad u = \frac{1}{2}[(U^* - U)s + (U^* + U)],$$

l'intégrale

$$\int_U^{\frac{U+U^*}{2}} \frac{du}{\sqrt{(u-U^*)(U-u)}}$$

devient

$$-\int_{-1}^0 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = -\frac{\pi}{2}$$

et l'intégrale

$$\int_U^{\frac{U+U^*}{2}} \frac{\varepsilon'(u) du}{\sqrt{(u-U^*)(U-u)}}$$

est infiniment petite.

Nous avons déterminé U_0 (Chapitre V)

$$U_0 = -i \frac{\sin I_1}{\Omega_1} = -i \frac{\sin I_2}{\Omega_2}, \quad a_0 = \frac{\cos I_1}{\Omega_1}, \quad b_0 = \frac{\cos I_2}{\Omega_2},$$

d'où, sous une forme symétrique,

$$(14) \quad B\left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o, \rho, z\right) \\ = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{\rho}} \frac{\sin I_1 \sin I_2}{\Omega_1 \Omega_2} f(U_0) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{h\Omega_1}{\cos^3 I_1} + \frac{z\Omega_2}{\cos^3 I_2}\right) \left(\frac{\sin I_1}{\Omega_1} + \frac{\sin I_2}{\Omega_2}\right)}}.$$

Pour $\rho = 0$, cette expression est indéterminée. En remplaçant ρ par $h \operatorname{tang} I_1 + z \operatorname{tang} I_2$, on constate que c'est un infiniment petit du premier ordre par rapport à ρ , conformément aux résultats antérieurs.

38. Étude de $B(\nu, \rho, z)$ dans le domaine III à la frontière des domaines I et III. — L'extrémité A du parcours C_c, C'_c est l'image d'une imaginaire pure, très voisine du point d'affixe $-\frac{i}{\Omega_1}$ et au-dessous de ce point.

Modifions les coupures du plan complexe u comme l'indique la figure 25. Une première coupure est effectuée suivant le segment $\left(-\frac{i}{\Omega_1}, \frac{i}{\Omega_1}\right)$ de l'axe imaginaire. Elle assure l'uniformité du radical a' . Une seconde coupure est effectuée suivant la demi-droite $\left(\frac{i}{\Omega_2}, i\infty\right)$ ou $\left(\frac{i}{\Omega_1}, i\infty\right)$ suivant que Ω'_2 est supérieur à Ω_2 ou inversement. Une

troisième coupure est symétrique de la seconde par rapport à l'origine. Ces deux dernières coupures assurent l'uniformité des trois autres radicaux b' , a , b . La définition des radicaux a , b , a' , b' demeure la même que précédemment dans les premier et quatrième quadrants. L'expression (1) de $B(\nu, \rho, z)$ reste donc valable.

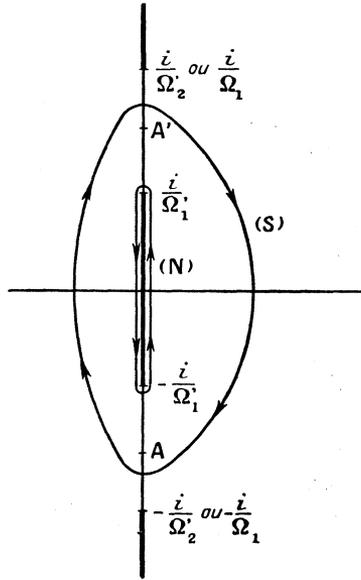


Fig. 25.

Comme $f(u)$ n'a certainement pas de pôles sur les lèvres de la première coupure ni sur la partie de l'axe imaginaire comprise entre la première coupure et les deux dernières, on peut trouver un circuit (S) enfermant A, A' et la première coupure à l'exclusion de tout pôle ou de tout autre point critique du radical dénominateur. Ce circuit sera parcouru dans le sens inverse.

Soit (N) un circuit enveloppant les deux lèvres de la première coupure et parcouru dans le sens direct, il vient

$$B(\nu, \rho, z) = \frac{i}{\pi\rho} \int_{(S)} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u) u du$$

$$+ \frac{i}{\pi\rho} \int_{(N)} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u) u du.$$

L'intégrale effectuée le long de (N) est d'ailleurs nulle. D'où

$$(15) \quad B(v, \rho, z) = \frac{i}{\pi \rho} \int_{(S)} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} f(u) u \, du.$$

Soient alors trois valeurs réelles v_0, ρ_0, z_0 appartenant au domaine III au voisinage de la frontière (I, III). On peut définir trois domaines associés entourant respectivement les points réels v_0, ρ_0, z_0 , tels que, pour un système quelconque de v, ρ, z appartenant à ces domaines, aucun point critique ne s'approche infiniment près du contour (S); tels aussi que ces domaines comportent des valeurs réelles de v, ρ, z appartenant au domaine I. L'expression (15) est une fonction holomorphe à l'intérieur des domaines associés. Elle ne représente $B(v, \rho, z)$ que pour les valeurs réelles de v, ρ, z du domaine III, mais constitue un prolongement analytique de $B(v, \rho, z)$ du domaine III dans le domaine I.

Ici encore, quand on se limite aux valeurs réelles des variables, $B(v, \rho, z)$ admet deux expressions analytiques distinctes de part et d'autre du front. Avant le passage du front, $B(v, \rho, z)$ est identiquement nulle. Après le passage du front, la fonction ainsi que ses dérivées partielles tendent vers des limites finies quand v tend par valeurs supérieures vers l'instant du passage du front.

39. Nouvelle expression de la fonction $f(u)$. — Les radicaux a' et b' n'interviennent dans les intégrales que par l'intermédiaire de la fonction $f(u)$ qui est de la forme

$$f(u) = \frac{A_1 a' + A_2 b' + A_3 a' b' + A_4}{C_1 a' + C_2 b' + C_3 a' b' + C_4},$$

où $A_1, A_2, \dots, C_1, C_2, \dots$ sont des polynômes en u^2, a, b .

Nous avons appelé $D(u)$ le dénominateur de $f(u)$

$$D(u) = C_1 a' + C_2 b' + C_3 a' b' + C_4.$$

Posons

$$\overline{D}(u) = -C_1 a' + C_2 b' - C_3 a' b' + C_4,$$

$$D^*(u) = C_1 a' - C_2 b' - C_3 a' b' + C_4,$$

$$\check{D}(u) = -C_1 a' - C_2 b' + C_3 a' b' + C_4.$$

A partir de D , on définit \overline{D} en changeant a' en $-a'$, D^* en changeant b' en $-b'$, \check{D} en changeant à la fois a' en $-a'$ et b' en $-b'$.

Pour toute valeur de u qui n'est pas une racine des fonctions D , on a

$$f(u) = \frac{(A_1 a' + A_2 b' + A_3 a' b' + A_4) \overline{D} D^* \check{D}}{D \overline{D} D^* \check{D}},$$

et il est clair que cette nouvelle expression de $f(u)$ est de la forme

$$(16) \quad f(u) = a' P(u, a, b) + b' Q(u, a, b) + a'b' R(u, a, b) + S(u, a, b),$$

où P, Q, R, S sont des fonctions rationnelles de u^2, a, b .

Nous avons entrepris au Chapitre IV la discussion des racines de D . Il est inutile, pour le but que nous poursuivons, de recommencer ce travail pénible pour \bar{D}, D^* et \check{D} . Il nous suffira de constater que \bar{D}, D^* ni \check{D} ne peuvent avoir de racine $u = \pm \frac{i}{\Omega_1}$ si $\Omega'_1 > \Omega_1$, ni de racine $u = \pm \frac{i}{\Omega_2}$ si $\Omega'_2 > \Omega_2$, le long des lèvres de la coupure que nous avons utilisée dans tout le cours du Chapitre V.

Pour $a' = 0$, on a, en effet

$$\bar{D} = D = C_2 b' + C_4, \quad D^* = \check{D} = -C_2 b' + C_4.$$

Or, pour $u = \frac{i}{\Omega_1}$ ou pour $u = -\frac{i}{\Omega_1}$, $C_2 = \frac{aCC'}{\Omega_2^2 \Omega_3^2}$ change de signe d'un bord à l'autre de la coupure, tandis que

$$C_4 = u^2 \left(u^2 + \frac{C}{\Omega_2^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right)^2 - ab \left(u^2 + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right)^2$$

conserve la même valeur. Puisque D ne s'annule pas en ce point, ni sur un bord, ni sur l'autre, la quantité $\pm C_2 b' + C_4$ ne peut non plus s'annuler.

Pour $b' = 0$, on a de même

$$D = D^* = C_1 a' + C_4, \quad \bar{D} = \check{D} = -C_1 a' + C_4.$$

C_1 et C_4 sont réels, a' imaginaire pure. Comme D n'est pas nul, C_1 et C_4 ne le sont pas simultanément, \bar{D}, D^* et \check{D} ne sont donc pas nuls.

40. Limite de $B(\nu, \rho, \varepsilon)$ et de $\frac{\partial}{\partial \nu} B(\nu, \rho, \varepsilon)$ quand ν tend vers

$$\frac{1}{\Omega_1} (\rho + h \cot l_1 + \varepsilon \cot l_2),$$

par valeurs supérieures, à la frontière des domaines I et III. — Pour une valeur de ν infiniment peu postérieure à $\frac{1}{\Omega_1} (\rho + h \cot l_1 + \varepsilon \cot l_2)$, époque de passage du premier front conique, soit U l'affixe imaginaire pure de A . En vertu du paragraphe précédent, puisque \bar{D}, D^*, \check{D} ne sont pas nuls pour $u = \pm \frac{i}{\Omega_1}$, on peut toujours supposer que U est assez

voisin de $-\frac{i}{\Omega'_1}$ pour que

$$(17) \quad B(\nu, \rho, z) = \frac{4}{\pi\rho} \int_U^{-\frac{i}{\Omega'_1}} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} (P + b'R) \\ \times \sqrt{-u^2 - \frac{1}{\Omega'^2_1}} u \, du,$$

$\sqrt{-u^2 - \frac{1}{\Omega'^2_1}}$ et $\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}$ désignant des racines arithmétiques.

Nous mettrons en évidence la racine $u = U$ du radical dénominateur et la racine $u = -\frac{i}{\Omega'_1}$ du radical situé au numérateur.

$$B(\nu, \rho, z) = \int_U^{-\frac{i}{\Omega'_1}} \sqrt{\frac{u + \frac{i}{\Omega'_1}}{U - u}} G(u) \, du,$$

la fonction $G(u)$ ne différant de la constante $G\left(-\frac{i}{\Omega'_1}\right)$ que d'une fonction $\epsilon(u)$ qui tend uniformément vers zéro sur le parcours d'intégration, et le radical

$$\sqrt{\frac{u + \frac{i}{\Omega'_1}}{U - u}}$$

désignant une racine arithmétique.

Posons

$$u = \left(-\frac{i}{\Omega'_1} - U\right)s + U.$$

Il vient

$$B(\nu, \rho, z) = -\left(U + \frac{i}{\Omega'_1}\right) \int_0^1 \sqrt{\frac{1-s}{s}} G[u(s)] \, ds.$$

On a

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-s}{s}} \, ds = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-s}{s}} G[u(s)] \, ds$$

a pour limite

$$\frac{\pi}{2} G\left(-\frac{i}{\Omega'_1}\right)$$

quand U tend vers $-\frac{i}{\Omega'_1}$, de sorte que $B(\nu, \rho, z)$ tend vers zéro en même temps que le facteur

$$U + \frac{i}{\Omega'_1}.$$

De plus

$$\frac{\partial B}{\partial v} = - \frac{\partial U}{\partial v} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-s}{s}} G[u(s)] ds - \left(U + \frac{i}{\Omega'_1} \right) \int_0^1 \frac{(1-s)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{s}} \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} dv.$$

Le second terme tend vers zéro, de sorte que la limite de $\frac{\partial B}{\partial v}$ est

$$\begin{aligned} (18) \quad \lim \left(\frac{\partial B}{\partial v} \right) &= - \frac{\pi}{2} G \left(- \frac{i}{\Omega'_1} \right) \lim \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right) \\ &= - \frac{2}{\sqrt{\rho}} (\rho - h \operatorname{tang} l_1 - z \operatorname{tang} l_2)^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad \times \left(P_{u = -\frac{i}{\Omega'_1}} + \sqrt{\frac{1}{\Omega'^2_2} - \frac{1}{\Omega'^2_1}} R_{u = -\frac{i}{\Omega'_1}} \right) \\ &= - \frac{2}{\sqrt{\rho}} (\rho - h \operatorname{tang} l_1 - z \operatorname{tang} l_2)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial a'} \right)_{a'=0}, \end{aligned}$$

où $\left(\frac{\partial f}{\partial a'} \right)_{a'=0}$ désigne, d'une manière incorrecte, mais commode, la dérivée partielle de $f(u)$ par rapport à a' en considérant a, b, b', u comme des constantes puis remplaçant a' par 0, u par $-\frac{i}{\Omega'_1}$, a par $\sqrt{\frac{1}{\Omega'^2_1} - \frac{1}{\Omega'^2_2}}$, ...

Notons que la discontinuité de la dérivée $\frac{\partial B}{\partial v}$ devient infiniment grande quand

$$\rho - h \operatorname{tang} l_1 - z \operatorname{tang} l_2$$

tend vers zéro, c'est-à-dire sur le cercle de raccordement du premier front conique et du front normal.

41. Étude de $B(v, \rho, z)$ à la frontière des domaines III et IV. — Dans le domaine III ou dans le domaine IV, on a, d'une manière générale,

$$(19) \quad B(v, \rho, z) = B_1 + B_2 + B_3 + B_4(v, \rho, z)$$

avec

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} B_1(v, \rho, z) &= \frac{2i}{\pi\rho} \int_A^{A'} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (v - ah - bz)^2}} a' P u du, \\ B_2(v, \rho, z) &= \frac{2i}{\pi\rho} \int_A^{A'} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (v - ah - bz)^2}} b' Q u du, \\ B_3(v, \rho, z) &= \frac{2i}{\pi\rho} \int_A^{A'} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (v - ah - bz)^2}} a' b' R u du, \\ B_4(v, \rho, z) &= \frac{2i}{\pi\rho} \int_A^{A'} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (v - ah - bz)^2}} S u du, \end{aligned} \right.$$

en vertu de la relation (16).

Dans les relations (20), les intégrations sont effectuées de A à A' le long d'un chemin quelconque décrit dans les premier ou quatrième quadrants, à condition que ce chemin ne passe par aucun pôle de P, Q, R, S. Pour fixer les idées, nous raisonnerons dans ce qui suit en supposant que l'intégration peut être effectuée le long de la lèvre droite de la coupure utilisée au Chapitre V. S'il y avait des pôles le long de cette coupure, il suffirait de les contourner par de petits circuits, et rien ne serait changé aux résultats que nous obtiendrons concernant la nature de la singularité de B(v) sur la frontière des domaines III et IV. Le point essentiel est que P, Q, R, S n'admettent pas de pôle pour $u = \pm \frac{i}{\Omega_2}$. Nous avons montré qu'il en était bien ainsi.

Cela étant, $B_4(v, \rho, z)$ est nul dans les deux domaines III et IV. $B_2(v, \rho, z)$ est nul dans le domaine III. On a donc, dans le domaine III

$$(21) \quad B(v, \rho, z) = B_1(v, \rho, z) + B_3(v, \rho, z)$$

et dans le domaine IV

$$(22) \quad B(v, \rho, z) = B_1(v, \rho, z) + \overline{B_3}(v, \rho, z) + B_2(v, \rho, z).$$

On notera que, pour éviter des confusions, nous employons désormais deux notations distinctes pour $B_3(v, \rho, z)$, qui désigne en effet, comme nous allons voir, deux fonctions analytiques distinctes dans les deux domaines III et IV. On peut noter aussi que, dans l'expression (22), l'intégration $\overline{B_3}(v, \rho, z)$ peut n'être effectuée que de $\frac{-i}{\Omega_2}$ à $\frac{i}{\Omega_2}$. On voit d'abord que $B_1(v, \rho, z)$ est une même fonction holomorphe dans les domaines III et IV.

D'autre part, on peut prolonger analytiquement $B_2(v, \rho, z)$ du domaine IV dans le domaine III en procédant *exactement* comme on a fait pour prolonger B(v, ρ, z) du domaine III dans le domaine I.

Il en résulte que $B_2(v, \rho, z)$ est nul sur le second front conique et que sa dérivée $\frac{\partial B_2}{\partial v}$ a pour valeur

$$(23) \quad - \frac{2}{\sqrt{\rho}} (\rho - h \operatorname{tang} l_1 - z \operatorname{tang} l_2)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial b'} \right)_{a'=b'=0},$$

où $\left(\frac{\partial f}{\partial b'} \right)_{a'=b'=0}$ a la signification très conventionnelle suivante : on dérive f par rapport à b' en considérant a, b, a', u comme des constantes, puis on remplace a' et b' par zéro, enfin et enfin seulement u par $\frac{-i}{\Omega_2}$, a par $\sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2'^2}}$, b par $\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_2'^2}}$.

Il reste à examiner comment se comportent les fonctions $B_3(v, \rho, z)$ et $\overline{B}_3(v, \rho, z)$ sur le deuxième front conique.

Nous définirons dans ce but un nouveau système de coupures (*fig. 26*). Pour l'instant, bornons-nous à définir a' , a , b comme fonctions uniformes grâce aux trois coupures $\left(\frac{-i}{\Omega_1}, \frac{i}{\Omega_1}\right)$, $\left(\frac{i}{\Omega_1}, +i\infty\right)$ $\left(\frac{-i}{\Omega_1}, -i\infty\right)$ ménagées suivant l'axe imaginaire.

Soit v_0, ρ_0, z_0 un système de valeurs réelles appartenant à la frontière des domaines III et IV, c'est-à-dire telles que

$$v_0 - \left(\rho_0 \frac{\sin L_2}{\Omega_2} + z_0 \frac{\cos L_2}{\Omega_2} + \frac{h}{\Omega_1} \cos L_1 \right) = 0, \\ \rho_0 > h \operatorname{tang} L_1 + z_0 \operatorname{tang} L_2.$$

Il est clair qu'on peut toujours définir trois domaines associés entourant les points réels v_0, ρ_0, z_0 , ayant par exemple la forme de trois cercles de rayons non nuls et de centres v_0, ρ_0, z_0 , tels que, en désignant par r_1 et r_2 ($r_2 > r_1$) deux constantes positives, les conditions suivantes se trouvent réalisées :

1° La fonction $R(u)$ n'aura pas de pôles à l'intérieur de deux cercles décrits de $\frac{-i}{\Omega_2}$ et $\frac{i}{\Omega_2}$ comme centres avec r_2 pour rayon. Les points critiques $\pm \frac{i}{\Omega_1}$, $\pm \frac{i}{\Omega_1}$ seront également à l'extérieur de ces deux cercles.

2° Deux des points critiques du radical dénominateur ont respectivement pour affixes $\frac{-i}{\Omega_2}$, $\frac{i}{\Omega_2}$ lorsque $v = v_0, \rho = \rho_0, z = z_0$. Nous désignons ces points par A et A' . Lorsqu'on fait varier v, ρ, z continûment à partir de v_0, ρ_0, z_0 , A et A' se déplacent aussi continûment. Ces deux points demeureront à l'intérieur de deux cercles, décrits de $\frac{-i}{\Omega_2}$ et $\frac{i}{\Omega_2}$ pour centres, avec r_1 pour rayon, pour tout système de valeurs v, ρ, z choisies arbitrairement dans les domaines associés.

3° Les deux autres points critiques du radical dénominateur demeureront à l'extérieur des cercles r_2 pour tout système v, ρ, z appartenant aux domaines associés.

En désignant par U l'affixe de A , on peut poser

$$(24) \quad U + \frac{i}{\Omega_2} = \left[v - \left(\rho \frac{\sin L_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos L_2}{\Omega_2} + \frac{h}{\Omega_1} \cos L_1 \right) \right] F(v, \rho, z).$$

Lorsque les rayons des cercles définissant les trois domaines associés

tendent simultanément vers zéro, le domaine de $F(\nu, \rho, z)$ tend vers zéro dans toutes ses dimensions, et sa limite ponctuelle a pour affixe

$$\frac{-i}{\rho_0 - (h \operatorname{tang} l'_1 + z_0 \operatorname{tang} l'_2)}$$

Nous pouvons donc toujours supposer qu'on a choisi les rayons des trois domaines associés assez petits pour que le domaine correspondant de $F(\nu, \rho, z)$ n'englobe pas l'origine.

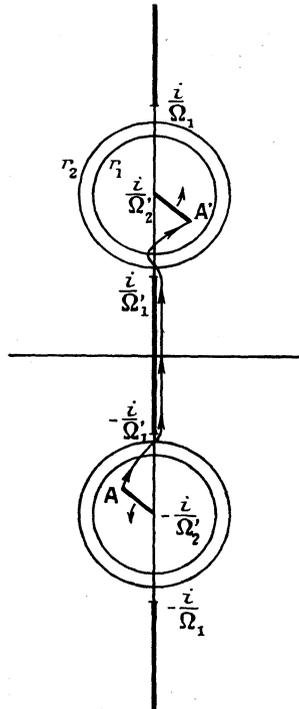


Fig. 26.

Faisons encore une remarque évidente : les domaines associés ainsi définis comportent des valeurs réelles de (ν, ρ, z) appartenant au domaine III et des valeurs réelles de ν, ρ, z appartenant au domaine IV.

Supposons alors que, pour un système quelconque de valeurs ν, ρ, z appartenant aux domaines associés, les points A et A' occupent la position indiquée dans la figure 26. Un chemin d'intégration reliant A à A' est figuré également. Remarquons que ce chemin d'intégration, dans sa

partie située à l'intérieur des cercles r_2 , peut être déformé de manière continue sans modifier la valeur de l'intégrale pourvu que, dans la déformation en question, le parcours d'intégration évite toujours les points critiques $A, A', \pm \frac{i}{\Omega_2}$. Il est commode de considérer les segments $(A, -\frac{i}{\Omega_2})$ et $(A', \frac{i}{\Omega_2})$ comme des coupures. Ces coupures suffisent à assurer l'uniformité de la fonction à intégrer pour toutes les valeurs de u à l'intérieur des deux cercles r_2 .

Envisageons alors les parties réelles et imaginaires des trois nombres complexes v, ρ, z comme six fonctions continues d'un même paramètre et imaginons que le paramètre varie de telle manière que, partis d'un système de valeurs réelles ou complexes de v, ρ, z , nous revenions au point de départ après que les points v, ρ, z auront décrit chacun des circuits fermés compris à l'intérieur des domaines élémentaires, sans que l'équation

$$v - \left(\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + \frac{h}{\Omega_1} \cos l_1 \right) = 0$$

soit satisfaite pour aucune valeur du paramètre.

Dans ces conditions, les points A et A' reviennent à leurs positions initiales, mais deux cas sont à envisager :

1° Si l'argument de

$$v - \left(\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + \frac{h}{\Omega_1} \cos l_1 \right)$$

revient à sa valeur initiale, il résulte de (24) que le circuit décrit par A n'enferme pas le point $\frac{-i}{\Omega_2}$. De même le circuit décrit par A' n'enferme pas le point $\frac{i}{\Omega_2}$. Dans ces conditions, l'intégrale

$$\int_A^{A'} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} a' b' R u \, du$$

reprend sa valeur initiale.

2° Si, au contraire, l'argument de

$$v - \left(\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + \frac{h}{\Omega_1} \cos l_1 \right)$$

a varié de $2n\pi$, n désignant un entier positif ou négatif, les points A et A' ont effectué respectivement n tours complets autour des points $\frac{-i}{\Omega_2}$

et $\frac{i}{\Omega_2}$, dans le sens trigonométrique si n est positif, dans le sens inverse si n est négatif.

Si l'on compare les deux coupures mobiles à deux manivelles qui tournent dans le même sens et le chemin d'intégration à un fil extensible on voit que le fil s'enroule autour des manivelles, de sorte que l'intégrale initiale s'accroît de n fois la somme des deux intégrales prises autour de circuits enveloppant les deux coupures, le circuit qui enveloppe la coupure $(A', \frac{i}{\Omega_2})$ étant parcouru dans le sens direct, le circuit qui enveloppe la coupure $(A, \frac{-i}{\Omega_2})$ étant parcouru dans le sens inverse.

Les intégrales $\int \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} a' b' R u du$ prises autour des coupures représentent toutes deux une fonction analytique holomorphe et uniforme de v, ρ, z . Leur somme que nous représenterons par

$$2\pi i J(v, \rho, z)$$

est imaginaire pure quand v, ρ, z sont réels.

Or, la fonction

$$(25) \quad J(v, \rho, z) \text{ Log} \left[v - \left(\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + \frac{h}{\Omega_1} \cos l_1 \right) \right]$$

est également une fonction multiforme dont les déterminations diverses se permutent suivant la même règle que celles de l'intégrale

$$\int_A^{A'} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} a' b' R u du.$$

La fonction

$$(26) \quad K(v, \rho, z) = \int_A^{A'} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} a' b' R u du \\ - J(v, \rho, z) \text{ Log} \left[v - \left(\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + h \frac{\cos l_1}{\Omega_1} \right) \right]$$

est donc une fonction uniforme, le logarithme désignant une détermination quelconque.

On a de plus

$$(27) \quad J(v, \rho, z) = \frac{-2}{\pi \Omega_2^2} \sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}} \left(\frac{\partial^2 j}{\partial a' \partial b'} \right)_{a'=b'=0}^{u=-\frac{i}{\Omega_2}} (\rho - h \tan l_1 - z \tan l_2)^{-\frac{3}{2}} \\ \times \left[v - \left(\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + h \frac{\cos l_1}{\Omega_1} \right) \right] [1 + \varepsilon(v, \rho, z)].$$



Dans cette expression $\frac{\partial^2 f}{\partial a' \partial b'}$ $a'=b'=0; u=-\frac{i}{\Omega_2}$ a la signification conventionnelle suivante : on prend la dérivée seconde mixte par rapport à a' et b' considérées comme des variables indépendantes, puis on fait dans cette expression $a'=b'=0$; enfin, et enfin seulement, on remplace u par $\frac{i}{\Omega_2}$, a par $\sqrt{\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2}}$, b par $\sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_2'^2}}$.

Le radical $(\rho - h \operatorname{tang} l_1 - z \operatorname{tang} l_2)^{-\frac{3}{2}}$ est défini par la condition qu'il soit positif quand ρ et z sont réels et $\varepsilon(\nu, \rho, z)$ est une fonction uniforme et holomorphe des trois variables qui tend vers zéro en même temps que le facteur

$$\nu - \left(\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + \frac{h}{\Omega_1} \cos l_1 \right).$$

Lorsque ν, ρ, z tendent vers des valeurs qui annulent ce facteur, la fonction (25) tend vers zéro. Comme l'intégrale

$$\int_A^A \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} a' b' R u du$$

tend vers une limite finie, la fonction (26) est holomorphe.

Ainsi toute intégrale

$$\int_A^A \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} a' b' R u du$$

est la somme d'une fonction holomorphe et du produit d'une autre fonction holomorphe par le facteur

$$(28) \quad \left[\nu - \left(\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + \frac{h}{\Omega_1} \cos l_1 \right) \right] \\ \times \operatorname{Log} \left[\nu - \left(\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + \frac{h}{\Omega_1} \cos l_1 \right) \right].$$

Revenons désormais aux variables réelles. Soit un système ν, ρ, z du domaine III et posons

$$(29) \quad B_2(\nu, \rho, z) = K_1(\nu, \rho, z) + J(\nu, \rho, z) \operatorname{Log} \left[\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + h \frac{\cos l_1}{\Omega_1} - \nu \right],$$

la détermination du logarithme étant expressément réelle, K_1 et J étant réels (1).

(1) $K_1(\nu, \rho, z)$, diffère de $K(\nu, \rho, z)$ de $\pm 2n\pi i J(\nu, \rho, z)$, n étant un entier.

$B_3(v, \rho, z)$ est représentée par une intégrale que nous suivons par continuité pour des valeurs complexes de v, ρ, z en faisant par exemple tourner les manivelles d'un angle égal à π dans le sens direct. Nous aboutissons ainsi à un système de valeurs réelles v_1, ρ_1, z_1 du domaine IV mais notre intégrale n'est pas égale à ce moment à $\bar{B}_3(v_1, \rho_1, z_1)$. Dans notre intégrale en effet, le parcours (A, A') passe à gauche de la manivelle $\left(-\frac{i}{\Omega_2}, A\right)$ alors que pour exprimer $\bar{B}_3(v, \rho, z)$, l'intégration doit être effectuée à droite. Pour obtenir $\bar{B}_3(v_1, \rho_1, z_1)$ à partir de l'intégrale obtenue, il faut donc compléter le parcours d'intégration par un circuit effectué autour de la coupure inférieure dans le sens direct, c'est-à-dire ajouter à l'intégrale la quantité

$$\pi i J(v_1, \rho_1, z_1).$$

On aura donc

$$(30) \quad \bar{B}_3(v, \rho, z) = K_1(v, \rho, z) + J(v, \rho, z) \text{Log} \left[v - \left(\rho \frac{\sin l_2}{\Omega_2} + z \frac{\cos l_2}{\Omega_2} + h \frac{\cos l_1}{\Omega_1} \right) \right],$$

où la détermination du logarithme est encore réelle.

Ainsi, au passage du second front conique, la fonction $B(v, \rho_0, z_0)$ de v , où ρ_0, z_0 sont des constantes, demeure finie et continue, mais sa dérivée y est infinie.

42. Étude de $B(v, \rho, z)$ à la frontière des domaines II et III ou des domaines II et IV. — Le raisonnement est identique lorsqu'il s'agit de la frontière (II, III) ou de la frontière (II, IV).

Les coupures suivantes assureront l'uniformité des radicaux a, b, a', b' (*fig. 27*) :

- 1° Coupure suivant le segment $\left(-\frac{i}{\Omega_2}, \frac{i}{\Omega_2}\right)$ de l'axe imaginaire;
- 2° Coupure suivant la demi-droite $\left(\frac{i}{\Omega_1}, i\infty\right)$;
- 3° Coupure suivant la demi-droite $\left(-\frac{i}{\Omega_1}, -i\infty\right)$.

Soit v_0, ρ_0, z_0 un système de valeurs réelles appartenant à la frontière (II, IV)

$$v_0 = \frac{(R_1)_0}{\Omega_1} + \frac{(R_2)_0}{\Omega_2}.$$

Pour ces valeurs des variables, les quatre points critiques du radical dénominateur sont deux à deux confondus en A_0, A'_0 sur l'axe imagi-

naire. Soient u_0, u'_0 leurs affixes. On peut toujours déterminer deux cercles de rayons non nuls r_1, r_2 ($r_2 > r_1$) ayant A_0 pour centre, deux cercles de rayons non nuls r_1, r_2 ayant A'_0 pour centre, trois domaines associés constitués par trois cercles de rayons non nuls entourant les points réels ν_0, ρ_0, z_0 satisfaisant aux conditions suivantes :

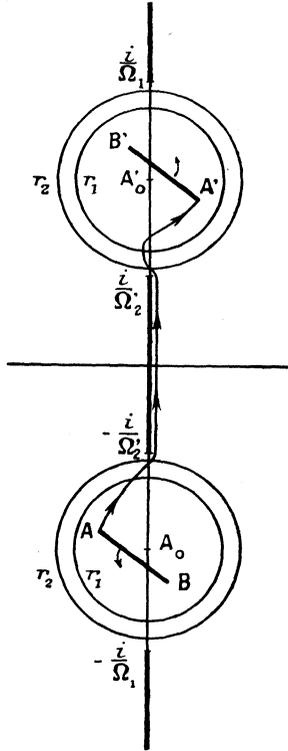


Fig. 27.

1° Aucun pôle de $f(u)$ ni aucun point critique $(\pm \frac{i}{\Omega_k})$ n'est à l'intérieur des deux cercles r_2 .

2° Les quatre points critiques A, B, A', B' du radical dénominateur demeurent deux par deux à l'intérieur des cercles r_1 pour toutes valeurs de ν, ρ, z appartenant aux domaines associés. A et B désigneront les deux points critiques situés dans le voisinage de A_0 ; A' et B' les deux points critiques situés dans le voisinage de A'_0 .

En désignant par U et U^* les affixes de A et B , on peut écrire

$$(31) \quad (U - U^*)^2 = \left[v - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right] L(v, \rho, z).$$

Aux domaines associés de v, ρ, z correspond un domaine de la fonction $L(v, \rho, z)$ ⁽¹⁾ qui tend vers zéro dans toutes ses dimensions quand les rayons des cercles associés tendent simultanément vers zéro. La limite ponctuelle du domaine de $L(v, \rho, z)$ est d'ailleurs le point d'affixe

$$\frac{8}{\sqrt{\frac{h}{a_0^3 \Omega_1^2} + \frac{z_0}{b_0^3 \Omega_2^2}}},$$

a_0 et b_0 désignant les valeurs de a et b pour $u = u_0$.

On peut donc toujours supposer que les trois domaines associés ont été en outre choisis assez petits pour que le domaine de $L(v, \rho, z)$ n'englobe pas l'origine.

Considérons alors la fonction

$$(32) \quad S(v, \rho, z) = \frac{2i}{\pi\rho} \int_A^{A'} \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} f(u) u \, du,$$

où le parcours d'intégration relie l'un quelconque des points critiques voisins de A_0 et que nous appelons A à l'un quelconque des points critiques voisins de A'_0 et que nous appelons A' . Le parcours d'intégration peut être déformé à volonté à l'intérieur des cercles r_2 , sans changer la valeur de S , pourvu qu'il ne vienne jamais rencontrer, au cours de sa déformation A, B, A' ou B' . Il est commode de considérer à ce point de vue les segments AB et $A'B'$ comme deux coupures suffisant à assurer l'uniformité de la fonction sous le signe somme à l'intérieur des deux cercles r_2 .

$S(v, \rho, z)$ n'est pas une fonction uniforme, Considérons les parties réelles et imaginaires de v, ρ, z comme des fonctions continues d'un même paramètre et imaginons que, lorsque ce paramètre varie d'une manière continue, les images de v, ρ, z , après avoir décrit chacune une courbe à l'intérieur des domaines associés, reviennent à leurs positions initiales sans que la quantité $v - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right)$ se soit annulée, pour aucune valeur prise par le paramètre. Si l'argument de $v - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right)$ est revenu à sa valeur initiale, la valeur de S n'a pas varié. Si, par

⁽¹⁾ R_1 et R_2 n'ont plus, lorsque ρ et z sont complexes, la signification géométrique que nous leur avons attribuée précédemment. Ils désignent ici les fonctions de ρ et z qui les définissent respectivement quand ρ et z sont réels.

contre, l'argument de $v - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right)$ a varié de $2n\pi$ (n entier), les deux « manivelles » qui figurent les coupures AB, A'B' tournent de $n\pi$ dans le sens direct ⁽¹⁾ de sorte que S augmente de

$$(33) \quad \frac{in}{\pi\rho} \int \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (v - ah - bz)^2}} f(u)u \, du,$$

l'intégrale (33) étant effectuée autour de la coupure A'B' dans le sens direct, autour de la coupure AB dans le sens inverse.

Dans l'expression (33) nous poserons

$$\frac{i}{\pi\rho} \int \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (v - ah - bz)^2}} f(u)u \, du = 2\pi i I(v, \rho, z),$$

où $I(v, \rho, z)$ désigne une fonction holomorphe, réelle quand les variables sont réelles.

Or la fonction

$$I(v, \rho, z) \operatorname{Log} \left[v - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right]$$

est aussi une fonction multiforme dont les déterminations diverses se permutent suivant la même règle que celles de $S(v, \rho, z)$.

La fonction

$$(34) \quad N(v, \rho, z) = S(v, \rho, z) - I(v, \rho, z) \operatorname{Log} \left[v - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right]$$

est donc une fonction uniforme.

On a d'ailleurs

$$(35) \quad I(v, \rho, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\rho}} \frac{\frac{\sin I_1}{\Omega_1} \frac{\sin I_2}{\Omega_2}}{\sqrt{\left(\frac{h\Omega_1}{\cos^3 I_1} + \frac{z_0\Omega_2}{\cos^3 I_2} \right) \left(\frac{\sin I_1}{\Omega_1} + \frac{\sin I_2}{\Omega_2} \right)}} \times \mathcal{J} \left[f \left(-i \frac{\sin I_1}{\Omega_1} \right) \right] [1 + \varepsilon(v, \rho, z)],$$

en désignant par I_1, I_2 les valeurs de ces angles pour $\rho = \rho_0, z = z_0$; par $\varepsilon(v, \rho, z)$ une fonction tendant uniformément vers zéro lorsque les v, ρ, z tendent respectivement vers v_0, ρ_0, z_0 .

$N(v, \rho, z)$ est une fonction analytique uniforme qui ne pourrait éven-

⁽¹⁾ En général, au cours de la rotation, la longueur des manivelles varie ainsi que l'axe de rotation.

tuellement présenter une singularité que pour $\nu = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$. Or, lorsqu'on laisse par exemple ρ et z fixes et qu'on fait tendre ν vers $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$, on constate directement que $S(\nu, \rho, z)$ devient infinie à la manière de $\text{Log} \left[\nu - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right]$. Donc $N(\nu, \rho, z)$ est une fonction holomorphe.

Revenons désormais à des variables essentiellement réelles.

Supposons $\nu < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$. Les points A, B, A', B' sont sur l'axe imaginaire et nous les désignons par ordre, de haut en bas : B', A', A, B. Si l'intégrale (32) est effectuée directement (sans lacets), la fonction $S(\nu, \rho, z)$ coïncide alors avec notre définition de $B(\nu, \rho, z)$. D'où

$$(36) \quad [B(\nu, \rho, z)]_{\nu < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}} = N_1(\nu, \rho, z) + I(\nu, \rho, z) \text{Log} \left[\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} - \nu \right],$$

en adoptant la détermination du logarithme qui est réelle. N_1 et I sont des fonctions holomorphes réelles.

Faisons varier alors de π l'argument de $\nu - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right)$, donc aussi celui de $\left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} - \nu \right)$. Les « manivelles » tournent de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct, A venant à gauche, A' à droite.

Les définitions de $B(\nu, \rho, z)$ et $S(\nu, \rho, z)$ ne coïncident plus. Pour obtenir $B(\nu, \rho, z)$ il faut soustraire de $S(\nu, \rho, z)$ ce qui correspond à l'intégration effectuée de A à B au-dessus de la coupure, c'est-à-dire la moitié de ce qui correspond à une intégration effectuée autour de AB dans le sens inverse. La quantité à soustraire est un nombre complexe dont nous désignerons la partie réelle par $R(\nu, \rho, z)$ (1) la partie imaginaire étant $\pi i I(\nu, \rho, z)$ de sorte que, pour des valeurs réelles de ν, ρ, z et lorsque

$$\nu > \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2},$$

l'on a

$$(37) \quad [B(\nu, \rho, z)]_{\nu > \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}} = N_1(\nu, \rho, z) - R(\nu, \rho, z) + I(\nu, \rho, z) \text{Log} \left[\nu - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right],$$

le logarithme désignant encore la détermination réelle.

(1) Puisque l'intégrale prise autour de la coupure AB est une fonction holomorphe et puisque $I(\nu, \rho, z)$ est aussi une fonction holomorphe, il en est de même de $R(\nu, \rho, z)$.

On a d'ailleurs

$$(38) \quad R(\nu, \rho, z) = \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{\rho}} \frac{\sin I_1}{\Omega_1} \frac{\sin I_2}{\Omega_2} \\ \times \mathcal{R} \left[f \left(-i \frac{\sin I_1}{\Omega_1} \right) \right] \frac{1 + \varepsilon'(\nu, \rho, z)}{\sqrt{\left(\frac{h\Omega_1}{\cos^3 I_1} + \frac{z_0\Omega_2}{\cos^3 I_2} \right) \left(\frac{\sin I_1}{\Omega_1} + \frac{\sin I_2}{\Omega_2} \right)}}$$

où I_1, I_2 correspondent aux valeurs ρ_0, z_0 et où $\varepsilon'(\nu, \rho, z)$ tend vers zéro lorsque ν, ρ, z tendent respectivement vers ν_0, ρ_0, z_0 .

Les formules (36), (37), (38) constituent une généralisation de la formule (14).

Remarque. — Nous laisserons de côté, parce que c'est inutile, l'étude détaillée de $B(\nu, \rho, z)$ au voisinage des lignes de raccordement du front normal et des deux fronts coniques.

43. Expression de $B(\nu, \rho, z)$ à l'aide d'intégrales elliptiques ou hyperelliptiques. — Nous partirons de l'expression générale de $B(\nu, \rho, z)$

$$(39) \quad B(\nu, \rho, z) = \frac{2i}{\pi\rho} \int_{\Lambda}^{\Lambda'} \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} (a'P + b'Q + a'b'R + S) u du.$$

On a

$$b^2 - a^2 = \frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} = 4M^2,$$

avec

$$2M = \sqrt{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}} \quad (M > 0)$$

Posons

$$b - a = 2M\tau,$$

d'où

$$b + a = \frac{2M}{\tau}$$

et

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} b = M \frac{1 + \tau^2}{\tau}, \quad a = M \frac{1 - \tau^2}{\tau}, \\ u^2 = \frac{M^2(\tau^2 + 1)^2 - \frac{\tau^2}{\Omega_2^2}}{\tau^2}, \\ a' = \frac{1}{\tau} \sqrt{M^2(\tau^2 + 1)^2 - \frac{\tau^2}{\Omega_2^2} + \frac{\tau^2}{\Omega_1^2}}, \\ b' = \frac{1}{\tau} \sqrt{M^2(\tau^2 + 1)^2 - \frac{\tau^2}{\Omega_2^2} + \frac{\tau^2}{\Omega_2^2}}. \end{array} \right.$$

Comme P, Q, R, S ne dépendent que de u^2 , a , b l'on voit que $B(\nu)$ se trouve ramenée à des intégrales elliptiques et hyperelliptiques, le radical sous le signe d'intégration portant sur un polynôme du douzième degré au plus.

44. Cas particulier où le second milieu est le vide. — Il est clair, dans ce cas, que $B(\nu, \rho, z)$ peut s'exprimer à l'aide d'intégrales elliptiques seulement, puisque $f(u)$ s'exprime uniquement à l'aide de u^2 , a , b . Il n'existe pas de domaines III et IV. Dans le domaine I, $B(\nu, \rho, z)$ est identiquement nulle. Dans le domaine II, on effectuera l'intégration le long des circuits (R), (P), (P') pour lesquels le calcul a déjà été fait (Chap. V) et du circuit (E). Par le changement de variables (u, τ) le circuit d'intégration en τ est le cercle de rayon unité ayant l'origine pour centre. Le polynôme en τ situé sous le radical a pour expression

$$(41) \quad P_0(\tau) = \rho^2 \left[M^2(\tau^2 + 1)^2 - \frac{\tau^2}{\Omega_2^2} \right] + [\nu\tau - hM(1 - \tau^2) - zM(1 + \tau^2)]^2.$$

Cette réduction à des intégrales elliptiques n'offre qu'un intérêt théorique. Nous nous bornerons à la signaler au passage.

45. Existence d'une primitive de $B(\nu)$ ayant les propriétés requises pour l'application du théorème fondamental. — Lorsque le phénomène ne comporte pas d'ondes coniques ($\Omega_1 > \Omega'_1$), le seul point de discontinuité $\nu_1 = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ satisfait sans plus aux conditions requises dans la première démonstration du théorème fondamental. Lorsque le phénomène comporte une ou deux ondes coniques ($\Omega'_1 > \Omega_1$), il convient d'avoir recours à l'artifice de la primitive.

On peut étudier directement la continuité et la dérivabilité des primitives $B^{\square}(\nu)$, puisque nous avons étudié au préalable, dans un tout autre but d'ailleurs, la nature des singularités de $B(\nu)$ sur les surfaces de front d'onde. Cette méthode, outre qu'elle est peu élégante, exigerait au surplus l'étude assez délicate, que nous n'avons pas faite, des singularités de $B(\nu)$ sur les cercles de raccordement du front normal et des fronts coniques. Nous procéderons donc autrement.

Nous partirons de la relation (21) du Chapitre V

$$B(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \nu < \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}, \\ \left\{ \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [u(\nu, \omega)]^2 f[u(\nu, \omega)] \frac{\partial}{\partial \nu} [u(\nu, \omega)] \cos \omega \, d\omega \right\} & \text{pour } \nu > \frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}, \end{cases}$$

d'où

$$(42) \quad B^{\square}(v) = \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left\{ \int_{\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}}^v dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} [u(v, \omega)]^2 f[u(v, \omega)] \frac{\partial}{\partial v} [u(v, \omega)] \cos \omega \, d\omega \right\}.$$

Nous avons déjà démontré que, dans cette expression, l'ordre des intégrations était indifférent. Il vient donc

$$(43) \quad B^{\square}(v) = \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega \, d\omega \int_{\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2}}^v [u(v, \omega)]^2 f[u(v, \omega)] \frac{\partial}{\partial v} [u(v, \omega)] \, dv \right\}$$

ou, en prenant u , définie en fonction de v (pour ω constant) par la relation (5) du Chapitre V, comme nouvelle variable d'intégration

$$(44) \quad B^{\square}(v) = \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega \, d\omega \int_0^{u(v, \omega)} u^2 f(u) \, du \right\}.$$

La relation (44) fait d'abord apparaître que $B^{\square}(v)$ est continue quels que soient v , ρ , z . Les trois dérivées partielles du premier ordre de $B^{\square}(v)$ s'écrivent à partir de (44) sous une forme similaire

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial B^{\square}(v)}{\partial v} &= B(v) = \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega \left[u^2 f(u) \frac{1}{i\rho \cos \omega + u \left(\frac{h}{a} + \frac{z}{b} \right)} \right]_{u=u(v, \omega)} d\omega \right\}, \\ \frac{\partial B^{\square}(v)}{\partial \rho} &= \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega \left[u^2 f(u) \frac{(-iu\rho \cos \omega)}{i\rho \cos \omega + u \left(\frac{h}{a} + \frac{z}{b} \right)} \right]_{u=u(v, \omega)} d\omega \right\}, \\ \frac{\partial B^{\square}(v)}{\partial z} &= \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega \left[u^2 f(u) \frac{b}{i\rho \cos \omega + u \left(\frac{h}{a} + \frac{z}{b} \right)} \right]_{u=u(v, \omega)} d\omega \right\}. \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières expressions (45) ne diffèrent de la première que par la présence sous le signe somme d'un facteur supplémentaire borné b ou $(-iu\rho \cos \omega)$. Les dérivées $\frac{\partial B^{\square}(v)}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial B^{\square}(v)}{\partial z}$ ont donc mêmes caractères que la fonction B , c'est-à-dire sont continues et indéfiniment dérivables dans les mêmes domaines I, II, III, IV et présentent des singularités du même type que celles de $B(v)$ sur le front normal et les deux fronts coniques.

Montrons que $B^{\square\text{III}}(\nu)$, évidemment continue, admet des dérivées premières continues, On a

$$(46) \quad B^{\square\text{III}}(\nu) = \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left\{ \int_0^\nu d\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega d\omega \int_0^{u(\nu, \omega)} u^2 f(u) du \right\}.$$

Tout d'abord

$$\frac{\partial B^{\square\text{III}}(\nu)}{\partial \nu} = B^{\square\text{III}}(\nu)$$

est continue. Envisageons le cas de $\frac{\partial B^{\square\text{III}}(\nu)}{\partial \rho}$, par exemple

$$(47) \quad \frac{\partial B^{\square\text{III}}(\nu)}{\partial \rho} = \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left\{ \int_0^\nu d\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega \left[u^2 f(u) \frac{(-iu\rho \cos \omega)}{i\rho \cos \omega + u \left(\frac{h}{a} + \frac{z}{b} \right)} \right]_{u=u(\nu, \omega)} d\omega \right\}$$

$$= \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left\{ \int_0^\nu d\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega [u^2 f(u) (-iu\rho \cos \omega)]_{u=u(\nu, \omega)} \frac{\partial}{\partial \nu} [u, \omega] d\omega \right\}$$

ou, en permutant l'ordre des intégrations, comme on a fait plus haut et pour les mêmes raisons,

$$(48) \quad \frac{\partial B^{\square\text{III}}(\nu)}{\partial \rho} = \frac{4}{\pi} \mathcal{J} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega d\omega \int_0^{u(\nu, \omega)} u^2 f(u) (-iu\rho \cos \omega) du \right\}.$$

Ce procédé, appliqué de proche en proche, montre évidemment que $B^{\square\text{N}}(\nu)$ et toutes ses dérivées partielles d'ordre 1, 2, 3, ..., N - 1 sont des fonctions continues de ρ, z, ν quels que soient ρ, z ou ν .



CHAPITRE VII.

RÉSOLUTION DES AUTRES ÉQUATIONS INTÉGRALES. DISPOSITION D'ENSEMBLE
DES DIVERS FRONTS D'ONDE. JUSTIFICATION DÉFINITIVE
DE LA SOLUTION. IMPORTANCE DES FRONTS CONIQUES.

46. **Équation intégrale :**

$$(1) \quad \frac{Y'}{p} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} \mathbf{B}'(\nu) d\nu.$$

Cette équation s'écrit

$$(2) \quad \frac{2}{p} \int_0^{+\infty} u du \left[\frac{d}{d\rho} J_0(pu\rho) \right] g(u) e^{-p(ah-b'z)} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} \mathbf{B}'(\nu) d\nu$$

en posant

$$(3) \quad g(u) = \frac{C}{\Omega^2} \frac{\alpha' b - \left(u^2 + \frac{C}{\Omega^2} + \frac{C'}{\Omega'^2} \right)}{D}.$$

Elle est du même type que celle que nous avons résolue au Chapitre V et que nous récrivons ci-dessous

$$(4) \quad \frac{2}{p} \int_0^{+\infty} u du \left[\frac{d}{d\rho} J_0(pu\rho) \right] f(u) e^{-p(ah+bz)} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} \mathbf{B}(\nu) d\nu.$$

Les seules différences sont les suivantes :

1° $f(u)$ est remplacé par $g(u)$; $g(u)$ est comme $f(u)$ une fonction rationnelle de u^2 et des radicaux.

2° z est remplacé par $-z$, mais il faut noter que dans (4), z est positif, alors que dans (2) il est négatif.

3° Enfin b est remplacé par b' dans l'exposant de l'exponentielle.

La première différence laisse absolument intacts les raisonnements du Chapitre V, la seconde traduit simplement le fait que nos considérations s'appliquent actuellement au second milieu et non plus au premier.

La troisième n'apporte aucune modification formelle et nous pouvons écrire immédiatement. les coupures et les définitions des radicaux

demeurant par ailleurs inchangées

$$(5) \quad B'(\nu) = \frac{2i}{\pi\rho} \int_A^{A'} \frac{\nu - ah + b'z}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah + b'z)^2}} g(u) du,$$

en désignant par A l'image de l'unique racine complexe de l'équation

$$(6) \quad iu\rho + ah - b'z - \nu = 0,$$

qui appartient au quatrième quadrant ou, quand l'équation (6) admet deux racines sur la partie négative de l'axe imaginaire, l'image de celle de ces deux racines qui a le plus petit module. A' est le symétrique de A par rapport à l'axe réel.

Toutefois, deux cas sont à envisager :

Premier cas. — $\Omega'_2 < \Omega_1$ (*fig. 28*).

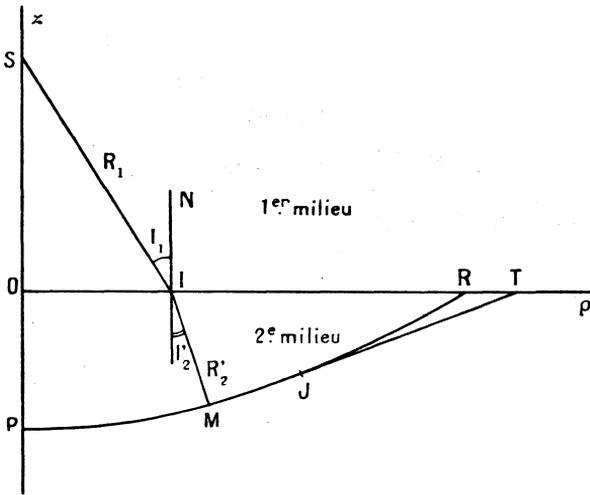


Fig. 28.

Si nous considérons le « rayon » réfracté SIM tel que

$$(7) \quad \frac{\sin I_1}{\Omega_1} = \frac{\sin I'_2}{\Omega'_2},$$

le front

$$\nu = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R'_2}{\Omega'_2}$$

est, comme précédemment, une surface parallèle à l'une des nappes d'un

certain hyperboloïde de révolution et il progresse avec la vitesse normale Ω'_2 . Il y a ou il n'y a pas de front conique JT suivant que Ω'_1 est supérieur ou inférieur à Ω_1 , mais il ne peut y avoir qu'un front conique.

Deuxième cas. — $\Omega'_2 > \Omega_1$.

L'angle de réfraction I'_2 est alors supérieur à l'angle d'incidence I_1 , (fig. 29).

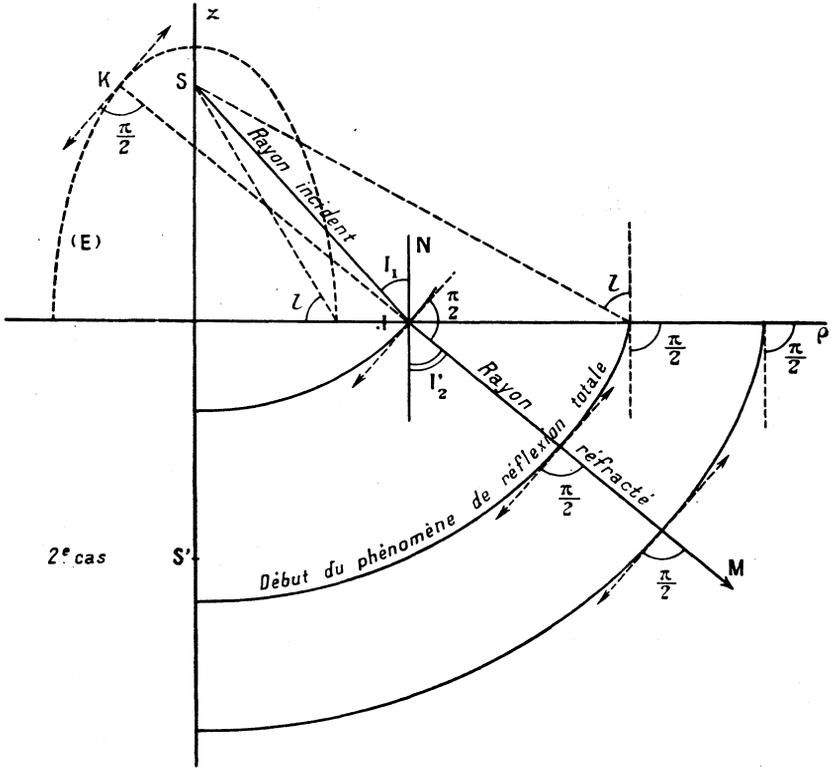


Fig. 29. — Positions du front de l'onde réfractée de distorsion à trois instants différents.

Le front

$$v = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R'_2}{\Omega'_2}$$

est une surface parallèle à un certain ellipsoïde de révolution E admettant pour foyers S et son symétrique S' par rapport à la surface de séparation, passant par les points de la surface de séparation où l'angle I_1

est égal au complément de l'angle limite Ω_1, Ω'_2 de réflexion totale

$$\sin(\Omega_1, \Omega'_2) = \frac{\Omega_1}{\Omega'_2}.$$

Les rayons réfractés sont les normales à l'ellipsoïde E, mais les pieds de ces normales sont situés dans le premier milieu, non dans le second (Exemple : K pied du rayon KIM). Il en résulte que le front d'onde n'a pas la forme générale de l'ellipsoïde E avec lequel il ne coïncide jamais (1). Il a toujours la forme d'une surface de révolution aplatie (et non pas allongée comme l'ellipsoïde E). Il se rapproche de plus en plus de la forme sphérique lorsque t augmente.

La normale au front d'onde n'étant autre que le rayon réfracté, on voit que l'angle sous lequel ce front coupe la surface de séparation des milieux croît en même temps que t depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, valeur qui est atteinte dès que le rayon incident le plus oblique arrive à subir la réflexion totale, c'est-à-dire présente un angle I d'incidence égal à Ω_1, Ω'_2 . Lorsque t augmente à partir de cet instant critique le front reste normal à la surface de séparation et, sur cette surface de séparation, le front progresse avec une vitesse normale uniforme égale à Ω'_2 .

De plus, il convient de remarquer que jusqu'à cet instant critique le front d'onde

$$v = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R'_2}{\Omega'_2}$$

et le front de l'onde incidente étaient coupés par la surface de séparation suivant le même cercle. Bien que la vitesse normale du front de l'onde réfractée soit supérieure à la vitesse normale du front de l'onde incidente, les traces de ces deux fronts sur la surface de séparation peuvent rester « accrochées » l'une à l'autre, parce que l'angle I'_2 de l'onde réfractée avec la surface croît plus vite que l'angle I_1 de l'onde incidente avec cette même surface.

A partir du moment où I'_2 a atteint $\frac{\pi}{2}$, la trace du front de l'onde incidente ne peut plus suivre celle du front de l'onde réfractée, il y a « décrochage » des deux fronts.

Tel est, comme cela sera mis plus clairement en évidence par la suite, le mécanisme de la formation des ondes coniques, qui apparaît ici étroitement lié au phénomène de la réflexion totale, pour ne pas dire que

(1) A vrai dire, la coïncidence existe « virtuellement » à l'instant zéro, ce qui implique des R'_2 négatifs et exclut une signification physique. La même remarque s'applique d'ailleurs au cas de l'hyperboloïde.

le phénomène de réflexion totale, envisagé au point de vue le plus général, n'est autre chose que le phénomène de formation des ondes coniques.

Notons pour terminer que, dans ce deuxième cas, il y a toujours une et une seule onde conique réfractée de distorsion.

47. Équation intégrale :

$$(8) \quad \frac{X'_p}{P} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A'(\nu) d\nu.$$

Cette équation s'écrit

$$(9) \quad 2 \int_0^{+\infty} u du [J_0(pu\rho)] h(u) e^{-\nu(ah-a'z)} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A'(\nu) d\nu$$

en posant

$$(10) \quad h(u) = \frac{C}{\Omega_3^2} \frac{b\left(u^2 + \frac{C'}{\Omega_3^2}\right) - b'\left(u^2 + \frac{C}{\Omega_3^2}\right)}{1(u)}.$$

Comparons les équations (9) et (4).

Ici encore, on trouve z changé en $-z$, mais z est actuellement négatif et non positif. De même $f(u)$ est changé en une autre fonction $h(u)$, rationnelle également par rapport à u^2 et aux radicaux.

La modification la plus importante provient de ce que

$$(11) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [J_0(pu\rho)] = -\frac{i u}{\pi} \int_0^\pi e^{-i x \cos \omega} \cos \omega d\omega$$

se trouve changé en

$$(12) \quad J_0(pu\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-i x \cos \omega} d\omega.$$

On voit alors facilement que la suite de transformations effectuées au Chapitre V subsiste en tenant compte des modifications signalées plus haut et à la condition de supprimer sous le signe d'intégration le facteur $-iu \cos \omega$.

En vertu de l'équation (5) du Chapitre V, on avait d'ailleurs

$$(13) \quad -iu \cos \omega = \frac{1}{\rho} (ah + bz - c).$$

Il vient donc, dans le cas actuel,

$$(14) \quad A'(\nu) = -\frac{2i}{\pi} \int_A^{A'} \frac{1}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (c - ah + a'z)^2}} h(u) u du,$$

les différents radicaux et les extrémités A, A' étant toujours définis de façon similaire.

On notera la disparition du facteur $\frac{1}{\rho}$.

Dans le cas actuel, il ne peut exister de front conique. Si $\Omega'_1 > \Omega_1$, le front d'onde est du type elliptique. Il est du type hyperbolique si $\Omega'_1 < \Omega_1$.

48. Équation intégrale :

$$(15) \quad \frac{(X_3)_p}{P} = \int_0^{+\infty} e^{-\rho v} A_3(v) dv.$$

$(X_3)_p$ désigne le troisième terme dans l'expression (27) de X_p (Chapitre IV). Cette équation s'écrit

$$(16) \quad 2 \int_0^{+\infty} u du [J_0(\rho u \rho)] j(u) e^{-\rho a(z+h)} = \int_0^{+\infty} e^{-\rho v} A_3(v) dv,$$

en posant

$$(17) \quad j(u) = \frac{u^2 a' b b' + b' \frac{CC'}{\Omega_1^2 \Omega_2'^2} - b \left(u^2 + \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right)^2}{D(u)}.$$

Elle est du même type que la précédente, z étant ici positif.

Une grosse simplification apparaît par rapport aux cas précédents, dans le fait qu'un seul radical, a , figure dans l'exposant de l'exponentielle. D'où

$$(18) \quad A_3(v) = -\frac{2i}{\pi} \int_A^{A'} \frac{1}{\sqrt{u^2 \rho^2 + [v - a(h+z)]^2}} j(u) u du.$$

Le front d'onde

$$v = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_1}$$

devient ici une sphère de centre S' et de rayon $r' = \Omega_1 v$, r' désignant la distance S'M.

En effet, la loi de réflexion (ou de réfraction) se réduit ici à

$$(19) \quad I_1 = I_2 = I \quad (\text{fig. 30}).$$

Si Ω_1 est la plus grande des quatre vitesses, il n'y a pas d'onde conique. Si Ω'_1 est supérieur à Ω_1 et Ω'_2 inférieur à Ω_1 , il y a une, et une seule onde conique. Il y en a deux si Ω'_1 et Ω'_2 sont supérieurs à Ω_1 .

Les affixes U, U' de A et A' sont les racines d'une équation du second degré seulement.

$$(20) \quad \begin{cases} U = \frac{1}{\Omega_1} (\sqrt{\tau^2 - 1} \cos I - i\tau \sin I), \\ U' = \frac{1}{\Omega_1} (\sqrt{\tau^2 - 1} \cos I + i\tau \sin I), \end{cases}$$

où

$$\tau = \frac{\Omega_1 v}{r'}.$$

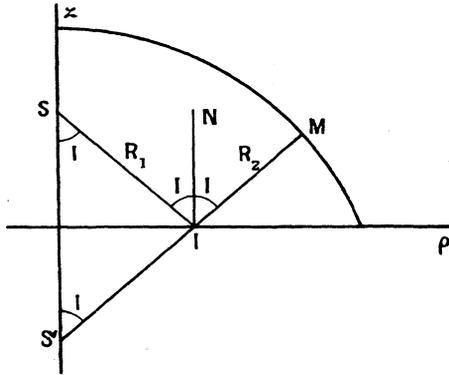


Fig. 30.

49. Équation intégrale :

$$(21) \quad \frac{(X_2)_p}{p} = \int_0^{+\infty} e^{-pv} A_2(v) dv.$$

$(X_2)_p$ désigne le deuxième terme dans l'expression (27) de X_p (Chapitre IV).

Cette équation se ramène à la précédente en posant

$$(22) \quad j(u) = -\frac{1}{2a},$$

$A_2(v)$ est nul pour $\tau < 1$, c'est-à-dire pour

$$v < \frac{r'}{\Omega_1}.$$

Pour

$$v > \frac{r'}{\Omega_1},$$

il vient

$$(23) \quad A_2(\nu) = \frac{i}{\pi} \int_{\frac{1}{\Omega_1}(\sqrt{\tau^2-1} \cos I + i\tau \sin I)}^{\frac{1}{\Omega_1}(\sqrt{\tau^2-1} \cos I - i\tau \sin I)} \frac{1}{\sqrt{u^2 \rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2}} \frac{1}{a} u du$$

ou, en prenant a comme nouvelle variable d'intégration

$$(24) \quad [A_2(\nu)]_{\nu > \frac{r'}{\Omega_1}} = \frac{i}{\pi r'} \int_{a(U)}^{a(U')} \frac{da}{\sqrt{a^2 - 2a \frac{\tau \cos I}{\Omega_1} + \frac{\tau^2 - \sin^2 I}{\Omega_1^2}}},$$

le radical situé au dénominateur désignant la racine arithmétique lorsque a est réel.

Comme les racines du trinôme en a sont précisément $a(U)$, $a(U')$ il vient

$$(25) \quad [A_2(\nu)]_{\nu > \frac{r'}{\Omega_1}} = \frac{i}{\pi r'} \int_{a(U)}^{a(U')} \frac{da}{\sqrt{[a - a(U)][a - a(U')]} } = -\frac{1}{r'}.$$

Nous retrouvons donc par la théorie générale ce que nous pouvions écrire immédiatement, puisque

$$(26) \quad (X_2)_p = -\frac{1}{r'} e^{-\frac{pr'}{\Omega_1}}.$$

Il convient de noter que la séparation des termes A_2 et A_3 est absolument artificielle et n'a aucune signification physique.

§0. Équation intégrale :

$$(27) \quad \frac{(X_1)_p}{P} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A_1(\nu) d\nu.$$

$(X_1)_p$ désigne le premier terme dans l'expression (27) de X_p (Chapitre IV). Cette équation s'écrit

$$(28) \quad \frac{1}{P} e^{-\frac{pr'}{\Omega_1}} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A_1(\nu) d\nu,$$

dont la solution est

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pour } \nu < \frac{r'}{\Omega_1}, \\ \frac{1}{r'} & \text{pour } \nu > \frac{r'}{\Omega_1}. \end{array} \right.$$

51. Récapitulation générale. — En résumé :

1° Si Ω_1 est la plus grande des quatre vitesses :

a. L'onde incidente (premier milieu) est sphérique, de centre S, de rayon $R = \Omega_1 \nu$. Son facteur de transmission A_1 , nul avant le passage du front, est égal à $\frac{1}{r}$ après.

b. L'onde réfléchie de condensation (premier milieu) est sphérique, de centre S' , de rayon $r' = \Omega_1 \nu$.

c. L'onde réfléchie de distorsion (premier milieu) et les deux ondes réfractées (deuxième milieu) sont du type hyperbolique.

d. Il n'y a pas d'onde conique.

2° Si Ω'_1 est plus grand que Ω_1 , mais si Ω'_2 est plus petit que Ω_1 :

a. Il n'y a rien à modifier dans la description de l'onde incidente.

b. Il n'y a rien à modifier non plus dans la définition de l'onde réfléchie de condensation, mais il existe *un* front conique.

c. L'onde réfléchie de distorsion et l'onde réfractée de distorsion sont toutes deux du type hyperbolique. Elles comportent *chacune* un front conique.

d. L'onde réfractée de condensation est du type elliptique, sans front conique.

3° Si Ω'_1 et Ω'_2 sont supérieurs à Ω_1 .

a. Il n'y a rien à modifier dans la description de l'onde incidente.

b. Il n'y a rien à modifier non plus dans la description de l'onde réfléchie de condensation, mais il existe *deux* fronts coniques.

c. L'onde réfléchie de distorsion est toujours du type hyperbolique, mais comporte *deux* fronts coniques.

d. L'onde réfractée de distorsion est du type elliptique et comporte *un* front conique.

e. L'onde réfractée de condensation est aussi du type elliptique, mais ne comporte pas de front conique.

Ainsi, dans le premier cas, il n'y a pas d'onde conique ; dans le second, il en existe trois ; dans le troisième, il y en a cinq.

Les exemples suivants vont achever de rendre parfaitement clair le mécanisme de la formation de ces ondes coniques.

§2. Exemple de disposition des fronts d'onde (premier cas). — Les cinq fronts d'onde restent constamment accrochés. Il n'y a pas d'onde conique. La figure 31 a été construite en supposant

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 2\sqrt{3}, & \Omega_2 &= 2, & \Omega'_1 &= \sqrt{3}, & \Omega'_2 &= 1, \\ h &= 1, & t &= \frac{\sqrt{6}}{6}. \end{aligned}$$

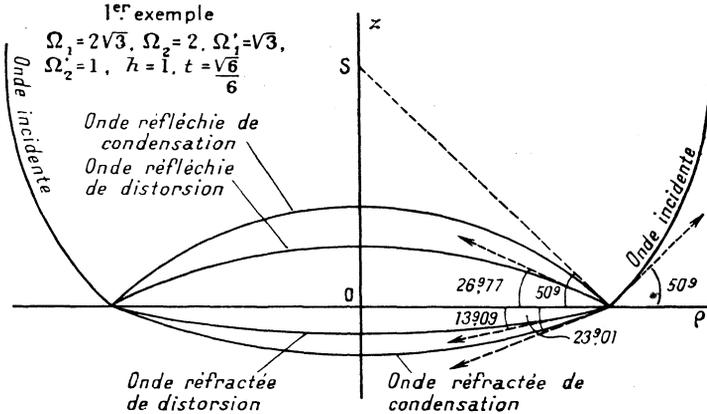


Fig. 31.

§3. Exemple de disposition des fronts d'onde (deuxième cas). — Les figures 32, 33, 34 ont été construites en supposant

$$\begin{aligned} \Omega'_1 &= 2\sqrt{3}, & \Omega_2 &= 2, & \Omega_1 &= \sqrt{3}, & \Omega'_2 &= 1, \\ h &= 1. \end{aligned}$$

a. De $t = 0$ à $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, l'onde incidente de condensation existe seule. Son front est une sphère de centre S dont le rayon est proportionnel à t . Pour $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, l'onde incidente est tangente à la surface de séparation des deux milieux.

b. Lorsque t continue à croître, apparaissent les fronts des ondes réfléchies et réfractées, ces deux derniers étant du type elliptique. Les cinq fronts restent d'abord accrochés et il n'y a pas encore d'onde conique.

L'allure du phénomène subsiste, très semblable à ce qu'elle est dans

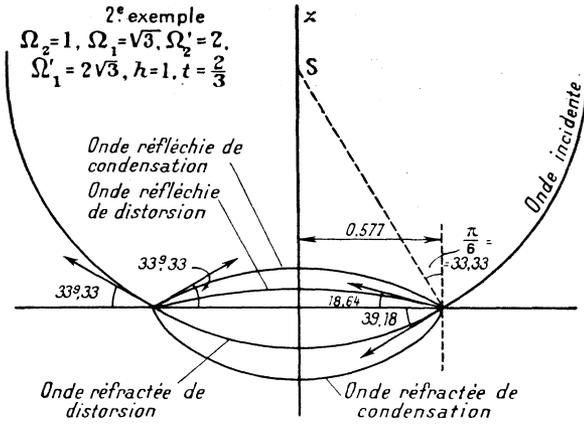


Fig. 32.

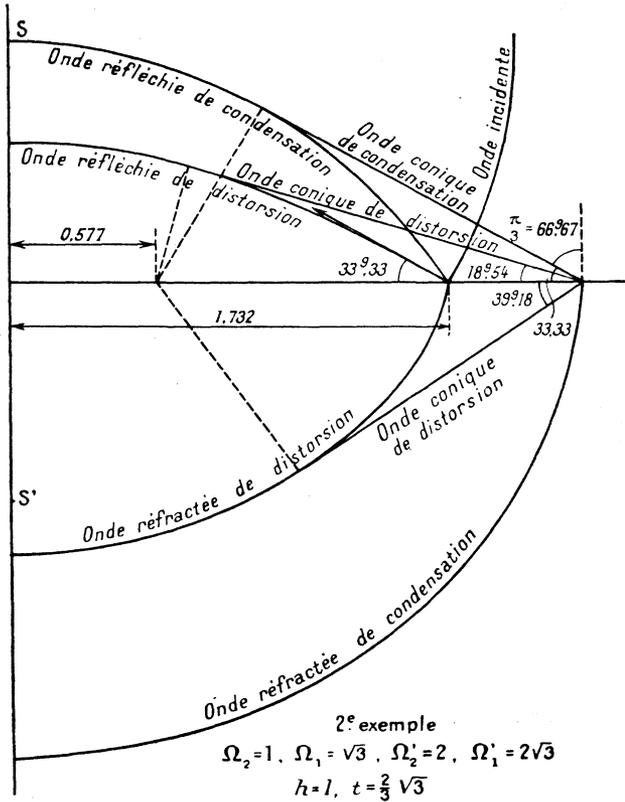


Fig. 33.

l'exemple précédent, jusqu'à l'instant $t = \frac{2}{3}$. A ce moment le rayon de condensation réfracté qui correspond au rayon incident le plus oblique rase la surface de séparation (réflexion totale). C'est à partir de cet

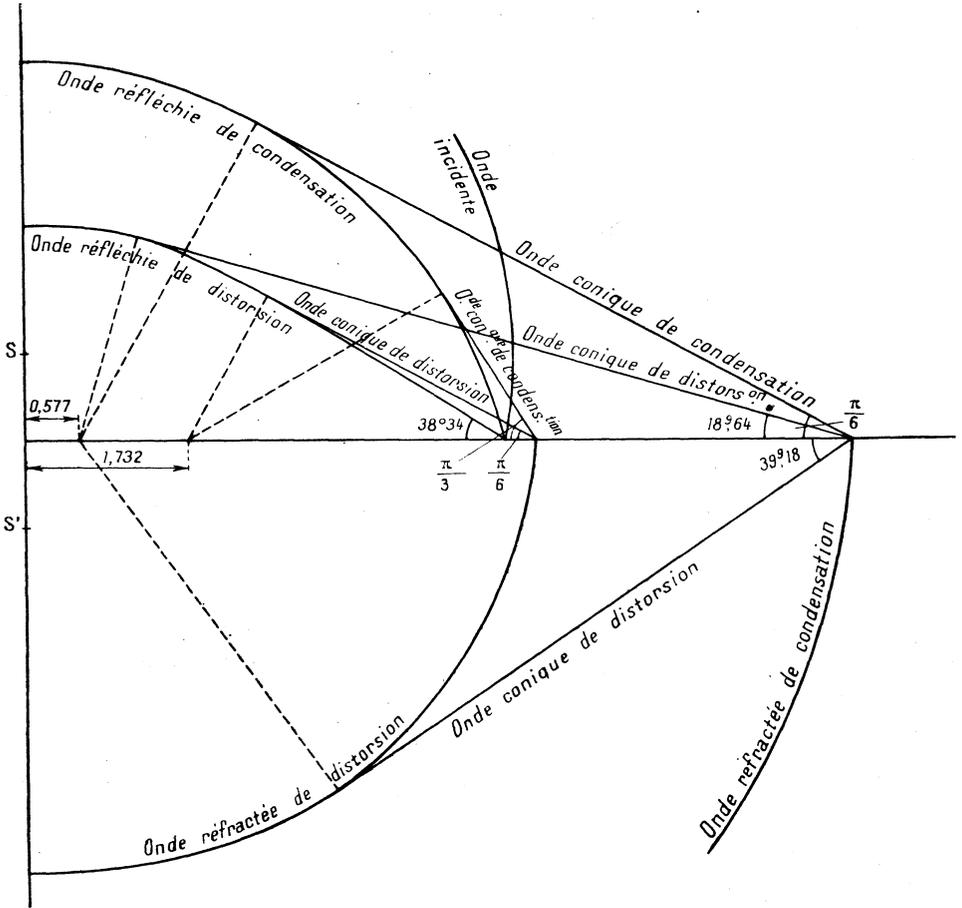


Fig. 34.

instant que va apparaître un premier système de trois ondes coniques. La disposition des fronts pour $t = \frac{2}{3}$ est reproduite dans la figure 32.

c. Lorsque t continue à croître, les fronts des trois ondes coniques se développent progressivement. L'angle que fait le front de l'onde

réfractée de distorsion avec la surface de séparation continue à s'accroître et atteint $\frac{\pi}{2}$ pour $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ quand le rayon de distorsion réfracté qui correspond au rayon incident le plus oblique devient rasant à son tour. C'est à partir de cet instant que va apparaître *le deuxième système de deux ondes coniques*. La disposition des fronts pour $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ est reproduite dans la figure 33.

d. Lorsque t continue à croître, le deuxième système d'ondes coniques, ainsi que le premier, se développent progressivement. Le front des ondes réfractées se rapproche de plus en plus de la forme sphérique et l'allure du phénomène demeure inchangée lorsque t croît indéfiniment. La disposition des fronts a été reproduite dans la figure 34 pour $t = 3$.

54. **Justification définitive de la solution.** — La solution du problème peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} \text{1er milieu...} & \left\{ \begin{aligned} \Psi &= \int_0^t F'(t-\nu) A(\nu) d\nu, \\ U &= \int_0^t F'(t-\nu) B(\nu) d\nu; \end{aligned} \right. \\ \text{2° milieu...} & \left\{ \begin{aligned} \Psi &= \int_0^t F'(t-\nu) A'(\nu) d\nu, \\ U &= \int_0^t F'(t-\nu) B'(\nu) d\nu. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Les cinq premières conditions imposées au Chapitre II sont en effet visiblement satisfaites. La sixième est satisfaite également, car pour $A(\nu)$, $A'(\nu)$, $B'(\nu)$ on peut, comme il a été démontré au Chapitre VI pour $B(\nu)$, former une primitive permettant l'application du théorème fondamental démontré au Chapitre III.

55. **Remarque à propos d'études séismographiques ayant mis expérimentalement en évidence le phénomène des ondes coniques.** (**Prospection géophysique du sous-sol**). — Les méthodes géophysiques de prospection ont, comme on sait, pour objet d'obtenir des renseignements sur la structure du sous-sol par l'interprétation des résultats d'expériences de physique effectuées à la surface du sol.

La méthode séismique consiste à produire une explosion à la surface du sol ou au fond d'un sondage et à étudier les séismogrammes enre-

gistrés par des séismographes placés à des distances diverses du lieu de l'explosion.

Un problème typique particulièrement simple se présente lorsque les terrains superficiels, homogènes, reposent sur une autre formation homogène limitée par une surface horizontale (*fig. 35*).

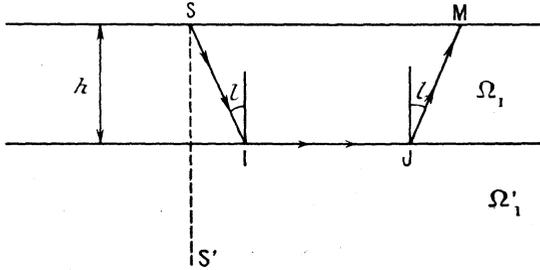


Fig. 35.

Soit S le lieu de l'explosion superficielle, S' l'image de S par rapport à la surface de séparation, M l'emplacement du séismographe, ρ la distance SM, h l'épaisseur des formations superficielles, Ω_1 et Ω'_1 la vitesse de phase des ondes de condensation dans chacun des terrains en présence. Nous supposons

$$\Omega'_1 > \Omega_1.$$

Prenons pour origine des temps l'instant de l'explosion. Les séismologues s'attendaient à observer le premier impetus du séismogramme M à l'instant

$$(30) \quad t = \frac{\rho}{\Omega_1},$$

puis un second marquant l'arrivée de l'onde réfléchie de condensation à l'instant

$$(31) \quad t = \frac{S'M}{\Omega_1} = \frac{\sqrt{\rho^2 + 4h^2}}{\Omega_1}.$$

Le diagramme de propagation (courbe représentative de l'époque des impetus en fonction de ρ) devait donc être constitué par la droite d'équation (30) et l'hyperbole d'équation (31). La méthode ne devait donc être autre chose que la détermination de la distance d'un obstacle par l'observation de « l'écho » (*fig. 36*).

En fait, les séismographes utilisés se prêtaient mal à l'observation des impetus postérieurs au premier, de sorte que la branche hyperbolique du diagramme ne put en général être mise en évidence, mais le

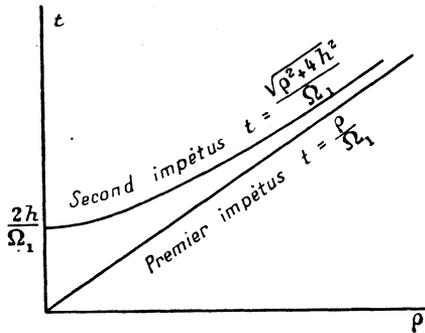


Fig. 36.

diagramme du premier impetus fit apparaître *deux* droites formant ligne brisée (fig. 37).

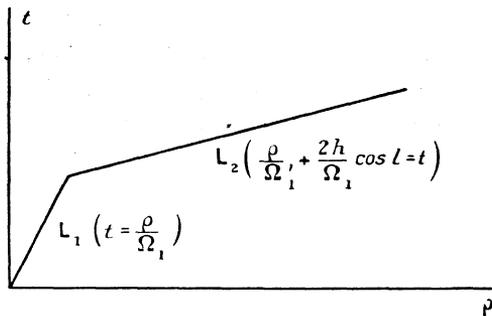


Fig. 37.

Pour expliquer ce résultat inattendu, on invoqua le principe de Fermat ⁽¹⁾. Lorsque M est voisin de S, le « chemin séismique » minimum correspond au rayon direct SM et le diagramme est représenté

⁽¹⁾ Cf. par exemple, R. GUTENBERG, *Lehrbuch der Geophysik* (Gebr. Borntraeger, Berlin, 1926). — E. ROTHÉ, *Les méthodes de prospection du sous-sol* (Gauthier-Villars, Paris, 1930).

par la droite L_1 , d'équation $t = \frac{\rho}{\Omega_1}$. Pour des distances plus grandes, le « chemin séismique » minimum correspond au rayon brisé SIJM frappant la surface de séparation suivant l'angle limite l de réflexion totale, cheminant le long de la surface de séparation avec la vitesse Ω'_1 , puis émergeant en J avec un angle d'émergence¹ égal à l , de sorte que le diagramme correspondant à ce nouveau phénomène est représenté par la droite L_2 , d'équation

$$(32) \quad t = \frac{\rho}{\Omega'_1} + \frac{2h}{\Omega_1} \cos l.$$

Nous remarquerons que l'instant t exprimé par la relation (32) est précisément l'instant d'arrivée du premier front conique. Notons en passant que le résultat du calcul basé sur le principe de Fermat fait l'objet d'un brevet de Mintrop (Brevet allemand D. R. P. 304.317 du 17 mai 1917).

Bien que le résultat soit correct, comme le montre, pour la première fois croyons-nous, le présent mémoire, cette application injustifiée et sommaire du principe de Fermat n'allait pas sans objections. On avait peine à comprendre comment une certaine quantité d'énergie pouvait être transmise en M par le rayon réfracté. Certains prospecteurs prétendant interpréter, suivant une méthode simpliste trop souvent en honneur en séismologie, leurs mesures d'angle d'émergence (!) en M, admirèrent que le rayon JM n'émergeait pas suivant l'angle limite l , mais normalement à la surface de séparation. Il n'y avait pas de raison de s'arrêter sur cette voie et l'on vit naître une foule d'autres hypothèses. Tantôt c'était SI dont l'incidence était normale pendant que JM émergeait suivant l'angle limite, tantôt SI et JM étaient normaux à la surface de séparation, chaque séismologue semblant mettre un point d'honneur à proposer une interprétation originale; cependant que les partisans du trajet suivant les règles du principe de Fermat admettaient généralement que l'homogénéité des terrains ne serait qu'approximative : dans chacun d'eux les vitesses Ω seraient des fonctions croissantes de la profondeur, de sorte que les rayons seraient courbes, leur concavité étant tournée vers le haut.

Il semble que ce soit seulement Ansel⁽¹⁾ qui eut l'intuition de la formation des fronts coniques. Dans son mémoire il décrit complètement le système des fronts que nous venons de mettre en évidence, mais

(1) E. A. ANSEL, *Das Impulsfeld der praktischen Seismik in graphischer Behandlung*. Ergänzungshefte für angewante Geophysik. t. 1, 1930, p. 117-136.

toujours d'après le principe de Fermat, c'est-à-dire sans démonstration véritable. Le mérite du mémoire d'Ansel était de montrer comment la considération des fronts d'onde, équivalente pourtant à celle des rayons, ne se heurte pas aux graves objections que soulevait cette dernière hypothèse.

Le mémoire d'Ansel n'avait cependant pas arrêté dans la littérature géophysique les controverses au sujet du mécanisme de ce phénomène (1). C'est dans le but de l'éclaircir définitivement que nous avons entrepris, avant d'avoir connaissance du travail d'Ansel, les calculs qui font l'objet du présent mémoire. Si leur publication subit un grand retard, les résultats essentiels étaient cependant obtenus dès 1932 et furent partiellement exposés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (2).

(1) Pour preuve, deux très récents mémoires : O. V. SCHMIDT, *Phys. Z.*, t. 39, 1938, p. 868; G. JOOS et J. TELTOW, *Zur Deutung der Knallwellenausbreitung an der Trennschicht zweier Medien* (*Phys. Z.*, t. 40, 1939, p. 289).

[Note ajoutée à la correction des épreuves].

(2) *C. R. Acad. Sc.*, *Sur la propagation d'un séisme à l'intérieur d'un solide homogène, isotrope, élastique, semi-indéfini, limité par une surface plane*, t. 194, 1932, p. 899; *Sur la réflexion à la surface du sol d'une onde séismique, sphérique et isotrope*, t. 194, 1932, p. 1005.

CHAPITRE VIII.

CAS LIMITE DU PROBLÈME STATIQUE.

§6. Problème statique envisagé comme cas limite du problème dynamique. — Chaque fois qu'un problème de propagation du type actuel a été résolu, on obtient immédiatement, par un passage à la limite, la solution d'un problème statique correspondant.

Envisageons par exemple la solution

$$(1) \quad \Psi = \frac{1}{r} F \left(t - \frac{r}{\Omega_1} \right)$$

valable pour le milieu illimité (Chapitre II).

Si l'on suppose que la fonction $F(t)$, nulle pour $t \leq 0$, redevient nulle pour $t = t_0 > 0$ et reste nulle pour $t > t_0$, un point M quelconque de l'espace entre en mouvement à l'époque $t = \frac{r}{\Omega_1}$ et revient définitivement au repos à l'époque $\frac{r}{\Omega_1} + t_0$. Le front d'onde ne laisse pas subsister derrière lui un mouvement vibratoire de durée infinie qu'on appelle « Cauda » ou « Coda ».

Si au contraire la fonction F , après avoir subi des variations depuis l'instant zéro jusqu'à l'instant t_0 , demeure constante et différente de zéro pour $t > t_0$, il subsiste après le passage du front d'onde un état de déformation permanente caractérisé par $\Psi = \frac{F(t_0)}{r} = \frac{K}{r}$, K étant une constante. En d'autres termes les rayons des sphères concentriques de centre S , de rayon r s'accroissent (ou diminuent) de quantités qui sont en raison inverse de r^2 .

Nous avons donc résolu un problème statique, dont la solution directe était d'ailleurs immédiate. La formule initiale détermine le mode « d'établissement » de cet état d'équilibre à partir de la perturbation initiale qui lui donne naissance.

Dans le problème actuel, si nous supposons que l'excitation $F(t)$ redevient et reste nulle pour $t > t_0$ les diverses ondes présentent une

Cauda. Un point M quelconque, après qu'il est entré en mouvement, vibre indéfiniment. On doit cependant s'attendre, fait qui sera vérifié dans un instant, à ce que, dans la Cauda, l'élongation de M, sa vitesse, son accélération, etc., tendent vers zéro quand t croît indéfiniment.

Si $F(t)$ conserve une valeur constante K pour $t > t_0$, il subsiste après le passage de l'onde un état de déformation permanente qui, au contraire de ce qui a lieu dans le cas d'un milieu illimité, ne s'établit en un point M qu'au bout d'un temps infini.

Envisageons par exemple l'une des fonctions à l'aide desquelles s'exprime la solution

$$(1) \quad U = \int_0^t F'(t-v) B(v) dv = \int_{t-t_0}^t F'(t-v) B(v) dv.$$

Remarquons qu'en un point M quelconque, de coordonnées ρ, z finies, la limite inférieure $t - t_0$ de l'intégrale (1) parvient toujours, lorsque t croît indéfiniment, à dépasser le point de discontinuité $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$. On peut donc toujours supposer t assez grand pour que la définition de $B(v)$ dans l'intégrale (1) soit celle qui convient lorsque les valeurs ρ, z, v correspondent au domaine II.

Soit alors

$$(2) \quad B(v, \rho, z) = b_{-2}(\rho, z)v^2 + b_0(\rho, z) + \frac{b_1(\rho, z)}{v} + \frac{b_2(\rho, z)}{v^2} + \dots$$

le développement (que nous étudierons dans quelques instants) de la fonction $B(v)$ dans le domaine du point v à l'infini.

En supposant que $F(t)$ est une fonction indéfiniment dérivable, y compris pour $t = 0$ et pour $t = t_0$, une dérivée partielle quelconque de U s'obtient simplement en dérivant sous le signe somme

$$(3) \quad \frac{\partial^m U}{\partial \rho^p \partial z^q \partial t^{m-p-q}} = \int_{t-t_0}^t F'(t-v) \frac{\partial^m B}{\partial \rho^p \partial z^q \partial v^{m-p-q}} dv.$$

Il est clair que la fonction U , comme plus généralement toute dérivée telle que (3) où $m - p - q$ est inférieur à 2, devient infinie en même temps que t . Ce fait d'apparence paradoxale ne doit cependant pas sembler étrange, car les fonctions Ψ, U n'ont en réalité aucune signification physique. Seules ont une telle signification les élongations, vitesses, accélérations, tensions, etc., qui s'expriment par des *combinaisons* de Ψ, U et de leurs dérivées. Nous allons précisément constater au cours de ce chapitre que si l'on effectue au préalable ces combinaisons *avant*

de passer à la limite, le terme $b_{-2}(\rho, z)v^2$ et les termes analogues provenant des autres facteurs de transmission disparaissent *identiquement*, ce qui réduit à néant le paradoxe signalé.

En définitive, la seule partie *utile* de l'intégrale (1) se réduit à

$$(4) \quad U_{\text{résiduel}} = \int_{t-t_0}^t F'(t-v) \left[b_0(\rho, z) + \frac{b_1(\rho, z)}{v} + \frac{b_2(\rho, z)}{v^2} + \dots \right] dv,$$

et toute dérivée telle que (3), comportant une dérivation par rapport au temps, c'est-à-dire ayant une signification cinématique ou dynamique (vitesse, accélération, etc.), tend vers zéro quand t croît indéfiniment.

Seules tendent vers une limite en général non nulle, celles des dérivées qui ne comportent pas une dérivation par rapport au temps

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{\partial^m U}{\partial \rho^p \partial z^{m-p}} \right]_{\text{résiduelle}} &= \int_{t-t_0}^t F'(t-v) \frac{\partial^m b_0(\rho, z)}{\partial \rho^p \partial z^{m-p}} dv \\ &= \frac{\partial^m b_0(\rho, z)}{\partial \rho^p \partial z^{m-p}} \int_{t-t_0}^t F'(t-v) dv = K \frac{\partial^m b_0(\rho, z)}{\partial \rho^p \partial z^{m-p}}, \end{aligned} \right.$$

en désignant par K la constante $F(t_0)$.

En d'autres termes, lorsque t devient infini, l'état de déformation dynamique du milieu tend asymptotiquement vers un état de déformation permanente, caractérisé par

$$(6) \quad \begin{cases} 1^{\text{er}} \text{ milieu...} & U = b_0(\rho, z), & \Psi = a_0(\rho, z), \\ 2^{\text{e}} \text{ milieu...} & U' = b'_0(\rho, z), & \Psi' = a'_0(\rho, z), \end{cases}$$

au facteur près $F(t_0)$, qui est constant.

Nous allons donc étudier les deux premiers termes du développement (2).

§7. Expression asymptotique des facteurs de transmission. — Considérons en premier lieu le facteur de transmission $B(v, \rho, z)$ que nous avons étudié tout spécialement aux Chapitres V et VI. On peut se borner à supposer, comme nous l'avons remarqué, qu'il est loisible de se limiter à des valeurs de v, ρ, z appartenant au domaine II. $B(v, \rho, z)$ s'exprime donc par des intégrales effectuées le long des circuits (E), (R), (P), (P')

$$(7) \quad B = B_{(E)} + B_{(P, P')} + B_{(R)}.$$

La limite de $B_{(E)}$ pour v infini est

$$(B_{(E)})_{\text{lim}} = - \frac{i}{\pi \rho} \int_{(E)} f(u) u du = \frac{K_1}{\rho},$$

K , désignant une constante indépendante de ρ , z , ν . Comme B n'intervient dans l'expression des composantes de l'élongation que par les deux combinaisons

$$-\frac{\partial B}{\partial z}, \quad \left(\frac{\partial B}{\partial \rho} + \frac{B}{\rho} \right),$$

$(B_{(R)})_{\text{lim}}$ disparaît de ces combinaisons. Il est donc inutile de tenir compte de ce terme.

On a de même

$$[B_{(v, v')}]_{\text{lim}} = -\frac{2L}{\rho},$$

où L est également une constante. Nous ne tiendrons pas compte non plus de ce terme.

On a enfin

$$(8) \quad B_{(R)} = \frac{2\gamma}{\rho} \quad [\text{Chapitre V, équation (30)}].$$

Rappelons que γ représente le coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} u f(u)$$

pour u infini.

Il s'exprime à l'aide de constantes A, A_1, B, B_1 , indépendantes de ρ, z, ν ⁽¹⁾, d'expressions assez compliquées (cf. Chap. V) et qui proviennent du développement de $f(u)$

$$f(u) = \frac{Au^2 + B + \dots}{A_1u^2 + B_1 + \dots} = \frac{A}{A_1} + \frac{A}{A_1} \left(\frac{B}{A} - \frac{B_1}{A_1} \right) \frac{1}{u^2} + \dots$$

D'où ⁽²⁾

$$(9) \quad \begin{aligned} & b_{-2}(\rho, z)\nu^2 + b_0(\rho, z) \\ &= \frac{A}{A_1} \cos I' \left\{ \operatorname{tang} I' \left[\frac{\cos I'}{R' \Omega_2^2} - \frac{h}{R'^2} \left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right) - \frac{3\nu^2 \cos I'}{R'^3} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{R' \sin I'} \left(\frac{B}{A} - \frac{B_1}{A_1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Comme nous désignons toujours les facteurs de transmission par $A(\nu), B(\nu), \dots$, ou $A(\nu, \rho, z), B(\nu, \rho, z), \dots$, il ne peut en résulter aucune confusion avec les constantes A, B, \dots , que nous introduisons ici.

⁽²⁾ Dans l'expression (9) nous ne tenons évidemment pas compte de $[B_{(R)}]_{\text{lim}}$ ni de $[B_{(v, v')}]_{\text{lim}}$. Dans cette expression, b_0 n'a donc pas la même définition que dans (2). Nous n'avons pas cru devoir changer les notations, puisqu'il ne peut en résulter aucune confusion.

L'expression asymptotique des autres facteurs de transmission s'obtient immédiatement de façon similaire et ne donne lieu à aucune remarque nouvelle.

Pour $A_3(\nu)$, on pose

$$j(u) = \frac{A'u^3 + B'u + \dots}{A_1u^2 + B_1 + \dots} = u \frac{A'}{A_1} + \frac{1}{u} \frac{A'}{A_1} \left(\frac{B'}{A'} - \frac{B_1}{A_1} \right) + \dots,$$

A_1 et B_1 sont les mêmes constantes que précédemment, puisque les dénominateurs $D(u)$ sont toujours les mêmes. On a

$$A' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right) - \frac{2C'}{\Omega_2'^2} = -A,$$

$$B' = \frac{C'}{\Omega_2'^2} \left(\frac{C}{\Omega_2^2} - \frac{C'}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} - \frac{1}{\Omega_2'^2} \right)^2 + \frac{1}{4\Omega_2^2} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right).$$

En tenant compte en outre de $A_1(\nu)$ et $A_2(\nu)$, il vient

$$(10) \quad a_{-2}(\rho, z)\nu^2 + a_0(\rho, z) \\ = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} + \frac{2}{R'} \frac{A'}{A_1} \left[-\frac{\cos^2 I'}{2\Omega_1'^2} + \frac{\nu^2}{2R'^2} (3 \cos^2 I' - 1) + \frac{B'}{A'} - \frac{B_1}{A_1} \right],$$

R désignant la distance \overline{SM} (*fig. 38*).

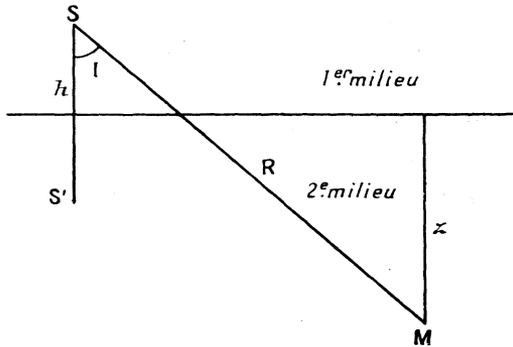


Fig. 38.

Dans le second milieu ($z < 0$), les expressions sont plus simples. Soit I l'angle $S'SM$ (*fig. 38*).

On pose

$$g(u) = \frac{B'' + \dots}{A_1u^2 + B_1 + \dots} = \frac{B''}{A_1u^2} + \dots,$$

$$h(u) = \frac{B'''u + \dots}{A_1u^2 + B_1 + \dots} = \frac{1}{u} \frac{B'''}{A_1} + \dots,$$

avec

$$B'' = \frac{C}{\Omega_2^2} \left(\frac{1}{2\Omega_1'^2} + \frac{1}{2\Omega_2'^2} - \frac{C}{\Omega_2^2} - \frac{C'}{\Omega_2'^2} \right),$$

$$B''' = \frac{C}{\Omega_2^2} \left(\frac{1}{2\Omega_2'^2} - \frac{1}{2\Omega_1'^2} + \frac{C'}{\Omega_2'^2} - \frac{C}{\Omega_2^2} \right).$$

Les développements de $A'(\nu)$ et $B'(\nu)$ débutent par un terme indépendant de ν

$$(11) \quad a'_0(\rho, z) = \frac{1}{R} \frac{B'''}{A_1}, \quad a'_{-2}(\nu) = 0,$$

$$(12) \quad b'_0(\rho, z) = \frac{2B'' \cos I}{A_1 R \sin I}, \quad b'_{-2}(\nu) = 0.$$

58. Disparition des termes en ν^2 dans les combinaisons ayant une signification physique. — Considérons les fonctions

$$(13) \quad \begin{cases} a_{-2}(\rho, z) = \frac{1}{2A_1} \left\{ \frac{A'}{R^3} (3 \cos 2I' + 1) \right\}, \\ b_{-2}(\rho, z) = \frac{1}{2A_1} \left\{ -\frac{3A}{R^3} \sin 2I' \right\}. \end{cases}$$

Comme on a

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial I'}{\partial \rho} = \frac{\cos I'}{R'}, & \frac{\partial R'}{\partial \rho} = \sin I', \\ \frac{\partial I'}{\partial z} = -\frac{\sin I'}{R'}, & \frac{\partial R'}{\partial z} = \cos I', \end{cases}$$

on forme immédiatement les combinaisons

$$(15) \quad \frac{\partial a_{-2}}{\partial \rho} - \frac{\partial b_{-2}}{\partial z} = \frac{1}{2A_1} \left\{ -3 \frac{A + A'}{R'^4} \sin I' (5 \cos 2I' + 3) \right\},$$

$$(16) \quad \frac{\partial a_{-2}}{\partial z} + \frac{\partial b_{-2}}{\partial \rho} = \frac{1}{2A_1} \left\{ -3 \frac{A + A'}{R'^4} \cos I' (5 \cos 2I' - 1) \right\},$$

qui interviennent respectivement dans les expressions de l_ρ et l_z ou dans celle de toute grandeur ayant une signification physique, et l'on voit que ces combinaisons disparaissent identiquement puisque, comme nous l'avons observé,

$$A + A' = 0.$$

Ce résultat, qui devait être évident *a priori*, n'en constitue pas moins un test intéressant de la méthode.

59. Application numérique. — Nous allons traiter sommairement un cas particulier simple. Supposons que le second milieu soit le vide.

On a

$$(17) \quad \sigma' = 0, \quad C' = 0, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Il vient

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right), \\ B_1 = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} - \frac{1}{\Omega_2'^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right) \left(\frac{1}{\Omega_1^4} + \frac{3}{\Omega_2^4} - \frac{2}{\Omega_1^2 \Omega_2^2} \right), \\ A = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right), \\ B = -\frac{1}{4\Omega_2^2} \left(\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2} \right)^2, \end{array} \right. \\ A' = -A, \quad B' = -B.$$

D'où

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{A_1} = \frac{2}{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}}, \quad \frac{A'}{A_1} = -\frac{A}{A_1}, \\ \frac{B}{A} = \frac{B'}{A'} = \frac{1}{2\Omega_2^2} - \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{1}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2} \right)^2}{\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2}}, \\ \frac{B_1}{A_1} = \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{\Omega_1^4} + \frac{3}{\Omega_2^4} - \frac{2}{\Omega_1^2 \Omega_2^2}}{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}} - \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{1}{\Omega_2'^2} - \frac{1}{\Omega_1'^2} \right)^2}{\frac{1}{\Omega_1'^2} + \frac{1}{\Omega_2'^2}}, \end{array} \right.$$

puis

$$(20) \quad \frac{B}{A} - \frac{B_1}{A_1} = \frac{B'}{A'} - \frac{B_1}{A_1} = \frac{1}{2\Omega_2^2} - \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{\Omega_1^4} + \frac{3}{\Omega_2^4} - \frac{2}{\Omega_1^2 \Omega_2^2}}{\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2}}.$$

Comme nous l'avions remarqué au Chapitre IV, les vitesses Ω_1' , Ω_2' , caractéristiques du second milieu, s'éliminent. Nous aurions du reste pu obtenir directement les formules ci-dessus à partir des formules simplifiées du Chapitre IV relatives à ce cas particulier.

Posons en outre

$$\Omega_1 = \Omega_2 \sqrt{3}.$$

Il vient

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A}{A_1} = \Omega_1^2 = -\frac{A'}{A_1}, \\ \frac{B}{A} - \frac{B_1}{A_1} = \frac{B'}{A'} - \frac{B_1}{A_1} = -\frac{5}{4\Omega_1^2}. \end{array} \right.$$

L'état asymptotique de déformation permanente est donc défini par des fonctions Ψ , U (premier milieu) respectivement proportionnelles à

$$(22) \quad \begin{cases} \Psi_s = \frac{1}{R} + \frac{3}{2R'} + \frac{\cos^2 I'}{R'}, \\ U_s = \frac{1}{2R'} \left(3 \sin 2I' - 5 \cot I' - \frac{4h}{R'} \sin I' \right). \end{cases}$$

Les composantes de l'élongation dans cet état d'équilibre ont pour expression

$$(23) \quad \begin{cases} l_\rho = -\frac{\sin I}{R^2} - \frac{3h}{R'^3} \sin 2I' + \frac{\sin I'}{R'^2} (1 + 3 \cos 2I'), \\ l_z = \frac{\cos I}{R^2} - \frac{h}{R'^3} (1 + 3 \cos 2I') + \frac{3 \cos I'}{R'^2} (1 + \cos 2I'). \end{cases}$$

A la surface du sol, pour $z = 0$,

$$(24) \quad \begin{cases} (l_\rho)_{z=0} = -\frac{3 \sin I}{R^2}, \\ (l_z)_{z=0} = \frac{3 \cos I}{R^2}. \end{cases}$$

Si le milieu était illimité, l'élongation serait radiale, égale à $-\frac{1}{R^2}$.

Ainsi l'élongation d'un point de la surface du sol reste radiale, conserve aussi le même sens, mais devient trois fois plus grande quand on suppose que le milieu est limité.

Sur l'axe de révolution ($\rho = 0$), les composantes des élongations ont pour expression

$$(25) \quad \begin{cases} l_\rho = 0, \\ l_z = \begin{cases} \frac{1}{R^2} + \left(\frac{6}{R'^2} - \frac{4h}{R'^3} \right) & \text{pour } 0 < z < h, \\ -\frac{1}{R^2} + \left(\frac{6}{R'^2} - \frac{4h}{R'^3} \right) & \text{pour } z > h. \end{cases} \end{cases}$$

Sur l'axe, les élongations sont donc plus grandes que dans un milieu illimité si l'on suppose $0 < z < h$. Considérons, au contraire, les points de l'axe pour lesquels $z > h$. Lorsque R croît à partir de zéro, les élongations radiales conservent d'abord le même sens que si le milieu était illimité, mais elles sont plus faibles et finissent par s'annuler pour $R = 1,647 h$. Pour des distances supérieures à $1,647 h$, l'élongation change de sens et atteint un maximum de sa valeur absolue pour

$$R = 2,737 h.$$

En ce point, le rapport de l'élongation à sa valeur pour un milieu illimité est égal à

$$-7,153.$$

Pour des valeurs de R supérieures à $2,737 h$, l'élongation conserve son signe et décroît en tendant vers zéro. A très grande distance, elle est 5 fois plus grande que pour le milieu illimité, et toujours inversée.

Il n'entrait pas dans notre but de traiter à fond les problèmes statiques. Cet exemple numérique sommaire en montre le caractère très élémentaire.



CHAPITRE IX.

CAS PARTICULIER DE L'ÉTAT DE RÉGIME HARMONIQUE.

60. **L'état de régime harmonique.** — On pourrait établir directement les formules de l'état de régime harmonique en procédant comme dans le cas de l'état de régime exponentiel. Les calculs ne seraient guère que la transposition de ceux du Chapitre IV et reviendraient à substituer au nombre réel p une imaginaire pure $-i\omega$. Telle est d'ailleurs la méthode suivie par Sommerfeld dans son célèbre mémoire sur le rayonnement électromagnétique d'un dipôle situé au-dessus de la surface du sol (1). Telle est encore, par exemple, la méthode employée par Lamb dans le mémoire classique auquel nous avons déjà fait allusion (cf. Avant-Propos).

Ce n'est pas cependant ainsi que nous opérerons, car nous ne pourrions justifier les conditions à l'infini que par des raisonnements qui, bien qu'habituels en pareille matière, sont pourtant insuffisants pour assurer leur absolue rigueur (2).

Nous partirons donc des formules générales en supposant que la fonction d'excitation, nulle avant l'instant zéro, s'exprime à partir de ce moment par

$$(1) \quad F(t) = \sin \omega t,$$

et nous chercherons si les fonctions Ψ , U , Ψ' , U' admettent pour t infini des expressions asymptotiques.

A vrai dire, il se présente ici une légère difficulté du fait que la dérivée $F'(t)$ est discontinue pour $t = 0$ et que nous n'avons pas encore montré qu'on a le droit d'envisager des fonctions d'excitation de ce type.

En attendant, on pourra imaginer que $F(t)$ est une fonction indéfini-

(1) A. SOMMERFELD, *Ueber die Ausbreitung der Wellen der drahtlosen Telegraphie* (*Ann. der Phys.*, t. 28, 1903), p. 665); cf. également, du même auteur, *Ueber die Ausbreitung der Wellen der drahtlosen Telegraphie* (*Ann. der Phys.*, t. 81, 1926, p. 11357); *Id.* FRANK VON MISES, t. 2 (2^e édition), Chapitre XXIII, *Drahtlose Telegraphie*, p. 918 (rédaçtion A. Sommerfeld).

(2) A ce sujet, cf. FRANK VON MISES, rédaçtion A. Sommerfeld, t. 1 (2^e édition), p. 803 : *Ausstrahlungsbedingung*.

ment dérivable quel que soit t , nulle pour $t \leq -t_0$ ($t_0 > 0$), égale à $\sin \omega t$ pour $t \geq 0$. Cet intervalle t_0 représente une période de transition, « d'établissement » du régime sinusoïdal. Soit

$$U = \int_0^{t+t_0} F'(t-\nu) B(\nu) d\nu = \int_0^t F'(t-\nu) B(\nu) d\nu + \int_t^{t+t_0} F'(t-\nu) B(\nu) d\nu.$$

Les expressions des élongations, tensions, vitesses, etc., apparaîtront alors comme la somme de deux termes, le premier provenant de l'intégrale $\int_0^t F'(t-\nu) B(\nu) d\nu$, le second provenant de l'intégrale $\int_t^{t+t_0} F'(t-\nu) B(\nu) d\nu$. Or, il résulte du chapitre précédent que le deuxième terme tendra toujours vers zéro quand t deviendra infini. On est donc ramené à chercher l'expression asymptotique du seul premier terme et, dans tout l'intervalle $(0, t)$ de la variable ν , la fonction $F'(t-\nu)$ est sinusoïdale. Les calculs seront donc les mêmes que si nous posons simplement

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 0, \\ \sin \omega t & \text{pour } t \geq 0. \end{cases}$$

Soit donc

$$(2) \quad U = \int_0^t F'(t-\nu) B(\nu) d\nu = \omega \int_0^t \cos[\omega(t-\nu)] B(\nu) d\nu.$$

Comme $B(\nu)$ devient infini en même temps que ν , l'intégrale (2) ne converge pas lorsque t devient infini.

Posons cependant

$$(3) \quad B_1(\nu) = B(\nu) - b_0(\rho, z) - b_{-2}(\rho, z)\nu^2,$$

où la définition de $b_0(\rho, z)$ correspond à la formule (2) du Chapitre VIII et non pas à la formule (9). Précisons au surplus que le terme complémentaire ajouté à $B(\nu)$ dans la formule (3) est égal à

$$- b_0(\rho, z) - b_{-2}(\rho, z)\nu^2 \quad \text{pour } \nu \geq 0,$$

et non pas seulement pour

$$\nu > \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}.$$

Il vient alors

$$(4) \quad U = \omega \int_0^t B_1(\nu) \cos[\omega(t-\nu)] d\nu \\ + \omega \int_0^t [b_0(\rho, z) + b_{-2}(\rho, z)\nu^2] \cos[\omega(t-\nu)] d\nu.$$

Nous obtenons une solution équivalente, identique quant à l'expression des élongations, tensions, vitesses, etc., en supprimant dans (4) l'intégrale portant sur la fonction $b_{-2}(\rho, z)v^2$ à condition d'effectuer une suppression similaire dans l'expression analogue de Ψ . Nous obtiendrions aussi une solution équivalente en adoptant pour définition de $b_0(\rho, z)$ celle de la formule (9) du chapitre précédent, mais cette convention n'est pas nécessaire.

Ces précisions apportées, et puisque aucune confusion n'est à craindre, nous conserverons la même notation pour désigner la solution équivalente

$$(5) \quad U = \omega \int_0^t B_1(v) \cos[\omega(t-v)] dv + b_0(\rho, z) \sin \omega t,$$

ou, en développant $\cos[\omega(t-v)]$,

$$(6) \quad U = b_0(\rho, z) \sin \omega t + \omega \cos \omega t \left[\int_0^t B_1(v) \cos \omega v dv \right] \\ + \omega \sin \omega t \left[\int_0^t B_1(v) \sin \omega v dv \right].$$

Lorsque t devient infini, les deux intégrales figurant dans l'expression (6) convergent puisque $B_1(v)$ tend vers zéro quand v devient infini, et U admet l'expression asymptotique,

$$(7) \quad U = b_0(\rho, z) \sin \omega t + \omega \cos \omega t \int_0^{+\infty} B_1(v) \cos \omega v dv \\ + \omega \sin \omega t \int_0^{+\infty} B_1(v) \sin \omega v dv,$$

qui définit (avec les expressions similaires de Ψ , Ψ' , U') l'état de régime harmonique.

Nous nous proposons de mettre ce résultat sous la forme qu'on aurait obtenue en procédant directement comme au Chapitre IV. On peut écrire

$$(8) \quad U = \mathcal{R} \left\{ e^{-i\omega t} \left[i b_0(\rho, z) + \omega \int_0^{+\infty} e^{i\omega v} B_1(v) dv \right] \right\}.$$

Nous sommes donc amenés à porter notre attention sur le terme

$$(9) \quad \omega \int_0^{+\infty} e^{i\omega v} B_1(v) dv$$

et à considérer la parenté de ce terme (9) avec le second membre de

l'équation intégrale qui sert de définition à $B(\nu)$

$$(10) \quad Y_p = p \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} B(\nu) d\nu.$$

En remplaçant $B(\nu)$ par son expression (3), l'équation (10) devient

$$(11) \quad p \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} B_1(\nu) d\nu = Y_p - b_0(\rho, z) - \frac{2}{p^2} b_{-2}(\rho, z).$$

Rappelons d'autre part l'expression de Y_p [Chapitre IV, équation (22)]

$$(12) \quad Y_p = 2 \int_0^{+\infty} \lambda d\lambda \frac{d}{d\rho} [J_0(\lambda\rho)] f(\lambda) e^{-\alpha\lambda - \beta z}$$

avec

$$(13) \quad f(\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(\lambda^2 + p^2 \frac{C}{\Omega_2^2} + p^2 \frac{C'}{\Omega_2'^2}\right) \left(\lambda^2 + p^2 \frac{C'}{\Omega_2'^2}\right) - \alpha\beta \left(\lambda^2 + p^2 \frac{C}{\Omega_2^2}\right)}{\lambda^2 \left(\lambda^2 + p^2 \frac{C}{\Omega_2^2} + p^2 \frac{C'}{\Omega_2'^2}\right)^2 + \lambda^2 \alpha\alpha' \beta\beta' - \alpha\beta \left(\lambda^2 + p^2 \frac{C'}{\Omega_2'^2}\right)^2} \\ - \alpha' \beta' \left(\lambda^2 + p^2 \frac{C}{\Omega_2^2}\right)^2 + p^4 \frac{CC'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} (\alpha\beta' + \alpha'\beta) \end{array} \right\}$$

et

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_1^2}}, & \alpha' = \sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_1'^2}}, \\ \beta = \sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_2^2}}, & \beta' = \sqrt{\lambda^2 + \frac{p^2}{\Omega_2'^2}}, \end{array} \right.$$

$\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ étant positifs.

Les deux membres de l'équation (11) représentent des fonctions de p qui sont identiques lorsque p est réel et positif.

Le premier membre de l'équation (11) est en outre une fonction analytique de p , dans un domaine de cette variable constitué par l'ensemble des points à droite de l'axe imaginaire. D'autre part, lorsque le point p du premier ou du quatrième quadrant tend vers le point $\pm i\omega$ de l'axe imaginaire, l'intégrale

$$(15) \quad \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} B_1(\nu) d\nu$$

a pour limite l'intégrale convergente

$$\int_0^{+\infty} e^{\mp i\omega\nu} B_1(\nu) d\nu.$$

Pour les valeurs complexes de p , nous suivrons les radicaux $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ par continuité. Y_p est une fonction analytique de p dans tout domaine

de cette variable tel que les points de ramification de α , α' , β , β' ou les pôles de $f(\lambda)$ demeurent à distance finie de l'axe réel, sur lequel est effectuée l'intégration.

Soit $u = im$ (m réel) un point de ramification des radicaux α , α' , b , b' ou une racine de $D(u)$ [cf. Chap. IV, Relations (25) et (26)]. Les points de ramification des radicaux α , α' , β , β' ou les pôles de $f(\lambda)$ ont pour affixes

$$(16) \quad \lambda = p \cdot im.$$

Lorsque nous suivons par continuité la variable p , dans le quatrième quadrant par exemple, depuis une valeur réelle positive p_0 jusqu'à la valeur imaginaire pure $-i\omega$ (ω réel, positif), les points critiques ou pôles

$$\frac{ip_0}{\Omega_R}, \frac{ip_0}{\Omega_1}, \frac{ip_0}{\Omega_2}, \frac{ip_0}{\Omega'_1}, \frac{ip_0}{\Omega'_2}, \frac{-ip_0}{\Omega_R}, \frac{-ip_0}{\Omega_1}, \frac{-ip_0}{\Omega_2}, \frac{-ip_0}{\Omega'_1}, \frac{-ip_0}{\Omega'_2}$$

viennent se placer respectivement sur l'axe réel (*fig. 41*) en

$$\frac{\omega}{\Omega_R}, \frac{\omega}{\Omega_1}, \frac{\omega}{\Omega_2}, \frac{\omega}{\Omega'_1}, \frac{\omega}{\Omega'_2}, \frac{-\omega}{\Omega_R}, \frac{-\omega}{\Omega_1}, \frac{-\omega}{\Omega_2}, \frac{-\omega}{\Omega'_1}, \frac{-\omega}{\Omega'_2}.$$

Il apparaît ainsi que Y_p est une fonction analytique de p à droite de l'axe imaginaire. Il est d'ailleurs facile de prolonger analytiquement Y_p dans un domaine plus vaste, englobant l'axe imaginaire. Si l'on effectue en effet l'intégrale (12) non plus le long de l'axe réel mais le long d'un parcours (Σ) qui, partant de l'origine, débute par un trajet effectué dans le quatrième quadrant et s'achève assez loin sur la partie positive de l'axe réel (*fig. 39*), la fonction Y_p reste définie par continuité et demeure analytique dans une partie du troisième quadrant.

Il résulte de ces considérations que les deux membres de l'équation (11), identiques lorsque p est réel et positif, le demeurent si nous suivons p par continuité jusqu'à l'axe imaginaire compris. On a donc

$$(17) \quad -i\omega \int_0^{+\infty} e^{i\omega v} B_1(v) dv = Y_{-i\omega} - b_0(\rho, z) + \frac{2}{\omega^2} b_{-2}(\rho, z).$$

D'où, en vertu de (8),

$$(18) \quad U = \mathcal{R} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[Y_{-i\omega} + \frac{2}{\omega^2} b_{-2}(\rho, z) \right] \right\}.$$

Comme précédemment, nous obtiendrons une solution équivalente en supprimant dans (18) le terme dépendant de $b_{-2}(\rho, z)$ à condition de

supprimer aussi le terme similaire figurant dans l'expression analogue de Ψ . Il vient donc

$$(19) \quad U = \mathcal{R} \{ i e^{-i\omega t} Y_{-i\omega} \} = - \mathcal{J} \{ e^{-i\omega t} Y_{-i\omega} \}.$$

Dans les formules actuelles, nous écrirons de préférence

$$(20) \quad \frac{d}{d\rho} [J_0(\lambda\rho)] = -\lambda J_1(\lambda\rho),$$

J_1 désignant la fonction de Bessel du premier ordre.

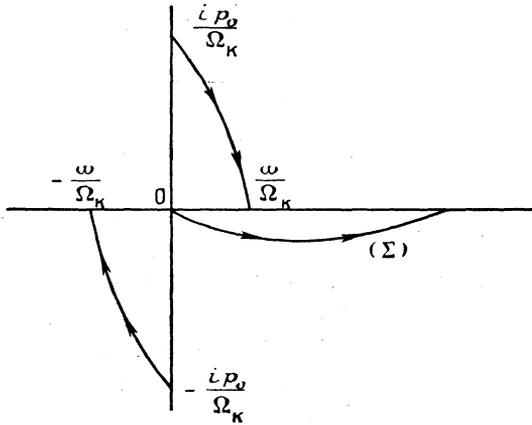


Fig. 39.

Le cas des fonctions Ψ , Ψ' , U' peut être traité de façon similaire, de sorte que les formules définitives de l'état de régime harmonique sont :

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = - \mathcal{J} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\frac{e^{\frac{i\omega r'}{\Omega_1}}}{r'} - \frac{e^{\frac{i\omega r'}{\Omega_1}}}{r'} + 2 \int_0^{+\infty} \lambda d\lambda J_0(\lambda\rho) \overline{f(\lambda)} e^{-\bar{\alpha}(z+h)} \right] \right\}, \\ U = 2 \mathcal{J} \left\{ e^{-i\omega t} \int_0^{+\infty} \lambda^2 d\lambda J_1(\lambda\rho) \overline{f(\lambda)} e^{-\bar{\alpha}h - \bar{\beta}z} \right\}, \\ \Psi' = -2 \mathcal{J} \left\{ e^{-i\omega t} \int_0^{+\infty} \lambda d\lambda J_0(\lambda\rho) \overline{h(\lambda)} e^{-\bar{\alpha}h + \bar{\alpha}'z} \right\}, \\ U' = 2 \mathcal{J} \left\{ e^{-i\omega t} \int_0^{+\infty} \lambda^2 d\lambda J_1(\lambda\rho) \overline{g(\lambda)} e^{-\bar{\alpha}h + \bar{\beta}'z} \right\}, \end{array} \right.$$

en posant ⁽¹⁾

$$(22) \quad \begin{cases} \bar{\alpha} = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{\Omega_1^2}}, & \bar{\beta} = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{\Omega_2^2}}, \\ \bar{\alpha}' = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{\Omega_1'^2}}, & \bar{\beta}' = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{\Omega_2'^2}} \end{cases}$$

et

$$(23) \quad \begin{cases} \overline{D(\lambda)} = \lambda^2 \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 C}{\Omega_2^2} - \frac{\omega^2 C'}{\Omega_2'^2} \right)^2 + \lambda^2 \bar{\alpha} \bar{\alpha}' \bar{\beta} \bar{\beta}' - \bar{\alpha} \bar{\beta} \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 C'}{\Omega_2'^2} \right)^2 \\ \quad - \bar{\alpha}' \bar{\beta}' \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 C}{\Omega_2^2} \right)^2 + \frac{\omega^4 C C'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} (\bar{\alpha} \bar{\beta}' + \bar{\alpha}' \bar{\beta}), \\ \overline{f(\lambda)} = \frac{1}{D(\lambda)} \left[\lambda^2 \bar{\alpha}' \bar{\beta} \bar{\beta}' + \bar{\beta}' \omega^4 \frac{C C'}{\Omega_2^2 \Omega_2'^2} - \bar{\beta} \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 C'}{\Omega_2'^2} \right)^2 \right], \\ \overline{f'(\lambda)} = \frac{1}{D(\lambda)} \left[\left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 C}{\Omega_2^2} - \frac{\omega^2 C'}{\Omega_2'^2} \right) \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 C'}{\Omega_2'^2} \right) - \bar{\alpha} \bar{\beta} \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 C}{\Omega_2^2} \right) \right], \\ \overline{h(\lambda)} = \frac{1}{D(\lambda)} \frac{C \omega^2}{\Omega_2^2} \left[\bar{\beta} \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 C'}{\Omega_2'^2} \right) - \bar{\beta}' \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 C}{\Omega_2^2} \right) \right], \\ \overline{g(\lambda)} = \frac{-1}{D(\lambda)} \frac{C \omega^2}{\Omega_2^2} \left[\bar{\alpha}' \bar{\beta}' - \left(\lambda^2 - \frac{\omega^2 C}{\Omega_2^2} - \frac{\omega^2 C'}{\Omega_2'^2} \right) \right]. \end{cases}$$

Les intégrales doivent être effectuées au-dessous de l'axe réel.

En partant de ces formules et en déformant le chemin d'intégration, on peut discuter le problème de l'état de régime harmonique à la manière dont Sommerfeld discute celui de l'onde électromagnétique stationnaire (Mémoire cité). Nous ne ferons pas cette discussion qui ne présenterait ni originalité, ni intérêt pratique. Les ondes sismiques n'ont en effet rien de commun avec un phénomène harmonique stationnaire. Certes beaucoup de sismologues, après avoir parfois salué d'un mot élogieux le mémoire de Lamb, l'un des rares savants qui ait jamais envisagé une onde sismique comme un phénomène progressif, n'hésitent pas à bourrer leurs ouvrages de calculs et de formules relatifs à des phénomènes harmoniques stationnaires. Même les propriétés des séismographes sont presque toujours discutées comme si ces appareils ne devaient servir qu'à enregistrer des phénomènes harmoniques. Affirmons hautement qu'en procédant ainsi on ne peut que fausser les idées du lecteur et, par surcroît, rendre bien improbable un progrès pourtant si nécessaire de la séismologie.

(¹) Les radicaux $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}'$, $\bar{\beta}$, $\bar{\beta}'$ sont des racines arithmétiques quand les quantités sous les radicaux sont réelles et positives.

CHAPITRE X.

ONDE PROGRESSIVE QUAND LE SECOND MILIEU EST LE VIDE DISCONTINUITÉS CINÉMATIQUES. TERMES PRIMAIRES.

61. Rappel des notations. — Pour abrégé les écritures, nous discuterons d'abord les formules de propagation dans le cas où le second milieu est le vide, et il nous suffira ensuite d'indiquer en quoi les phénomènes ici décrits diffèrent lorsque le second milieu est quelconque.

Divers calculs numériques, que nous aurions voulu plus nombreux, seront entrepris à titre d'exemples : dans ce cas nous poserons toujours

$$(1) \quad \Omega_1 = \Omega_2 \sqrt{3}.$$

De plus, laissant désormais au second plan les fonctions Ψ et U , nous porterons plus spécialement notre attention sur les élongations, afin de rendre aussi claire que possible l'allure des phénomènes.

Le cas particulier traité actuellement est plus ou moins assimilable au problème très schématisé de la propagation d'un séisme artificiel lorsque certaines conditions expérimentales sont supposées réalisées et que la densité de l'atmosphère est considérée comme négligeable. Il est donc indiqué, pour se conformer aux habitudes, de placer le premier milieu (sol) en bas, le second milieu (atmosphère) en haut, l'axe Oz étant dirigé vers le bas pour qu'il n'y ait rien de changé aux formules et notations. Pour éviter au lecteur de se reporter aux chapitres précédents, nous rappellerons rapidement les formules établies plus haut, qui serviront au cours du présent chapitre et des deux suivants.

La surface de séparation dite ici « surface du sol », entre le premier milieu et le vide, est le plan $z = 0$. L'origine O est « l'épicentre », la source S , dite « hypocentre », est située sur Oz à la « profondeur » h (*fig. 40*).

Le point M , où nous calculons les composantes l_ρ , l_z de l'élongation est défini par sa « profondeur » z et sa distance ρ à l'axe de révolution. ρ et z sont positifs ou nuls.

$$\begin{array}{ll} I \text{ désigne l'angle } OSM & (0 \leq I \leq \pi), \\ I' \text{ désigne l'angle } OS'M & (0 \leq I' < \frac{\pi}{2}). \end{array}$$

On considère aussi le point I de la surface du sol tel que les « rayons » SI, IM fassent avec la normale IN deux angles I_1, I_2

$$(2) \quad \frac{\sin I_1}{\sin I_2} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = v > \sqrt{2}.$$

On pose

$$(3) \quad \overline{SM} = R, \quad \overline{S'M} = R', \quad \overline{SI} = R_1, \quad \overline{IM} = R_2.$$

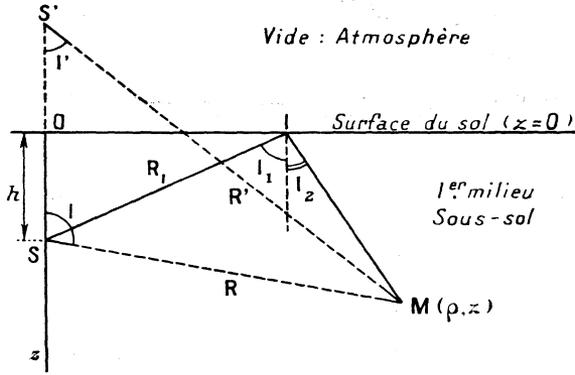


Fig. 40.

Les formules suivantes seront d'application fréquente

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial R}{\partial \rho} = \sin I, & \frac{\partial R}{\partial z} = -\cos I, \\ \frac{\partial R'}{\partial \rho} = \sin I', & \frac{\partial R'}{\partial z} = \cos I', \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) = \frac{\sin I_2}{\Omega_2}, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) = \frac{\cos I_2}{\Omega_2}. \end{array} \right.$$

On a

$$(5) \quad l_\rho = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad l_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{U}{\rho},$$

avec

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = \int_0^t F'(t - \nu) A(\nu) d\nu, \\ U = \int_0^t F'(t - \nu) B(\nu) d\nu. \end{array} \right.$$

$F(t)$ est la « fonction d'excitation », continue et indéfiniment dérivable.

nulle pour $t \leq 0$. Si $F(t)$ est également nulle pour $t \geq t_0$, nous dirons que l'excitation est de durée limitée, t_0 étant sa durée.

Les « facteurs de transmission » $A(\nu)$, $B(\nu)$ ont l'expression suivante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \nu < \frac{R}{\Omega_1}, \\ \frac{1}{R} & \text{pour } \frac{R}{\Omega_1} < \nu < \frac{R'}{\Omega_1}, \\ \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} + A_3(\nu) & \text{pour } \nu > \frac{R'}{\Omega_1}, \end{cases} \\ \text{avec} \\ A_3(\nu) = -\frac{i}{\pi} \int \frac{1}{\sqrt{u^2 \rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2}} j(u) u \, du \end{array} \right.$$

et

$$(8) \quad B(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \nu < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}, \\ \frac{i}{\pi \rho} \int \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u) u \, du & \text{pour } \nu > \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}. \end{cases}$$

On a

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(u) = \frac{u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}}{D(u)}, \\ j(u) = \frac{-bu^2}{D(u)}, \\ D(u) = \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2} \right)^2 - abu^2. \end{array} \right.$$

Dans l'expression (8), l'intégration est à effectuer le long des circuits (CC') et (D) [cf. Chap V (*fig.* (17))]. Dans la relation (7) l'intégrale a une définition similaire.

62. Expression de l_ρ . — A partir des relations (5), (6), (7), (8), on calcule l_ρ et l_z .

$$(10) \quad \begin{array}{l} 1^\circ \text{ Si } t < \frac{R}{\Omega_1}, \\ \\ l_\rho = 0. \end{array}$$

$$(11) \quad \begin{array}{l} 2^\circ \text{ Si } \frac{R}{\Omega_1} < t < \frac{R'}{\Omega_1}, \\ \\ l_\rho = -\sin I \left[\frac{1}{R\Omega_1} F' \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right) + \frac{1}{R'\Omega_1} F \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right) \right]. \end{array}$$

$$3^{\circ} \text{ Si } \frac{R'}{\Omega_1} < t < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2},$$

$$(12) \quad l_{\rho} = [\text{expression (11)}] + \sin I' \left[\frac{1}{R'\Omega_1} F' \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) + \frac{1}{R'^2} F \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) \right] \\ - \frac{\sin I'}{\Omega_1} \Lambda_3 \left(\frac{R'}{\Omega_1} + 0 \right) F' \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) \\ - \frac{i}{\pi} \int_{\frac{R'}{\Omega_1}}^t F'(t - \nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2}} j(u) u \, du \right] d\nu.$$

$$4^{\circ} \text{ Si } t > \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2},$$

$$(13) \quad l_{\rho} = [\text{expression (12)}] + \frac{\cos I_2}{\Omega_2} B \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + 0 \right) F' \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right] \\ - \frac{i}{\pi \rho} \int_{\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}}^t F'(t - \nu) \frac{\partial}{\partial z} \left[\int \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u) u \, du \right] d\nu.$$

On constate qu'au fur et à mesure que t augmente des termes nouveaux apparaissent dans l'expression de l_{ρ} , représentant l'effet des ondes diverses dont les fronts atteignent successivement le point M.

63. Expression de l_z . — On a de même :

$$1^{\circ} \text{ Si } t < \frac{R}{\Omega_1},$$

$$(14) \quad l_z = 0.$$

$$2^{\circ} \text{ Si } \frac{R}{\Omega_1} < t < \frac{R'}{\Omega_1},$$

$$(15) \quad l_z = \cos I \left[\frac{1}{R\Omega_1} F' \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right) + \frac{1}{R^2} F \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right) \right].$$

$$3^{\circ} \text{ Si } \frac{R'}{\Omega_1} < t < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$$

$$(16) \quad l_z = [\text{expression (15)}] + \cos I' \left[\frac{1}{R'\Omega_1} F' \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) + \frac{1}{R'^2} F \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) \right] \\ - \frac{\cos I'}{\Omega_1} \Lambda_3 \left(\frac{R'}{\Omega_1} + 0 \right) F' \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) \\ - \frac{i}{\pi} \int_{\frac{R'}{\Omega_1}}^t F'(t - \nu) \frac{\partial}{\partial z} \left[\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2}} j(u) u \, du \right] d\nu.$$

4° Si $t > \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$,

$$(17) \quad l_z = [\text{expression (16)}] - \frac{\sin I_2}{\Omega_2} B\left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o\right) F' \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right] \\ + \frac{i}{\pi \rho} \int_{\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}}^t F'(t - v) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\int \frac{v - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}} f(u) u \, du \right] dv.$$

64. Expressions de $A_3\left(\frac{R'}{\Omega_1} + o\right)$ et de $B\left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o\right)$. — Nous avons calculé $B\left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o\right)$ [cf. Chap. VI, équation (14)].

On calcule de même $A_3\left(\frac{R'}{\Omega_1} + o\right)$

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} A_3\left(\frac{R'}{\Omega_1} + o\right) &= \frac{2}{R'} \frac{1}{\left(\frac{v^2}{2} - \sin^2 I'\right)^2}, \\ B\left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o\right) &= -\frac{4 \sin^2 I_1 \cos 2 I_2}{v^2 \cos^2 2 I_2 + \sin 2 I_1 \sin 2 I_2} \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{h \sin I_1}{\cos^3 I_1} + \frac{z \sin I_2}{\cos^3 I_2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

65. Termes primaires et termes secondaires. — Il apparaît dès maintenant que les expressions de l_ρ et l_z se présentent comme la somme :

1° De termes qui s'expriment à l'aide des fonctions

$$F\left(t - \frac{R}{\Omega_1}\right) \quad \text{ou} \quad F\left(t - \frac{R'}{\Omega_1}\right),$$

ou encore

$$F'\left(t - \frac{R}{\Omega_1}\right), \quad F'\left(t - \frac{R'}{\Omega_1}\right), \quad F'\left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}\right)\right],$$

ou plus généralement

$$F^{(n)}\left(t - \frac{R}{\Omega_1}\right), \quad F^{(n)}\left(t - \frac{R'}{\Omega_1}\right), \quad F^{(n)}\left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}\right)\right],$$

multipliés par un facteur indépendant de t . Ces termes, qui correspondent à un phénomène de propagation particulièrement simple, seront dits « termes primaires ».

2° De termes que nous appellerons « secondaires », dans lesquels la fonction F figure sous un signe d'intégration. Il convient d'ailleurs de remarquer tout de suite que, d'un terme secondaire, on peut séparer de nouveaux termes primaires, et cela d'une façon arbitraire. Cette classification est cependant commode, comme la suite le montrera.

Pour abrégér le langage, nous dirons, suivant une terminologie déjà employée, que les termes secondaires, tels qu'ils sont explicités dans les relations (12), (13), (16), (17), admettent respectivement des « facteurs de transmission » M_ρ , N_ρ , M_z , N_z .

$$(19) \quad M_\rho = -\frac{i}{\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2}} j(u) u \, du \right] \\ = \frac{\rho i}{\pi} \int \{ u^2 \rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2 \}^{-\frac{3}{2}} j(u) u^3 \, du,$$

$$(20) \quad N_\rho = -\frac{i}{\pi \rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[\int \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u) u \, du \right] \\ = \frac{\rho i}{\pi} \int \{ u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2 \}^{-\frac{3}{2}} f(u) b u^3 \, du,$$

$$(21) \quad M_z = -\frac{i}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\int \frac{1}{\sqrt{u^2 \rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2}} j(u) u \, du \right] \\ = -\frac{i}{\pi} \int \{ u^2 \rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2 \}^{-\frac{3}{2}} [\nu - a(h+z)] j(u) a u \, du,$$

$$(22) \quad N_z = \frac{i}{\pi \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\int \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2 \rho^2 + (\nu - ah + bz)^2}} f(u) u \, du \right] \\ = -\frac{i}{\pi} \int \{ u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2 \}^{-\frac{3}{2}} [\nu - ah - bz] f(u) u^3 \, du.$$

66. Élongations à la surface du sol. — Pour un point M situé à la surface du sol, les formules sont beaucoup plus simples. On a en effet

$$z = 0, \quad I = I', \quad R = R' = R_1, \quad R_2 = 0.$$

De plus, les trois fronts d'onde atteignent simultanément le point M. l_ρ et l_z sont nuls jusqu'à l'instant $t = \frac{R}{\Omega_1}$. A partir de cet instant, l_ρ et l_z s'expriment ainsi

$$(23) \quad l_\rho = -\frac{\sin 2 I_2}{\Omega_1 R} \frac{2 \nu^2 \cos I}{\nu^2 \cos^2 2 I_2 + \sin 2 I \sin 2 I_2} F' \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right) \\ + \int_{\frac{R}{\Omega_1}}^t F'(t - \nu) S_\rho(\nu) \, d\nu;$$

$$(24) \quad l_z = \frac{\cos 2 I_2}{\Omega_1 R} \frac{2 \nu^2 \cos I}{\nu^2 \cos^2 2 I_2 + \sin 2 I \sin 2 I_2} F' \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right) \\ + \int_{\frac{R}{\Omega_1}}^t F'(t - \nu) S_z(\nu) \, d\nu,$$

où les facteurs de transmission S_ρ , S_z ont pour expression

$$(25) \quad S_\rho = \frac{\rho i}{2\pi\Omega^{\frac{3}{2}}} \int [u^2\rho^2 + (v - ah)^2]^{-\frac{3}{2}} \frac{bu^3}{D(u)} du.$$

$$(26) \quad S_z = \frac{i}{2\pi\Omega^{\frac{3}{2}}} \int [u^2\rho^2 + (v - ah)^2]^{-\frac{3}{2}} (v - ah) \frac{u^2 + \frac{1}{2\Omega^{\frac{3}{2}}}}{D(u)} u du.$$

67. Discontinuités cinématiques. — Nous n'avons démontré que les fonctions

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = \int_0^t F'(t - \nu) A(\nu) d\nu = \int_0^t F'(\nu) A(t - \nu) d\nu, \\ U = \int_0^t F'(t - \nu) B(\nu) d\nu = \int_0^t F'(\nu) B(t - \nu) d\nu, \end{array} \right.$$

constituaient une solution qu'en supposant essentiellement que $F(t)$ était indéfiniment dérivable ou, tout au moins, possédait des dérivées continues quel que soit t jusqu'à un ordre suffisamment élevé.

Supposons désormais que la fonction $F(t)$ est indéfiniment dérivable pour toute valeur de t sauf pour la valeur $t = 0$, où certaines des dérivées ne seront pas nulles, pourront même devenir infinies. La dérivée F' pourra également être supposée devenir infinie pour $t = 0$ (Exemple : $F(t) = \sqrt{t}$) pourvu que les équations (27) conservent un sens.

Nous envisagerons alors une fonction auxiliaire $\varphi(t)$ *indéfiniment dérivable* quel que soit t satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\varphi(t) \left\{ \begin{array}{ll} \equiv 0 & \text{pour } t \leq 0, \\ \equiv F(t) & \text{pour } t \geq t_1 > 0. \end{array} \right.$$

Il est clair qu'on peut toujours trouver, et cela d'une infinité de manières, une telle fonction $\varphi(t)$ assurant le *raccordement parfait* entre 0 et $F(t)$ dans un intervalle $(0, t_1)$ choisi d'avance aussi petit qu'on voudra. Par exemple, t_1 étant donné, on prendra un nombre quelconque t_0 dans l'intervalle $(0, t_1)$

$$0 < t_0 < t_1,$$

et l'on choisira pour fonction $\varphi(t)$

$$\varphi(t) \left\{ \begin{array}{ll} \equiv 0 & \text{pour } t \leq t_0, \\ = F(t) e^{-\frac{t-t_0}{t-t_0}} & \text{pour } t_0 < t < t_1, \\ \equiv F(t) & \text{pour } t \geq t_1. \end{array} \right.$$

Considérons alors les expressions

$$(28) \quad \begin{cases} \Psi_1 = \int_0^t \varphi'(t-v) A(v) dv = \int_0^t \varphi'(v) A(t-v) dv, \\ U_1 = \int_0^t \varphi'(t-v) B(v) dv = \int_0^t \varphi'(v) B(t-v) dv. \end{cases}$$

Supposons que t ne coïncide pas avec un des points de discontinuité v_i ⁽¹⁾. Soit $v_n < t < v_{n+1}$ et examinons l'expression d'une dérivée partielle de Ψ_1 ou U_1 , par exemple $\frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial \rho \partial z \partial t}$. Cette expression coïncide avec l'expression (26) du Chapitre III où l'on suppose F remplacé par φ . Si nous avons choisi t_1 assez petit pour que $t - t_1$ soit supérieur à v_n , il est indifférent de ne pas remplacer F par φ dans les termes de cette expression autres que le premier. Ces différents termes, autres que le premier, sont donc, pour $t - t_1$ suffisamment petit, indépendants du choix de la fonction de raccordement φ .

Quant au premier terme, on peut l'écrire

$$\int_0^{t-t_1} F'(t-v) \frac{\partial^3 A}{\partial \rho \partial z \partial v} dv + \int_{t-t_1}^t \varphi'(t-v) \frac{\partial^3 A}{\partial \rho \partial z \partial v} dv.$$

Ce premier terme a donc une limite lorsqu'on fait tendre t_1 vers zéro et cette limite est égale à

$$\int_0^t F'(t-v) \frac{\partial^3 A}{\partial \rho \partial z \partial v} dv.$$

On peut même préciser que ce premier terme tend uniformément vers sa limite en même temps que t_1 tend vers zéro, dans tout domaine borné des variables ρ, z, t dont sont exclues les valeurs

$$t = v_i(\rho, z).$$

C'est à ce point de vue que nous pouvons dire que les expressions (27) constituent aussi une solution du problème, mais, alors que toute vitesse, accélération, etc., est continue quels que soient ρ, z, t quand on suppose F indéfiniment dérivable, il n'en est plus de même lorsque cette condition n'est pas remplie. Les surfaces de front d'onde $t = v_i(\rho, z)$ sont alors le siège de discontinuités cinématiques.

(1) Comme au Chapitre III, nous envisageons ici l'existence d'une infinité de points de discontinuité, afin de donner au raisonnement un caractère plus général qu'il ne serait strictement nécessaire pour l'examen du problème particulier traité au présent chapitre.

L'onde directe débute par une discontinuité de vitesse $V\left(\frac{R}{\Omega_1} + o\right)$ si $F(o)$, $F'(o)$ sont nuls et si $F''(+o)$ est différent de zéro

$$(29) \quad V_{\text{dir}}\left(\frac{R}{\Omega_1} + o\right) = \frac{1}{R\Omega_1} F''(+o)$$

et, d'une manière générale, par une discontinuité cinématique dite du $n^{\text{ième}}$ ordre $E_{\text{dir}}^{(n)}\left(\frac{R}{\Omega_1} + o\right)$ si $F(o)$, $F'(o)$, \dots , $F^{(n)}(o)$ sont nuls et si $F^{(n+1)}(+o)$ est différent de zéro

$$(30) \quad E_{\text{dir}}^{(n)}\left(\frac{R}{\Omega_1} + o\right) = \frac{1}{R\Omega_1} F^{(n+1)}(+o) = \frac{K}{R}$$

en posant

$$(31) \quad K = \frac{1}{\Omega_1} F^{(n+1)}(+o).$$

Lorsque nous supposons ainsi que $F^{(n+1)}(t)$ est la première dérivée discontinue, l'onde réfléchie de condensation débute aussi par une discontinuité cinématique du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$(32) \quad E_{\text{réf. cond.}}^{(n)}\left(\frac{R'}{\Omega_1} + o\right) = \left[\frac{1}{R'\Omega_1} - \frac{1}{\Omega_1} A_3 \left(\frac{R'}{\Omega_1} + o\right) \right] F^{(n+1)}(+o) \\ = K \left[\frac{1}{R'} - A_3 \left(\frac{R'}{\Omega_1} + o\right) \right].$$

Il en est de même pour l'onde réfléchie de distorsion qui débute par la discontinuité du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$(33) \quad E_{\text{réf. dist.}}^{(n)}\left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o\right) = \frac{1}{\Omega_2} B \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o\right) F^{(n+1)}(+o) \\ = K \nu B \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o\right).$$

Enfin, à la surface du sol, l'arrivée de l'onde unique se marque également par une discontinuité du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$(34) \quad E_S^{(n)} = \frac{2\nu^2 \cos I}{\Omega_1 R (\nu^2 \cos^2 2I_2 + \sin 2I \sin 2I_2)} F^{(n+1)}(+o) \\ = \frac{K}{R} \frac{2\nu^2 \cos I}{\nu^2 \cos^2 2I_2 + \sin 2I \sin 2I_2}.$$

Il apparaît donc que ce sont les termes primaires des relations (11) à (17), (23) et (24) et même ceux de ces termes primaires seulement

qui dépendent de F' , qui contribuent à fixer la valeur des discontinuités cinématiques. Telle est la raison profonde de la grande simplicité des lois de la propagation d'une discontinuité cinématique, mais cette remarque met également en lumière combien il est insuffisant de traiter le problème de la propagation d'une onde au seul point de vue de la propagation des discontinuités.

Terminons par une remarque évidente : si $F^{(n)}(t)$ est continue et si $F^{(n+1)}(+0)$ est infinie, les fronts d'onde ne sont le siège d'aucune discontinuité cinématique d'ordre inférieur à n , mais les accélérations d'ordre $n - 1$ sont infinies sur tous les fronts.

Nous complétons cette discussion par une application numérique.

68. Valeurs numériques de la discontinuité cinématique propagée par l'onde réfléchie de condensation. — On a trouvé [équation (32)]

$$(35) \quad E_{\text{réf. cond.}}^{(n)} = K \left[\frac{1}{R'} - A_3 \left(\frac{R'}{\Omega_1} + 0 \right) \right] = \frac{K}{R'} \eta(I')$$

en posant

$$(36) \quad \eta(I') = \frac{\left(\frac{v^2}{2} - \sin^2 I' \right)^2 - \sin^2 I' \cos I' \sqrt{v^2 - \sin^2 I'}}{\left(\frac{v^2}{2} - \sin^2 I' \right)^2 + \sin^2 I' \cos I' \sqrt{v^2 - \sin^2 I'}}$$

Table des valeurs de la fonction $\eta(I')$ pour $v = \sqrt{3}$.

I' (degrés).	$\eta(I')$.	I' (degrés).	$\eta(I')$.
0.....	1	50.....	0,548
5.....	0,996	55.....	0,464
10.....	0,984	60.....	0,384
15.....	0,964	65.....	0,324
20.....	0,934	70.....	0,296
25.....	0,896	75.....	0,314
30.....	0,846	80.....	0,408
35.....	0,786	85.....	0,616
40.....	0,714	90.....	1
45.....	0,634		

La fonction $\eta(I')$ est représentée graphiquement figure 42. La figure 43 est un diagramme de la discontinuité le long du front d'onde, obtenu en portant sur les rayons vecteurs issus de S' des vecteurs proportionnels aux discontinuités cinématiques, et dont l'origine est sur le front d'onde.

On notera que si la discontinuité propagée par l'onde incidente est dirigée vers S, celle qui est propagée par l'onde réfléchie de condensation est dirigée de S' vers M.

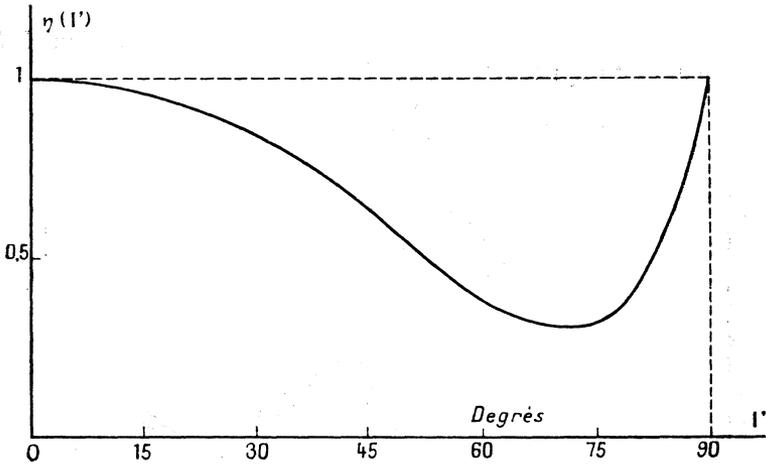


Fig. 42.

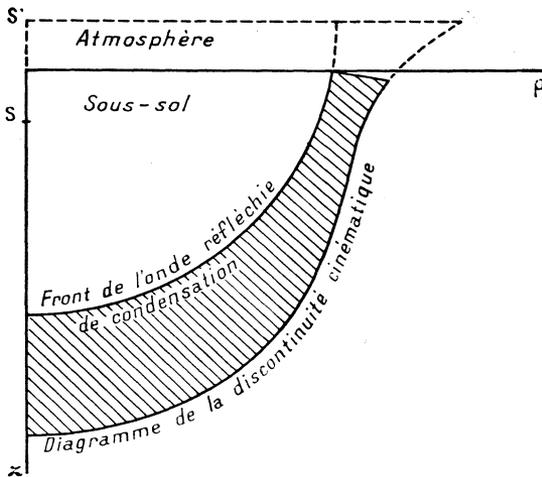


Fig. 43.

69. Valeurs numériques de la discontinuité cinématique propagée par l'onde réfléchie de distorsion. — Il est intéressant de considérer la variation de cette discontinuité le long de la méridienne du front d'onde, c'est-

à-dire pour une valeur constante de la distance P définie par

$$(37) \quad \frac{P}{\Omega_2} = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \quad \text{ou} \quad P = R_2 + \frac{R_1}{v}.$$

P représente la distance du front d'onde considéré au front virtuel dont la méridienne est l'hyperbole d'équation

$$\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} = 0.$$

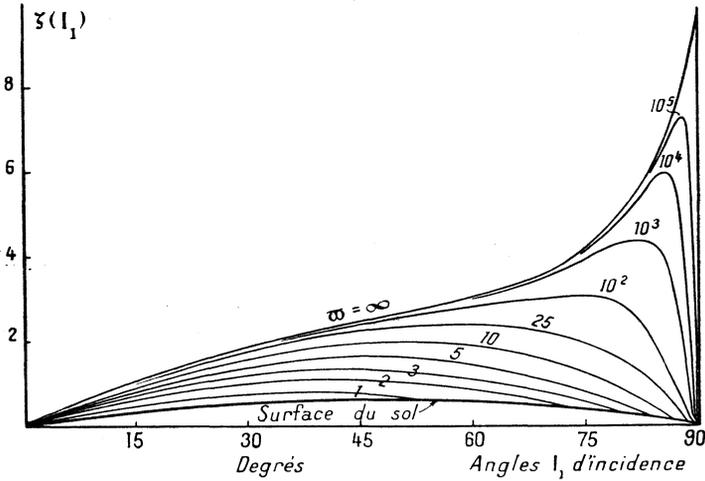


Fig. 44.

En posant

$$\bar{\omega} = \frac{P}{h},$$

il vient

$$(38) \quad \mathbf{E}_{\text{réf. dist.}}^{(n)} = -\frac{K}{P} \zeta(I_1, \bar{\omega})$$

avec

$$(39) \quad \zeta(I_1, \bar{\omega}) = \frac{v^3 \sin 4 I_2}{v^2 \cos^2 2 I_2 + \sin 2 I_1 \sin 2 I_2} \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\left(\bar{\omega} + \frac{v^2 - 1}{v \cos I_1}\right) \left(\bar{\omega} + \frac{v^2 - 1}{v \cos^3 I_1}\right)}}.$$

Ci-contre une table des valeurs numériques de la fonction $\zeta(I_1, \bar{\omega})$ pour $v = \sqrt{3}$ et différentes valeurs de $\bar{\omega}$, ainsi que le réseau des courbes correspondantes (fig. 44).

La figure 45 est un diagramme de la propagation de la discontinuité cinématique aux petites distances de la source ($\bar{\omega} = 2, 5, 10$). Pour plus de clarté, le diagramme a été obtenu en portant sur les normales au front d'onde, à partir de ce front, des vecteurs proportionnels aux discontinuités, mais on n'oubliera pas que ces discontinuités sont en réalité tangentes à la méridienne de la surface d'onde et dirigées vers le bas si les discontinuités propagées par l'onde directe sont dirigées vers S.

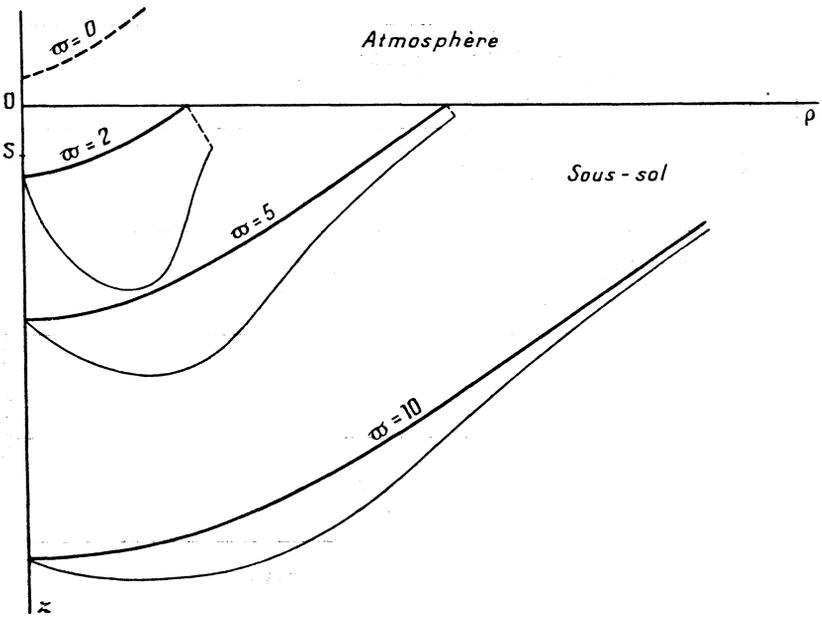


Fig. 45.

Examinons encore le cas limite de $P = \infty$.

Si P est très grand par rapport à h , de telle sorte qu'à l'échelle du dessin (fig. 46) la source S soit pratiquement située sur la surface du sol, les deux fronts d'onde de condensation sont, à un instant donné t , pratiquement confondus avec un hémisphère de centre O , de rayon $\Omega_1 t$. Quant au front d'onde de distorsion, il est constitué par une calotte sphérique BB' de centre O , de rayon $\Omega_2 t$, prolongée par le tronc de cône dont AB est la méridienne. OB est la méridienne d'un cône de sommet O ,

d'axe Oz , dont le demi-angle au sommet est égal à l'angle limite l

$$\sin l = \frac{1}{v}.$$

Il est d'ailleurs assez curieux de constater en passant que cette forme limite est précisément celle des ondes à front conique.

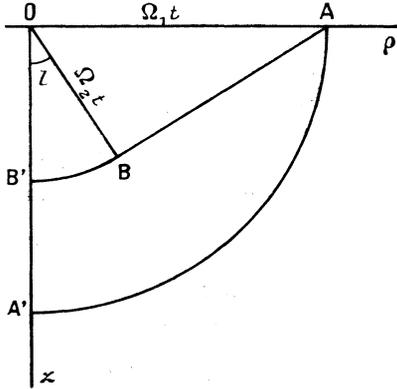


Fig. 46.

Lorsque P est très grand, il est commode d'exprimer les discontinuités limites en fonction de R et de I . Deux cas sont à envisager :

1° Pour $I \leq \pi - l$ (intérieur du cône OB)

$$(40) \quad E_{\text{réf. dist.}}^{(n)} = -\frac{K}{R} \xi(I)$$

en posant

$$(41) \quad \xi(I) = \frac{v^2 \sin 4I}{v \cos^2 2I - 2 \sin I \sin 2I \sqrt{1 - v^2 \sin^2 I}}.$$

Nous n'avons pas mis en table la fonction $\xi(I)$ car la connaissance de la fonction $\zeta(I_1, +\infty)$ lui est équivalente.

2° Pour $I > \pi - l$ (extérieur du cône OB)

$$(42) \quad E_{\text{réf. dist.}}^{(n)} = -\frac{K}{R} \frac{h}{R} \chi(I),$$

en posant

$$(43) \quad \chi(I) = \frac{4v \cos^{\frac{3}{2}} l}{v^2 - 2} \sin^{-\frac{3}{2}}(I + l) \sin^{-\frac{1}{2}} I.$$

Table des valeurs de $\chi(I)$ pour $\nu = \sqrt{3}$.

I (grades).	$\chi(I)$.	I (grades).	$\chi(I)$.	I (grades).	$\chi(I)$.
100.....	6,929	125.....	13,66	150.....	87,50
105.....	7,597	130.....	17,06	155.....	230,5
110.....	8,488	135.....	22,35	160.....	4646
115.....	9,688	140.....	31,23	} $\pi - l$ = 160 ⁶ ,81	∞
120.....	11,33	145.....	41,95		

La figure 47 représente la répartition limite de la discontinuité cinématique de distorsion le long du front d'onde. Comme précédemment,

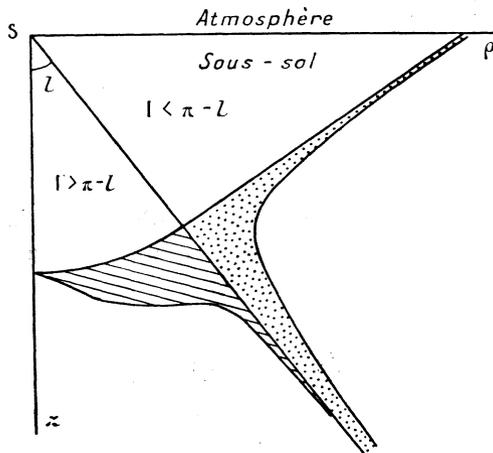


Fig. 47.

la grandeur de la discontinuité a été portée suivant la normale au front d'onde. Bien que nous n'ayons fait qu'une seule figure, les deux régions $I < \pi - l$ et $I > \pi - l$ doivent être considérées comme entièrement indépendantes. On se heurte, en effet, à la difficulté graphique suivante : si, pour fixer les idées, nous posons $\frac{h}{R} = 10^{-6}$ et représentons R par une longueur de 10^{cm} , h sera représenté par une longueur $0^{\mu},1$. C'est donc avec une approximation de l'ordre du dixième de micron

que la méridienne du front d'onde peut être figurée, à cette échelle, sous la forme d'un arc de cercle prolongé par une tangente. Il n'y a pas jusqu'à présent de difficulté mais si, dans la région $I < \pi - l$, nous représentons les discontinuités cinématiques par des vecteurs de quelques centimètres de longueur, ces mêmes discontinuités ne seront plus figurées, dans la région $I > \pi - l$, que par des vecteurs de quelques microns ou dixièmes de micron. L'échelle du dessin est donc d'un ordre de grandeur très différent dans les deux régions, le rapport des échelles étant de l'ordre de $\frac{h}{R}$.

Il faut retenir particulièrement de cette discussion les remarques suivantes :

1° Bien que l'onde initiale soit de condensation pure, l'onde de distorsion qui prend naissance par réflexion est loin de présenter une importance négligeable : en particulier les discontinuités cinématiques propagées par cette onde de distorsion peuvent, à distances égales, être près de dix fois supérieures à celles que propage l'onde initiale.

2° Il existe à grande distance de la source une véritable concentration de l'onde de distorsion à l'intérieur d'un cône de révolution de demi-angle au sommet égal à l .

La grandeur de la discontinuité cinématique de distorsion subit, au voisinage de $I = \pi - l$, une variation d'autant plus rapide que la distance à la source est plus grande.

70. Discontinuité cinématique à la surface du sol. — On discute de même d'après (34) l'expression de la discontinuité cinématique à la surface du sol, rapportée au sens positif \hat{s}

$$(44) \quad E_S^{(r)} = \frac{K}{R} \sigma(I)$$

en posant

$$(45) \quad \sigma(I) = \frac{2\nu^2 \cos I}{\nu^2 \cos^2 2I_2 + \sin 2I \sin 2I_2}.$$

Ci-dessous une table de $\sigma(I)$ pour $\nu = \sqrt{3}$, la courbe représentative de $\sigma(I)$ (*fig.* 48), celle de $\sigma(I)$ en fonction de $\tan I$ (*fig.* 49)

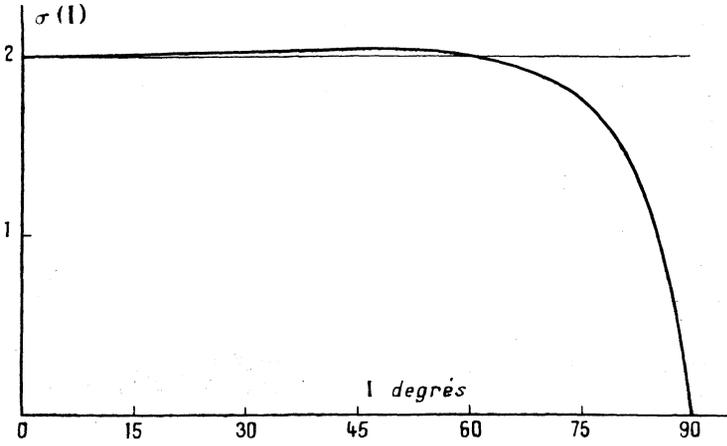


Fig. 48.

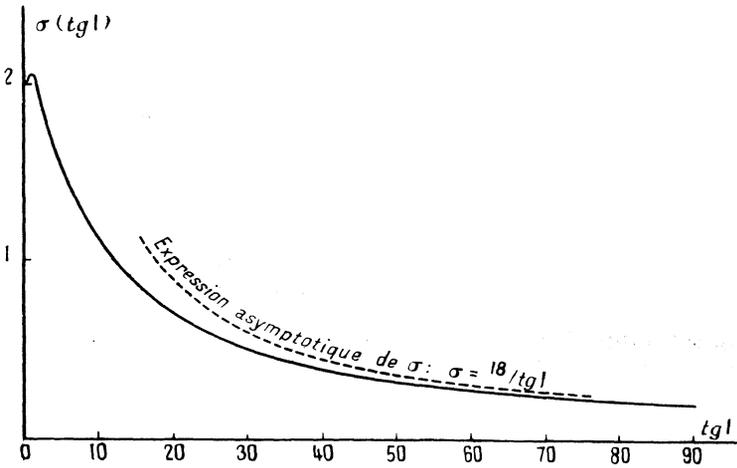


Fig. 49. — Les abscisses représentent les distances à l'épicentre lorsque l'on choisit h pour unité.

et un diagramme des discontinuités cinématiques à la surface du sol (fig. 50).

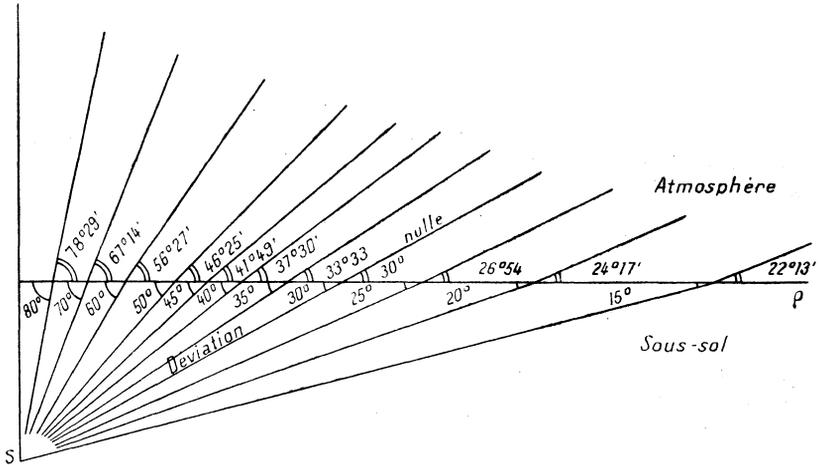


Fig. 50. — Discontinuité cinématique aux petites distances de l'épicentre ($K < 0$).

Table des valeurs de $\sigma(I)$ pour $\nu = \sqrt{3}$.

I (degrés).	$\sigma(I)$.	I (degrés).	$\sigma(I)$.	I (degrés).	$\sigma(I)$.
0.....	2	60.....	2	87.....	0,7210
10.....	2,004	65.....	1,955	87°30'.....	0,6261
20.....	2,014	70.....	1,877	88.....	0,5229
30.....	2,028	75.....	1,742	88°30'.....	0,4096
40.....	2,040	80.....	1,5	89.....	0,2858
45.....	2,040	83.....	1,260	89°30'.....	0,1496
50.....	2,038	85.....	1,031	90.....	0
55.....	2,025	86.....	0,8884		

71. **Décomposition des facteurs de transmission** M_ρ , M_z , N_ρ , N_z , S_ρ , S_z . — Les intégrales qui figurent dans les expressions (19) à (22) sont effectuées le long des circuits (C, C') et (D) que nous remplaçons par les circuits (R), (E), (P, P') conformément à l'équation (25) du Chapitre V

$$(46) \quad \int_{(C, C')} + \int_{(D)} = - \int_{(R)} - \int_{(E)} - \int_{(P, P')}$$

Nous écrivons

$$(47) \quad M_\rho = M_\rho^{(R)} + M_\rho^{(E)} + M_\rho^{(P, P')}$$

et décomposerons de même en trois termes les autres facteurs de transmission.

72. Nouveaux termes primaires provenant de $M_\rho^{(R)}$, $M_z^{(R)}$, $N_\rho^{(R)}$, $N_z^{(R)}$. — Les expressions $M_\rho^{(R)}$, $M_z^{(R)}$, $N_\rho^{(R)}$, $N_z^{(R)}$ se déduisent de suite des résultats du Chapitre VIII

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} M_\rho^{(R)} &= -\frac{2 \sin I'}{(\nu^2 - 1)R'^2} \left[3 \cos^2 I' + \frac{\nu^4 + 1}{2(\nu^2 - 1)} \right] \\ &\quad + \frac{6 \Omega_1^2 \rho^2}{(\nu^2 - 1)R'^4} \sin I' (5 \cos^2 I' - 1), \\ M_z^{(R)} &= -\frac{2 \cos I'}{(\nu^2 - 1)R'^2} \left[3 \cos^2 I' + \frac{\nu^4 - 4\nu^2 + 5}{2(\nu^2 - 1)} \right] \\ &\quad + \frac{6 \Omega_1^2 \rho^2}{(\nu^2 - 1)R'^4} \cos I' (5 \cos^2 I' - 3), \\ N_\rho^{(R)} &= -\frac{3h}{R'^3} \sin 2I' + \frac{\nu^2 \sin I'}{(\nu^2 - 1)R'^2} \left[6 \cos^2 I' + \frac{2\nu^2 + 1 - \nu^4}{\nu^2(\nu^2 - 1)} \right] \\ &\quad - \frac{6 \Omega_1^2 \rho^2}{(\nu^2 - 1)R'^4} \sin I' (5 \cos^2 I' - 1), \\ N_z^{(R)} &= -\frac{2h}{R'^3} (3 \cos^2 I' - 1) + \frac{\nu^2 \cos I'}{(\nu^2 - 1)R'^2} \left[6 \cos^2 I' + \frac{2\nu^2 + 1 - \nu^4}{\nu^2(\nu^2 - 1)} \right] \\ &\quad - \frac{6 \Omega_1^2 \rho^2}{(\nu^2 - 1)R'^4} \cos I' (5 \cos^2 I' - 3). \end{aligned} \right.$$

De même

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} S_\rho^{(R)} &= -\frac{3h}{R'^3} \sin 2I' + \frac{2 \sin I'}{R'^2} \left(3 \cos^2 I' - \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} \right), \\ S_z^{(R)} &= -\frac{2h}{R'^3} (3 \cos^2 I' - 1) + \frac{2 \cos I'}{R'^2} \left(3 \cos^2 I' - \frac{\nu^2 - 2}{\nu^2 - 1} \right) \end{aligned} \right.$$

ou

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} S_\rho^{(R)} &= -\frac{2 \sin I}{R^2} \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1}, \\ S_z^{(R)} &= \frac{2 \cos I}{R^2} \frac{1}{\nu^2 - 1}. \end{aligned} \right.$$

L'intégration des expressions telles que

$$\int_{R'}^t F'(t - \nu) M_\rho^{(R)} d\nu$$

est immédiate. Elle nécessite une intégration par parties à cause des

termes en ν^2 : ainsi s'introduisent la primitive de $F(t)$ que nous désignerons par $F^{\square}(t)$ et la primitive de $F^{\square}(t)$ que nous désignerons par $F^{\square}(t)$

$$F^{\square}(t) = \int_0^t F(t) dt, \quad F^{\square}(t) = \int_0^t F^{\square}(t) dt.$$

On obtient ainsi les nouveaux termes primaires suivants :

1° Pour l_p

$$(51) \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2 \sin I'}{(\nu^2 - 1)R'^2} \left[3 \cos^2 I' + \frac{\nu^4 + 1}{2(\nu^2 - 1)} \right] F \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right), \\ & + \frac{6\Omega_1^2}{(\nu^2 - 1)R'^4} \sin I' (5 \cos^2 I' - 1) \\ & \quad \times \left[\frac{R'^2}{\Omega_1^2} F \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) + \frac{2R'}{\Omega_1} F^{\square} \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) + 2F^{\square} \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) \right], \\ & + \frac{\nu^2 \sin I'}{(\nu^2 - 1)R'^2} \left[6 \cos^2 I' + \frac{2\nu^2 + 1 - \nu^4}{\nu^2(\nu^2 - 1)} \right] F \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right], \\ & - \frac{3h}{R'^3} \sin 2I' \cdot F \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right], \\ & - \frac{6\Omega_1^2}{(\nu^2 - 1)R'^4} \sin I' (5 \cos^2 I' - 1) \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right)^2 F \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) F^{\square} \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right] + 2F^{\square} \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

2° Pour l_z ,

$$(52) \left\{ \begin{aligned} & - \frac{2 \cos I'}{(\nu^2 - 1)R'^2} \left[3 \cos^2 I' + \frac{\nu^4 - 4\nu^2 + 5}{2(\nu^2 - 1)} \right] F \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right), \\ & + \frac{6\Omega_1^2}{(\nu^2 - 1)R'^4} \cos I' (5 \cos^2 I' - 3) \\ & \quad \times \left[\frac{R'^2}{\Omega_1^2} F \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) + \frac{2R'}{\Omega_1} F^{\square} \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) + 2F^{\square} \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right) \right], \\ & - \frac{2h}{R'^3} (3 \cos^2 I' - 1) F \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right], \\ & + \frac{\nu^2 \cos I'}{(\nu^2 - 1)R'^2} \left[6 \cos^2 I' + \frac{2\nu^2 + 1 - \nu^4}{\nu^2(\nu^2 - 1)} \right] F \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right], \\ & - \frac{6\Omega_1^2}{(\nu^2 - 1)R'^4} \cos I' (5 \cos^2 I' - 3) \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right)^2 F \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) F^{\square} \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right] + 2F^{\square} \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

3° A la surface du sol, pour $(l_p)_s$,

$$(53) \quad - \frac{2 \sin I}{R^2} \frac{v^2}{v^2 - 1} F \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right).$$

4° A la surface du sol, pour $(l_z)_s$,

$$(54) \quad \frac{2 \cos I}{R^2} \frac{1}{v^2 - 1} F \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right).$$

73. Discussion des termes primaires. — Nous nous arrêterons à la classification qui vient d'être obtenue :

1° D'une part les termes primaires mis en évidence dans les expressions (11) à (17), (23) et (24) auxquels viennent s'ajouter les nouveaux termes primaires des relations (51) à (54).

2° D'autre part les termes secondaires, que nous discuterons dans les deux chapitres suivants, et qui dépendent respectivement de facteurs de transmission

$$M^{(P,P)}, \quad N^{(P,P)}, \quad S^{(P,P)} \quad \text{et} \quad M^{(E)}, \quad N^{(E)}, \quad S^{(E)}.$$

Nous terminerons le présent chapitre par la discussion des termes primaires.

Nous classerons ces derniers en quatre catégories suivant qu'ils dépendent de la dérivée F' (première catégorie), de la fonction F (deuxième catégorie) ou des primitives F^{II} et F^{III} (troisième et quatrième catégories).

74. Termes primaires de première catégorie. — Ce sont

1° Pour l'onde directe

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_z \dots\dots\dots - \frac{\sin I}{R \Omega_1} F' \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right), \\ b. \text{ Pour } l_p \dots\dots\dots \frac{\cos I}{R \Omega_1} F' \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right). \end{array} \right.$$

2° Pour l'onde réfléchie de condensation

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_z \dots\dots\dots \frac{\sin I'}{\Omega_1} \left[\frac{1'}{R'} - \Lambda_3 \left(\frac{R'}{\Omega_1} + 0 \right) \right] F' \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right), \\ b. \text{ Pour } l_p \dots\dots\dots \frac{\cos I'}{\Omega_1} \left[\frac{1}{R'} - \Lambda_3 \left(\frac{R'}{\Omega_1} + 0 \right) \right] F' \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right). \end{array} \right.$$

3° Pour l'onde réfléchie de distorsion

$$(57) \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_{\rho} \dots\dots\dots \frac{\cos I_2}{\Omega_2} B \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o \right) F' \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right], \\ b. \text{ Pour } l_z \dots\dots\dots - \frac{\sin I_2}{\Omega_2} B \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + o \right) F' \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right]. \end{array} \right.$$

4° A la surface du sol

$$(58) \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_{\rho} \dots\dots\dots - \frac{\sin 2 I_2}{\Omega_1 R} \frac{2 \nu^2 \cos I}{\nu^2 \cos^2 2 I_2 + \sin 2 I \sin 2 I_2} F' \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right), \\ b. \text{ Pour } l_z \dots\dots\dots \frac{\cos 2 I_2}{\Omega_1 R} \frac{2 \nu^2 \cos I}{\nu^2 \cos^2 2 I_2 + \sin 2 I \sin 2 I_2} F' \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right). \end{array} \right.$$

Tous ces termes de première catégorie représentent des vibrations rectilignes respectivement portées par les directions \vec{d} , \vec{r} , \vec{t} , \vec{s} . Ces vibrations sont donc longitudinales, c'est-à-dire dirigées suivant les « rayons », pour les ondes de condensation, transversales, c'est-à-dire dirigées normalement aux « rayons » pour l'onde de distorsion. Notons qu'à la surface du sol, on retrouve la loi d'émergence qui est classique pour le cas d'une onde incidente plane, harmonique, de condensation.

A une grande distance de la source, les amplitudes sont infiniment petites, dans une direction donnée, comme $\frac{1}{R}$, exception faite, pour l'onde de distorsion, du domaine $I < \pi - l$ où les amplitudes décroissent en raison inverse du carré R^2 .

Il n'est pas nécessaire de discuter plus à fond la répartition des amplitudes aux divers points d'un front d'onde, cette discussion étant identique, comme nous l'avons observé, à celle des discontinuités.

Ce qu'il importe de remarquer est que les états vibratoires représentés par les termes primaires, quelle que soit la catégorie de ces derniers, ont la même durée t_0 que l'excitation. Ces états vibratoires chevauchent ou non les uns sur les autres suivant que la durée d'excitation t_0 sera supérieure ou inférieure aux intervalles de temps qui séparent les passages des ondes successives en un même point.

75. Termes primaires de seconde catégorie. — Ce sont

1° Pour l'onde directe

$$(59) \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_{\rho} \dots\dots\dots - \frac{\sin I}{R^2} F \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right), \\ b. \text{ Pour } l_z \dots\dots\dots \frac{\cos I}{R^2} F \left(t - \frac{R}{\Omega_1} \right). \end{array} \right.$$

2° Pour l'onde réfléchie de condensation

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_{\rho} \dots\dots\dots \frac{2 \sin I'}{(\nu^2 - 1)^2 R'^2} (12 \cos^2 I' - 4\nu^2 + 3) F\left(t - \frac{R'}{\Omega_1}\right), \\ b. \text{ Pour } l_z \dots\dots\dots \frac{2 \cos I'}{(\nu^2 - 1)^2 R'^2} (12 \cos^2 I' - 8\nu^2 + 7) F\left(t - \frac{R'}{\Omega_1}\right). \end{array} \right.$$

3° Pour l'onde réfléchie de distorsion

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_{\rho} \dots \left\{ \frac{\nu^2 \sin I'}{(\nu^2 - 1) R'^2} \left[6 \cos^2 I' + \frac{2\nu^2 + 1 - \nu^4}{\nu^2(\nu^2 - 1)} \right] - \frac{3h}{R'^3} \sin 2I' \right. \\ \quad \left. - \frac{6\Omega_1^2}{(\nu^2 - 1) R'^4} \sin I' (5 \cos^2 I' - 1) \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right)^2 \right\} \\ \quad \times F\left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right], \\ b. \text{ Pour } l_z \dots \left\{ \frac{\nu^2 \cos I'}{(\nu^2 - 1) R'^2} \left[6 \cos^2 I' + \frac{2\nu^2 + 1 - \nu^4}{\nu^2(\nu^2 - 1)} \right] - \frac{2h}{R'^3} (3 \cos^2 I' - 1) \right. \\ \quad \left. - \frac{6\Omega_1^2}{(\nu^2 - 1) R'^4} \cos I' (5 \cos^2 I' - 3) \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right)^2 \right\} \\ \quad \times F\left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right]. \end{array} \right.$$

4° A la surface du sol

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_{\rho} \dots\dots\dots - \frac{2 \sin I}{R^2} \frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} F\left(t - \frac{R}{\Omega_1}\right), \\ b. \text{ Pour } l_z \dots\dots\dots \frac{2 \cos I}{R^2} \frac{1}{\nu^2 - 1} F\left(t - \frac{R}{\Omega_1}\right). \end{array} \right.$$

Ces termes de seconde catégorie représentent encore des vibrations rectilignes dont l'amplitude décroît en raison inverse du carré de la distance à la source. Les directions de ces vibrations ne sont pas les mêmes que celles qui correspondent aux termes de première catégorie.

76. Termes primaires de troisième catégorie. — Ce sont

1° Pour l'onde réfléchie de condensation

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_{\rho} \dots\dots\dots \frac{12 \Omega_1}{(\nu^2 - 1) R'^3} \sin I' (5 \cos^2 I' - 1) F^{\square}\left(t - \frac{R'}{\Omega_1}\right), \\ b. \text{ Pour } l_z \dots\dots\dots \frac{12 \Omega_1}{(\nu^2 - 1) R'^3} \cos I' (5 \cos^2 I' - 3) F^{\square}\left(t - \frac{R'}{\Omega_1}\right). \end{array} \right.$$

2° Pour l'onde réfléchie de distorsion

$$(64) \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_{\rho} \dots - \frac{12 \Omega_1^2}{\nu^2 - 1} \frac{\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}}{R'^{\frac{1}{2}}} \sin I' (5 \cos^2 I' - 1) F^{\text{II}} \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right], \\ b. \text{ Pour } l_z \dots - \frac{12 \Omega_1^2}{\nu^2 - 1} \frac{\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}}{R'^{\frac{1}{2}}} \cos I' (5 \cos^2 I' - 3) F^{\text{III}} \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right]. \end{array} \right.$$

L'onde directe et la vibration à la surface du sol ne comportent pas de termes de troisième ni quatrième catégories.

Les amplitudes décroissent en raison inverse du cube de la distance.

77. Termes primaires de quatrième catégorie. — Ce sont

1° Pour l'onde réfléchie de condensation

$$(65) \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_{\rho} \dots \dots \frac{12 \Omega_1^2}{(\nu^2 - 1) R'^{\frac{1}{2}}} \sin I' (5 \cos^2 I' - 1) F^{\text{III}} \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right), \\ b. \text{ Pour } l_z \dots \dots \frac{12 \Omega_1^2}{(\nu^2 - 1) R'^{\frac{1}{2}}} \cos I' (5 \cos^2 I' - 3) F^{\text{IV}} \left(t - \frac{R'}{\Omega_1} \right). \end{array} \right.$$

2° Pour l'onde réfléchie de distorsion

$$(66) \left\{ \begin{array}{l} a. \text{ Pour } l_{\rho} \dots - \frac{12 \Omega_1^2}{(\nu^2 - 1) R'^{\frac{1}{2}}} \sin I' (5 \cos^2 I' - 1) F^{\text{III}} \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right], \\ b. \text{ Pour } l_z \dots - \frac{12 \Omega_1^2}{(\nu^2 - 1) R'^{\frac{1}{2}}} \cos I' (5 \cos^2 I' - 3) F^{\text{IV}} \left[t - \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Les amplitudes décroissent en raison inverse de la quatrième puissance de la distance.

Remarque. — On dit fréquemment que le phénomène de propagation « régularise » les ondes. On entend par là que la courbe représentative de l'élongation en fonction du temps est plus « régulière », d'allure moins tourmentée, à grande distance qu'à petite distance de la source.

Or si, comme nous le verrons, le fait est exact pour les termes secondaires, il est faux pour les termes primaires, car les termes primaires dont l'importance est prépondérante à grande distance sont les termes de première catégorie qui dépendent de F' alors que les termes prépondérants à petite distance sont ceux des catégories supérieures qui dépendent de F ou de ses primitives. Or une fonction est représentée en général par une courbe moins régulière que ses primitives.



CHAPITRE XI.

ONDE PROGRESSIVE QUAND LE SECOND MILIEU EST LE VIDE (*suite*).
L'ONDE DE RAYLEIGH.

78. Modules et arguments de quantités complexes. — Par définition, l'onde de Rayleigh, envisagée ici d'un point de vue beaucoup plus général que le phénomène superficiel harmonique et permanent désigné sous ce nom dans le vocabulaire de la séismologie théorique, est constituée par le phénomène admettant pour facteurs de transmission

$$M_2^{(P,P)}, M_2^{(P,P')}, N_2^{(P,P')}, N_2^{(P,P)}, S_2^{(P,P')}, S_2^{(P,P)}.$$

On obtient ces facteurs par un calcul de résidus. Les racines de $D(u)$

$$(1) \quad D(u) = \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_R^2} \right)^2 - abu^2$$

sont désignées par $\pm \frac{i}{\Omega_R}$.

Nous poserons

$$(2) \quad \frac{\Omega_1}{\Omega_R} = m.$$

On a donc, en vertu de (1)

$$(3) \quad \left(m^2 - \frac{\nu^2}{2} \right)^2 = m^2 \sqrt{(m^2 - 1)(m^2 - \nu^2)}.$$

Par élévation au carré, l'équation (3) conduit à une équation du troisième degré en m^2 qui est en relation étroite avec l'équation classique de Rayleigh. (L'équation du troisième degré de Rayleigh dépend de l'inconnue $\frac{m^2}{\nu^2}$.) Bornons-nous à rappeler que, pour $\nu = \sqrt{3}$, on a

$$(4) \quad m = \frac{\sqrt{9 + 3\sqrt{3}}}{2} = 1,883\ 889 \dots,$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad \Omega_R = 0,9194 \dots \Omega_2.$$

Pour calculer commodément les résidus, on est conduit à mettre en

et

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = (\tau^2 - m^2 + \cos^2 I)^2 + 4\tau^2(m^2 - 1)\cos^2 I, \\ \operatorname{tang} \psi_1 = \frac{2\tau \cos I \sqrt{m^2 - 1}}{\tau^2 - m^2 + \cos^2 I} \quad (0 < \psi_1 < \pi), \\ S_2 = \tau^2 + (m^2 - 1)\cos^2 I, \\ \operatorname{tang} \psi_2 = \sqrt{m^2 - 1} \frac{\cos I}{\tau} \quad (0 < \psi_2 < \frac{\pi}{2}). \end{array} \right.$$

Le calcul des résidus introduit encore quelques coefficients numériques. Nous désignerons par δ celui qui a l'expression la plus compliquée

$$(11) \quad \delta = \frac{1}{\Omega_1^2 \left\{ \frac{d}{du^2} D(u) \right\}_{u = -\frac{i}{\Omega_R}}} \\ = \frac{2\sqrt{(m^2 - 1)(m^2 - v^2)}}{4m^4 - 3m^2(1 + v^2) + 2v^2 - 4\left(m^2 - \frac{v^2}{2}\right)\sqrt{(m^2 - 1)(m^2 - v^2)}} \\ = 2 \frac{\left(m^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2}{3m^4(v^2 - 1) - m^2v^2(3v^2 - 2) + \frac{v^6}{2}}.$$

79. Facteurs de transmission de l'onde de Rayleigh. — Ils s'expriment alors, en fonction des modules et arguments, par les relations

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_\rho^{(P, P')} = -\frac{2\delta m^4 \sqrt{m^2 - v^2}}{R'^2} M_1^{-\frac{3}{4}} \sin \frac{3\theta_1}{2} \sin I', \\ M_z^{(P, P')} = -\frac{2\delta \left(m^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2}{R'^2} M_1^{-\frac{3}{4}} M_2^{\frac{1}{2}} \cos \left(\theta_2 - \frac{3\theta_1}{2}\right), \\ N_\rho^{(P, P')} = \frac{2\delta m^2 \left(m^2 - \frac{v^2}{2}\right) \sqrt{m^2 - v^2}}{R'^2} N_1^{-\frac{3}{4}} \sin \frac{3\varphi_1}{2} \sin I', \\ N_z^{(P, P')} = \frac{2\delta m^2 \left(m^2 - \frac{v^2}{2}\right)}{R'^2} N_1^{-\frac{3}{4}} N_2^{\frac{1}{2}} \cos \left(\varphi_2 - \frac{3\varphi_1}{2}\right), \\ S_\rho^{(P, P')} = -\frac{\delta m^2 v^2 \sqrt{m^2 - v^2}}{R^2} S_1^{-\frac{3}{4}} \sin \frac{3\psi_1}{2} \sin I, \\ S_z^{(P, P')} = \frac{\delta v^2 \left(m^2 - \frac{v^2}{2}\right)}{R^2} S_1^{-\frac{3}{4}} S_2^{\frac{1}{2}} \cos \left(\psi_2 - \frac{3\psi_1}{2}\right). \end{array} \right.$$

Le front de l'onde de condensation $M_\rho^{(P, P')}$, $M_z^{(P, P')}$ est la surface d'équa-

tion $t = \frac{R'}{\Omega_1}$, le front de l'onde de distorsion $N_{\rho}^{(p,p)}$, $N_z^{(p,p)}$ qui, avec la première, constitue l'onde de Rayleigh est la surface d'équation

$$t = \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}.$$

L'onde de condensation $M_{\rho}^{(p,p)}$, $M_z^{(p,p)}$ ne représente qu'une partie de l'onde réfléchie de condensation. De même l'onde de distorsion $N_{\rho}^{(p,p)}$, $N_z^{(p,p)}$ ne représente qu'une partie de l'onde réfléchie de distorsion. Rien ne permet d'attribuer à l'onde de Rayleigh non plus qu'aux termes primaires ou aux termes secondaires qu'il reste à étudier, une signification physique intrinsèque. Il doit donc être bien entendu que la notion d'onde de Rayleigh ne correspond qu'à une façon commode de désigner certains termes de sommes algébriques.

A la différence des états vibratoires définis par les termes primaires la durée des vibrations correspondant aux termes de Rayleigh est, pour un point quelconque, de durée infinie, même si l'excitation est de durée limitée. L'onde de Rayleigh représente avec les autres termes secondaires étudiés au chapitre suivant, la « cauda » du séismogramme.

Le calcul numérique des facteurs de l'onde de Rayleigh ne comporte aucune intégration. Il est donc des plus élémentaires. Il serait certes intéressant de contruire les courbes représentatives des composantes ρ et des composantes z en fonction de σ pour un assez grand nombre de valeurs des R' et des I' . Cependant ce travail ne présenterait toute son importance pratique que si on l'effectuait également pour les autres termes secondaires. Or, ce second calcul, comme nous le verrons plus loin, est nettement plus pénible. Nous avons donc renoncé à entreprendre ces applications numériques qui permettraient de reconstituer entièrement des séismogrammes théoriques, correspondant à des fonctions d'excitation de différents types. Souhaitons qu'on puisse les entreprendre un jour dans un bureau de calculs organisé sur le mode industriel.

80. Concentration de l'énergie au voisinage de la surface du sol. — Si, dans une direction I' donnée, nous faisons croître R' indéfiniment, nous constatons qu'à la limite les facteurs $M^{(p,p)}$ et $N^{(p,p)}$ s'expriment par des fonctions de τ seulement, multipliées par le facteur $\frac{1}{R'^2}$. Les courbes représentatives des $M_{\rho,p,p}$ et $N_{\rho,p,p}$ en fonction de σ ont donc, pour un I' donné, une forme limite, en ne considérant pas comme un

changement de forme la dilatation des abscisses ν proportionnellement à R' ni la contraction des ordonnées proportionnellement à R'^2 .

Si la durée d'excitation t_0 est limitée et s'il subsiste un état de déformation permanente (cf. Chap. VIII), c'est-à-dire si

$$\int_0^{t_0} F'(t) dt = F(t_0) \neq 0,$$

les amplitudes décroissent en raison inverse du carré, les vitesses, les accélérations, etc, en raison inverse du cube de la distance. La décroissance est encore plus rapide s'il ne subsiste pas un état de déformation permanente.

Les phénomènes sont tout différents, et c'est là la particularité fondamentale de l'onde de Rayleigh si, au lieu de s'éloigner de la source dans une direction I' déterminée, on s'éloigne en demeurant au voisinage de la surface du sol, par exemple en laissant z constant. Dans ces conditions, en effet, l'angle I' tend asymptotiquement vers $\frac{\pi}{2}$. Or, pour $I' = \frac{\pi}{2}$, $\tau = m$ les modules M_1 et N_1 s'annulent. Du fait que $M_1^{\frac{3}{2}}$ et $N_1^{\frac{3}{2}}$ figurent en dénominateurs dans les relations (12), les facteurs de transmission s'expriment, près de la surface, sous la forme indéterminée $0 \times \infty$. La discussion qui suit montrera qu'il en résulte dans la région voisine de la surface du sol une concentration de l'énergie transmise par l'onde de Rayleigh et que ce phénomène superficiel, d'une nature particulière, se propage avec une vitesse radiale égale à Ω_R .

81. Expressions limites des modules et des arguments (phénomène superficiel). — Les modules et arguments peuvent être mis sous une forme tout à fait similaire, qu'il s'agisse des formules (8) (M, θ), (9) (N, φ) ou (10) (S, ψ)

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} M_1, N_1 \text{ ou } S_1 = \left(\tau^2 - m^2 + \frac{H^2}{R'^2} \right)^2 + 4\tau^2(m^2 - 1) \frac{K^2}{R'^2}, \\ \text{tang } \theta_1, \text{ tang } \varphi_1 \text{ ou } \text{tang } \psi_1 = \frac{2\tau \sqrt{m^2 - 1} \frac{K}{R'}}{\tau^2 - m^2 + \frac{H^2}{R'^2}} \quad (0 < \theta_1, \varphi_1 \text{ ou } \psi_1 < \pi), \\ M_2, N_2 \text{ ou } S_2 = \tau^2 + (m^2 - 1) \frac{K^2}{R'^2}, \\ \text{tang } \theta_2, \text{ tang } \varphi_2 \text{ ou } \text{tang } \psi_2 = \frac{\sqrt{m^2 - 1} \frac{K}{R'}}{\tau} \quad \left(0 < \theta_2, \varphi_2 \text{ ou } \psi_2 < \frac{\pi}{2} \right), \end{array} \right.$$

en posant

	Formules (8).	Formules (9).	Formules (10).
(14)	H ... $h + z$	$\sqrt{h^2 + z^2 + 2hz \frac{z}{m} \sqrt{m^2 - \frac{z^2}{4}}}$	h
	K ... $h + z$	$h + z \sqrt{\frac{m^2 - z^2}{m^2 - 1}}$	h

En outre, dans les formules (10), on peut remplacer R' par R. Lorsque I est voisin de $\frac{\pi}{2}$ et τ voisin de m , M_1, N_1, S_1 ne s'annulent pas, mais prennent des valeurs aussi petites qu'on veut. Pour étudier les facteurs de transmission au voisinage de la singularité correspondante, on est donc conduit à poser

$$(15) \quad z = m + \sqrt{m^2 - 1} \frac{k}{R'} \theta$$

en considérant $\frac{k}{R'}$ comme infiniment petit principal et en ne conservant dans les expressions (13) que les parties principales. Il vient ainsi

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} M_1, N_1 \text{ ou } S_1 &= 4 m^2 (m^2 - 1) \frac{k^2}{R'^2} (1 + \theta^2), \\ \text{tang } \theta_1, \text{ tang } \varphi_1 \text{ ou } \text{tang } \psi_1 &= \frac{1}{\theta} = \text{tang } \theta \quad (0 < \theta_1, \varphi_1 \text{ ou } \psi_1 < \pi), \\ M_2, N_2 \text{ ou } S_2 &= m^2, \\ \theta_2, \varphi_2 \text{ ou } \psi_2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Reportons ces résultats dans les expressions (12) en y remplaçant $1 + \theta^2$ par $\frac{1}{\sin^2 \theta}$, θ désignant désormais indifféremment l'angle θ_1 , l'angle φ_1 , ou l'angle ψ_1 .

$$(17) \quad \text{tang } \theta = \frac{1}{\theta} \quad (0 < \theta < \pi).$$

Il vient

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} M_\rho^{(P, P')} \text{ ou } N_\rho^{(P, P')} \text{ ou } S_\rho^{(P, P')} &= \frac{A}{2\sqrt{2} \sqrt{m(m^2 - 1)}^{\frac{3}{4}}} \frac{\delta}{k^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho}} \sin^{\frac{3}{2}} \theta \sin \frac{3\theta}{2}, \\ M_z^{(P, P')} \text{ ou } N_z^{(P, P')} \text{ ou } S_z^{(P, P')} &= \frac{B}{2\sqrt{2} \sqrt{m(m^2 - 1)}^{\frac{3}{4}}} \frac{\delta}{k^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho}} \sin^{\frac{3}{2}} \theta \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right.$$

en posant

	M.	N.	S.
(19) A.....	$-2m^3\sqrt{m^2-\nu^2}$	$2m\left(m^2-\frac{\nu^2}{2}\right)\sqrt{m^2-\nu^2}$	$-m\nu^2\sqrt{m^2-\nu^2}$
B.....	$-2\left(m^2-\frac{\nu^2}{2}\right)^2$	$2m^2\left(m^2-\frac{\nu^2}{2}\right)$	$\nu^2\left(m^2-\frac{\nu^2}{2}\right)$

82. Étude d'un mouvement. — Avant de discuter les formules (18), étudions le mouvement d'un point ayant ses coordonnées rectangulaires ξ, η définies par

$$(20) \quad \begin{cases} \xi = \sin^{\frac{3}{2}}\theta \sin \frac{3\theta}{2} \\ \eta = \sin^{\frac{3}{2}}\theta \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (0 < \theta < \pi),$$

où θ est lié au temps ν par les relations (17), (15) et (7). Il est d'ailleurs préférable de prendre pour nouvelle origine des temps ν' l'instant $\frac{R'}{\Omega_R}$ qui est égal à $\frac{\rho}{\Omega_R}$ avec l'approximation actuelle.

$$(21) \quad \nu - \frac{R'}{\Omega_R} = \nu - \frac{\rho}{\Omega_R} = \nu'.$$

Il vient alors

$$(22) \quad \nu' = \frac{K\sqrt{m^2-1}}{\Omega_1} \cot \theta.$$

Lorsqu'on passe de la valeur θ à la valeur $\pi - \theta$, ν' se change en $-\nu'$, ξ en $-\eta$ et η en $-\xi$. Les courbes représentatives de ξ et η en fonction de ν' sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine.

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{d^n \xi}{d\nu'^n} = (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n+1)}{2^n} \left(\frac{\Omega_1}{K\sqrt{m^2-1}}\right)^n \sin^{\frac{2n+3}{2}}\theta \sin\left(\frac{2n+3}{2}\theta\right), \\ \frac{d^n \eta}{d\nu'^n} = (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n+1)}{2^n} \left(\frac{\Omega_1}{K\sqrt{m^2-1}}\right)^n \sin^{\frac{2n+3}{2}}\theta \cos\left(\frac{2n+3}{2}\theta\right). \end{cases}$$

Les courbes représentatives de $\frac{d^n \xi}{d\nu'^n}$ et $\frac{d^n \eta}{d\nu'^n}$ en fonction de ν' sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine si n est pair, par rapport à l'axe des ordonnées si n est impair.

La forme de la trajectoire est définie par les deux équations paramétriques (20). Si l'on prend pour axe polaire l'axe des η et pour sens positif le sens inverse du sens trigonométrique, l'équation polaire de la trajectoire est

$$r = \sin^{\frac{3}{2}} \frac{2\omega}{3}.$$

D'une manière générale, l'équation polaire de l'hodographe d'ordre n est

$$r = (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{2^n} \left(\frac{\Omega_1}{K\sqrt{m^2-1}} \right)^n \sin^{\frac{2n+3}{2}} \left(\frac{2\omega}{2n+3} \right),$$

où ω varie de 0 pour $\varphi' = +\infty$, à $(2n+3)\frac{\pi}{2}$ pour $\varphi' = -\infty$. Ces courbes sont des parties de lemniscates généralisées : la lemniscate de Bernoulli correspond à $n = -1$.

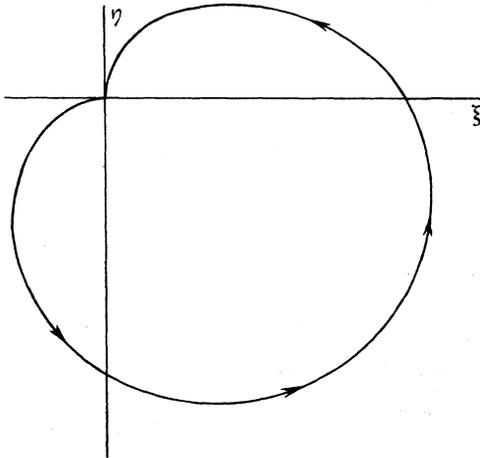


Fig. 51.

Les figures 51, 52, 53 représentent la forme de la trajectoire, de l'hodographe des vitesses, de l'hodographe des accélérations.

Nous figurons également (fig. 54, 55, 56) les courbes représentatives des élongations, vitesses, accélérations en fonction de φ' , en nous bornant aux composantes ρ puisque les courbes relatives aux composantes z peuvent s'en déduire par symétrie.

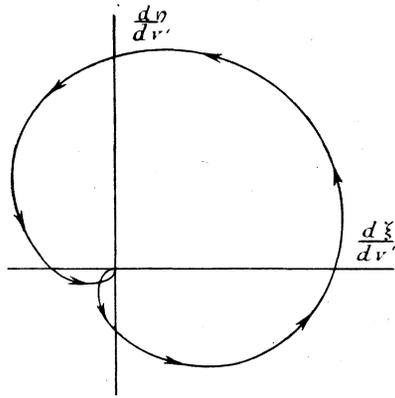


Fig. 52.

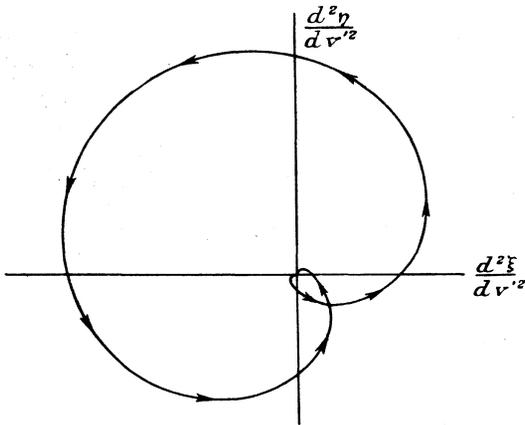
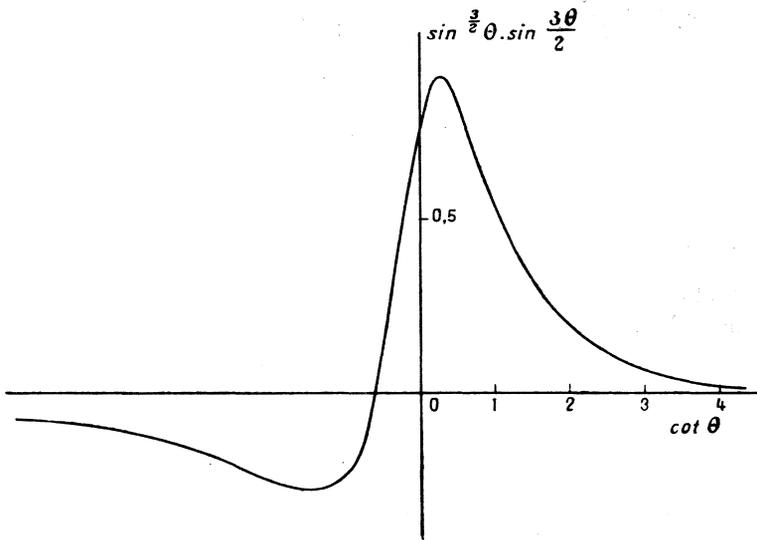


Fig. 53.



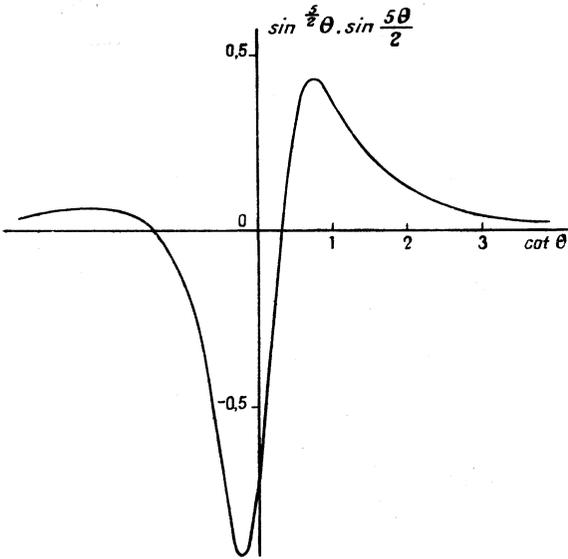


Fig. 55.

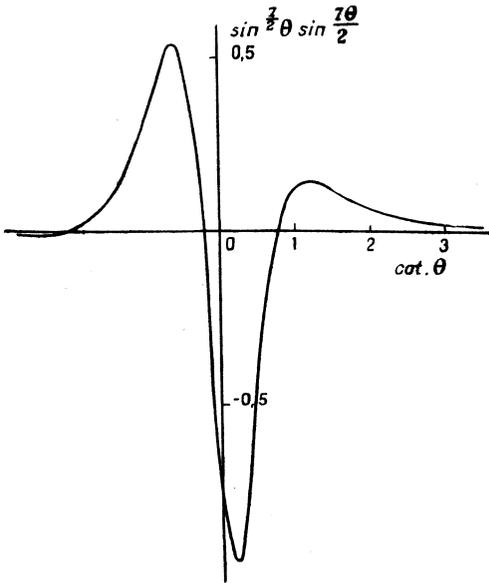


Fig. 56.

Ces courbes ont été construites à l'aide du tableau suivant :

cot θ .	θ .	$\sin^2 \theta \sin \frac{3\theta}{2}$.	$\sin^2 \theta \sin \frac{5\theta}{2}$.	$\sin^2 \theta \sin \frac{7\theta}{2}$.
— ∞	200 G	0	0	0
—6,314	190	—0,060	0,009	—0,001
—3,078	180	—0,153	0,038	—0,007
—2,747	177,78	—	—	—0,008 min
—2,077	171,43	—	0,0541 max	0
—1,963	170	—0,233	0,053	0,005
—1,376	160	—0,265 min	0	0,092
—1	150	—0,228	—0,161	0,275
—0,727	140	—0,114	—0,416	0,470
—0,577	133,33	0	—	0,523 max
—0,510	130	0,066	—0,692	0,508
—0,325	120	0,287	—0,882	0,259
—0,228	114,29	—	—0,915 min	0
—0,158	110	0,513	—0,896	—0,224
0	100	0,707	—0,707	—0,707
0,158	90	0,837	—0,371	—0,931
0,176	88,89	—	—	—0,933 min
0,325	80	0,882 max	0	—0,798
0,510	70	0,838	0,287	—0,434
0,727	60	0,719	0,416	—0,075
0,798	57,14	—	0,422 max	0
1	50	0,549	0,388	0,114
1,192	44,44	—	—	0,137 max
1,376	40	0,365	0,265	0,126
1,963	30	0,199	0,128	0,063
3,078	20	0,078	0,038	0,015
6,314	10	0,014	0,004	0,001
— ∞	0	0	0	0

83. Forme des courbes représentatives des facteurs de transmission de l'onde de Rayleigh. Déformation en fonction de ρ ou de z . — I. L'expression (18) des facteurs de transmission n'est valable, et seulement d'une manière approchée, qu'à partir de l'instant de passage des fronts d'onde respectifs. Antérieurement à ce passage, les facteurs sont nuls.

Lorsque ρ devient infiniment grand, cet instant t'_0 rapporté à la nouvelle origine des temps $\frac{z}{\Omega R}$ en vertu de la formule (21), recule indéfini-

ment dans le passé. Or, pour ν' infini, les expressions (18) représentent des quantités infiniment petites au moins comme $|\nu'|^{-\frac{3}{2}}$.

En faisant une nouvelle approximation, nous écrivons donc les composantes des élongations qui proviennent des termes de Rayleigh sous la forme suivante (1) :

a. A la surface du sol

$$(24) \quad \begin{cases} l_{\rho} = \int_{-\infty}^{\nu'} F'(\nu' - \nu') S_{\rho}^{(P, P')}(\nu') d\nu', \\ l_z = \int_{-\infty}^{\nu'} F'(\nu' - \nu') S_z^{(P, P')}(\nu') d\nu'. \end{cases}$$

b. A l'intérieur du sol

$$(24 \text{ bis}) \quad \begin{cases} l_{\rho} = \int_{-\infty}^{\nu'} F'(\nu' - \nu') [M_{\rho}^{(P, P')}(\nu') + N_{\rho}^{(P, P')}(\nu')] d\nu', \\ l_z = \int_{-\infty}^{\nu'} F'(\nu' - \nu') [M_z^{(P, P')}(\nu') + N_z^{(P, P')}(\nu')] d\nu'. \end{cases}$$

Dans ces formules, ν' est l'instant rapporté à la nouvelle origine $\frac{\rho}{\Omega_R}$.

II. On obtient simplement les courbes représentatives de

$$M^{(P, P')}(\nu'), \quad N^{(P, P')}(\nu'), \quad S^{(P, P')}(\nu')$$

en additionnant les ordonnées des courbes $\xi(\nu')$ et $\eta(\nu')$ après dilatation ou contraction des abscisses ν' et des ordonnées ξ ou η dans un rapport convenable. On obtient par le même procédé les courbes représentatives des dérivées.

Lorsque, pour une profondeur z déterminée, on fait varier ρ , les courbes représentatives de $S^{(P, P')}$ ou de $[M^{(P, P')} + N^{(P, P)}]$ ne subissent qu'une variation de leurs ordonnées en raison inverse de $\sqrt{\rho}$. Il n'y a pas à proprement parler changement de forme. On peut dire que la largeur des ondulations de ces courbes (ce que les séismologues appellent la période) est invariable.

Lorsque, pour une distance ρ déterminée, on augmente la profondeur z , les amplitudes de $M_{\rho}^{(P, P')}$ et $M_z^{(P, P')}$ décroissent comme $(h + z)^{-\frac{3}{2}}$,

(1) Ces formules limites représentent un phénomène permanent du fait que nous remplaçons par $-\infty$ la limite inférieure ν'_0 des intégrales, limite qui, en réalité, est finie.

celles de $N_\rho^{(P, P')}$ et $N_z^{(P, P')}$ comme $(h + z \sqrt{\frac{m^2 - \nu^2}{m^2 - 1}})^{-\frac{3}{2}}$, c'est-à-dire, pour $\nu = \sqrt{3}$, comme $(h + 0,4641 z)^{-\frac{3}{2}}$. En même temps, il faut faire subir aux abscisses ρ' une dilatation proportionnelle à $h + z$ dans le cas de $M_\rho^{(P, P')}$ et $M_z^{(P, P')}$, à $(h + z \sqrt{\frac{m^2 - \nu^2}{m^2 - 1}})$ dans le cas de $N_\rho^{(P, P')}$ et $N_z^{(P, P')}$. Les diverses courbes

$$M_\rho^{(P, P')}, M_z^{(P, P')}, N_\rho^{(P, P')}, N_z^{(P, P')}$$

ne changent donc pas non plus à proprement parler de forme. Toutefois, quand z augmente, non seulement les amplitudes diminuent mais la largeur des courbes augmente.

Si nous portons désormais notre attention sur les courbes

$$M_\rho^{(P, P')} + N_\rho^{(P, P')} \quad \text{et} \quad M_z^{(P, P')} + N_z^{(P, P')}$$

nous constatons que ces courbes se déforment quand z augmente du fait que les dilatations d'abscisses et contractions d'ordonnées ne sont pas les mêmes pour les $M^{(P, P')}$ et pour les $N^{(P, P')}$.

Les figures (57) et (58) reproduisent, pour une distance ρ déterminée, avec des échelles d'abscisses et d'ordonnées non précisées mais qui sont identiques dans les deux figures, les courbes représentatives de

$$M_\rho^{(P, P')} + N_\rho^{(P, P')} = S_\rho^{(P, P')} \quad \text{et} \quad M_z^{(P, P')} + N_z^{(P, P')} = S_z^{(P, P')} \quad \text{pour} \quad z = 0$$

ainsi que de

$$M_\rho^{(P, P')} + N_\rho^{(P, P')} \quad \text{et} \quad M_z^{(P, P')} + N_z^{(P, P')} \quad \text{pour} \quad z = h.$$

On a supposé $\nu = \sqrt{3}$.

On remarquera que le rapport des composantes $S_z^{(P, P')}$ aux composantes $S_\rho^{(P, P')}$ à la surface du sol est égal à

$$\left| \frac{B}{A} \right| = \frac{m^2 - \frac{\nu^2}{2}}{m \sqrt{m^2 - \nu^2}} = 1,468,$$

c'est-à-dire a la même valeur que le rapport des amplitudes verticales aux amplitudes horizontales dans l'onde harmonique.

Par contre la loi de décroissance des amplitudes en fonction de z est beaucoup moins rapide que la loi exponentielle qui s'applique à l'onde harmonique. Pour des profondeurs z assez grandes par rapport à h ,

les amplitudes décroissent proportionnellement à $z^{-\frac{3}{2}}$. Aux petites profondeurs cette loi ne s'applique pas : on notera par exemple que,

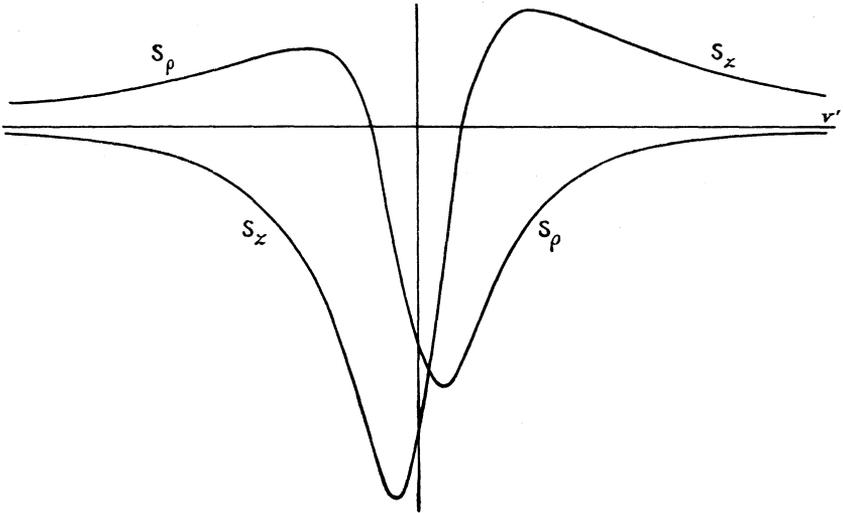


Fig. 57.

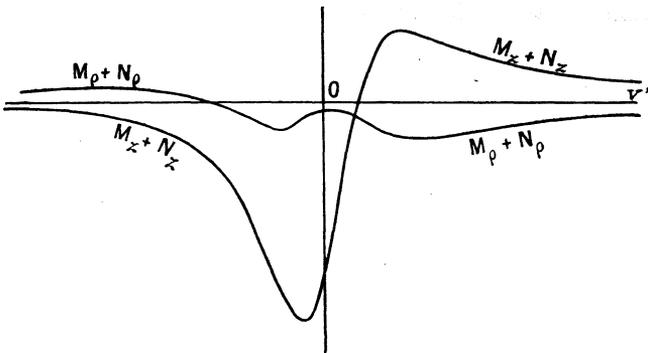


Fig. 58.

pour $z = h$, les composantes verticales sont du même ordre de grandeur que pour $z = 0$, tandis que les composantes horizontales qui correspondent à $z = h$ sont notablement plus petites que pour $z = 0$.

III. On vérifiera immédiatement, ce qui n'était pas évident *a priori*, que les parties principales des dérivées successives par rapport à ν' des facteurs

$$M_{\rho}^{(P, P')}, M_{\Sigma}^{(P, P')}, N_{\rho}^{(P, P')}, N_{\Sigma}^{(P, P')}, S_{\rho}^{(P, P')}, S_{\Sigma}^{(P, P')},$$

autrement dit les expressions asymptotiques des dérivées, sont identiques aux dérivées successives par rapport à ν' des expressions asymptotiques des facteurs.

La démonstration est du même genre que celles que nous effectuons au Chapitre XII, dans des conditions un peu plus compliquées, pour la deuxième onde superficielle.

84. Allure du séismogramme. Comparaison avec la phase L des séismogrammes d'Observatoire. Relation entre la période et la profondeur de l'hypocentre. — 1° La phase L des séismogrammes d'Observatoires, attribuée en partie aux ondes de Rayleigh et caractérisée par une longue suite assez régulière d'oscillations, diffère notablement des courbes simplement ondulées qui représentent les facteurs de transmission de l'onde de Rayleigh dans le problème ici traité.

2° A vrai dire, les composantes de l'élongation ne sont pas proportionnelles aux facteurs de transmission mais en dépendent par les relations (24) et (24 bis). La nature de ces relations montre que les courbes représentatives de l'élongation pourront présenter un grand nombre d'oscillations si l'on suppose que la courbe représentant la fonction d'excitation présente elle-même ce caractère et si la largeur des oscillations est du même ordre de grandeur sur les courbes de la fonction d'excitation et des facteurs de transmission.

3° L'on admet généralement aujourd'hui que les séismes sont engendrés par des ruptures, fractures, effondrements, glissements, formations de failles dans l'écorce terrestre, tous phénomènes qui sont de la nature d'un choc au même titre que la chute d'une pierre à la surface de l'eau.

Du fait que le séisme est engendré par un véritable choc, convient-il de conclure dès l'abord que la longue série d'oscillations que présente le séismogramme est due au mécanisme de la propagation exprimé par les facteurs de transmission et non pas à celui de l'excitation exprimé par la fonction $F(t)$? A ce propos, nous citerons un passage de Bouasse (1) : « Qu'un phénomène *périodique* se construise parfois du fait de la pro-

(1) H. BOUASSE, *Séismes et sismographes*, Delagrave, Paris, 1927, p. 209.

pagation, à partir d'un *choc* initial, est prouvé par une expérience vulgaire. Quand on laisse tomber une pierre dans l'eau, les *ronds* à distance n'ont pas de rapport *immédiat* avec le mouvement de l'eau autour de la pierre. En se propageant le phénomène se déforme : les crêtes ne se propagent pas avec une vitesse invariable, les arrivées de deux crêtes consécutives en un point, qui ne déterminent évidemment pas une période du phénomène originel, *puisqu'il n'est pas périodique*, ne déterminent pas davantage une période indépendante de la distance » (1).

Comme l'auteur, nous concluons que le phénomène original n'est pas périodique, au moins *pratiquement*, mais cette question mérite d'être discutée.

Lorsqu'une corde vibrante est frappée par un marteau, la corde entre en vibrations périodiques, bien qu'il n'y ait rien de périodique dans le choc du marteau. A vrai dire le phénomène est différent lorsqu'on imprime un choc à un corps de dimensions illimitées ou pratiquement telles comme sont une corde très longue, une grande masse d'eau ou le globe terrestre; il n'est plus possible de considérer que le régime vibratoire s'établit quasi instantanément; du fait de la propagation, un régime vibratoire stationnaire ne peut se construire. Comme le volume des régions qui sont entrées en vibration augmente constamment, le mouvement, même dans la région où le choc a été provoqué, est nécessairement amorti, mais il n'est pas obligatoirement apériodique.

On illustre facilement ces remarques en reprenant le problème traité au Chapitre II. Supposons que la sphère R_0 est creusée dans un solide infini. Pendant un temps très court, faisons croître la pression d'un gaz qui remplit la cavité et ramenons cette pression à sa valeur initiale, ce qui réalise un véritable choc.

Pour déterminer les mouvements dans le solide, on est conduit à une équation différentielle élémentaire et il apparaît que la fonction d'excitation $F(t)$ est une fonction sinusoïdale amortie. La période

$$T = \frac{\pi v^2}{\sqrt{v^2 - 1}} \frac{R_0}{\Omega_1}$$

(1) Au cours de l'alinéa suivant, l'auteur montre combien est encore obscur le mécanisme par lequel un phénomène « périodique » se construit du fait de la propagation. « Pour la phase L, la construction des ondes périodiques du fait de la propagation est-elle simplement due à la *dispersion*, à une vitesse de propagation qui diminuerait à mesure que diminue la période ou la longueur d'onde? Est-elle due à l'existence d'une surface de discontinuité pour la vitesse, qui existerait à une distance du sol de 60km, avec réflexions sur cette couche et à la surface? Pour l'instant, on l'ignore. »

Ce sont précisément ces questions que nous discutons ici.

est proportionnelle au rayon de la cavité, mais l'amortissement, bien qu'inférieur à l'amortissement critique, est extrêmement important puisque le rapport des amplitudes $\frac{F(t)}{F(t+T)}$ est égal à $e^{\frac{2\pi}{\nu^2-1}}$, c'est-à-dire à 85,02 pour $\nu = \sqrt{3}$.

Cet exemple, qui se rapporte évidemment à un type d'excitation très différent du choc original donnant naissance aux séismes naturels, montre toutefois que l'amortissement de $F(t)$, résultant du seul fait de la propagation, est d'un ordre de grandeur tel qu'il ne semble pas possible d'expliquer les longues séries d'oscillations des séismogrammes par l'hypothèse d'oscillations du même genre que présenterait la fonction $F(t)$.

4° Si nous voulons retrouver dans nos formules quelque lointaine analogie avec le cas des séismes naturels, nous sommes donc conduits à supposer que la fonction d'excitation est pratiquement apériodique avec une durée assez courte.

Admettons le chiffre de 18 secondes comme ordre de grandeur moyen des « périodes » de l'onde de Rayleigh des grands séismes naturels. Si l'on pouvait admettre que la durée d'excitation t_0 est d'un ordre de grandeur nettement inférieur, de quelques dixièmes de seconde par exemple, les courbes $l_\rho(t')$, $l_z(t')$ auraient approximativement la même forme que les courbes représentatives des facteurs de transmission.

D'après les formules (24), en effet

$$(25) \quad l_\rho = \int_{-\infty}^{t'} F'(t' - v') S_\rho^{(P, P')}(v') dv' = \int_{t'-t_0}^{t'} F'(t' - v') S_\rho^{(P, P')}(v') dv'.$$

Or comme $S_\rho^{(P, P')}(v')$ pourrait être considéré, avec une excellente approximation, comme constant dans l'intervalle très court $(t' - t_0, t')$, on aurait

$$(26) \quad l_\rho = S_\rho^{(P, P')}(t') \int_{t'-t_0}^{t'} F'(t' - v') dv' = F(t_0) S_\rho^{(P, P')}(t').$$

Les courbes $l_\rho(t')$, $l_z(t')$ présenteraient donc deux ondulations simples, en supposant que $F(t_0)$ n'est pas nul.

Si $F(t_0)$ est nul, on peut effectuer une intégration par parties :

$$(27) \quad \begin{aligned} l_\rho &= \int_{t'-t_0}^{t'} F'(t' - v') S_\rho^{(P, P')}(v') dv' \\ &= [S_\rho^{(P, P')}(v') F(t' - v')]_{v'=t'-t_0}^{v'=t'} + \int_{t'-t_0}^{t'} F(t' - v') \left[\frac{d}{dv'} S_\rho^{(P, P')}(v') \right] dv' \\ &= \int_{t'-t_0}^{t'} F(t' - v') \left[\frac{d}{dv'} S_\rho^{(P, P')}(v') \right] dv' \end{aligned}$$

ou, approximativement, puisque $\left[\frac{d}{dv'} S_{\rho}^{(pp')}(\nu') \right]$ est sensiblement constant dans l'intervalle $(t' - t_0, t')$

$$(28) \quad l_{\rho} = \frac{d}{dt} S_{\rho}^{(p,p)}(t) \int_{t-t_0}^{t'} F(t' - \nu') d\nu' = \left[\frac{d}{dt} S_{\rho}^{(p,p)}(t) \right] F^{\square}(t_0).$$

Si l'on admet que $F^{\square}(t_0)$ n'est pas nul, et c'est précisément ce cas qu'il convient d'envisager pour une excitation du type de celle qui a été décrite à l'alinéa 3°, les courbes $l_{\rho}(t')$, $l_z(t')$ auront la forme des courbes représentatives de $\frac{d}{dt} S_{\rho}^{(p,p)}(t')$ et $\frac{d}{dt} S_z^{(p,p)}(t')$.

Nous avons vu que ces courbes présentent *trois* ondulations simples.

5° Les conclusions de l'alinéa 4° semblent pouvoir s'appliquer d'assez près au cas d'un séisme artificiel provoqué par la détonation d'une charge d'explosif enterrée à quelques dizaines de mètres dans un terrain bien homogène limité par une surface peu accidentée. Il conviendrait également que les séismogrammes fussent enregistés à une distance de l'épicentre suffisamment faible pour que les premières couches profondes différentes des couches superficielles ne vissent pas troubler le phénomène simple qui fait seul l'objet de la présente étude.

Il est bien certain que les équations de l'élasticité ne sauraient s'appliquer convenablement dans le voisinage immédiat de la chambre d'explosion, mais seulement à partir d'une distance R_0 de celle-ci, assez grande pour que les élongations y deviennent assez faibles. Si la profondeur de la chambre d'explosion est supérieure à R_0 , on peut s'attendre à ce que les élongations sur la sphère de rayon R_0 soient à peu près isotropes malgré les irrégularités à prévoir au voisinage de l'explosif. C'est alors la loi des élongations sur la sphère R_0 , en fonction de t , qui déterminera la fonction $F(t)$ (1). Du reste l'expérience permettrait aisément de reconnaître l'isotropie de l'excitation en faisant constater, d'une part la symétrie de révolution des phénomènes, d'autre part l'absence de composantes normales aux azimuts.

(1) C'est un fait d'expérience (exemple : les « ronds » provoqués par la chute d'une pierre dans l'eau) que les ondes se régularisent au début de leur propagation. L'interférence des mouvements élémentaires, qui agit à la manière dont l'intégration d'une fonction en atténue les ondulations courtes, la compressibilité qui diminue quand la pression augmente, l'amortissement qui croît plus vite que la vitesse, les phénomènes thermiques irréversibles, la rupture de la matière soumise à des efforts trop grands, etc., tout concourt à cette régularisation.

Telles sont les conditions assez faciles à remplir, dans lesquelles on pourrait espérer vérifier expérimentalement les conclusions de la théorie.

Les séismes naturels n'obéissent pas à ces conditions. On sait, en particulier, que les composantes normales aux azimuts sont loin d'y être négligeables. D'autre part, même à supposer une isotropie de l'excitation qui n'existe pas, il serait bien difficile d'admettre que les dislocations donnant naissance aux séismes pussent s'effectuer en un temps moindre que quelques dizaines de secondes, voire que quelques minutes.

Les considérations qui suivent ne sauraient donc avoir quelque validité que pour le type simple de séisme artificiel envisagé plus haut.

6° Le tracé d'un séismogramme n'est pas immédiatement comparable aux courbes représentatives de $l_p(t')$ ou $l_z(t')$ qui seules ont été envisagées jusqu'à présent.

Sans vouloir entreprendre ni même esquisser une théorie du séismographe, théorie qui, à notre avis, devrait pourtant être toute différente de celle qui est exposée dans la plupart des traités de séismologie, nous nous trouvons amenés à dire le plus brièvement possible quelques mots sur cet instrument.

L'équation différentielle *simplifiée* du mouvement d'un séismographe à enregistrement direct s'écrit

$$(29) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2f_s \frac{dx}{dt} + \omega_s^2 x = S \gamma(t),$$

où x désigne l'élongation lue sur le séismogramme, $\gamma(t)$ la composante utile de l'accélération (verticale pour un séismographe vertical, horizontale pour un séismographe horizontal). S est une constante instrumentale proportionnelle à l'agrandissement, ω_s la pulsation des oscillations libres du séismographe, à supposer supprimé tout amortissement, f_s un coefficient d'amortissement. Nous supposons qu'avant l'instant zéro, le sol et le séismographe sont au repos. Pour s'affranchir des complications inutiles d'écritures qu'entraînent la considération des discontinuités cinématiques, on peut supposer d'abord que $\gamma(t)$ est une fonction continue et indéfiniment dérivable. Dans ces conditions, le séismographe admet un *facteur de transmission* $s(v)$ défini par ⁽¹⁾ :

(1) La théorie élémentaire des équations différentielles conduit aussi simplement à cette solution classique que la méthode de Carson.

a. Si $f_s < \omega_s$ (amortissement inférieur à l'amortissement critique)

$$(30) \quad s(\nu) = \frac{S}{\omega_s^2} - \frac{S e^{-\nu f_s}}{\omega_s^2 \sqrt{\omega_s^2 - f_s^2}} \\ \times [f_s \sin(\nu \sqrt{\omega_s^2 - f_s^2}) + \sqrt{\omega_s^2 - f_s^2} \cos(\nu \sqrt{\omega_s^2 - f_s^2})].$$

b. Si $f_s = \omega_s$ (amortissement critique)

$$(30 \text{ bis}) \quad s(\nu) = \frac{S}{\omega_s^2} - \frac{S e^{-\nu \omega_s}}{\omega_s} \left(\nu + \frac{1}{\omega_s} \right).$$

c. Si $f_s > \omega_s$ (amortissement supérieur à l'amortissement critique)

$$(30 \text{ ter}) \quad s(\nu) = \frac{S}{\omega_s^2} + \frac{S}{2\sqrt{f_s^2 - \omega_s^2}} \left[\frac{e^{-(f_s + \sqrt{f_s^2 - \omega_s^2})\nu}}{f_s + \sqrt{f_s^2 - \omega_s^2}} - \frac{e^{-(f_s - \sqrt{f_s^2 - \omega_s^2})\nu}}{f_s - \sqrt{f_s^2 - \omega_s^2}} \right].$$

La figure 59 donne l'allure du facteur de transmission pour les trois cas

$$f_s = \frac{\omega_s}{2}, \quad f_s = \omega_s, \quad f_s = 2\omega_s.$$

La relation entre le séismogramme et le mouvement du sol est la plus simple lorsque la période propre du séismographe est extrêmement courte (ω_s très grand) et l'amortissement voisin de l'amortissement critique. En un temps ν_0 très court, la fonction $s(\nu)$ passe alors de la valeur 0 à la valeur $\frac{S}{\omega_s^2}$. Si la courbe $\frac{d}{dt} \gamma(t)$ ne comporte que des ondulations ou des accidents nettement plus larges que ν_0 (qui joue le rôle d'une sorte de pouvoir séparateur du séismographe), le facteur de transmission $s(\nu)$ est pratiquement identique au facteur de transmission idéal défini par

$$(31) \quad s(\nu) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \nu < 0. \\ \frac{S}{\omega_s^2} = \text{const.} & \text{pour } \nu > 0. \end{cases}$$

D'où pratiquement

$$(32) \quad x = \int_0^t \frac{d\gamma(\nu)}{d\nu} s(t - \nu) d\nu = \frac{S}{\omega_s^2} \gamma(t).$$

Dans ces conditions le séismographe fonctionne donc comme un véritable accéléromètre. Dans le problème que nous traitons, et si t_0 est suffisamment petit, le séismogramme doit présenter alors l'allure des courbes $\frac{d^2 \xi}{d\nu'^2}$ ou $\frac{d^2 \eta}{d\nu'^2}$ (formules 23) si $F(t_0)$ est différent de zéro. Il présenterait l'allure des courbes $\frac{d^3 \xi}{d\nu'^3}$ ou $\frac{d^3 \eta}{d\nu'^3}$ si $F(t_0)$ est nul et $F^{[1]}(t_0)$ différent de

zéro. Le séismogramme présenterait donc cinq ondulations dans le premier cas et six dans le second.

Si l'enregistrement du séismogramme n'est pas direct, mais électro-

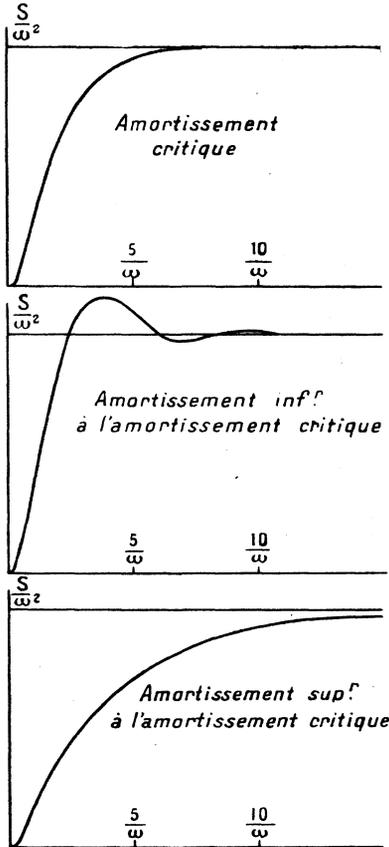


Fig. 59.

magnétique, l'élongation y du galvanomètre est, sous certaines conditions, liée à x par une équation du même type que la précédente

$$(33) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma f_6 \frac{dy}{dt} + \omega_6^2 y = G \frac{dx}{dt}.$$

Si donc la période propre du galvanomètre est également très courte et

l'amortissement très voisin de l'amortissement critique, l'on a pratiquement

$$(34) \quad y = \frac{GS}{\omega_0^2 \omega_0^2} \frac{d\gamma}{dt}.$$

Le séismogramme présenterait alors une oscillation de plus, soit six dans le premier cas et sept dans le second.

Si le séismographe ne fonctionne pas dans les conditions simples envisagées ci-dessus, il est à prévoir des déformations plus ou moins notables du tracé. Ces déformations sont maxima lorsque l'amortissement du séismographe est nettement inférieur à l'amortissement critique et lorsque la largeur des ondulations de la fonction $s(\nu)$ est d'un ordre de grandeur comparable à celle des ondulations de la fonction $\frac{d}{d\nu} \gamma(\nu)$.

Dans un tel cas, les élongations du séismogramme deviennent très grandes (résonance) et le nombre des ondulations s'accroît considérablement.

7° Ainsi, nous constatons que, même dans le problème fortement schématisé que nous traitons ici, l'onde de Rayleigh doit se marquer sur le séismogramme par un tracé comportant cinq ondulations au moins. Nous verrons qu'une deuxième onde superficielle, d'un type encore non décrit, précède l'onde de Rayleigh et se marque également par des ondulations. Il est incontestable que le séismogramme rappelle ainsi par son allure ce qu'on observe dans la phase I. des séismes naturels.

Il faut reconnaître cependant que les séismogrammes de séismes naturels, même obtenus avec des séismographes amortis, présentent des trains d'ondulations beaucoup plus longs que ceux qui sont décrits ci-dessus. Il reste beaucoup de possibilités pour expliquer ces différences :

a. L'excitation est beaucoup plus complexe que nous ne l'avons supposé. Il est probable qu'on peut la décomposer en multiples chocs successifs engendrant chacun des trains d'ondulations superficielles.

b. Suivant une même verticale, on rencontre dans l'écorce terrestre une grande variété de terrains, d'où une grande variété d'ondes superficielles, plus exactement d'ondes guidées par les intersurfaces. Nous avons observé d'ailleurs que la décroissance des amplitudes en fonction de la distance à l'intersurface n'est pas très rapide.

c. A cette variété de terrains suivant une même verticale, il faut ajouter les variations latérales (exemple : les ondes passent d'un massif

ancien où les schistes et granits affleurent, à un bassin d'épaisses formations sédimentaires, à un océan, etc.).

d. La courbure de la Terre et l'amortissement des vibrations peuvent modifier le phénomène beaucoup plus qu'on ne l'imagine communément.

On peut donc à bon droit se montrer surpris, non pas que la phase L soit si compliquée, mais bien au contraire qu'elle soit si simple que la révèlent les séismogrammes.

8° Si nous voulons considérer les ondulations du séismogramme comme des périodes, nous remarquerons que ces périodes sont proportionnelles à la profondeur h de l'hypocentre. Elles permettent dans une certaine mesure de déterminer cette profondeur.

Supposons par exemple que nous ayons affaire au séismogramme simple représenté par la courbe à cinq ondulations $\frac{d^2\xi}{dv^2}$ ou $\frac{d^2\eta}{dv^2}$. La largeur de chacune des cinq ondulations n'est pas identique. La largeur des ondulations n'est pas non plus la même suivant qu'on la définit par la distance de deux extrema consécutifs ou par celle de deux zéros consécutifs.

Pour fixer les idées, définissons une demi-période $\frac{T}{2}$ par la distance du deuxième zéro au troisième. On a

$$(35) \quad T = 2h \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{m\Omega_R} \left(\cot \frac{4\pi}{7} - \cot \frac{6\pi}{7} \right).$$

Pour $\nu = \sqrt{3}$, $\Omega_R = 3,53 \text{ km} : \text{s}$ (Galitzin), on obtient

$$(36) \quad T^{\text{sec}} = h^{\text{km}} \times 0,444.$$

Pour une période de 18 secondes, nous trouvons ainsi

$$h = 40^{\text{km}}, 5.$$



CHAPITRE XII.

ONDE PROGRESSIVE QUAND LE SECOND MILIEU EST LE VIDE (*suite*).
DEUXIÈME ONDE SUPERFICIELLE.

85. **Changement de variable pour l'étude des termes $M^{(E)}$, $N^{(E)}$, $S^{(E)}$.**
— Les facteurs de transmission des composantes de l'élongation comportent enfin les termes $M^{(E)}$, $N^{(E)}$, $S^{(E)}$ dont l'expression est la suivante :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} M_{\rho}^{(E)} = - \frac{\rho i}{\pi} \int_{(E)} \{ u^2 \rho^2 + [v - a(h + z)]^2 \}^{-\frac{3}{2}} j(u) u^3 du, \\ N_{\rho}^{(E)} = - \frac{\rho i}{\pi} \int_{(E)} \{ u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2 \}^{-\frac{3}{2}} f(u) bu^3 du, \\ M_z^{(E)} = \frac{i}{\pi} \int_{(E)} \{ u^2 \rho^2 + [v - a(h + z)]^2 \}^{-\frac{3}{2}} [v - a(h + z)] j(u) au du, \\ N_z^{(E)} = \frac{i}{\pi} \int_{(E)} \{ u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2 \}^{-\frac{3}{2}} (v - ah - bz) f(u) u^3 du, \\ S_{\rho}^{(E)} = - \frac{\rho i}{2\pi\Omega^{\frac{3}{2}}} \int_{(E)} \{ u^2 \rho^2 + (v - ah)^2 \}^{-\frac{3}{2}} \frac{bu^3}{D(u)} du, \\ S_z^{(E)} = - \frac{i}{2\pi\Omega^{\frac{3}{2}}} \int_{(E)} \{ u^2 \rho^2 + (v - ah)^2 \}^{-\frac{3}{2}} (v - ah) \frac{u^2 + \frac{1}{2\Omega^{\frac{3}{2}}}}{D(u)} u du. \end{array} \right.$$

Nous avons indiqué au Chapitre VI (formules 40) un changement de variable ramenant ces intégrales à des intégrales elliptiques. Si l'on veut se limiter au calcul des termes $M^{(E)}$ et $S^{(E)}$, la réduction aux intégrales elliptiques est encore plus immédiate en prenant a comme nouvelle variable. Néanmoins la réduction en question ne présente guère d'intérêt pratique au point de vue des calculs numériques. Ces calculs seraient effectués plus rapidement en séparant la partie réelle et la partie imaginaire des fonctions sous le signe somme, en construisant leurs courbes représentatives et en planimétrant ces courbes.

Nous n'effectuons pas ces applications numériques; nous nous bornons à étudier un phénomène superficiel dépendant des termes $M^{(E)}$, $N^{(E)}$, $S^{(E)}$ et qui présente quelque analogie avec l'onde de Rayleigh.

Il est commode de faire le changement de variable (u, λ) défini par

$$(2) \quad ia\Omega_1 = \lambda.$$

Le circuit (E) dans le plan de la variable u (*fig. 6o à gauche*) devient le circuit (Γ) dans le plan de la variable λ (*fig. 6o à droite*).

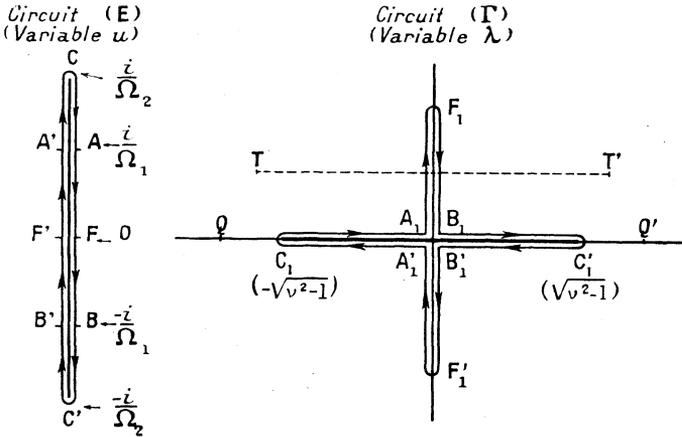


Fig. 6o.

Par le changement de variable, les fonctions sous le signe somme s'expriment en fonction de λ et de deux radicaux seulement, d'une part b , d'autre part

$$\sqrt{u^2 \rho^2 + [v - a(h + z)]^2}, \quad \sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah)^2}.$$

On a

$$(3) \quad b = \frac{1}{\Omega_1} \sqrt{(\nu^2 - 1) - \lambda^2}.$$

Les points de ramification du radical b sont C_1 et C_1' d'affixes $\pm \sqrt{\nu^2 - 1}$. On peut imaginer que le segment $C_1 C_1'$ est une coupure. b est positif sur $C_1 A_1 F_1 B_1 C_1'$, négatif sur $C_1' B_1' F_1' A_1' C_1$.

Si l'on se borne à envisager la partie du plan λ limitée par cette coupure, abstraction faite des feuillettes de Riemann qui le prolongent au delà de la coupure, le second radical ne présente que deux points de ramification T, T' dont la position peut être déduite immédiatement de celle des extrémité A, A' (*Plan des circuits d'intégration*, Chap. V, *fig. 17*). Les points T, T' sont situés dans le demi-plan supérieur, symétriquement par rapport à l'axe imaginaire.

Si l'on envisage la totalité du plan λ prolongé par les feuilletts de Riemann, les radicaux $\sqrt{u^2 \rho^2 + [v - a(h + z)]^2}$ ou $\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah)^2}$ ne présentent pas de nouveaux points de ramification. Le radical $\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}$ en présente deux autres T_1, T'_1 situés sur les feuilletts.

Il n'est besoin de prendre en considération les termes $M^{(E)}, N^{(E)}, S^{(E)}$ que pour des époques postérieures au passage des fronts correspondants. Dans ces conditions T, T' ni T_1, T'_1 ne sont jamais situés sur les segments C, C' ni F, F' . Ils peuvent cependant s'en approcher infiniment près si le point M de l'espace, où l'on calcule les élongations, s'éloigne infiniment de la source.

Les fonctions sous le signe somme admettent enfin des pôles dont aucun n'est situé sur la coupure. Dans le plan λ limité par la coupure, il existe en particulier deux pôles Q, Q' , sur l'axe réel, en dehors du segment C, C' et d'affixes opposées. La position de Q, Q' se déduit immédiatement de celle de P, P' (*Plan des circuits*, Chap. V).

Le circuit d'intégration (Γ) peut donc être déformé de manière continue sous réserve que, dans cette déformation, on évite de rencontrer les pôles ou points de ramification. On peut, en particulier, se borner au lacet (L) direct enveloppant les deux bords de la coupure C, C' et nous retrouvons ainsi un résultat antérieur, savoir que la contribution des parcours B, F, A et B', F', A' dans les intégrations (r) est nulle.

86. Formules asymptotiques pour les grandes valeurs de R' . — Comme au chapitre précédent, nous poserons

$$(4) \quad \frac{\Omega_1 v}{R'} = \tau.$$

D'où

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} v - a(h + z) = \frac{R'}{\Omega_1} (\tau + i\lambda \cos I'), \\ u^2 \rho^2 + [v - a(h + z)]^2 = \frac{R'^2}{\Omega_1^2} Q \\ \text{avec} \\ Q = \tau^2 - \lambda^2 - \sin^2 I' + 2i\lambda\tau \cos I', \\ v - ah - bz = \frac{R'}{\Omega_1} \left(\tau - b\Omega_1 \frac{z}{R'} + i\lambda \frac{h}{R'} \right), \\ u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2 = \frac{R'^2}{\Omega_1^2} P \\ \text{avec} \\ P = -\sin^2 I' (\lambda^2 + 1) + \left(\tau + i\lambda \frac{h}{R'} - b\Omega_1 \frac{z}{R'} \right)^2. \end{array} \right.$$

Si l'on considère un lacet (L) symétrique par rapport à l'axe imaginaire, la contribution de deux parcours symétriques par rapport à l'axe imaginaire se réduit à deux imaginaires conjuguées.

D'où

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} M_{\rho}^{(K)} = -\frac{2\Omega_1 \sin I'}{\pi R'^2} \mathcal{J} \left[\int_{(K)} Q^{-\frac{3}{2}} [u^2 f(u)] \lambda d\lambda \right], \\ N_{\rho}^{(K)} = -\frac{2 \sin I'}{\pi R'^2} \mathcal{J} \left[\int_{(K)} P^{-\frac{3}{2}} [u^2 f(u)] b \Omega_1 \lambda d\lambda \right], \\ N_z^{(E)} = -\frac{2}{\pi R'^2 \Omega_1} \mathcal{R} \left[\int_{(K)} Q^{-\frac{3}{2}} (\tau + i\lambda \cos I') j(u) \lambda^2 d\lambda \right], \\ N_z^{(E)} = \frac{2}{\pi R'^2} \mathcal{J} \left[\int_{(K)} P^{-\frac{3}{2}} \left(\tau - b \Omega_1 \frac{z}{R'} + i\lambda \frac{h}{R'} \right) [u^2 f(u)] \lambda d\lambda \right], \\ S_{\rho}^{(E)} = -\frac{\nu^2 \sin I'}{\pi R'^2 \Omega_1^2} \mathcal{J} \left[\int_{(K)} Q^{-\frac{3}{2}} \frac{u^2}{D(u)} b \Omega_1 \lambda d\lambda \right], \\ S_z^{(E)} = -\frac{\nu^2}{\pi R'^2 \Omega_1^2} \mathcal{J} \left[\int_{(K)} Q^{-\frac{3}{2}} (\tau + i\lambda \cos I') \frac{u^2 + \frac{1}{2\Omega_1^2}}{D(u)} \lambda d\lambda \right], \end{array} \right.$$

en désignant par (K) un demi-lacet (L), partant d'un point de l'axe imaginaire, se terminant également en un point de l'axe imaginaire et tournant autour de C'_1 dans le sens contraire du sens trigonométrique. (K) peut désigner le parcours $B_1 C'_1 B'_1$ ou tout autre obtenu par déformation continue, pénétrant ou non dans les feuillettes de Riemann, pourvu que dans cette déformation B_1 et B'_1 demeurent sur l'axe imaginaire et que le parcours (K) ne vienne pas rencontrer un point de ramification ou un pôle.

Bien entendu, dans les formules (6), u^2 est supposé remplacé en fonction de λ^2 .

Les intégrales qui figurent dans les expressions (6) sont toujours finies lorsque le point M est à distance finie. Elles restent finies lorsque M s'éloigne à l'infini à condition qu'un point de ramification T ou T' ne tende pas vers C'_1 .

Pour que le point T' de ramification du radical $Q^{-\frac{3}{2}}$ soit infiniment près de C'_1 , il faut et il suffit

- 1° Que $\cos I'$ soit infiniment petit;
- 2° Que τ soit infiniment voisin de ν .

Pour qu'un point de ramification T' ou T'_1 du radical $P^{-\frac{3}{2}}$ soit infiniment près de C'_1 lorsque R' est infini, il faut et il suffit que τ soit infini-

ment voisin de $\nu \sin I'$. Il n'est pas nécessaire que $\cos I'$ soit infiniment petit.

Nous allons cependant montrer dans un instant que les intégrales qui dépendent de $P^{-\frac{3}{2}}$ demeurent finies lorsque $\cos I'$ n'est pas infiniment petit.

Si donc l'on ne suppose pas que le point M est à l'infini, au voisinage de la surface du sol, et que l'instant ν n'est pas voisin de $\frac{R}{\Omega_2}$, les facteurs $M^{(E)}$, $N^{(E)}$, $S^{(E)}$ sont, à grande distance de la source, des infiniment petits dont la partie principale est une fonction de τ seulement multipliée par le facteur $\frac{1}{R^{\frac{1}{2}}}$.

Les termes $M^{(E)}$, $N^{(E)}$, $S^{(E)}$ se comportent donc alors comme $M^{(P,P)}$, $N^{(P,P)}$, $S^{(P,P)}$ lorsque ne sont pas remplies les conditions qui créent l'onde superficielle de Rayleigh.

Nous allons supposer désormais que les points de ramification des radicaux $P^{-\frac{3}{2}}$ ou $Q^{-\frac{3}{2}}$ sont infiniment voisins de C_1 et examiner comment se comportent alors les facteurs de transmission.

87. Les facteurs $N_p^{(E)}$ et $N_s^{(E)}$ ne présentent aucune particularité lorsque R' est infini et τ infiniment voisin de $\nu \sin I'$, si $\cos I'$ n'est pas infiniment petit. — Supposons en effet que R' est infini, que τ est infiniment voisin de $\nu \sin I'$ et que $\cos I'$ n'est pas infiniment petit. Pour étudier $N_p^{(E)}$ et $N_s^{(E)}$, nous reprendrons les formules (1) où nous ferons le changement de variable (u, s) défini par

$$(7) \quad b\Omega_1 = s.$$

Les fonctions sous le signe somme ne dépendent plus alors que de deux radicaux, α et $P^{-\frac{3}{2}}$.

On a

$$(8) \quad \alpha\Omega_1 = \sqrt{s^2 - (\nu^2 - 1)},$$

$$(9) \quad P = \left[\tau^2 - \nu^2 \sin^2 I' + \frac{h^2}{R'^2} (1 - \nu^2) \right] - 2\tau s \frac{z}{R'} + s^2 \left(\sin^2 I' + \frac{h^2 + z^2}{R'^2} \right) - \frac{2h}{R'} \left(\tau - s \frac{z}{R'} \right) \sqrt{s^2 - (\nu^2 - 1)}.$$

Dans le plan s , le circuit (S) d'intégration est représenté par la figure (61). Les points de ramification du radical α sont A'_1, A_1 d'affixes $\pm \sqrt{\nu^2 - 1}$.

On peut considérer le segment $A_1 A_1$ comme une coupure, α est positif en F_1 , négatif en F'_1 .

Le circuit (S) se réduit donc à un lacet autour de A_1 et A_1 , déformable à volonté sous les réserves d'usage.

Aux racines u de P voisines de $\pm \frac{i}{\Omega_2}$ correspondent des racines s voisines de zéro. Développons donc P en série entière de s au voisinage de $s = 0$.

On a

$$(10) \quad \sqrt{s^2 - (\nu^2 - 1)} = \pm i \sqrt{\nu^2 - 1} \left[1 - \frac{s^2}{2(\nu^2 - 1)} + \dots \right],$$

le signe + correspondant à la région voisine de C_1 dans le demi-plan supérieur s ou dans le feuillet de Riemann qui prolonge ce demi-plan

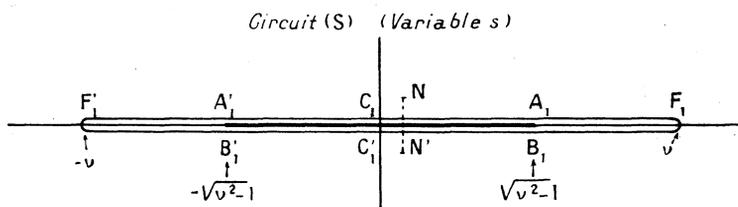


Fig. 61.

au delà de la coupure, le signe — correspondant à la région voisine de C'_1 . D'où

$$(11) \quad P = \left[\tau^2 - \nu^2 \sin^2 I' + \frac{h^2}{R'^2} (1 - \nu^2) \mp \frac{2hi}{R'} \sqrt{\nu^2 - 1} \cdot \tau \right] - 2s \frac{z}{R'} \left[\tau \mp \frac{ih}{R'} \sqrt{\nu^2 - 1} \right] + s^2 \left[\sin^2 I' + \frac{h^2 + z^2}{R'^2} \pm \tau \frac{ih}{R'} \frac{1}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \right] + \dots$$

Il apparaît donc que si $\cos I'$ n'est pas infiniment petit, c'est-à-dire si $\frac{z}{R'}$ demeure fini, deux racines seulement, soit une pour chacune des deux expressions P tendent vers zéro lorsque R' devient infini et lorsque τ tend vers $\nu \sin I'$. Soient N, N' les images de ces deux racines. N correspondant à la région C_1 est dans le demi-plan supérieur s ; N' correspondant à la région C'_1 est dans le demi-plan inférieur, symétrique de N par rapport à l'axe réel.

Comme on peut déformer le lacet (S) de manière à le faire pénétrer dans les feuillets de Riemann, les intégrales qui figurent dans les expressions de $N_0^{(E)}$ et $N_2^{(E)}$ apparaissent comme finies.

Les intégrales figurant dans les expressions de $M^{(E)}$, $N^{(E)}$, $S^{(E)}$ ne peuvent donc devenir infinies pour R' infini que si $\cos I'$ est infiniment petit, et τ infiniment voisin de ν . Pour étudier les intégrales dans ces conditions, nous poserons

$$(12) \quad \tau = \nu + \theta \sqrt{\nu^2 - 1} \cos I'.$$

Nous serons ainsi conduits à certains types d'intégrales que nous allons étudier en premier lieu.

88. Étude des intégrales.

$$I_{p,q} = \int_B^A \frac{(A - \lambda)^{p + \frac{1}{2}}}{(A + \varepsilon - \lambda)^{q + \frac{1}{2}}} F(\lambda) d\lambda.$$

Dans les intégrales $I_{p,q}$, p et q désignent deux entiers $p \geq 0$, $q > p$. A et B sont des constantes réelles et positives $0 < B < A$. D'autre part ε désigne une quantité complexe

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \quad (\varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 \neq 0).$$

La variable λ d'intégration est réelle. $(A - \lambda)^{\frac{1}{2}}$ désigne la racine arithmétique. $(A + \varepsilon - \lambda)^{\frac{1}{2}}$ désigne celle des deux déterminations dont la partie réelle est positive.

La fonction $F(\lambda)$, qui n'est pas nécessairement réelle sur le parcours d'intégration est holomorphe à l'intérieur d'un cercle de centre A et rayon supérieur à $A - B$.

On a donc

$$(13) \quad F(\lambda) = F(A) - (A - \lambda) F'(A) + \frac{(A - \lambda)^2}{2!} F''(A) + \dots \\ + \frac{(-1)^{q-p-1}}{(q-p-1)!} (A - \lambda)^{q-p-1} F^{(q-p-1)}(A) + (A - \lambda)^{q-p} \Phi(\lambda).$$

$\Phi(\lambda)$ étant bornée dans l'intervalle (B, A) .

D'où

$$(14) \quad I_{p,q} = F(A) J_{p,q} - F'(A) J_{p-1,q} + \dots \\ + F^{(q-p-1)} \frac{(-1)^{q-p-1}}{(q-p-1)!} J_{q-1,q} + \int_B^A \left(\frac{A - \lambda}{A + \varepsilon - \lambda} \right)^{q + \frac{1}{2}} \Phi(\lambda) d\lambda$$

en posant

$$(15) \quad J_{p,q} = \int_B^A \frac{(A - \lambda)^{p + \frac{1}{2}}}{(A + \varepsilon - \lambda)^{q + \frac{1}{2}}} d\lambda.$$

L'intégrale $J_{p,q}$ se calcule immédiatement avec le changement de variable

$$(16) \quad \left(\frac{A - \lambda}{A + \varepsilon - \lambda} \right)^2 = x.$$

Il vient

$$(17) \quad J_{p,q} = 2(-1)^{q-p} \frac{1}{\varepsilon^{q-p-1}} \int_0^{\left(\frac{A-B}{A-B+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}} x^{2p+2}(x^2-1)^{q-p-2} dx.$$

Nous allons supposer maintenant que ε tend vers zéro en admettant que le rapport $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ a une limite finie.

1° Si q surpasse p de deux unités au moins, on a

$$(18) \quad \int_0^{\left(\frac{A-B}{A-B+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}} x^{2p+2}(x^2-1)^{q-p-2} dx \\ = (1 + \alpha) \int_0^1 x^{2p+2}(x^2-1)^{q-p-2} dx \\ = (-2)^{q-p-2} \frac{(q-p-2)!}{(2p+3)(2p+5)\dots(2q-3)(2q-1)} (1 + \alpha),$$

α tendant vers zéro en même temps que ε .

Ainsi $J_{p,q}$ est un infiniment grand dont la partie principale a pour valeur

$$(19) \quad \frac{2^{q-p-1}}{\varepsilon^{q-p-1}} \frac{(q-p-2)!}{(2p+3)(2p+5)\dots(2q-3)(2q-1)}.$$

2° Si q ne surpasse p que d'une unité

$$(20) \quad J_{p,p+1} = -2 \int_0^{\left(\frac{A-B}{A-B+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{x^{2p+2}}{x^2-1} dx \\ = -2 \int_0^{\left(\frac{A-B}{A-B+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[x^{2p} + x^{2p-2} + \dots + x^2 + 1 - \frac{1}{2(x+1)} \right] dx \\ - \int_0^{\left(\frac{A-B}{A-B+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{dx}{x-1}.$$

La première de ces intégrales est finie, la seconde est un infiniment grand dont la partie principale est $-\text{Log}|\varepsilon|$, où le logarithme désigne

la détermination réelle du logarithme du module de ε . Ainsi, dans ce second cas, la partie principale de $J_{p,q}$ est réelle, alors que c'est une imaginaire complète dans le premier cas.

Dans l'expression (14) de $J_{p,q}$ figure enfin l'intégrale

$$(21) \quad \int_A^B \left(\frac{A - \lambda}{A + \varepsilon - \lambda} \right)^{q + \frac{1}{2}} \Phi(\lambda) d\lambda.$$

Montrons que le module M de $\frac{A - \lambda}{A + \varepsilon - \lambda}$ est borné dans l'intervalle (B, A) . On a en effet

$$M^2 = \frac{(A - \lambda)^2}{(A - \lambda + \varepsilon_1)^2 + \varepsilon_2^2},$$

$$\frac{dM^2}{d(A - \lambda)} = 2 \frac{A - \lambda}{[(A - \lambda + \varepsilon_1)^2 + \varepsilon_2^2]^2} [\varepsilon_1(A - \lambda) + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2].$$

Si ε_1 est positif, la dérivée est positive, la valeur maxima de M^2 dans l'intervalle (B, A) est $\frac{(A - B)^2}{(A - B + \varepsilon_1)^2 + \varepsilon_2^2}$ qui tend vers l'unité quand ε tend vers zéro.

Si ε_1 est négatif, la valeur maxima de M^2 est atteinte pour $A - \lambda = -\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}$, la valeur correspondante de λ pouvant être située dans l'intervalle (B, A) . Le maximum de M^2 est alors $1 + \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}$. De toutes façons M est borné et par suite l'intégrale (21) est finie.

En définitive $J_{p,q}$ apparaît donc comme un infiniment grand de partie principale

$$(22) \quad F(A) \frac{2^{q-p-1}}{\varepsilon^{q-p-1}} \frac{(q-p-2)!}{(2p+3)(2p+5) \dots (2q-3)(2q-1)},$$

si $F(A)$ est différent de zéro et si $q \geq p + 2$; un infiniment grand de partie principale

$$(23) \quad - F(A) \text{Log} |\varepsilon|$$

si $F(A)$ est différent de zéro et $q = p + 1$.

89. Formules asymptotiques pour $M^{(E)}$ et $S^{(E)}$ (Phénomène superficiel).

— Nous partirons des formules (6).

Les intégrales $\int_{(K)}^{\cdot}$ des expressions (6) sont, nous allons le voir, pour R' infini, $\cos I'$ infiniment petit, τ infiniment voisin de ν , des quantités

infiniment grandes dont nous cherchons à évaluer la partie principale. Nous ne négligeons dans l'intégration qu'une quantité finie en substituant au parcours (K) le parcours (K₁) (fig. 60 à droite), partant d'un point de l'axe réel, d'affixe B convenablement choisie entre zéro et $\sqrt{\nu^2 - 1}$, et revenant en B après avoir contourné la coupure. Les fonctions à intégrer comportent toutes le dénominateur

$$(24) \quad D(u) = \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)^2 - abu^2.$$

Nous multiplierons le numérateur par

$$(25) \quad \bar{D}(u) = \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)^2 + abu^2.$$

Sur le parcours (K₁), u^2 et b sont réels, a imaginaire pure. $\bar{D}(u)$ ne peut donc s'annuler sur le parcours que si $a = 0$ et $u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2} = 0$, ce qui exige $\nu^2 = 2$. Si $\nu^2 = 2$, $D(u)$ s'annule pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire en dehors de (K₁).

Par cette transformation, les fonctions à intégrer deviennent des binômes du premier degré en b . L'intégration du terme indépendant de b conduit à un résultat nul, de sorte que, à un infiniment petit près d'ordre $\frac{1}{R^{1/2}}$, on a

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} M_p^{(E)} &= \frac{4 \sin I'}{\pi R'^2} \mathcal{J} \left[\int_B^{\sqrt{\nu^2-1}} Q^{-\frac{3}{2}} b \Omega_1 \frac{u^4 \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)^2}{D\bar{D}} \lambda d\lambda \right], \\ M_z^{(E)} &= \frac{4}{\pi R'^2 \Omega_1^2} \mathcal{R} \left[\int_B^{\sqrt{\nu^2-1}} Q^{-\frac{3}{2}} b \Omega_1 (\tau + i\lambda \cos I') \frac{u^2 \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)^2}{D\bar{D}} \lambda^2 d\lambda \right], \\ S_p^{(E)} &= -\frac{2\nu^2 \sin I'}{\pi R'^2 \Omega_1^2} \mathcal{J} \left[\int_B^{\sqrt{\nu^2-1}} Q^{-\frac{3}{2}} b \Omega_1 \frac{u^2 \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)^2}{D\bar{D}} \lambda d\lambda \right], \\ S_z^{(E)} &= \frac{2\nu^2}{\pi R'^2 \Omega_1^2} \mathcal{R} \left[\int_B^{\sqrt{\nu^2-1}} Q^{-\frac{3}{2}} b \Omega_1 (\tau + i\lambda \cos I') \frac{u^2 \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)}{D\bar{D}} \lambda^2 d\lambda \right]. \end{aligned} \right.$$

Dans les formules (26), $b\Omega_1$ est une racine arithmétique, la détermination de $Q^{\frac{1}{2}}$ est celle dont la partie réelle est positive.

Les intégrales (26) sont du type des intégrales $I_{p,q}$, car l'on a

$$(27) \quad b\Omega_1 = \sqrt{\sqrt{\nu^2-1} - \lambda} \sqrt{\sqrt{\nu^2-1} + \lambda},$$

ces deux radicaux désignant des racines arithmétiques, et

$$(28) \quad Q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt{\nu^2 - 1} + \varepsilon - \nu} \sqrt{\sqrt{\nu^2 - 1} + \bar{\varepsilon} + \nu}.$$

ε et $\bar{\varepsilon}$ désignent deux imaginaires conjuguées, les deux radicaux ayant leur partie réelle positive.

On a d'ailleurs

$$(29) \quad \varepsilon = (\sqrt{\tau^2 - 1} \sin I' - \sqrt{\nu^2 - 1}) + i\tau \cos I'.$$

Pour

$$\tau = \nu + \theta \sqrt{\nu^2 - 1} \cos I' \quad [\text{relation (12)}],$$

ε est un infiniment petit dont la partie principale est

$$(30) \quad \nu \cos I' (\theta + i).$$

L'étude des intégrales $I_{p,q}$ montre donc immédiatement que $M_p^{(E)}$ et $S_p^{(E)}$ sont infiniment petits d'ordre $\frac{1}{R^2}$ seulement, alors que $M_z^{(E)}$ et $S_z^{(E)}$ sont des infiniment petits d'ordre inférieur, de parties principales

$$(31) \quad M_z^{(E)} = -S_z^{(E)} = \frac{8}{\pi R^2} \frac{\sqrt{\nu^2 - 1}}{\nu} \text{Log}(\cos I' \sqrt{\theta^2 + 1}).$$

90. Formules asymptotiques pour les dérivées $\frac{d^n M^{(E)}}{d\nu^n}$ et $\frac{d^n S^{(E)}}{d\nu^n}$ (Phénomène superficiel). — Il n'est pas évident que les parties principales de ces dérivées puissent être obtenues en dérivant successivement par rapport à ν les parties principales de $M^{(E)}$ et $S^{(E)}$. Nous allons voir d'ailleurs que ce serait partiellement inexact.

En dérivant successivement les formules (1), nous obtiendrons une suite d'intégrales où la fonction figurant sous le signe somme comporte un terme dépendant de ν de la forme

$$(32) \quad \{u^2 \rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2\}^{-\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} [\nu - a(h+z)]^q,$$

où p et q sont deux entiers.

Par une nouvelle dérivation, le terme (32) conduit à deux nouveaux termes en

$$(33) \quad \{u^2 \rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2\}^{-\left(\nu + 1 + \frac{1}{2}\right)} [\nu - a(h+z)]^{q+1}$$

et en

$$(34) \quad \{ u^2 \rho^2 + [\nu - a(h + z)]^2 \}^{-\left(p + \frac{1}{2}\right)} [\nu - a(h + z)]^{\nu-1}.$$

Cette remarque concernant la formation successive des dérivées montre d'abord que, dans la formule générale (32), l'entier p est au moins égal à l'entier q .

L'étude qui a été faite des intégrales $J_{\rho, q}$ montre alors que, dans $M_x^{(E)}$, $S_x^{(E)}$ ou leurs dérivées par rapport au temps ν , le terme dépendant de la fonction (32) est d'ordre infinitésimal

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{1}{R'^{\rho+2-q}} & \text{si } p \geq 2, \\ \frac{1}{R'^{3-q}} & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Lorsqu'il s'agit de $M_\rho^{(E)}$, $S_\rho^{(E)}$ ou de leurs dérivées, il faut, dans les formules (35), diminuer d'une unité l'exposant de R' à cause du facteur ρ qui multiplie les intégrales.

Or, dans les dérivées de $M_x^{(E)}$ et $S_x^{(E)}$, le terme dépendant de la fonction (33) est d'ordre infinitésimal

$$\frac{1}{R'^{\rho+2-q}}$$

quel que soit p , et le terme dépendant de la fonction (34) est d'ordre infinitésimal

$$\frac{1}{R'^{\rho+3-q}} \quad \text{si } p \geq 2,$$

ou

$$\frac{1}{R'^3} \text{Log } \frac{1}{R'} \quad \text{si } p = 1.$$

Le terme dépendant de (33) est donc toujours d'ordre infinitésimal inférieur au terme dépendant de (34). Les dérivées de $M_\rho^{(E)}$, $M_x^{(E)}$, $S_\rho^{(E)}$, $S_x^{(E)}$ sont toutes d'ordre infinitésimal $\frac{1}{R'^2}$ et, pour obtenir leur partie principale, il suffit de dériver successivement les radicaux

$$\{ u^2 \rho^2 + [\nu - a(h + z)]^2 \}^{-\left(p + \frac{1}{2}\right)}$$

en considérant les facteurs

$$[\nu - a(h + z)]^q$$

comme des constantes.

L'équivalent des formules (6) pour les dérivées s'écrit donc

$$(36) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n M_2^{(E)}}{d\nu^n} &= 2(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \frac{\Omega_1 \sin I'}{\pi R'^2} \left(\frac{\Omega_1}{R'} \right)^n \\ &\quad \times \mathcal{J} \left[\int_{(K)} Q^{-(n+1+\frac{1}{2})} [\tau + i\lambda \cos I']^n [u^2 j(u)] \lambda d\lambda \right], \\ \frac{d^n M_z^{(E)}}{d\nu^n} &= 2(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \frac{1}{\pi R'^2 \Omega_1} \left(\frac{\Omega_1}{R'} \right)^n \\ &\quad \times \mathcal{R} \left[\int_{(K)} Q^{-(n+1+\frac{1}{2})} [\tau + i\lambda \cos I']^{n+1} j(u) \lambda^2 d\lambda \right], \\ \frac{d^n S_2^{(E)}}{d\nu^n} &= (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \frac{\nu^2 \sin I'}{\pi R'^2 \Omega_1^2} \left(\frac{\Omega_1}{R'} \right)^n \\ &\quad \times \mathcal{J} \left[\int_{(K)} Q^{-(n+1+\frac{1}{2})} [\tau + i\lambda \cos I']^n \frac{u^2}{D(u)} b \Omega_1 \lambda d\lambda \right], \\ \frac{d^n S_z^{(E)}}{d\nu^n} &= (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \frac{\nu^2}{\pi R'^2 \Omega_1^2} \left(\frac{\Omega_1}{R'} \right)^n \\ &\quad \times \mathcal{J} \left[\int_{(K)} Q^{-(n+1+\frac{1}{2})} [\tau + i\lambda \cos I']^{n+1} \frac{u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}}{D(u)} \lambda d\lambda \right] \end{aligned} \right.$$

et l'équivalent des formules (26) devient

$$(37) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n M_2^{(E)}}{d\nu^n} &= 4(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \frac{\sin I'}{\pi R'^2} \left(\frac{\Omega_1}{R'} \right)^n \\ &\quad \times \mathcal{J} \left[\int_B \sqrt{\nu^2-1} Q^{-(n+1+\frac{1}{2})} b \Omega_1 (\tau + i\lambda \cos I')^n \frac{u^4 \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2} \right)^2}{D\bar{D}} \lambda d\lambda \right], \\ \frac{d^n M_z^{(E)}}{d\nu^n} &= 4(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \frac{1}{\pi R'^2 \Omega_1^2} \left(\frac{\Omega_1}{R'} \right)^n \\ &\quad \times \mathcal{R} \left[\int_B \sqrt{\nu^2-1} Q^{-(n+1+\frac{1}{2})} b \Omega_1 (\tau + i\lambda \cos I')^{n+1} \frac{u^2 \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2} \right)^2}{D\bar{D}} \lambda^2 d\lambda \right], \\ \frac{d^n S_2^{(E)}}{d\nu^n} &= 2(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \frac{\nu^2 \sin I'}{\pi R'^2 \Omega_1^2} \left(\frac{\Omega_1}{R'} \right)^n \\ &\quad \times \mathcal{J} \left[\int_B \sqrt{\nu^2-1} Q^{-(n+1+\frac{1}{2})} b \Omega_1 (\tau + i\lambda \cos I')^n \frac{u^2 \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2} \right)^2}{D\bar{D}} \lambda d\lambda \right], \\ \frac{d^n S_z^{(E)}}{d\nu^n} &= (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1) \frac{\nu^2}{\pi R'^2 \Omega_1^2} \left(\frac{\Omega_1}{R'} \right)^n \\ &\quad \times \mathcal{R} \left[\int_B \sqrt{\nu^2-1} Q^{-(n+1+\frac{1}{2})} b \Omega_1 (\tau + i\lambda \cos I')^{n+1} \frac{u^2 \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2} \right)}{D\bar{D}} \lambda^2 d\lambda \right]. \end{aligned} \right.$$

D'où les parties principales

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n M_z^{(E)}}{d\nu^n} &= (-1)^n \frac{8}{(\nu^2 - 1)^2} \frac{(n-1)!}{\pi R'^2} \left(\frac{\Omega_1}{h+z}\right)^n \mathcal{J}[\theta + i]^{-n}, \\ \frac{d^n M_z^{(E)}}{d\nu^n} &= (-1)^{n-1} \frac{8}{(\nu^2 - 1)^2} \frac{\sqrt{\nu^2 - 1}}{\nu} \frac{(n-1)!}{\pi R'^2} \left(\frac{\Omega_1}{h+z}\right)^n \mathcal{R}[\theta + i]^{-n}, \\ \frac{d^n S_\rho^{(E)}}{d\nu^n} &= (-1)^n \frac{4}{(\nu^2 - 1)^2} \frac{(n-1)!}{\pi R'^2} \left(\frac{\Omega_1}{h}\right)^n \mathcal{J}[\theta + i]^{-n}, \\ \frac{d^n S_z^{(E)}}{d\nu^n} &= (-1)^n \frac{8}{(\nu^2 - 1)^2} \frac{\sqrt{\nu^2 - 1}}{\nu} \frac{(n-1)!}{\pi R'^2} \left(\frac{\Omega_1}{h}\right)^n \mathcal{R}[\theta + i]^{-n}. \end{aligned} \right.$$

Comme l'on a

$$(39) \quad \frac{d}{d\nu} (\theta + i)^{-n} = \frac{-n\Omega_1}{\sqrt{\nu^2 - 1}(h+z)} (\theta + i)^{-n-1},$$

il apparaît que les parties principales des dérivées successives peuvent être obtenues en dérivant successivement les parties principales des dérivées premières. Les parties principales de $\frac{dM_z^{(E)}}{d\nu}$ et $\frac{dS_z^{(E)}}{d\nu}$ sont aussi les dérivées des parties principales de $M_z^{(E)}$ et $S_z^{(E)}$. Cependant, nous avons négligé $M_\rho^{(E)}$ et $S_\rho^{(E)}$ devant $M_z^{(E)}$ et $S_z^{(E)}$, nous avons posé

$$M_\rho^{(E)} = S_\rho^{(E)} = 0.$$

Il n'en résulte pas, comme on le voit ici, que les dérivées de $M_\rho^{(E)}$ et $S_\rho^{(E)}$ par rapport au temps soient négligeables devant celles de $M_z^{(E)}$ et $S_z^{(E)}$.

91. **Étude des intégrales dépendant du radical P. Fonctions $N_\rho^{(E)}$, $N_z^{(E)}$ et leurs dérivées.** — On a (relations 5)

$$(40) \quad P = -\lambda^2 \left(\sin^2 I' + \frac{h^2 + z^2}{R'^2} \right) + 2i\lambda\tau \frac{h}{R'} + \left[\tau^2 - \sin^2 I' + \frac{z^2}{R'^2} (\nu^2 - 1) \right] - \frac{2z}{R'} \left(\tau + i\lambda \frac{h}{R'} \right) b\Omega_1.$$

Dans l'expression de P, les termes rationnels en λ constituent un trinôme du second degré dont les racines sont respectivement infiniment voisines de $\pm \sqrt{\nu^2 - 1}$, dans les conditions où nous nous plaçons.

$$(41) \quad P = \left(\sin^2 I' + \frac{h^2 + z^2}{R'^2} \right) (\sqrt{\nu^2 - 1} + \varepsilon - \lambda) (\sqrt{\nu^2 - 1} + \varepsilon + \lambda) - \frac{2z}{R'} \left(\tau + i\lambda \frac{h}{R'} \right) b\Omega_1,$$

ε et sa conjuguée $\bar{\varepsilon}$ sont des infiniment petits dont la valeur n'est d'ailleurs pas la même que celle des quantités du même nom introduites dans les paragraphes précédents.

ε a pour partie principale

$$(42) \quad \varepsilon = \nu \cos I' \left(\theta + i \frac{h}{h+z} \right).$$

On est conduit comme précédemment à évaluer la partie principale d'intégrales du type

$$(43) \quad \int_{(K_1)} P^{-(n+\frac{1}{2})} [M(\lambda) + b\Omega_1 N(\lambda)] d\lambda,$$

où $M(\lambda)$ et $N(\lambda)$ sont des fonctions holomorphes dans un cercle de centre $\sqrt{\nu^2-1}$ dont le rayon ne tend pas vers zéro en même temps que ε . On peut d'ailleurs écrire

$$(44) \quad P = m(\lambda) [\sqrt{\nu^2-1} + \varepsilon - \lambda] + \frac{z}{R'} n(\lambda) b\Omega_1$$

en désignant par $m(\lambda)$ et $n(\lambda)$ deux fonctions holomorphes dans un cercle de centre $\sqrt{\nu^2-1}$ et de rayon fini.

Or, comme nous l'avons observé, le module de

$$\frac{b\Omega_1}{\sqrt{\nu^2-1} + \varepsilon - \lambda}$$

est borné sur le parcours (K_1) . Le module de

$$\frac{z}{R'} \frac{b\Omega_1}{\sqrt{\nu^2-1} + \varepsilon - \lambda} \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

tend donc uniformément vers zéro, sur le parcours (K_1) , lorsque R' devient infini. Nous pourrions donc remplacer $P^{-(n+\frac{1}{2})}$ par le développement limité suivant :

$$(45) \quad \left[\frac{P}{m(\lambda)} \right]^{-(n+\frac{1}{2})} = (\sqrt{\nu^2-1} + \varepsilon - \lambda)^{-(n+\frac{1}{2})} \\ - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)} \frac{z}{R'} b\Omega_1 (\sqrt{\nu^2-1} + \varepsilon - \lambda)^{-(n+1+\frac{1}{2})} \\ + C_1(\lambda) \frac{z^2}{R'^2} (b\Omega_1)^2 (\sqrt{\nu^2-1} + \varepsilon - \lambda)^{-(n+2+\frac{1}{2})} + \dots \\ + C_{(k-1)}(\lambda) \frac{z^k}{R'^k} (b\Omega_1)^k (\sqrt{\nu^2-1} + \varepsilon - \lambda)^{-(n+k+\frac{1}{2})} + \dots \\ + C_{2n}(\lambda) \frac{z^{2n+1}}{R'^{2n+1}} (b\Omega_1)^{2n+1} (\sqrt{\nu^2-1} + \varepsilon - \lambda)^{-(3n+1+\frac{1}{2})},$$

où $C_1(\lambda), C_2(\lambda), \dots, C_{2n-1}(\lambda)$ sont holomorphes dans le cercle de centre $\sqrt{v^2-1}$ et où $C_{2n}(\lambda)$ est bornée.

L'intégrale (43) se décompose donc en $2n+2$ intégrales dont les $2n+1$ premières sont du type $I_{p,q}$ et dont la dernière

$$\int_{(K_1)} C_{2n}(\lambda) [m(\lambda)]^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} [M(\lambda) + b\Omega_1 N(\lambda)] \frac{(b\Omega_1)^{2n+1}}{(\sqrt{v^2-1} + \varepsilon - \lambda)^{n+\frac{1}{2}}} \left[\frac{z}{R'(\sqrt{v^2-1} + \varepsilon - \lambda)} \right]^{2n+1} d\lambda$$

est bornée, puisque chacun des facteurs qui figurent sous le signe somme est borné sur le parcours (K_1) .

Considérons la $(K+1)^{\text{ième}}$ intégrale et supposons d'abord que K est pair :

1° $K = 2p$ ($p < n$). La $(2p+1)^{\text{ième}}$ intégrale s'écrit

$$(46) \quad \frac{z^{2p}}{R'^{2p}} \int_{(K_1)} C_{2p-1}(\lambda) [M(\lambda) + b\Omega_1 N(\lambda)] (b\Omega_1)^{2p} (\sqrt{v^2-1} + \varepsilon - \lambda)^{-\left(n+2p+\frac{1}{2}\right)} d\lambda.$$

Dans l'intégrale (46) le terme qui dépend de $M(\lambda)$ disparaît dans l'intégration et l'expression (46) apparaît comme le produit par $\frac{z^{2p}}{R'^{2p}}$ d'une intégrale $I_{p,n+2p}$.

2° Soit $K = 2p+1$ ($p < n$). La $(2p+2)^{\text{ième}}$ intégrale s'écrit

$$(47) \quad \frac{z^{2p+1}}{R'^{2p+1}} \int_{(K_1)} C_{2p}(\lambda) [M(\lambda) + b\Omega_1 N(\lambda)] (b\Omega_1)^{2p+1} (\sqrt{v^2-1} + \varepsilon - \lambda)^{-\left(n+2p+1+\frac{1}{2}\right)} d\lambda.$$

C'est le terme qui dépend de $N(\lambda)$ qui disparaît cette fois dans l'intégration et l'expression (47) apparaît comme le produit par $\frac{z^{2p+1}}{R'^{2p+1}}$ d'une intégrale $I_{p,n+2p+1}$.

D'où résulte :

1° Que si $n = 1$ (cas des termes $N_p^{(E)}$ et $N_z^{(E)}$) le premier terme du développement de l'intégrale (44) est infiniment grand comme $\text{Log} R'$, que le second terme est fini et les suivants infiniment petits.

2° Que si $n > 1$ (cas des dérivées successives de $N_p^{(E)}$ et $N_z^{(E)}$) les deux premiers termes du développement de l'intégrale (44) sont infiniment grands comme R'^{n-1} , les deux suivants comme R'^{n-2} , les deux suivants comme R'^{n-3} , etc.

3° Que pour évaluer la partie principale des dérivées, on peut dériver successivement les expressions de $N_\rho^{(E)}$ et $N_z^{(E)}$ comme si les facteurs

$$(\nu - ah - bz)^\nu$$

qui sous le signe somme multiplient les radicaux

$$[u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2]^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)}$$

étaient indépendants de ν .

Les parties principales de $N_\rho^{(E)}$ et $N_z^{(E)}$ (en négligeant les infiniment petits d'ordre inférieur à $\frac{\text{Log } R'}{R'^2}$) et celles des dérivées successives sont donc

$$(48) \left\{ \begin{aligned} N_\rho^{(E)} &= 0, \\ N_z^{(E)} &= \frac{-16}{\pi R'^2} \frac{\sqrt{\nu^2 - 1}}{\nu} \text{Log} \left[\cos' \sqrt{\theta^2 + \frac{h^2}{(h+z)^2}} \right], \\ \frac{d^n N_z^{(E)}}{d\nu^n} &= (-1)^{n-1} \frac{4}{(\nu^2 - 1)^2} \frac{n}{n} \frac{(n-1)!}{\pi R'^2} \left(\frac{\Omega_1}{h+z} \right)^n \mathcal{J} \left[\theta + i \frac{h}{h+z} \right]^{-n}, \\ \frac{d^n N_z^{(E)}}{d\nu^n} &= (-1)^n \frac{16}{(\nu^2 - 1)^2} \frac{n}{n} \frac{(n-1)!}{\pi R'^2} \frac{\sqrt{\nu^2 - 1}}{\nu} \left(\frac{\Omega_1}{h+z} \right)^n \mathcal{R} \left[\theta + i \frac{h}{h+z} \right]^{-n} \\ &\quad + (-1)^n \frac{4}{(\nu^2 - 1)^2} \frac{n!}{\pi R'^2} \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \left(\frac{\Omega_1}{h+z} \right)^n \frac{z}{h+z} \mathcal{J} \left[\theta + i \frac{h}{h+z} \right]^{-n-1}. \end{aligned} \right.$$

92. **Courbes représentatives.** — Les formules (38) et (48) font apparaître que les parties principales des dérivées

$$\frac{d^n M_\rho^{(E)}}{d\nu^n}, \quad \frac{d^n M_z^{(E)}}{d\nu^n}, \quad \frac{d^n N_\rho^{(E)}}{d\nu^n}, \quad \dots, \quad \frac{d^n S_z^{(E)}}{d\nu^n}$$

s'expriment par des fonctions rationnelles de θ . La construction de leurs courbes représentatives en fonction de ν est donc particulièrement aisée à effectuer et il ne nous semble pas utile de donner des tableaux de nombres comme au chapitre précédent.

La courbe représentative de $\mathcal{J} [\theta + i]^{-n}$ ou de $\mathcal{J} \left[\theta + i \frac{h}{h+z} \right]^{-n}$ en fonction de θ présente n ondulations simples. L'axe des ordonnées est un axe de symétrie si n est impair, l'origine est un centre de symétrie si n est pair.

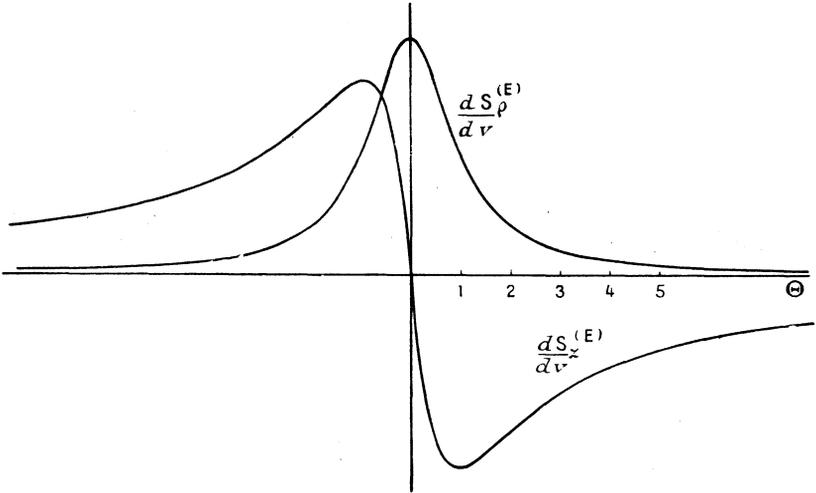


Fig. 62. — Deuxième onde superficielle.

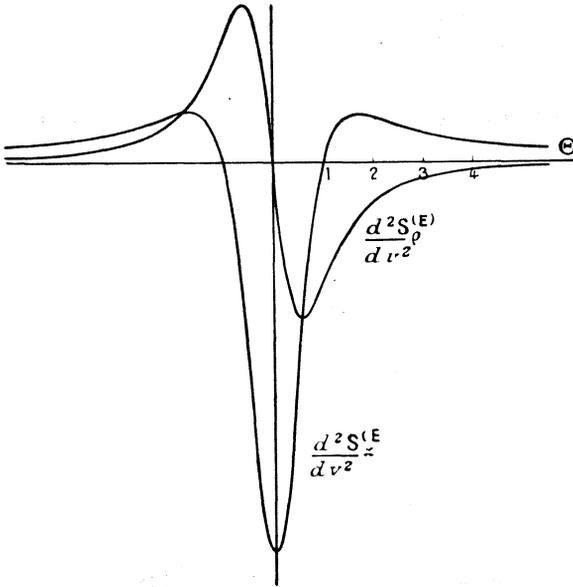


Fig. 63. — Deuxième onde superficielle.

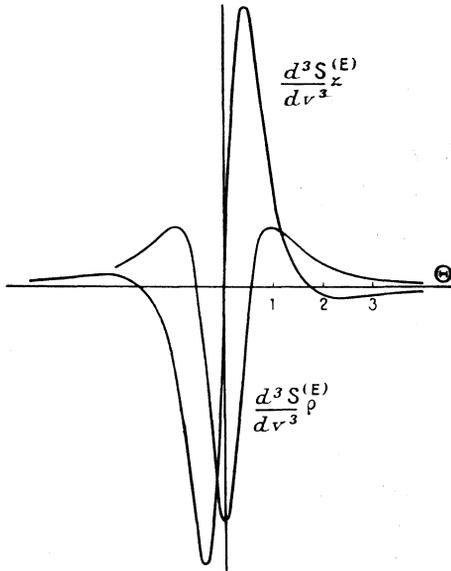


Fig. 64. — Deuxième onde superficielle.

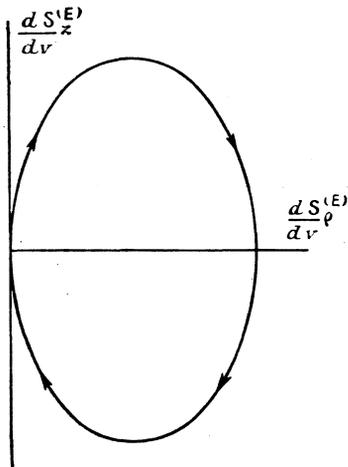


Fig. 65.

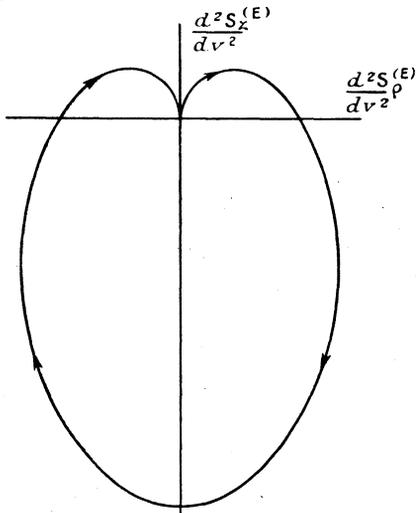


Fig. 66.

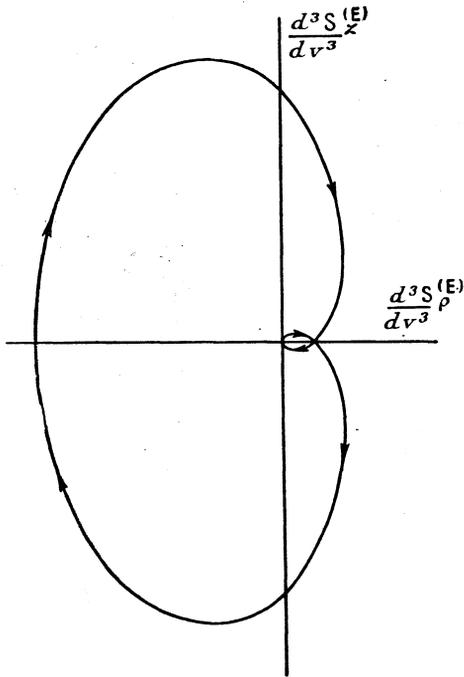


Fig. 67.

La courbe représentative de $\mathcal{R}[\Theta + i]^{-n}$ ou de $\mathcal{R}\left[\Theta + i \frac{h}{h+z}\right]^{-n}$ en fonction de Θ présente $n + 1$ ondulations simples. L'axe des ordonnées est un axe de symétrie si n est pair, l'origine est un centre de symétrie si n est impair.

Les courbes représentatives des dérivées de $(M_\rho^{(E)} + N_\rho^{(E)})$ et surtout de $(M_z^{(E)} + N_z^{(E)})$ pourront alors présenter un nombre relativement important d'ondulations [par exemple cinq ondulations pour les dérivées troisièmes de $(M_\rho^{(E)} + N_\rho^{(E)})$, 12 pour celles de $(M_z^{(E)} + N_z^{(E)})$].

A la surface du sol, pour $z = 0$, les phénomènes sont plus simples. Les figures ci-contre sont la représentation graphique de $\frac{dS_\rho^{(E)}}{dv}$ et $\frac{dS_z^{(E)}}{dv}$ (*fig.* 62), de $\frac{d^2 S_\rho^{(E)}}{dv^2}$ et $\frac{d^2 S_z^{(E)}}{dv^2}$ (*fig.* 63), de $\frac{d^3 S_\rho^{(E)}}{dv^3}$ et $\frac{d^3 S_z^{(E)}}{dv^3}$ (*fig.* 64). Si, comme au chapitre précédent, nous envisageons un mobile d'abscisse $S_\rho^{(E)}$, d'ordonnée $S_z^{(E)}$, l'hodographe de son mouvement est une ellipse (*fig.* 65); l'hodographe des accélérations et celui des accélérations secondes sont représentés également par les figures 66 et 67.

93. Comparaison de l'ordre de grandeur de la largeur des ondulations dans l'onde de Rayleigh et dans la deuxième onde superficielle. — Nous avons évalué, au chapitre précédent, l'ordre de grandeur de la largeur des ondulations des courbes $\frac{d^2 S_\rho^{(P, P')}}{dv^2}$ ou $\frac{d^2 S_z^{(P, P')}}{dv^2}$ et nous avons à cette occasion défini, de façon très arbitraire d'ailleurs, la période T_{Rg} de l'onde de Rayleigh

$$(49) \quad T_{Rg}^{sec} = h^{km} \times 0,444 \quad [Cf. \text{Chap. XI, formule (36)}].$$

En définissant la période de façon similaire pour la courbe $\frac{d^2 S_z^{(E)}}{dv^2}$, nous obtenons

$$(50) \quad T_{S_2}^{sec} = \frac{4\sqrt{2}}{\Omega_1 \text{ km/sec}} h^{km} = h^{km} \times 0,851.$$

Ce résultat n'a pas une signification intrinsèque très précise. Il fait apparaître cependant que la largeur des ondulations dans la deuxième onde superficielle est d'un ordre de grandeur sensiblement plus élevé que dans l'onde de Rayleigh.

94. Allure de l'ensemble du phénomène superficiel. — La « deuxième onde superficielle », en dépit du nom que nous lui avons donné, se propage plus vite que l'onde de Rayleigh, mais sa vitesse Ω_2 est peu supérieure à la vitesse Ω_R de l'onde de Rayleigh.

Dans chacun des deux phénomènes, considéré isolément, la forme des ondulations est indépendante de la distance ρ du point considéré à l'épicentre. Il en est de même de la largeur des ondulations (périodes) mais les vitesses, accélérations, etc. décroissent proportionnellement à $\frac{1}{\rho^2}$ dans la « deuxième onde superficielle », proportionnellement à $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ dans l'onde de Rayleigh.

Désignons par exemple par Rg l'amplitude maxima des variations de $\frac{d^2 S_z^{(P, P')}}{d\nu^2}$ dans l'onde de Rayleigh, par S_2 celle des variations de $\frac{d^2 S_z^{(E)}}{d\nu^2}$ dans la deuxième onde superficielle. On a, pour $\nu = \sqrt{3}$,

$$(51) \quad \frac{Rg}{S_2} = 0,83 \left(\frac{\rho}{h} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Dans un séismogramme où les grandes périodes de la deuxième onde superficielle ne bénéficieraient pas d'une amplification sélective, les élongations correspondant à la deuxième onde doivent donc devenir rapidement beaucoup plus faibles que celles qui correspondent à l'onde de Rayleigh, quand la distance ρ augmente.

Soient par exemple $h = 40^{\text{km}}$; $\rho = 4000^{\text{km}}$

$$\frac{Rg}{S_2} = 830.$$

D'autre part, il résulte du petit écart entre les vitesses Ω_2 et Ω_R que les deux phénomènes superficiels restent enchevêtrés assez longtemps. Supposons que chacun d'eux ne comporte qu'un petit nombre d'ondulations. En vertu des formules (49) et (50) l'ensemble du phénomène superficiel s'échelonne alors pratiquement sur une durée

$$t^{\text{sec}} = \mu h^{\text{km}},$$

μ désignant un nombre dont l'ordre de grandeur est de quelques unités.

Or, l'intervalle de temps qui sépare le centre des deux phénomènes est

$$t^{\text{sec}} = \rho \left(\frac{1}{\Omega_R} - \frac{1}{\Omega_2} \right) = 0,025 \cdot \rho^{\text{km}},$$

si nous posons $\nu = \sqrt{3}$ et si nous admettons pour Ω_R le nombre de Galitzin

$$3,53 \text{ km/sec.}$$

Les deux phénomènes ne seront donc pratiquement séparés que si t'

est supérieur à $\frac{t}{2}$, c'est-à-dire si $\frac{\rho}{h}$ est de l'ordre d'une centaine ou de quelques centaines d'unités.

Ainsi, à des distances moyennes de l'épicentre, le séismogramme doit présenter une phase L unique résultant de la superposition de la deuxième onde superficielle et de l'onde de Rayleigh, et comportant un nombre assez élevé d'ondulations, plus larges et d'amplitude plus faible au début qu'à la fin.

Ce résultat, bien entendu, s'il doit être approximativement valable pour le séisme artificiel envisagé à la fin du Chapitre XI, ne saurait s'appliquer aux séismes naturels. Il est intéressant toutefois d'en rapprocher la description suivante (1) de la phase L des séismes naturels :

« La phase L est caractérisée par de véritables ondes quasi-sinusoïdales, de périodes et d'amplitudes bien déterminées. Au début, la période est voisine de 18 secondes (pour $\rho > 2000$ km/s). Après quelques oscillations, l'amplitude croît, simultanément la période décroît ».

Pour expliquer les variations constatées au cours de la phase L dans la grandeur des périodes, nombre de séismologues font appel à l'hypothèse d'une dispersion, c'est-à-dire d'une variation des vitesses de propagation en fonction de la période. Si, par exemple, dans l'équation de propagation

$$\Delta\Psi - \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

ils introduisent, d'une manière plus ou moins conventionnelle, un frottement proportionnel à la vitesse, cette équation devient

$$(52) \quad \Delta\Psi + 2K \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

et la vitesse V de phase d'une onde harmonique plane de longueur d'onde λ apparaît comme une fonction de λ

$$(53) \quad V^2 = \Omega^2 - \left(\frac{\lambda K}{2\pi} \right)^2.$$

Ainsi, la vitesse V diminue quand la longueur d'onde augmente. Ce résultat est d'ailleurs contradictoire avec le phénomène qu'il s'agit

(1) H. BOUASSE, *Séismes et sismographes*, p. 199.

d'expliquer : périodes plus grandes au début qu'à la fin. Force serait d'invoquer d'autres causes de dispersion (1).

Les résultats que nous avons obtenus au cours de ces deux chapitres ne constituent pas une explication de la variation des périodes dans la phase L des séismes naturels, car la deuxième onde superficielle que nous signalons ici n'y joue probablement qu'un rôle assez effacé. Il fait présumer cependant que l'on doit parvenir plus sûrement à comprendre la nature des phénomènes complexes de la phase L par la discussion approfondie de schémas de plus en plus perfectionnés que par l'assimilation perpétuelle d'un séisme à un phénomène sinusoïdal.

(1) H. BOUASSE, *Séismes et sismographes*, p. 59.

CHAPITRE XIII.

ONDE PROGRESSIVE QUAND LE SECOND MILIEU EST LE VIDE (f/n).
PSEUDO-ONDE SPHÉRIQUE DE DISTORSION
AUX GRANDES DISTANCES DE LA SOURCE.

95. Les facteurs $M^{(E)}$, $S^{(E)}$ ne présentent pas d'autres anomalies que celles qui correspondent à la deuxième onde superficielle. — Les intégrales figurant dans les relations (6) du Chapitre XII, par lesquelles nous avons exprimé les facteurs $M^{(E)}$, $N^{(E)}$, $S^{(E)}$ ne peuvent, comme nous l'avons observé, devenir infinies dans deux cas :

1° Ou bien l'un des points de ramification T , T' , T_1 , T'_1 tend vers C_1 ou C'_1 . A cette anomalie correspond la deuxième onde superficielle étudiée au chapitre précédent.

2° Ou bien deux au moins des points T , T' , T_1 , T'_1 se rapprochent infiniment du lacet d'intégration, *de part et d'autre* d'un bord de ce lacet. L'examen de cette deuxième éventualité fait l'objet du présent chapitre.

Dans le cas des facteurs $M^{(E)}$ et $S^{(E)}$, il n'existe que deux points de ramification, situés dans le demi-plan supérieur, pour les valeurs de τ supérieures à l'unité que nous avons seules à envisager. Ces points tendent l'un vers l'autre lorsque τ tend vers l'unité par valeurs supérieures, mais comme ils sont d'un même côté du lacet, les intégrales des relations (6) ne deviennent pas infinies.

96. Nouvelle anomalie des facteurs $N^{(E)}$. — Dans le cas des facteurs $N^{(E)}$, il existe quatre points de ramification : T , T' dans le demi-plan supérieur; T_1 , T'_1 dans les feuillets. Il peut alors arriver, lorsque R' devient infini, que T et T_1 , T' et T'_1 deviennent respectivement voisins du lacet, de part et d'autre de son bord supérieur.

Pour étudier ce phénomène, nous continuerons à utiliser la variable λ , ce qui présente de légers avantages. Au chapitre suivant, nous repren-

drons sommairement l'étude des intégrales (E) dans le cas où les deux milieux sont quelconques. Pour cette discussion plus générale, nous conserverons la variable u , avec laquelle nous étions plus familiarisés, afin de rendre plus nette que dans le présent chapitre la transition entre le cas de R' fini et celui de R' infini.

Les affixes de T, T', T_1, T'_1 , sont les racines de P

$$(1) \quad P = -\sin^2 I'(\lambda^2 + 1) + \left(\tau + i\lambda \frac{h}{R'} - \frac{z}{R'} \sqrt{(\nu^2 - 1) - \lambda^2} \right)^2.$$

Les racines de P sont, pour R' infini, infiniment voisines de celles de

$$(2) \quad p(\lambda) = -\sin^2 I'(\lambda^2 + 1) + (\tau - \cos I' \sqrt{(\nu^2 - 1) - \lambda^2})^2.$$

En excluant le cas où $\sqrt{(\nu^2 - 1) - \lambda^2}$ serait infiniment petit, puisqu'il a été étudié au Chapitre XII, l'équation $P = 0$ n'aura donc deux racines infiniment voisines que si τ et I' sont infiniment voisins des valeurs pour lesquelles l'équation $p(\lambda) = 0$ admet une racine double. Or,

$$(3) \quad p'(\lambda) = 2\lambda \left[1 - \frac{\tau \cos I'}{\sqrt{(\nu^2 - 1) - \lambda^2}} \right].$$

Si la valeur $\lambda = 0$, qui annule $p'(\lambda)$, est racine de $p = 0$, ce sont les points T, T' qui deviennent infiniment voisins. Les intégrales des relations (6) ne deviendront pas infinies si T_1 et T'_1 ne sont pas aussi infiniment voisins de l'origine, c'est-à-dire si $\lambda = 0$ n'est pas racine quadruple de $p = 0$, si donc la valeur $\lambda = 0$ n'annule pas le second facteur de $p'(\lambda)$.
Pour

$$(4) \quad 1 - \frac{\tau \cos I'}{\sqrt{(\nu^2 - 1) - \lambda^2}} = 0,$$

l'équation $p = 0$ devient

$$(5) \quad \sin^2 I'(\tau^2 - \nu^2) = 0.$$

Pour $\sin I' = 0$, l'équation $p = 0$ admet en effet deux racines doubles $\pm \sqrt{(\nu^2 - 1) - \tau^2}$, mais elles sont imaginaires pures puisque les seules valeurs de τ que nous ayons à considérer sont, pour $I' = 0$, supérieures à ν .

Pour $\tau = \nu$, l'équation $p = 0$ admet les deux racines doubles $\pm \sqrt{\nu^2 \sin^2 I' - 1}$, qui sont réelles et situées sur le lacet pour $I' > l$, imaginaires pures pour $I' < l$. — $\left[\sin l = \frac{1}{\nu} \right]$.

Il résulte de cette discussion que les intégrales des relations (6) ne pourront devenir infinies que si τ est infiniment voisin de ν , c'est-à-dire si ν est infiniment voisin de $\frac{R'}{\Omega_2}$ et si l' est supérieur ou égal à l .

La signification physique de ce phénomène est la suivante : nous avons observé que le front de l'onde de distorsion, aux très grandes distances de la source, présentait la forme limite d'une calotte sphérique de rayon $\Omega_2 \nu$ à l'intérieur d'un cône de révolution d'axe Oz de sommet O et de demi-angle au sommet $l (l' < l)$. A l'extérieur de ce cône, pour $l' > l$ la forme limite du front est celle d'un cône de révolution d'axe Oz tangent à la calotte sphérique sur le cône $l' = l$ et coupant la surface du sol suivant le cercle de rayon $\Omega_1 \nu$ (Cf. Chap. X, *fig.* 46). Nous avons remarqué que cette forme limite était précisément celle des ondes à front conique à condition de noter une différence essentielle : la partie de la sphère $\Omega_2 \nu$ correspondant à $l' > l$ n'est pas, dans le cas actuel, un front d'onde véritable. Le phénomène que nous étudions dans ce chapitre correspond précisément à une concentration d'énergie au voisinage de cette partie de la sphère $\Omega_2 \nu$. Cette concentration de l'énergie au voisinage d'une surface mobile rappelle à plus d'un point de vue, celles que nous avons constatées au voisinage d'une ligne mobile dans l'onde de Rayleigh ou dans la deuxième onde superficielle. Nous constaterons en outre que les élongations, dans le domaine de cette pseudo-onde sphérique de distorsion, sont rectilignes et perpendiculaires à OM (vibrations transversales).

97. Étude des intégrales :

$$\int_{\lambda_0 - a}^{\lambda_0 + a} [(\lambda - \lambda_0 - \omega_1)(\lambda - \lambda_0 - \omega_2)]^{-\frac{2K+1}{2}} S(\lambda) d\lambda.$$

— Dans ces intégrales, λ désigne une variable réelle, λ_0 et a sont des constantes réelles et positives, ω_1 et ω_2 des quantités complexes, indépendantes de λ , infiniment petites et dont les images sont situées de part et d'autre de l'axe réel; K désigne un entier supérieur ou égal à l'unité, $S(\lambda)$ une fonction holomorphe dans un cercle de centre λ_0 , de rayon supérieur à a .

Le radical

$$R = [(\lambda - \lambda_0 - \omega_1)(\lambda - \lambda_0 - \omega_2)]^{\frac{1}{2}}$$

a sa partie réelle positive pour $\lambda = \lambda_0 - a$.

Considérons le développement limité suivant :

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \int_{\lambda_0-a}^{\lambda_0+a} R^{-(2K+1)} S(\lambda) d\lambda &= S(\lambda_0) \int_{\lambda_0-a}^{\lambda_0+a} R^{-(2K+1)} d\lambda \\
 &+ S'(\lambda_0) \int_{\lambda_0-a}^{\lambda_0+a} R^{-(2K+1)} (\lambda - \lambda_0) d\lambda + \dots \\
 &+ \frac{S^{(p)}(\lambda_0)}{p!} \int_{\lambda_0-a}^{\lambda_0+a} R^{-(2K+1)} (\lambda - \lambda_0)^p d\lambda + \dots \\
 &+ \int_{\lambda_0-a}^{\lambda_0+a} R^{-(2K+1)} s(\lambda) (\lambda - \lambda_0)^{2K-1} d\lambda.
 \end{aligned}$$

Dans le dernier terme, irrégulier, $s(\lambda)$ est bornée.

En posant

$$(7) \quad (\lambda - \lambda_0 - w_1)(\lambda - \lambda_0 - w_2) = \zeta^2,$$

nous ferons le changement de variable (λ, μ) défini par

$$(8) \quad \lambda - \lambda_0 - w_1 = \mu \zeta.$$

D'où

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + w_1 + \frac{\mu^2(w_1 - w_2)}{1 - \mu^2}, \\ \zeta &= \frac{\mu(w_1 - w_2)}{1 - \mu^2}. \end{aligned} \right.$$

L'image de la variable μ part, pour $\lambda = \lambda_0 - a$, d'un point infiniment proche de -1 et aboutit, pour $\lambda = \lambda_0 + a$, en un point infiniment proche de $+1$; le parcours C de la variable μ évite l'origine. Il vient alors

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \int_{\lambda_0-a}^{\lambda_0+a} R^{-(2K+1)} (\lambda - \lambda_0)^p d\lambda \\
 = \frac{2}{(w_1 - w_2)^{2K}} \int_{(C)} \frac{(w_1 - \mu^2 w_2)^p (1 - \mu^2)^{2K-p-1}}{\mu^{2K}} d\mu.
 \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi que la première intégrale dans le développement (6) est un infiniment grand d'ordre $\frac{1}{(w_1 - w_2)^{2K}}$, la seconde un infiniment grand d'ordre $\frac{1}{(w_1 - w_2)^{2K-1}}$, etc., la dernière un infiniment grand d'ordre $\frac{1}{w_1 - w_2}$. En supposant $S(\lambda_0) \neq 0$, la partie principale de l'intégrale a donc pour valeur

$$(11) \quad \frac{2}{(w_1 - w_2)^{2K}} \oint_{-1}^{+1} \frac{(1 - \mu^2)^{2K-1}}{\mu^{2K}} d\mu = \frac{(-2)^{2K}}{(w_1 - w_2)^{2K}} \frac{(K-1)!}{1.3.5 \dots (2K-1)}.$$

98. **Parties principales des facteurs $N^{(E)}$ et de leurs dérivées dans le domaine de la pseudo-onde sphérique de distorsion.** — Le domaine étudié actuellement correspond à τ infiniment voisin de ν , pour $l < I' < \frac{\pi}{2}$, l'angle I' n'étant égal ni à $\frac{\pi}{2}$ ni à l . Le cas $I' = \frac{\pi}{2}$ a été étudié au Chapitre XII, le cas $I' = l$ fera l'objet d'un examen particulier.

Dans ces conditions, les quatre racines de P sont deux à deux infiniment voisines de λ_0 , $\lambda_0 = \sqrt{\nu^2 \sin^2 I' - 1}$ étant un point du lacet situé entre l'origine et le point C'_1 , d'affixe $\sqrt{\nu^2 - 1}$.

La partie principale de $N_\rho^{(E)}$ et $N_z^{(E)}$ [Cf. Chap. XII, formule (6)] est la même que celle de

$$(12) \quad \begin{cases} \text{Pour } N_\rho^{(E)} : & -\frac{2 \sin I'}{\pi R'^2} \mathcal{J} \left[\int_{\lambda_0 - a}^{\lambda_0 + a} P^{-\frac{3}{2}} [u^2 f(u)] b \Omega_1 \lambda \, d\lambda \right], \\ \text{Pour } N_z^{(E)} : & \frac{2}{\pi R'^2} \mathcal{J} \left[\int_{\lambda_0 - a}^{\lambda_0 + a} P^{-\frac{3}{2}} \left(\tau - b \Omega_1 \frac{z}{R'} + i \lambda \frac{h}{R'} \right) [u^2 f(u)] \lambda \, d\lambda \right], \end{cases}$$

les intégrales étant effectuées sur le bord supérieur du lacet; a étant un nombre fini quelconque, pourvu que $\lambda_0 + a$ soit à gauche de C'_1 et $\lambda_0 - a$ à droite de $-\lambda_0$.

Nous pourrions donc appliquer les résultats du paragraphe précédent à l'étude des intégrales (12). On a

$$(13) \quad \frac{z}{R'} = \cos I' - \frac{h}{R'},$$

et nous poserons

$$(14) \quad \tau = \nu + \nu \frac{h}{R'} \Theta,$$

en considérant $\frac{h}{R'}$ comme un infiniment petit. Dans le voisinage de $\lambda = \lambda_0$ posons

$$(15) \quad \lambda = \lambda_0 + \omega = \sqrt{\nu^2 \sin^2 I' - 1} + \omega,$$

et développons $P(\lambda)$ en série

$$(16) \quad P(\lambda) = P(\lambda_0) + \omega P'(\lambda_0) + \frac{\omega^2}{2} P''(\lambda_0) + \dots$$

A un infiniment petit près,

$$(17) \quad P''(\lambda) = \frac{2}{\cos^2 I'} (\sin^2 I' - \sin^2 l) \neq 0,$$

Par contre $P(\lambda_0)$ et $P'(\lambda_0)$ sont des infiniment petits d'ordre $\frac{h}{R'}$, la partie principale de $P(\lambda_0)$ étant d'ailleurs

$$(18) \quad \frac{2h}{R'} \nu^2 \sin^2 I' [\theta + \cos I' + i \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l}].$$

Si l'on écrit

$$(19) \quad P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0 - \omega_1)(\lambda - \lambda_0 - \omega_2) K(\lambda),$$

on a donc

$$(20) \quad \omega_1, \omega_2 = \pm i \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\nu \sin 2 I'}{\sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l}} \sqrt{\frac{h}{R'} \sqrt{\theta + \cos I' + i \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l}} (1 + \varepsilon)},$$

ε tendant vers zéro en même temps que $\frac{h}{R'}$. De plus,

$$(21) \quad K(\lambda_0) = \frac{\sin^2 I' - \sin^2 l}{\cos^2 I'} (1 + \varepsilon'),$$

ε' tendant aussi vers zéro avec $\frac{h}{R'}$.

Les formules (12) deviennent donc, d'après les résultats du paragraphe précédent (1)

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} N_{\rho}^{(E)} &= - \frac{2 \sin I'}{\pi R'^2} [K(\lambda_0)]^{-\frac{3}{2}} (b \Omega_1 \lambda)_{\lambda=\lambda_0} \mathcal{J} \left[\frac{(-2)^3}{(\omega_1 - \omega_2)^2} [u^2 f(u)]_{\lambda=\lambda_0} \right], \\ N_{z'}^{(E)} &= \frac{2}{\pi R'^2} [K(\lambda_0)]^{-\frac{3}{2}} (\nu - b \Omega_1 \cos I')_{\lambda=\lambda_0} \lambda_0 \\ &\quad \times \mathcal{J} \left[\frac{(-2)^3}{(\omega_1 - \omega_2)^2} [u^2 f(u)]_{\lambda=\lambda_0} \right]. \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs

$$(23) \quad [u^2 f(u)]_{\lambda=\lambda_0} = \frac{-2 \sin^2 I' \cos 2 I'}{\cos^2 I' - 2i \sin I' \sin 2 I' \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l}}.$$

Donc

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} N_{\rho}^{(E)} &= \frac{\cos I'}{\pi R' h} \sin 4 I' \mathcal{J} [(\theta + \cos I' + i \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l})^{-1} \\ &\quad \times (\cos^2 2 I' - 2i \sin I' \sin 2 I' \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l})^{-1}], \\ N_{z'}^{(E)} &= - \frac{\sin I'}{\pi R' h} \sin 4 I' \mathcal{J} [(\theta + \cos I' + i \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l})^{-1} \\ &\quad \times (\cos^2 2 I' - 2i \sin I' \sin 2 I' \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l})^{-1}]. \end{aligned} \right.$$

Comme au Chapitre XII, on voit d'après les résultats du paragraphe

(1) Les expressions (22) et les suivantes ne représentent, malgré le signe = employé incorrectement, que les parties principales de $N_{\rho}^{(E)}$ et $N_{z'}^{(E)}$.

précédent que, pour obtenir les parties principales des dérivées $\frac{d^n N^{(E)}}{d\nu^n}$, on peut dériver successivement les formules (1) du Chapitre XII comme si la quantité ν , lorsqu'elle figure en dehors du radical

$$[u^2 \rho^2 + (\nu - ah - bz)^2]^{-\frac{2k+1}{2}},$$

était une constante.

Les parties principales des dérivées s'expriment donc à la manière des formules (12) par

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n N_\rho^{(E)}}{d\nu^n} &= 2(-1)^{n-1} \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{\pi R'^2} \left(\frac{\Omega_1}{R'}\right)^n \sin I' \\ &\quad \times \mathcal{J} \left[\int_{\lambda_0-a}^{\lambda_0+a} P^{-\frac{2n+3}{2}} \left(\tau - b \Omega_1 \frac{z}{R'} + i \lambda \frac{h}{R'} \right)^n [u^2 f(u)] b \Omega_1 \lambda d\lambda \right], \\ \frac{d^n N_z^{(E)}}{d\nu^n} &= 2(-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n+1)}{\pi R'^2} \left(\frac{\Omega_1}{R'}\right)^n \\ &\quad \times \mathcal{J} \left[\int_{\lambda_0-a}^{\lambda_0+a} P^{-\frac{2n+3}{2}} \left(\tau - b \Omega_1 \frac{z}{R'} + i \lambda \frac{h}{R'} \right)^{n+1} [u^2 f(u)] \lambda d\lambda \right], \end{aligned} \right.$$

D'où nous tirons

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n N_\rho^{(E)}}{d\nu^n} &= \frac{(-1)^n \cos I'}{\pi R' h} \frac{n!}{\nu^n} \left(\frac{\Omega_1}{h}\right)^n \sin 4I' \\ &\quad \times \mathcal{J} \left[(\Theta + \cos I' + i \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l})^{-n-1} \right. \\ &\quad \left. \times (\cos^2 2I' - 2i \sin I' \sin 2I' \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l})^{-1} \right], \\ \frac{d^n N_z^{(E)}}{d\nu^n} &= \frac{(-1)^{n-1} \sin I'}{\pi R' h} \frac{n!}{\nu^n} \left(\frac{\Omega_1}{h}\right)^n \sin 4I' \\ &\quad \times \mathcal{J} \left[(\Theta + \cos I' + i \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l})^{-n-1} \right. \\ &\quad \left. \times (\cos^2 2I' - 2i \sin I' \sin 2I' \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l})^{-1} \right]. \end{aligned} \right.$$

Pour $n = 0$, les formules (26) deviennent identiques aux formules (24).

Les parties principales des dérivées $\frac{d^n N_\rho^{(E)}}{d\nu^n}$, $\frac{d^n N_z^{(E)}}{d\nu^n}$ peuvent être obtenues en dérivant successivement les parties principales des facteurs $N^{(E)}$.

Ces parties principales, d'ordre $\frac{h}{R'}$, s'annulent pour $I' = \frac{\pi}{2}$ à cause de la présence du facteur $\sin 4I'$, ainsi que pour $I' = l$ parce que les expressions

$$[\Theta + \cos I' + i \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l}]^{-n-1} [\cos^2 2I' - 2i \sin I' \sin 2I' \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l}]^{-1}$$

deviennent réelles.

Les parties principales s'annulent également pour $I' = \frac{\pi}{4}$, valeur supérieure à l , ne devenant égale à l que dans le cas limite $v^2 = 2$.

Considérons le vecteur de composantes $\frac{d^n N_0^{(E)}}{dv^n}$, $\frac{d^n N_z^{(E)}}{dv^n}$; ce vecteur est porté par la perpendiculaire à S'M. Sa mesure, rapportée au sens positif t [tangente orientée vers le vide (Cf, Chap. X, fig. 41)] est

$$(27) \quad \frac{d^n N_t^{(E)}}{dv^n} = \frac{(-1)^n n!}{\pi R' h} \left(\frac{\Omega_1}{h} \right)^n \frac{\sin 4I' (\sin^2 I' - \sin^2 l)^{-\frac{n+1}{2}}}{\cos^2 2I' + \sin^2 I' \sin^2 2I' (\sin^2 I' - \sin^2 l)}$$

$$\times \left\{ \cos^2 2I' \mathcal{J}[\Theta_1 + i]^{-n-1} \right. \\ \left. + 2 \sin I' \sin 2I' \sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l} \mathcal{R}[\Theta_1 + i]^{-n-1} \right\},$$

en posant

$$(28) \quad \Theta_1 = \frac{\theta + \cos I'}{\sqrt{\sin^2 I' - \sin^2 l}}.$$

Ainsi les parties principales des facteurs $N^{(E)}$ et de leurs dérivées s'expriment à l'aide de fonctions du temps qui sont de même nature que celles rencontrées au Chapitre XII, dans l'étude de la deuxième onde superficielle.

Lorsque I' demeure constant, les courbes représentatives de $N_t^{(E)}$ ou $\frac{d^n N_t^{(E)}}{dv^n}$ en fonction du temps ne changent pas de forme. Ces courbes présentent des ondulations relativement nombreuses dont la largeur est indépendante de R' . Leurs amplitudes décroissent en raison inverse de R' .

Lorsque I' varie, les périodes ne demeurent pas constantes. On ne peut pas énoncer une loi générale précise puisque $\frac{d^n N_t^{(E)}}{dv^n}$ s'exprime par la somme de deux fonctions $\mathcal{J}[\Theta_1 + i]^{-n-1}$ et $\mathcal{R}[\Theta_1 + i]^{-n-1}$, multipliées chacune par des coefficients dépendant de I' . Les périodes de chacune de ces fonctions sont proportionnelles à $(\sin^2 I' - \sin^2 l)^{-\frac{1}{2}}$. Elles croissent indéfiniment lorsque I' tend vers l .

Nous avons vu que chacune des courbes représentatives de

$$\mathcal{J}[\Theta_1 + i]^{-n-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}[\Theta_1 + i]^{-n-1}$$

en fonction de Θ_1 , admettait, soit l'axe des ordonnées pour axe de symétrie, soit l'origine pour centre de symétrie. Il n'en est plus de

même pour la courbe représentative de $\frac{d_n N_l^{(E)}}{d\nu^n}$ en fonction de Θ_1 . Cependant c'est toujours au voisinage de $\Theta_1 = 0$ que l'on constatera les élongations maxima, c'est-à-dire pour les valeurs de ν voisines de

$$\frac{R'}{\Omega_2} \left(1 - \frac{h}{R'} \cos I' \right).$$

Ainsi le phénomène est en avance sur l'instant $\frac{R'}{\Omega_2}$. Cette avance, $\frac{h}{\Omega_2} \cos I'$, indépendante de R' , est nulle pour $I' = \frac{\pi}{2}$ et croît constamment lorsque I' tend vers l .

99. **Étude des facteurs $N_{(E)}$ et de leurs dérivées, aux grandes distances de la source, pour I' voisin de l , τ voisin de ν .** — Nous avons observé que, dans ces conditions, les quatre racines de $P(\lambda)$ étaient voisines de l'origine. Nous écrivons

$$(29) \quad P(\lambda) = (\lambda^4 + iA_3\lambda^3 + A_2\lambda^2 + iA_1\lambda + A_0)K(\lambda) = R_4(\lambda)K(\lambda),$$

en mettant en évidence le polynôme $R_4(\lambda)$ du quatrième degré dont les racines sont celles de $P(\lambda)$.

A_0, A_1, A_2, A_3 sont des quantités réelles infiniment petites en même temps que $\frac{h}{R'}$. Si l'on pose

$$(30) \quad \begin{cases} \tau = \nu + \nu\Theta \frac{h}{R'}, \\ I' = l + \Phi \sqrt{\frac{h}{R'}}, \end{cases}$$

on calcule immédiatement les parties principales de A_0, A_1, A_2, A_3 ⁽¹⁾

$$(31) \quad \begin{cases} \boxed{A_0} = \frac{4h}{R'} \cot^2 l (2 \cos l + 2\Theta + \Phi^2), \\ \boxed{A_1} = 8 \frac{h}{R'} \frac{\cos^2 l}{\sin l}, \\ \boxed{A_2} = -4\Phi \sqrt{\frac{h}{R'}} \cot l, \\ \boxed{A_3} = \frac{4h}{R'} \frac{\cos 2l}{\sin l}. \end{cases}$$

(1) Au cours de ce paragraphe, la notation \boxed{u} désignera la partie principale d'un infiniment petit u .

De plus $K(o)$, qui est réel, a pour partie principale

$$(32) \quad \boxed{K(o)} = \frac{1}{4} \operatorname{tang}^2 l.$$

En vertu des formules (6) du Chapitre XII on a, en négligeant un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{R^2}$

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_{\rho}^{(E)} = -\frac{2 \sin l}{\pi R^2} \mathcal{J} \left[\int_0^a P^{-\frac{3}{2}} [u^2 f(u)] b \Omega_1 \lambda \, d\lambda \right], \\ N_z^{(E)} = \frac{2}{\pi R^2} \mathcal{J} \left\{ \int_0^a P^{-\frac{3}{2}} \left[\tau + i\lambda \frac{h}{R'} - b \Omega_1 \frac{z}{R'} \right] [u^2 f(u)] \lambda \, d\lambda \right\}. \end{array} \right.$$

a désignant une constante positive quelconque inférieure à $\sqrt{v^2 - 1}$, les intégrales étant effectuées sur le bord supérieur du lacet.

Les intégrales qui figurent dans les relations (33) et, d'une manière plus générale, celles qui interviennent dans les expressions similaires des dérivées $\frac{d^n N^{(E)}}{d\rho^n}$ sont de la forme

$$(34) \quad I = \mathcal{J} \left[\int_0^a R_4^{-K-\frac{1}{2}} S(\lambda) \, d\lambda \right],$$

où K désigne un entier supérieur ou égal à l'unité. $S(\lambda)$ est une fonction holomorphe dans un cercle ayant pour centre l'origine et de rayon supérieur à a . $S(o)$ est nul, $S'(o)$ est réel, le coefficient de i dans la dérivée seconde $S''(\lambda)$ est infiniment petit d'ordre $\frac{h}{R'}$ au moins.

Soient M et θ le module et l'argument de R_4 , définis par

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} M^2 = (\lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_0)^2 + (A_3 \lambda^3 + A_1 \lambda)^2, \\ \cos \theta = \frac{\lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_0}{M}, \quad \sin \theta = \frac{A_3 \lambda^3 + A_1 \lambda}{M} \quad (0 \leq \theta < 2\pi). \end{array} \right.$$

On a

$$(36) \quad R_4^{-K-\frac{1}{2}} = M^{-K-\frac{1}{2}} \left[\cos \left(\frac{2K+1}{2} \theta \right) - i \sin \left(\frac{2K+1}{2} \theta \right) \right].$$

Remplaçons $S(\lambda)$ dans l'expression (34) par son développement limité

$$(37) \quad S(\lambda) = \lambda S'(o) + \lambda^2 \left[s_r(\lambda) + i \frac{h}{R'} s_i(\lambda) \right],$$

où $S'(0)$ est réel, où $s_r(\lambda)$ et $s_i(\lambda)$ sont des fonctions réelles et bornées de λ . Il vient

$$(38) \quad \begin{aligned} I = & -S'(0) \int_0^\alpha M^{-K-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{2K+1}{2}\theta\right) \lambda \, d\lambda \\ & - \int_0^\alpha M^{-K-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{2K+1}{2}\theta\right) s_r(\lambda) \lambda^2 \, d\lambda \\ & + \frac{h}{R'} \int_0^\alpha M^{-K-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{2K+1}{2}\theta\right) s_i(\lambda) \lambda^2 \, d\lambda. \end{aligned}$$

Cela étant, montrons que la quantité

$$y\left(\lambda, \frac{h}{R'}\right) = A_1 \frac{\lambda}{\lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_0}$$

est infiniment petite quel que soit λ si le dénominateur $\lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_0$ n'admet pas de racines réelles. En effet, les extrema de y correspondent aux valeurs de λ qui annulent

$$\frac{dy}{d\lambda} = - \frac{A_1}{(\lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_0)^2} (3\lambda^4 + A_2 \lambda^2 - A_0),$$

et l'on constate que ces extrema sont des infiniment petits d'ordre $\left(\frac{h}{R'}\right)^{\frac{1}{4}}$. On démontre de même que la quantité

$$\frac{A_3 \lambda^3}{\lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_0}$$

est aussi un infiniment petit d'ordre $\left(\frac{h}{R'}\right)^{\frac{3}{4}}$, quel que soit λ si le dénominateur n'admet pas de racines réelles.

De là résulte qu'on peut écrire

$$(39) \quad \begin{cases} M = (\lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_0) [1 + \varepsilon_1(\lambda)], \\ \sin\left(\frac{2K+1}{2}\theta\right) = \frac{2K+1}{2} \frac{A_1 \lambda}{\lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_0} [1 + \varepsilon_2(\lambda)], \\ \cos\left(\frac{2K+1}{2}\theta\right) = 1 + \varepsilon_3(\lambda), \end{cases}$$

$\varepsilon_1(\lambda)$, $\varepsilon_2(\lambda)$ et $\varepsilon_3(\lambda)$ étant infiniment petits quel que soit λ sur le parcours d'intégration, toujours à la condition expresse que le polynôme

$$\lambda^4 + A_2 \lambda^2 + A_0$$

n'admette pas de racine réelle.

Comme conséquence du premier théorème de la moyenne, les trois intégrales (38) deviennent alors respectivement

$$(40) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^a M^{-\kappa-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{2\kappa+1}{2}\theta\right) \lambda \, d\lambda \\ &= \frac{2\kappa+1}{2} A_1(1+\varepsilon) \int_0^a (\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_0)^{-\kappa-\frac{3}{2}} \lambda^2 \, d\lambda, \\ & \int_0^a M^{-\kappa-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{2\kappa+1}{2}\theta\right) s_r(\lambda) \lambda^2 \, d\lambda \\ &= \frac{2\kappa+1}{2} A_1(1+\varepsilon') \int_0^a (\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_0)^{-\kappa-\frac{3}{2}} s_r(\lambda) \lambda^3 \, d\lambda, \\ & \int_0^a M^{-\kappa-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{2\kappa+1}{2}\theta\right) s_i(\lambda) \lambda^2 \, d\lambda \\ &= (1+\varepsilon'') \int_0^a (\lambda^4 + A_2\lambda^2 + A_0)^{-\kappa-\frac{1}{2}} s_i(\lambda) \lambda^2 \, d\lambda. \end{aligned} \right.$$

Effectuons dans les intégrales (40) le changement de variable

$$\lambda = \left(\frac{h}{R'}\right)^{\frac{1}{4}} x.$$

La première et la troisième intégrale apparaissent alors comme des infiniment grands d'ordre

$$\left(\frac{h}{R'}\right)^{\frac{1}{4}-\kappa},$$

la seconde comme un infiniment grand d'ordre

$$\left(\frac{h}{R'}\right)^{\frac{1}{2}-\kappa}$$

Comme, dans la relation (38), la troisième intégrale (40) est multipliée par $\frac{h}{R'}$, on voit que la partie principale de I est fournie par le premier terme, en supposant $S'(0) \neq 0$, ce qui est le cas. Il vient alors, sans difficulté (1),

$$(41) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n N_\rho^{(E)}}{d\nu^n} &= \cos l \frac{d^n N_l^{(E)}}{d\nu^n}, \\ \frac{d^n N_z^{(E)}}{d\nu^n} &= -\sin l \frac{d^n N_l^{(E)}}{d\nu^n}. \end{aligned} \right.$$

(1) Les formules (41) et (42) fournissent les valeurs de $N_\rho^{(E)}$, $N_z^{(E)}$, $N_l^{(E)}$ en posant $n = 0$.

avec

$$(42) \quad \frac{d^n N_l^{(E)}}{d\nu^n} = - \left[-4 \frac{\nu^2 - 1}{\nu} \frac{\Omega_1}{h} \right]^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n + 3)}{\pi R^{5/4} h^{3/4}} \frac{2^{\frac{1}{2}} (\nu^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}{\nu (\nu^2 - 2)}$$

$$\times \int_0^{+\infty} [x^4 - (4 \Phi \cot l) x^2 + 4 \cot^2 l (2 \cos l + 2 \Theta + \Phi^2)]^{-n - \frac{5}{2}} x^3 dx.$$

100. **Discussion des formules (41) et (42).** — I. Le phénomène décrit par les formules (42) n'est à envisager que pour des instants postérieurs au passage du front d'onde, c'est-à-dire à partir de l'instant ν pour lequel l'équation $R_1 = 0$ n'a plus de racine imaginaire pure.

Posons

$$(43) \quad A_0 \frac{R'}{h} = \alpha_0 + \varepsilon_0, \quad A_1 \frac{R'}{h} = \alpha_1 + \varepsilon_1, \quad A_2 \sqrt{\frac{R'}{h}} = \alpha_2 + \varepsilon_2, \quad A_3 \frac{R'}{h} = \alpha_3 + \varepsilon_3.$$

avec

$$(44) \quad \begin{cases} \alpha_0 = 4 \cot^2 l (2 \cos l + 2 \Theta + \Phi^2), \\ \alpha_1 = 8 \frac{\cos^2 l}{\sin l}, \\ \alpha_2 = -4 (\cot l) \Phi, \\ \alpha_3 = 4 \frac{\cos 2 l}{\sin l}, \end{cases}$$

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ étant réels, indépendants de λ et devenant infiniment petits en même temps que $\frac{h}{R'}$. α_1 et α_3 ne sont pas nuls. Nous supposons d'abord que α_0 n'est pas nul et que Θ n'est pas égal à $-\cos l$.

Effectuons alors, dans l'équation $R_1(\lambda) = 0$ le changement d'inconnue

$$(45) \quad \lambda = \left(\frac{h}{R'} \right)^{\frac{1}{4}} x.$$

Cette équation devient

$$(46) \quad [x^4 + a_2 x^2 + a_0] + [\varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_0] + i \left[(\alpha_3 + \varepsilon_3) \left(\frac{h}{R'} \right)^{\frac{3}{4}} x^3 + (\alpha_1 + \varepsilon_1) \left(\frac{h}{R'} \right)^{\frac{1}{4}} x \right] = 0.$$

Les racines de (46) ne deviennent pas infinies quand $\frac{h}{R'}$ tend vers zéro. Elles ne tendent pas non plus vers zéro si α_0 n'est pas nul. Remarquons aussi en passant que si $\frac{h}{R'}$ est suffisamment petit, aucune racine x ne peut être réelle, puisque α_1 n'est pas nul.

C'est d'ailleurs l'existence ou la non-existence d'une racine imaginaire pure qui nous intéresse particulièrement. Posons donc

$$(47) \quad x = iy,$$

y étant réel. L'équation (46) devient une équation à coefficients réels.

$$(48) \quad [y^4 - a_2 y^2 + a_0] + [-\varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_0] + \left[(a_3 + \varepsilon_3) \left(\frac{h}{R'} \right)^{\frac{3}{4}} y^3 - (a_1 + \varepsilon_1) \left(\frac{h}{R'} \right)^{\frac{1}{4}} y \right] = 0.$$

Soit

$$(49) \quad y_0(1 + \varepsilon),$$

une racine de l'équation (48); y_0 , limite de cette racine quand $\frac{h}{R'}$ tend vers zéro n'étant ni nulle, ni infinie; ε étant un infiniment petit. On doit avoir

$$(50) \quad y_0^4 - a_2 y_0^2 + a_0 = 0.$$

Inversement, si y_0 est une racine *réelle* de l'équation

$$(51) \quad f(y) = y^4 - a_2 y^2 + a_0 = 0,$$

on peut toujours trouver, puisqu'on suppose $\Theta \neq -\cos l$ un nombre α non nul tel que

$$f(y_0 - \alpha) f(y_0 + \alpha) \neq 0.$$

Quand $\frac{h}{R'}$ est suffisamment petit, le premier membre de l'équation (48) change donc de signe lorsque y varie de $y_0 - \alpha$ à $y_0 + \alpha$. L'équation (48) admet donc une racine réelle comprise entre $y_0 - \alpha$ et $y_0 + \alpha$.

La condition exprimant que l'instant ν est postérieur au passage du front d'onde est donc, lorsque $\frac{h}{R'}$ représente un *infiniment petit*, que l'équation (51) n'admet pas de racine y réelle.

Cette condition est remplie si le discriminant est négatif, c'est-à-dire si $\Theta > -\cos l$.

Si le discriminant est positif ($\Theta < -\cos l$) l'équation bicarrée (51) ne doit pas admettre de racine y^2 positive. Il est donc nécessaire d'abord que la somme des racines de l'équation en y^2 soit négative. D'où

$$a_2 < 0, \quad \text{c'est-à-dire } \Phi > 0 \text{ ou } l' > l.$$

Il faut enfin que le produit des racines de l'équation en y^2 soit positif. D'où $a_0 > 0$, c'est-à-dire

$$\Theta > -\cos l - \frac{\Phi^2}{2}.$$

Ainsi, les restrictions faites précédemment, savoir

$$\alpha_0 \neq 0, \quad \theta - \cos l \neq 0,$$

correspondent, suivant le signe de $l' - l$, à l'instant critique de passage du front d'onde. Cet instant critique est défini par

1° Si $l' < l$

$$\theta = -\cos l$$

ou

$$(52) \quad \Omega_2 \nu = R' - h \cos l.$$

Il s'agit ici du front sphérique dont nous écrivons l'équation sous la forme

$$\Omega_2 \nu = R',$$

en négligeant h devant R' .

2° Si $l' > l$,

$$\theta = -\cos l - \frac{\Phi^2}{2}$$

ou

$$(53) \quad \Omega_2 \nu = R' \left[1 - \frac{(l' - l)^2}{2} \right] - h \cos l,$$

équation à laquelle se réduit celle du front conique

$$\Omega_2 \nu = R' \cos(l' - l) - h \cos l,$$

lorsqu'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur à $\frac{h}{R'}$.

Cependant la théorie qui conduit aux formules (42) n'est valable, comme nous l'avons souligné au paragraphe précédent, que si l'équation

$$x^4 - (4\Phi \cot l)x^2 + 4 \cot^2 l (2 \cos l + 2\theta + \Phi^2) = 0,$$

n'a pas de racines réelles, c'est-à-dire seulement pour

$$\theta > -\cos l.$$

Autrement dit, les formules (42) ne sont applicables qu'après le passage du véritable front sphérique (pour $l' < l$) ou du pseudo-front sphérique ($l' > l$). Il faudrait compliquer quelque peu la théorie précédente, ce que nous ne ferons pas, pour étudier les phénomènes dans l'intervalle qui sépare le front conique du pseudo-front sphérique, au voisinage de leur ligne de raccordement.

II. Tout vecteur de composantes $N_{\rho}^{(E)}$, $N_z^{(E)}$ ou $\frac{d^n N_{\rho}^{(E)}}{d\nu^n}$, $\frac{d^n N_z^{(E)}}{d\nu^n}$ est porté par la direction \vec{t} (vibrations transversales). $N_{\rho}^{(E)}$ ou $\frac{d^n N_{\rho}^{(E)}}{d\nu^n}$ représente la mesure algébrique de ce vecteur, rapportée au sens positif \vec{t} . Cette mesure est négative si n est pair, positive si n est impair.

Les courbes représentatives de $N_{\rho}^{(E)}$ ou $\frac{d^n N_{\rho}^{(E)}}{d\nu^n}$ en fonction de Θ ne présentent donc pas d'ondulations. La fonction $\frac{d^n N_{\rho}^{(E)}}{d\nu^n}$ décroît constamment de $+\infty$ à zéro quand Θ varie de $-\cos l$ à $+\infty$ si n est impair, croît constamment de $-\infty$ à zéro si n est pair.

III. Ces courbes représentatives ne changent pas de forme lorsque la valeur algébrique de Φ reste constante, c'est-à-dire lorsque le point M se déplace dans un méridien sur une demi-parabole ayant la droite $I' = l$ pour axe, le point S' comme sommet. La seule modification des courbes, lorsque Φ demeure constant, réside dans une décroissance des ordonnées, proportionnellement à $\frac{1}{R'^{\frac{3}{4}}}$. On ne peut pas parler de périodes puisqu'il n'y a pas d'ondulations, mais la « largeur » des courbes demeure invariable.

IV. Les intégrales (42) étant uniformément convergentes, $\frac{d^n N_{\rho}^{(E)}}{d\nu^n}$ est la dérivée de $\frac{d^{n-1} N_{\rho}^{(E)}}{d\nu^{n-1}}$.

V. Si nous considérons deux valeurs de Φ opposées, la courbe représentative de $\frac{d^n N_{\rho}^{(E)}}{d\nu^n}$ en fonction de Θ pour $\Phi > 0$ est entièrement située au-dessus de la courbe similaire pour $\Phi < 0$.

VI. Pour le cas de $\Phi = 0$, la formule (42) se simplifie beaucoup

$$(54) \quad \frac{d^n N_{\rho}^{(E)}}{d\nu^n} = - \frac{2(2\nu^2 - 2)^{\frac{3}{4}}}{\nu(\nu^2 - 2)} \left[- \frac{1}{2\nu} \frac{\Omega_1}{h} \right]^n \frac{1.3.5 \dots (2n+3)}{\pi R'^{\frac{3}{4}} h^{\frac{3}{4}}} (\Theta + \cos l)^{-n-\frac{7}{4}} \\ \times \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^{n+2} \sqrt{x^2 + 1}}.$$

En particulier, pour $\nu = \sqrt{3}$, il vient

$$(55) \quad N_{\rho}^{(E)} = \frac{-0,220}{R'^{\frac{3}{4}} h^{\frac{3}{4}}} (\Theta + 0,8165)^{-\frac{7}{4}},$$



CHAPITRE XIV.

CAS DE DEUX MILIEUX QUELCONQUES.

101. L'onde de Rayleigh à l'intersurface de deux milieux quelconques.
— Nous avons établi au Chapitre IV, à propos de la discussion des racines de $D(u)$, les conditions d'existence d'une onde de Rayleigh. Rappelons que, lorsqu'il existe une telle onde, sa vitesse est nécessairement inférieure à la plus petite des vitesses de phase Ω_2 ou Ω'_2 .

Cette onde de Rayleigh, lorsqu'elle existe, peut être étudiée par une méthode en tous points calquée sur celle suivie au Chapitre XI. En particulier les formules (6) à (10) de ce Chapitre subsistent sans changement. Il suffit de leur adjoindre des formules similaires pour l'étude de la propagation dans le second milieu. Les formules (12) et (13) subsistent également, sauf modification des facteurs numériques. Il n'y a donc, dans le cas de deux milieux quelconques, rien d'essentiellement nouveau à signaler en ce qui concerne l'onde de Rayleigh.

Nous remarquerons toutefois que, si le second milieu est un fluide, il n'y a pas d'onde de Rayleigh. Le fait mérite d'être souligné puisque la majeure partie de l'écorce terrestre est couverte par les océans. D'autre part, même en dehors des océans, ce n'est qu'avec une certaine approximation que nous pouvons assimiler la surface terrestre à une surface de discontinuité solide-vide. Lorsque nous ne faisons pas cette approximation, lorsque nous ne considérons pas comme absolument négligeable la densité de notre atmosphère, nous ne pouvons pas dire non plus, en toute rigueur, qu'il existe une onde de Rayleigh. A *très grande* distance de l'épicentre, les elongations ne doivent pas décroître comme $\rho^{-\frac{1}{2}}$ mais comme ρ^{-2} . Il est donc intéressant d'examiner la nature et l'ordre de grandeur des modifications apportées dans la propagation du phénomène superficiel par l'existence de l'atmosphère terrestre.

Si l'on pose $\Omega_2 = 0$ (second milieu fluide), les formules (7), (8), (9)

du chapitre X deviennent, pour le premier milieu,

$$(1) \quad \begin{cases} B(\nu) = \frac{i}{\pi\rho} \int \frac{\nu - ah - bz}{\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2}} f(u)u \, du, \\ A_3(\nu) = -\frac{i}{\pi} \int \frac{1}{\sqrt{u^2\rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2}} j(u)u \, du, \end{cases}$$

avec

$$(2) \quad \begin{cases} f(u) = \frac{u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}}{D(u)}, \\ j(u) = \left(-bu^2 + \frac{1}{4\Omega_2^2} \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{1}{a'}\right) \frac{1}{D(u)}, \\ D(u) = \left(u^2 + \frac{1}{2\Omega_2^2}\right)^2 - abu^2 + \frac{1}{4\Omega_2^2} \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{a}{a'}, \end{cases}$$

les intégrations (1) étant toujours effectuées le long des circuits (C, C') et (D).

Dans le cas de l'atmosphère terrestre $\frac{\sigma'}{\sigma}$, de l'ordre de $5 \cdot 10^{-4}$, est extrêmement petit. Les racines de $D(u)$ qui ne sont pas imaginaires pures ni dans les quadrants du plan complexe que nous avons utilisé précédemment sont néanmoins extrêmement voisines des racines $\pm \frac{i}{\Omega_R}$ que nous avons calculées en supposant $\sigma' = 0$.

Lorsqu'on supposait $\sigma' = 0$, les radicaux

$$\sqrt{u^2\rho^2 + (\nu - ah - bz)^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{u^2\rho^2 + [\nu - a(h+z)]^2}$$

ne s'annulaient jamais tant que le point M restait à distance finie de l'épicentre. Ils pouvaient néanmoins s'annuler si l'on supposait ν nul et ρ infini. C'est de cette particularité que résultait l'onde de Rayleigh.

Lorsque σ' n'est pas nul, ces mêmes radicaux ne peuvent pas s'annuler, même si nous envisageons que le point M s'éloigne à l'infini : il n'y a donc pas d'onde Rayleigh. Néanmoins, le circuit d'intégration (CC', D) peut se trouver contraint de passer très près des pôles P, P'. De cette particularité résulte un phénomène d'autant plus analogue à l'onde de Rayleigh véritable que le rapport $\frac{\sigma'}{\sigma}$ est plus petit.

Pour discuter ce phénomène, il est avantageux de modifier les coupures précédemment utilisées, de manière que les pôles P, P' voisins de l'axe imaginaire, soient situés dans les régions permises du plan complexe, et non dans ses feuilletés exclus. On pourra par exemple réaliser une coupure unique reliant $-\frac{i}{\Omega_1}$ à $\frac{i}{\Omega_1}$ par une ligne sinueuse passant

aux points $\pm \frac{i}{\Omega_2}$ et $\pm \frac{i}{\Omega_1}$ en laissant sur sa droite les pôles P, P'. Il est équivalent et plus symétrique de réaliser trois coupures suivant trois portions de l'axe imaginaire ($-i\infty$ à $-\frac{i}{\Omega_1}$, $-\frac{i}{\Omega_2}$ à $\frac{i}{\Omega_2}$, $\frac{i}{\Omega_1}$ à $+i\infty$). Quelles que soient les coupures envisagées, on sera amené comme précédemment, en remplaçant les circuits (CC') et (D) par des circuits équivalents, à considérer les deux intégrales effectuées autour des pôles P, P'.

Les affixes des pôles P, P' se calculent immédiatement lorsqu'on néglige $\frac{\sigma'^2}{\sigma^2}$ devant $\frac{\sigma'}{\sigma}$. Elles ont pour valeur

$$(3) \quad \pm \frac{i}{\Omega_R} - \frac{1}{4\Omega_R} \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_R^2}{\Omega_1'^2} - 1}}$$

$$\times \frac{\frac{\nu^4}{m^4} \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}}{\frac{2\nu^2}{m^2} + 2\sqrt{\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\left(1 - \frac{\nu^2}{m^2}\right)} + \frac{2 - \frac{1}{m^2} - \frac{\nu^2}{m^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\left(1 - \frac{\nu^2}{m^2}\right)}} - 4}$$

ou, si nous posons $\nu = \sqrt{3}$,

$$(3 \text{ bis}) \quad \pm \frac{i}{\Omega_R} - \frac{1}{\Omega_R} \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_R^2}{\Omega_1'^2} - 1}} \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{12}.$$

Effectuons une application numérique

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = 5 \cdot 10^{-4}, \quad \Omega_R = 3,53 \text{ km/sec}, \quad \Omega_1' = 0,34 \text{ km/sec}.$$

Les affixes de P, P' ont alors les valeurs

$$\pm \frac{i}{\Omega_R} - \frac{1}{\Omega_R} 7,5 \cdot 10^{-6}.$$

Nous désignerons en particulier l'affixe de P par

$$- \frac{i}{\Omega_R} - \frac{\varepsilon}{\Omega_R}, \quad \varepsilon = 7,5 \cdot 10^{-6}.$$

Si nous reprenons alors les calculs effectués au Chapitre XI, en calculant les résidus à partir des formules (6) de ce chapitre (pour $u = -\frac{i}{\Omega_R} - \varepsilon$) et en continuant à définir une variable τ par les formules (7), les for-

mules (12) subsistent, sauf une modification extrêmement petite et négligeable dans la valeur du coefficient numérique δ .

Nous ferons ensuite les mêmes approximations qu'au Chapitre XI, en considérant ε et $\frac{h}{R'}$ comme des quantités très petites, devant lesquelles nous négligerons ε^2 , $\frac{h^2}{R'^2}$ ou $\frac{\varepsilon h}{R'}$.

On constate alors immédiatement que les formules fondamentales (15) à (19), qui définissaient à la limite l'onde de Rayleigh, subsistent sans modification à condition de poser

	M.	N.	S.
K...	$h + z + \varepsilon R' \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}}$	$h + z \sqrt{\frac{m^2 - \nu^2}{m^2 - 1}} + \varepsilon R' \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}}$	$h + \varepsilon R' \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}}$

Il apparaît ainsi que, tant que ε est négligeable devant $\frac{h}{R'}$ ou $\frac{h+z}{R'}$, le phénomène superficiel est pratiquement inchangé. Les élongations décroissent proportionnellement à $\rho^{-\frac{1}{2}}$, les périodes sont indépendantes de ρ .

Si au contraire $\frac{h}{R'}$ ou $\frac{h+z}{R'}$ est négligeable devant ε , les élongations décroissent comme ρ^{-2} , les périodes croissent proportionnellement à ρ .

Dans la phase intermédiaire, quand ε et $\frac{h+z}{R'}$ sont d'un ordre de grandeur comparable, les périodes commencent à s'accroître, les amplitudes décroissent plus rapidement que suivant la loi en $\rho^{-\frac{1}{2}}$, simultanément la loi de décroissance des amplitudes en fonction de z devient moins rapide.

A la surface du sol, en particulier, la forme des courbes représentatives des facteurs de transmission $S_z^{(P,P)}$, $S_z^{(P,P)}$ demeure la même qu'au Chapitre XI si nous ne considérons pas comme un changement de forme la modification entraînée par une contraction ou une dilatation des abscisses et des ordonnées.

Définissons de façon arbitraire, pour $z = 0$, une période T_v de l'onde de Rayleigh (le second milieu étant le vide), et simultanément, de façon similaire, une période T_a du phénomène superficiel correspondant au cas

où le second milieu est l'atmosphère. On a

$$\frac{T_a}{T_v} = 1 + \varepsilon \frac{\rho}{h} \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}}.$$

En posant $\varepsilon = 7,5 \cdot 10^{-6}$ et supposant $v = \sqrt{3}$ on voit que la période T_a surpasse de 1 pour 100 la valeur T_v pour

$$\frac{\rho}{h} = 1,13 \cdot 10^3.$$

Les perturbations apportées par l'atmosphère terrestre dans la propagation de l'onde de Rayleigh ne sont donc pas totalement négligeables lorsque l'hypocentre est très superficiel. En supposant par exemple que h est égal à 1000^m, la variation relative des périodes atteint déjà $\frac{1}{100}$ pour $\rho = 1130$ km.

102. Ondes superficielles du second type et pseudo-ondes sphériques ou coniques à l'intérieur des deux milieux, aux grandes distances de la source. — Les divers facteurs de transmission s'expriment à l'aide d'intégrales portant sur un radical du type

$$(4) \quad \sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - c|z|)^2}.$$

Les points de ramification du radical (4) sont les racines de l'équation

$$(5) \quad iu\rho + ah + c|z| - v = 0,$$

et les imaginaires conjuguées de ces racines. Dans l'expression (4) et dans l'équation (5), c désigne l'un quelconque des radicaux a' , b , b' ou même a . Sans préjuger qu'il s'agisse de l'un ou de l'autre, nous poserons

$$(6) \quad c = \sqrt{u^2 + \frac{1}{\Omega^2}}; \quad \Omega = \Omega_1, \Omega_2, \Omega'_1 \text{ ou } \Omega'_2.$$

Nous poserons aussi

$$(7) \quad \left. \begin{array}{l} |z| = r \cos \alpha, \quad \rho = r \sin \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right). \\ \tau = \frac{\Omega_1 v}{r}. \end{array} \right\}$$

Ainsi r désigne la distance **OM**, α désigne l'angle aigu que font **OM** et **Oz** quand **M** est dans le premier milieu ($z > 0$), l'angle aigu que font **OM** et **Oz'** quand **M** est dans le deuxième milieu.

L'équation (5) admet quatre racines u , auxquelles correspondent des déterminations variées de α et c . Exceptionnellement, lorsque c désigne α ($\Omega = \Omega_1$), elle n'admet que deux racines.

Lorsque R' est infiniment grand, les racines de l'équation (5) sont infiniment voisines des racines de l'équation

$$(8) \quad iu\Omega_1 \sin \alpha + c\Omega_1 \cos \alpha - \tau = 0,$$

qui, par une élévation au carré, conduit à une équation du second degré en $u\Omega_1$, dont les racines sont

$$(9) \quad u_1\Omega_1, u_2\Omega_1 = -i\tau \sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha \sqrt{\tau^2 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

et auxquelles correspondent respectivement les valeurs suivantes de $c\Omega_1$,

$$(10) \quad c\Omega_1 = \tau \cos \alpha - i\varepsilon \sin \alpha \sqrt{\tau^2 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}}.$$

Cela étant, envisageons successivement les trois cas possibles.

Premier cas : $\Omega > \Omega_1$. — Nous n'avons à exprimer les facteurs de transmission à l'aide d'une intégrale effectuée le long du circuit (E), que depuis l'instant ν où l'équation (5) n'admet plus de racine imaginaire pure, c'est-à-dire pour

$$\tau > \frac{\Omega_1}{\Omega} \quad \text{ou} \quad \nu > \frac{r}{\Omega}$$

si nous négligeons dans l'expression de τ un infiniment petit d'ordre $\frac{h}{R'}$. Considérons (*fig.* 68) la demi-sphère de centre O, de rayon $r = \Omega\nu$. Cette demi-sphère représente la position, à l'instant ν , d'un front véritable, précédé ou non d'un front conique. Dans ce premier cas envisagé, Ω ne peut désigner que Ω'_1 ou Ω'_2 . Si Ω désigne Ω'_2 , il y a un front conique en avant de la sphère $r = \Omega\nu$, il n'y en a pas si Ω désigne Ω'_1 .

L'intégrale (E) n'est à considérer à l'instant ν que pour les points M situés à l'intérieur de la sphère $r = \Omega\nu$. Pour ces points, τ est supérieur à $\frac{\Omega_1}{\Omega}$, c'est-à-dire que $\sqrt{\tau^2 - \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2}}$ est réel.

Or, si α n'est pas infiniment voisin de $\frac{\pi}{2}$, la partie réelle des racines (9) de l'équation (8), donc aussi la partie réelle des racines de l'équation (5) n'est pas infiniment petite. L'intégrale (E) ne présente donc pas d'anomalie, suivant le sens donné à ce terme au cours des deux chapitres précédents, c'est-à-dire qu'aucun point de ramification du radical (4) n'est infiniment proche du lacet (E). Il ne peut donc exister à l'intérieur

du milieu ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}$) aucune concentration d'énergie au voisinage d'une surface ou d'une ligne intérieure, rappelant le phénomène constaté au Chapitre XIII.

Au contraire, si α est infiniment voisin de $\frac{\pi}{2}$, ou égal à $\frac{\pi}{2}$, les quatre racines u de l'équation (5) sont, pour R' infini, infiniment voisines de $-\frac{i\tau}{\Omega_1}$.

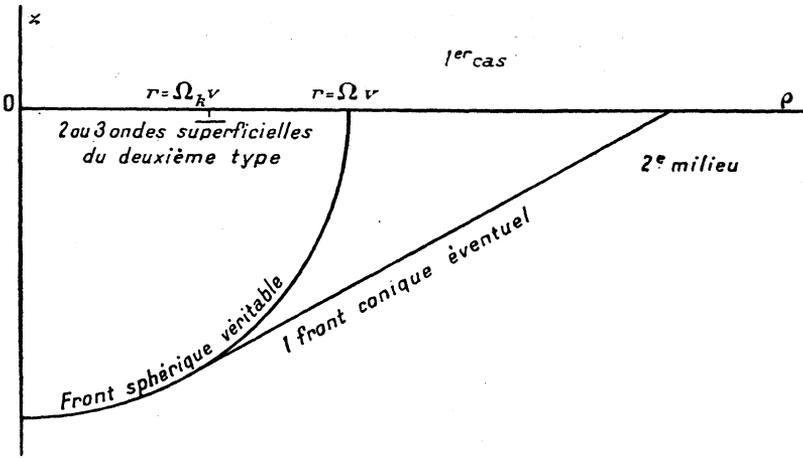


Fig. 68.

N'envisageons plus désormais la totalité des déterminations diverses de a et c , mais bornons-nous au plan limité par les coupures du Chapitre V, plan dans lequel nous avons défini le circuit (E) (Cf. Chapitre V, figure 17). Nous savons par ailleurs — et nous retrouverions ce résultat sans peine d'après les formules actuelles — qu'une racine de l'équation (5) et une seulement se trouve dans ce plan limité, sur le bord droit du lacet (E), infiniment près et à droite de ce bord droit. Aucune des trois autres racines ne peut d'ailleurs se trouver à gauche et infiniment près de ce bord droit, dans le feuillet qui prolonge vers la gauche, au delà de la coupure, le quatrième quadrant du plan limité.

Pour que l'intégrale (E) présente une anomalie, il est donc nécessaire, et il suffit, que $-\frac{i\tau}{\Omega_1}$ soit infiniment proche d'un point de ramification $-\frac{i}{\Omega_k}$ d'un des trois radicaux autres que c , c'est-à-dire que v soit voisin

de $\frac{r}{\Omega_k}$. A une telle anomalie correspond une onde superficielle du deuxième type dont la propagation annulaire est caractérisée par la vitesse $\Omega_k < \Omega$.

Si donc Ω désigne Ω'_1 , nous constatons l'existence de trois ondes superficielles de condensation, du deuxième type, dont les vitesses sont respectivement $\Omega_1, \Omega_2, \Omega'_2$. Si Ω désigne Ω'_2 , nous constatons l'existence de deux ondes superficielles de distorsion, du deuxième type, dont les vitesses sont respectivement Ω_1 et Ω_2 .

Deuxième cas : $\Omega = \Omega_1$. — La discussion est toute semblable à celle du cas précédent.

Il s'agit ici de l'onde réfléchie de condensation.

La demi-sphère de centre O, de rayon $\Omega_1 v$ (*fig. 69*) représente à

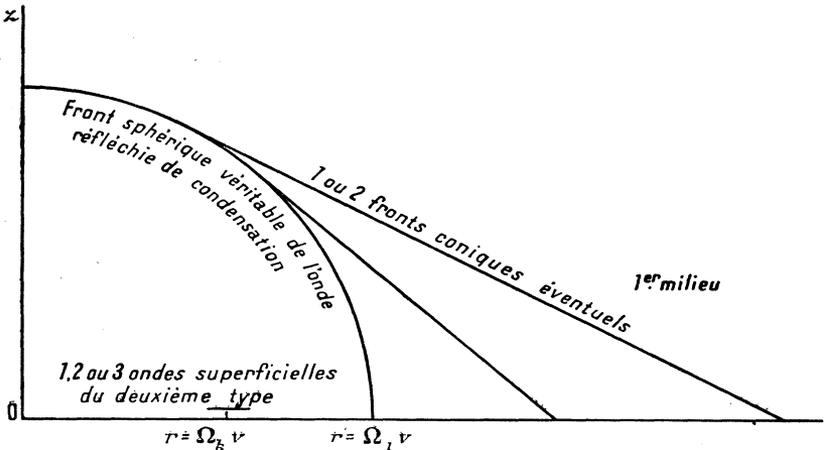


Fig. 69.

l'instant v , la position d'un front véritable, précédé d'un seul front conique si $\Omega'_1 > \Omega_1 > \Omega_2$, de deux fronts coniques si $\Omega'_1 > \Omega'_2 > \Omega_1$, d'aucun si $\Omega_1 > \Omega'_1$. A l'instant v , l'intégrale (E) n'est à considérer que pour des points M situés à l'intérieur de la sphère $r = \Omega_1 v$. L'intégrale (E) ne peut pas présenter d'anomalie si α n'est pas infiniment voisin de $\frac{\pi}{2}$. Les seules anomalies de cette intégrale correspondent à des ondes superficielles de condensation, du deuxième type, à propagation annulaire.

Il existe une et une seule onde superficielle si $\Omega'_1 > \Omega'_2 > \Omega_1$: sa vitesse est égale à Ω_2 .

Il existe deux ondes superficielles si $\Omega'_1 > \Omega_1 > \Omega'_2$: leurs vitesses sont Ω'_2 et Ω_2 .

Il existe trois ondes superficielles si $\Omega_1 > \Omega'_1$: leurs vitesses sont Ω'_1 , Ω'_2 et Ω_2 .

Troisième cas : $\Omega < \Omega_1$. — Considérons (fig. 70) la calotte sphérique

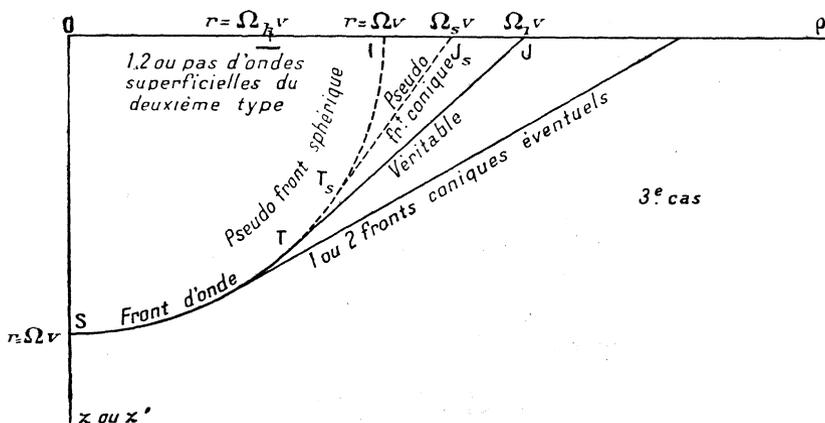


Fig. 70.

ST de centre O et de rayon Ωv prolongée par le cône de révolution JT d'axe Oz, tangent à cette demi-sphère et coupant la surface de séparation des deux milieux suivant le cercle de centre O, de rayon $OJ = \Omega_1 v$. L'ensemble de la calotte sphérique et du cône représente la position, à l'instant v , d'un front d'onde véritable. L'intégrale (E) n'est à considérer, à l'instant v , que pour des points M situés à l'intérieur de cette surface.

Ce front d'onde est d'ailleurs précédé d'un et d'un seul front conique si $\Omega'_1 > \Omega_1 > \Omega'_2$, de deux fronts coniques si $\Omega'_1 > \Omega'_2 > \Omega_1$. Il n'est précédé d'aucun front conique si $\Omega_1 > \Omega'_1$.

L'onde étudiée ne comporte d'ailleurs aucun autre front véritable que STJ et les fronts coniques éventuels.

Pour $\tau > \frac{\Omega_1}{\Omega}$, c'est-à-dire pour les points M situés, à l'instant v , à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon Ωv , l'intégrale (E) ne

peut, pour les mêmes raisons que ci-dessus, présenter aucune anomalie si le point M n'est pas infiniment proche de la surface de séparation des deux milieux.

Il ne peut donc exister à l'intérieur de la sphère $r = \Omega \nu$ que des ondes superficielles du deuxième type, à propagation annulaire. Il existe autant de ces ondes superficielles qu'il y a de vitesses Ω'_1 , Ω'_2 ou Ω_2 inférieures à Ω . Il peut donc y en avoir deux au maximum, il peut ne pas en exister.

Au contraire, si nous envisageons un point M situé entre le cône et la partie de la sphère $r = \Omega \nu$ qui prolonge la calotte sphérique, ou encore un point M infiniment proche de la portion de sphère JT, l'intégrale (E) peut présenter une anomalie pour des valeurs de α qui ne sont pas infiniment voisines de $\frac{\pi}{2}$. Telle est la particularité intéressante que présente ce troisième cas et que nous allons étudier désormais.

Les racines (9) sont alors imaginaires pures. Nous les écrirons

$$(11) \quad u_1 \Omega_1, u_2 \Omega_2 = i \left(-\tau \sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha \sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} - \tau^2} \right) \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

et les valeurs correspondantes de $c \Omega_1$ sont:

$$(12) \quad c \Omega_1 = \tau \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha \sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} - \tau^2}.$$

Soit u_0 une des racines u de l'équation (8), $c_0 = \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{\Omega^2}}$ la valeur correspondante de c .

Nous désignerons par α_0 l'une ou l'autre des déterminations de

$$\sqrt{u_0^2 + \frac{1}{\Omega^2}}.$$

Les racines de l'équation (4) sont alors, en négligeant un infiniment petit d'ordre $\frac{h^2}{R'^2}$,

$$(13) \quad u = u_0 - \alpha_0 \frac{h}{R'} \frac{1}{i \sin \alpha + \frac{u_0}{c_0} \cos \alpha},$$

ce qui représente quatre racines u en associant à chacune de ces deux racines u_0 les deux déterminations possibles de α_0 .

α_0 est une imaginaire pure de coefficient positif ou négatif. Il nous faut choisir celle de coefficient négatif pour obtenir une racine u voisine

dù lacet (E). Or, en tenant compte de (11) et de (18), la relation (13) s'écrit

$$(14) \quad u = u_0 + ia_0 \frac{h}{R} \frac{\varepsilon c \Omega_1}{\sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} - \tau^2}}.$$

Comme ia_0 est positif, la partie principale de $u - u_0$ a donc le signe de εc .

Si $\varepsilon = 1$, c est positif, donc aussi $u - u_0$. La racine correspondante est dans le quatrième quadrant de notre plan limité, infiniment près du bord droit du lacet (E).

Si $\varepsilon = -1$ et si c est négatif, la racine est située près du bord gauche du lacet (E), et à droite de ce bord gauche dans le feuillet qui prolonge à droite de la coupure le troisième quadrant du plan limité.

Si $\varepsilon = -1$ et si c est positif, la racine est près du bord droit du lacet (E) à gauche de ce bord droit, dans le feuillet qui prolonge le quatrième quadrant du lacet (E) à gauche de la coupure.

L'intégrale (E) présentera une anomalie dans les deux cas suivants et dans ces deux cas seulement :

1° Ou bien les deux racines u seront infiniment voisines l'une de l'autre, de part et d'autre du bord droit du lacet (E), ce qui exige que τ soit infiniment voisin de $\frac{\Omega_1}{\Omega}$, c'est à dire ν infiniment voisin de $\frac{r}{\Omega}$. A cette anomalie correspond une pseudo-onde sphérique, localisée sur la portion IT de la sphère $r = \Omega \nu$, d'un type analogue à celui de la pseudo-onde sphérique étudiée au Chapitre XIII.

2° Ou bien la racine située dans le quatrième quadrant du plan limité et à droite du bord droit du lacet (E) sera infiniment voisine d'un point de ramification $-\frac{i}{\Omega_s}$ relatif à l'un des radicaux autres que a et c et situé entre $-\frac{i}{\Omega_1}$ et $-\frac{i}{\Omega}$ ($\Omega_1 > \Omega_s > \Omega$). D'où

$$i \left(-\tau \sin \alpha + \cos \alpha \sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} - \tau^2} \right) = -i \frac{\Omega_1}{\Omega_s},$$

ou

$$(15) \quad \cos \alpha \sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} - \tau^2} = \tau \sin \alpha - \frac{\Omega_1}{\Omega_s}.$$

La relation (15) suppose d'abord

$$(16) \quad \tau \sin \alpha > \frac{\Omega_1}{\Omega_s}.$$

Supposons la condition (16) réalisée; il vient, par élévation au carré des deux membres de (15)

$$\tau^2 - 2\tau \frac{\Omega_1}{\Omega_s} \sin \alpha + \frac{\Omega_1^2}{\Omega_s^2} - \frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} \cos^2 \alpha = 0,$$

ou

$$\left(\tau - \frac{\Omega_1}{\Omega_s} \sin \alpha \right)^2 = \cos^2 \alpha \left(\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_s^2} \right),$$

ou enfin

$$(17) \quad \tau = \frac{\Omega_1}{\Omega_s} \sin \alpha + \varepsilon' \cos \alpha \sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_s^2}} \quad (\varepsilon' = \pm 1).$$

En tenant compte de (17) la condition (16) devient

$$(18) \quad \varepsilon' \sin \alpha \sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega^2} - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_s^2}} > \frac{\Omega_1}{\Omega_s} \cos \alpha,$$

ce qui montre d'abord que ε' doit être égal à +1.

Pour $\varepsilon' = +1$, les conditions (17) et (18) deviennent enfin

$$(19) \quad \begin{cases} \Omega \nu = \rho \sin l_{\Omega, \Omega_s} + z \cos l_{\Omega, \Omega_s}, \\ \alpha > l_{\Omega, \Omega_s}. \end{cases}$$

En posant

$$\sin l_{\Omega, \Omega_s} = \frac{\Omega}{\Omega_s}; \quad \cos l_{\Omega, \Omega_s} = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_s^2}}.$$

L'équation (19) est celle d'un pseudo-front conique, de distorsion si Ω désigne Ω_2 ou Ω'_2 , de condensation si Ω désigne Ω'_1 . Ce pseudo-front conique a la forme d'un cône de révolution $J_s T_s$ d'axe Oz , tangent à la sphère $r = \Omega \nu$ le long du parallèle $\alpha = l_{\Omega, \Omega_s}$, limité d'une part au pseudo-front sphérique $r = \Omega \nu$, d'autre part à la surface de séparation qu'il coupe suivant le cercle de centre O et de rayon $\Omega_s \nu$ ($\Omega \nu < \Omega_s \nu < \Omega_1 \nu$).

Conclusion. — La description du phénomène aux grandes distances de la source prend alors une unité remarquable.

Considérons dans le premier milieu les deux sphères de centre O et de rayons $\Omega_1 \nu$, $\Omega_2 \nu$; dans le second milieu les deux sphères de centre O et de rayons $\Omega'_1 \nu$, $\Omega'_2 \nu$.

Considérons également tous les cônes de révolution possibles d'axe Oz , tangents à l'une ou l'autre des quatre sphères et coupant la surface de séparation suivant des cercles de centre O et de rayons $\Omega_1 \nu$, $\Omega_2 \nu$, $\Omega'_1 \nu$ ou $\Omega'_2 \nu$. Limitons ces cônes d'une part à la surface de séparation $z = 0$, d'autre part aux sphères auxquelles ils sont tangents.

Une partie des surfaces ainsi définies représente la totalité des fronts

d'onde véritables. *Les portions restantes de ces surfaces représentent des pseudo-ondes.*

D'autre part, considérons une onde déterminée. Soit $\Omega_k \nu$ le rayon d'un cercle tracé sur la surface de séparation et situé en arrière du front le plus avancé de l'onde en question. Si un front d'onde véritable de l'onde considérée ne coupe pas la surface de séparation suivant le cercle $r = \Omega_k \nu$, *il existe pour l'onde considérée une onde superficielle du deuxième type, localisée dans le voisinage de ce cercle.*

103. Discontinuités cinématiques localisées sur les fronts d'onde véritables. — I. Supposons, comme nous l'avons fait au chapitre X, que la fonction $F(t)$ est indéfiniment dérivable, sauf pour la valeur $t = 0$, où certaines des dérivées ne sont pas nulles, peuvent même devenir infinies.

Il n'y aurait d'ailleurs rien de changé dans les raisonnements si la fonction $F(t)$ était irrégulière pour une autre valeur, ou pour d'autres valeurs que $t = 0$.

Désignant par $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3, \dots$, les points de discontinuité d'un facteur de transmission $A(\nu)$, supposons pour fixer les idées $\nu_2 < t < \nu_3$, t n'étant égal ni à ν_2 , ni à ν_3 .

Considérons l'expression

$$(20) \quad \Psi = \int_{\nu_1}^{\nu_2} F'(t - \nu) A(\nu) d\nu + \int_{\nu_2}^t F'(t - \nu) A(\nu) d\nu.$$

Étant donnée la nature de la fonction $F(t)$, nous ne savons pas encore si l'expression (20) constitue une solution.

Nous ne pouvons pas, comme au Chapitre X, obtenir les dérivées de Ψ par des dérivations sous le signe somme effectuées sans précautions ou du moins nous ne pouvons, par de telles dérivations, obtenir les dérivées que jusqu'à un ordre limité.

Pour tourner cette difficulté, nous procéderons par exemple de la manière suivante : nous subdiviserons d'abord chacun des deux intervalles d'intégration (20)

$$(21) \quad \Psi = \int_{\nu_1}^{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}} F'(t - \nu) A(\nu) d\nu + \int_{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}}^{\nu_2} F'(t - \nu) A(\nu) d\nu \\ + \int_{\nu_2}^{\frac{\nu_2 + t}{2}} F'(t - \nu) A(\nu) d\nu + \int_{\frac{\nu_2 + t}{2}}^t F'(t - \nu) A(\nu) d\nu.$$

Dans le domaine de ν correspondant à la première des intégrations (21) écrivons

$$(22) \quad \Lambda(\nu) = \Lambda_1(\nu - \nu_1, \rho, \mathbf{z}),$$

dans la seconde intégration

$$(22 \text{ bis}) \quad \Lambda(\nu) = \Lambda_2(\nu_2 - \nu, \rho, \mathbf{z}),$$

dans la troisième

$$(22 \text{ ter}) \quad \Lambda(\nu) = \Lambda_3(\nu - \nu_2, \rho, \mathbf{z}).$$

Dans les trois premières intégrales (21) nous effectuerons alors les changements de variables respectifs

$$(23) \quad \begin{cases} \nu - \nu_1 = \lambda, \\ \nu_2 - \nu = \mu, \\ \nu - \nu_2 = \nu. \end{cases}$$

Dans la quatrième intégrale enfin, nous choisirons $t - \nu$ comme nouvelle variable. Il vient

$$(24) \quad \begin{aligned} \Psi = & \int_0^{\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}} F'(t - \lambda - \nu_1) \Lambda_1(\lambda, \rho, \mathbf{z}) d\lambda \\ & + \int_0^{\frac{\nu_2 - \nu_3}{2}} F'(t + \mu - \nu_2) \Lambda_2(\mu, \rho, \mathbf{z}) d\mu \\ & + \int_0^{\frac{t - \nu_2}{2}} F'(t - \nu - \nu_2) \Lambda_3(\nu, \rho, \mathbf{z}) d\nu \\ & + \int_0^{\frac{t - \nu_2}{2}} F'(\nu) \Lambda(t - \nu) d\nu. \end{aligned}$$

Il résulte de l'étude faite au Chapitre VI que, sous cette nouvelle forme (24), les dérivations sous le signe somme sont permises. Les dérivées successives de Ψ , quel que soit leur rang, s'exprimeront à l'aide d'intégrales provenant de dérivations sous le signe somme et de termes complémentaires provenant du fait que les limites d'intégration sont des fonctions de ρ, \mathbf{z}, t . Tant qu'on exclut les égalités $t = \nu_2$ ou $t = \nu_3$, ces termes complémentaires s'expriment à l'aide de dérivées successives de $F(t)$ calculées pour des valeurs de t différentes de zéro.

Considérons désormais la fonction Ψ , (Cf. Chap. X, équation 28),

qui diffère de Ψ par la substitution à $F(t)$ d'une fonction $\Phi(t)$ indéfiniment dérivable, identique à $F(t)$ à l'extérieur de l'intervalle $(0, t_1)$. Ψ_1 constitue une solution.

Envisageons une même dérivée, de rang quelconque, calculée pour la fonction Ψ et la fonction Ψ_1 , en supposant toujours $t \neq v_2$ et $t \neq v_3$. Si l'on suppose t_1 assez petit, les termes complémentaires figurant dans les deux expressions de cette dérivée, pour Ψ et pour Ψ_1 , sont identiques. Lorsque t_1 tend vers zéro, les intégrales figurant dans l'expression de la dérivée de Ψ_1 ou bien finissent par devenir identiques aux intégrales similaires qui figurent dans l'expression de la dérivée de Ψ , ou bien tendent respectivement vers ces dernières.

Par conséquent, de même que dans le cas particulier étudié au Chapitre X, toute dérivée de Ψ_1 tend uniformément vers la dérivée correspondante de Ψ , dans tout domaine des variables t, ρ, z dont sont exclues les valeurs $t = v_i(\rho, z)$.

C'est à ce point de vue que nous pouvons dire que Ψ constitue aussi une solution du problème; mais, alors que toute vitesse, accélération, etc., est continue quels que soient ρ, z, t quand on suppose F indéfiniment dérivable, il n'en est plus de même lorsque cette condition n'est pas remplie. Les surfaces de front d'onde $t = v_i(\rho, z)$ sont alors le siège de discontinuités cinématiques.

II. Ces discontinuités cinématiques sont de nature plus compliquée que dans le cas particulier étudié au Chapitre X.

Supposons par exemple que $t = 0$ est un point de discontinuité de première espèce des dérivées de F et que $A(v, \rho, z)$ devient infini lorsque v tend vers v_1 . Si t est supérieur à v_1 , nous écrirons

$$(25) \quad \begin{aligned} \Psi &= \int_{v_1}^t F'(t - v_1) A_1(v - v_1, \rho, z) dv \\ &= \int_0^{t - v_1} F'(t - \lambda - v_1) A_1(\lambda, \rho, z) d\lambda. \end{aligned}$$

D'où

$$(26) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \int_0^{t - v_1} \left[-F''(t - \lambda - v_1) A_1(\lambda, \rho, z) \frac{\partial v_1}{\partial \rho} + F'(t - \lambda - v_1) \frac{\partial A_1}{\partial \rho} \right] d\lambda - F'(+0) \frac{\partial v_1}{\partial \rho} A(t, \rho, z).$$

Lorsque t tend vers v_1 par valeurs supérieures, l'intégrale qui figure dans l'expression (26) tend vers zéro, et le second terme devient infini

si $F'(+0)$ n'est pas nul. La signification physique d'une discontinuité d'élongation de ce genre est d'ailleurs assez douteuse.

Supposons que $F'(+0)$ est nul. On a

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial t} = \int_0^{t-\nu_1} \left[-F'''(t-\lambda-\nu_1) A_1(\lambda, \rho, z) \frac{\partial \nu_1}{\partial \rho} + F''(t-\lambda-\nu_1) \frac{\partial A_1}{\partial \rho} \right] d\lambda \\ - F''(+0) \frac{\partial \nu_1}{\partial \rho} A(t, \rho, z).$$

Lorsque t tend vers ν_1 par valeurs supérieures, l'intégrale tend vers zéro et le second terme devient infini si $F''(+0)$ n'est pas nul.

D'une manière générale, si $F'(+0)$, $F''(+0)$, ..., $F^{(n)}(+0)$ sont nuls et $F^{(n+1)}(+0) \neq 0$, toutes les dérivées $\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial t}$, ..., $\frac{\partial^n \Psi}{\partial \rho \partial t^{n-1}}$ sont continues pour $t = \nu_1$, mais $\frac{\partial^{n+1} \Psi}{\partial \rho \partial t^n}$ devient infinie comme

$$- F^{(n+1)}(+0) \frac{\partial \nu_1}{\partial \rho} A(t, \rho, z)$$

lorsque t tend vers ν_1 par valeurs supérieures.

III. Supposons toujours que $t = 0$ est un point de discontinuité de première espèce des dérivées de F , mais supposons que $A(\nu, \rho, z)$ tend vers zéro et que $\frac{\partial A}{\partial \nu}$ devient infinie quand ν tend vers ν_1 .

Si $F'(+0)$ n'est pas nul, $\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$ tend néanmoins vers zéro lorsque t tend vers ν_1 par valeurs supérieures, mais $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial t}$ devient infinie en même temps que le terme

$$- F'(+0) \frac{\partial \nu_1}{\partial \rho} \frac{\partial A(t, \rho, z)}{\partial t},$$

qu'il convient en pareil cas d'ajouter à l'expression (27).

D'une manière générale, si $F'(+0)$, $F''(+0)$, ..., $F^{(n)}(+0)$ sont nuls et $F^{(n+1)}(+0) \neq 0$, toutes les dérivées $\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho \partial t}$, ..., $\frac{\partial^{n+1} \Psi}{\partial \rho \partial t^n}$ sont continues pour $t = \nu_1$ mais $\frac{\partial^{n+2} \Psi}{\partial \rho \partial t^{n+1}}$ devient infinie comme

$$- F^{(n+1)}(+0) \frac{\partial \nu_1}{\partial \rho} \frac{\partial A(t, \rho, z)}{\partial t}.$$

IV. Prenons enfin un exemple un peu plus compliqué. Supposons que $t = 0$ est un point de discontinuité de seconde espèce pour certaines

dérivées de $F(t)$ et que $A(\nu, \rho, z)$ devient infinie quand ν tend vers ν_1 . Nous écrivons, pour $t > \nu_1$,

$$(28) \quad \Psi = \int_{\nu_1}^{\frac{\nu_1+t}{2}} F'(t-\nu) A_1(\nu - \nu_1, \rho, z) d\nu + \int_{\frac{\nu_1+t}{2}}^t F'(t-\nu) A(\nu) d\nu \\ = \int_0^{\frac{t-\nu_1}{2}} F'(t-\lambda-\nu_1) A_1(\lambda, \rho, z) d\lambda + \int_0^{\frac{t-\nu_1}{2}} F'(\nu) A(t-\nu) d\nu.$$

D'où

$$(29) \quad \frac{d\Psi}{d\rho} = \int_0^{\frac{t-\nu_1}{2}} \left[-F''(t-\lambda-\nu_1) \frac{d\nu_1}{d\rho} A_1(\lambda, \rho, z) + F'(t-\lambda-\nu_1) \frac{\partial A_1(\lambda, \rho, z)}{\partial \rho} \right] d\lambda \\ + \int_0^{\frac{t-\nu_1}{2}} F'(\nu) \frac{\partial A(t-\nu)}{\partial \rho} d\nu - F'\left(\frac{t-\nu_1}{2}\right) \frac{\partial \nu_1}{\partial \rho} A\left(\frac{t+\nu_1}{2}\right).$$

Supposons par exemple que $A(\nu)$ puisse s'exprimer dans le voisinage de $\nu = \nu_1$ par l'expression

$$A(\nu) = [\text{Log}(\nu - \nu_1)] P(\nu, \rho, z) + Q(\nu, \rho, z),$$

P et Q désignant deux fonctions holomorphes. Posons, pour $t > 0$,

$$F'(t) = \frac{f(t)}{\text{Log } t},$$

$f(t)$ désignant une fonction holomorphe dans le voisinage de $t = 0$.

Il apparaît que dans l'expression (29) les intégrales tendent vers zéro lorsque t tend vers ν_1 par valeurs supérieures et que le terme complémentaire a pour limite

$$-f(0) \frac{d\nu_1}{d\rho} P(\nu_1, \rho, z),$$

qui peut ne pas être nulle. Cet exemple suffit à montrer que, quand une discontinuité cinématique est localisée sur le front d'onde $t = \nu_1$, cette discontinuité n'est pas nécessairement infinie. Tout dépend de la nature de $F'(t)$, c'est-à-dire de la nature des discontinuités cinématiques dont on a envisagé l'existence sur le front de l'onde incidente.

V. Pour revenir au problème particulier que nous étudions, supposons que le front de l'onde incidente est le siège d'une discontinuité cinématique d'ordre n du type habituel, c'est-à-dire que $t = 0$ est un point de discontinuité de première espèce pour les dérivées de F , que $F(+0)$, $F'(+0)$, ..., $F^{(n)}(+0)$ sont nuls et $F^{(n+1)}(+0)$ différent de zéro. Sur

tous les fronts d'onde dits *normaux*, à condition qu'il ne soient pas précédés d'une ou de deux ondes coniques, se trouve également localisée une discontinuité cinématique d'ordre n , longitudinale pour les ondes de condensation, transversale pour les ondes de distorsion. Sur ces mêmes fronts d'onde, dans la région où ils sont précédés par un ou deux fronts coniques, se trouve localisée une discontinuité cinématique, également d'ordre n , mais infinie. Un front conique, lorsqu'il est le premier, est le siège d'une discontinuité cinématique du type habituel, mais d'ordre $n + 1$ seulement. Lorsqu'il existe un second front conique, la discontinuité cinématique dont il est le siège est infinie et d'ordre $n + 1$.

En définitive, le tout premier front pour chacune des quatre ondes réfléchies ou réfractées est le siège d'une discontinuité cinématique, d'ordre n ou $n + 1$ suivant les cas et les régions considérées sur ce front. Le front ou les deux fronts qui peuvent suivre ce tout premier front d'onde sont le siège de discontinuités infinies, d'ordre n ou $n + 1$.

Les formules établies au Chapitre VI permettent d'ailleurs de discuter numériquement toutes les particularités de ce phénomène.

Vu et approuvé :

Paris, le 17 janvier 1939.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 17 janvier 1939.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

G. ROUSSY.



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
AVANT-PROPOS.....	V
PLAN DE L'OUVRAGE.....	IX

CHAPITRE I.

*Notations. Équations indéfinies aux dérivées partielles.
Conditions aux limites sur la surface de séparation des milieux.*

1. Énoncé du problème.....	1
2. Notations.....	2
3. Équations indéfinies de propagation.....	3
4. Conditions aux limites pour $z = 0$ (surface de séparation).....	4

CHAPITRE II.

*Sphère pulsante en milieu homogène illimité.
Définition de la source ponctuelle S. Conditions initiales.*

5. Sphère pulsante en milieu homogène illimité (Riemann). Discontinuités cinématiques.....	5
6. Conditions initiales. Source ponctuelle.....	8
7. Remarque.....	10

CHAPITRE III.

Exposé de la méthode d'intégration.

8. Succession d'hypothèses conduisant à l'équation intégrale de Carson.....	11
9. Vérification de l'exactitude de la solution.....	15
10. Lemme.....	16
11. Théorème.....	20
12. Seconde démonstration très simplifiée du théorème.....	32
13. Généralisation du théorème.....	35
14. Notion de front d'onde.....	35

CHAPITRE IV.

Détermination des coefficients exponentiels.

15. Position du problème.....	38
16. Hypothèse sur la forme des solutions.....	39
17. Détermination de f, φ, f', φ'	40
18. Changement de variable $\lambda = pu$	42

	Pages.
19. Discussion des racines de D.....	42
20. Discussion de la condition d'existence des racines.....	49
21. Justification <i>a posteriori</i> des dérivations sous le signe d'intégration.....	52
22. Premier cas particulier.....	52
23. Deuxième cas particulier.....	53

CHAPITRE V.

Détermination du facteur de transmission B(v).

24. Première transformation de l'expression du coefficient exponentiel Y_p	54
25. Étude d'un changement de variable.....	55
26. Mise en œuvre du changement de variable (u, v).....	61
27. Permutation de l'ordre des intégrations.....	63
28. Nouveau changement de variable (ω, u).....	65
29. Étude du radical $\sqrt{u^2 \rho^2 + (v - ah - bz)^2}$	67
30. Étude du cas $v > \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$	70
31. Étude du cas $\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2} < v < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ en supposant $\Omega_1 > \Omega'_1$	75
32. Étude du cas $\frac{h}{\Omega_1} + \frac{z}{\Omega_2} < v < \frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ en supposant $\Omega'_1 > \Omega_1$	76
33. Expression de B(v) dans le domaine de l'onde à front conique à l'aide d'intégrales réelles.....	79

CHAPITRE VI.

Première étude du facteur de transmission B(v, ρ, z).

34. Délimitation de quatre domaines à l'intérieur desquels B(v, ρ, z) est continue et indéfiniment dérivable pour toutes valeurs de v, ρ, z, le cas de ρ = 0 étant exclu.....	82
35. Étude de B(v, ρ, z) pour ρ = 0.....	85
36. Étude de B(v, ρ, z) dans le domaine II, à la frontière du domaine I.....	86
37. Limite de B(v, ρ, z) quand v tend vers $\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2}$ par valeurs supérieures, à la frontière des domaines I et II.....	87
38. Étude de B(v, ρ, z) dans le domaine III, à la frontière des domaines I et III.....	90
39. Nouvelle expression de la fonction f(u).....	92
40. Limite de B(v, ρ, z) et de $\frac{\partial}{\partial v} B(v, \rho, z)$ quand v tend vers $\frac{1}{\Omega_1} (\rho + h \cot l_1 + z \cot l_2)$ par valeurs supérieures, à la frontière des domaines I et III.....	93
41. Étude de B(v, ρ, z) à la frontière des domaines III et IV.....	95
42. Étude de B(v, ρ, z) à la frontière des domaines II et III, ou des domaines II et IV.....	102
43. Expression de B(v, ρ, z) à l'aide d'intégrales elliptiques ou hyperelliptiques.....	107
44. Cas particulier où le second milieu est le vide.....	108
45. Existence d'une primitive de B(v) ayant les propriétés requises pour l'application du théorème fondamental.....	108

CHAPITRE VII.

Résolution des autres équations intégrales. Disposition d'ensemble des divers fronts d'onde. Justification définitive de la solution. Importance des fronts coniques.

	Pages.
46. Équation intégrale $\frac{Y'_p}{P} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} B'(\nu) d\nu$	111
47. Équation intégrale $\frac{X'_p}{P} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A'(\nu) d\nu$	115
48. Équation intégrale $\frac{(X_3)_p}{P} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A_3(\nu) d\nu$	116
49. Équation intégrale $\frac{(X_2)_p}{P} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A_2(\nu) d\nu$	117
50. Équation intégrale $\frac{(X_1)_p}{P} = \int_0^{+\infty} e^{-p\nu} A_1(\nu) d\nu$	118
51. Récapitulation générale.....	119
52. Exemple de disposition des fronts d'onde (1 ^{er} cas).....	120
53. Exemple de disposition des fronts d'onde (3 ^e cas).....	120
54. Justification définitive de la solution.....	123
55. Remarque à propos d'études séismographiques ayant mis expérimentalement en évidence le phénomène des ondes coniques (Prospection géophysique du sous-sol).....	123

CHAPITRE VIII.

Cas limite du problème statique.

56. Problème statique envisagé comme cas limite du problème dynamique.....	128
57. Expression asymptotique des facteurs de transmission.....	130
58. Disparition des termes en ν^2 dans les combinaisons ayant une signification physique.....	133
59. Application numérique.....	133

CHAPITRE IX.

Cas particulier de l'état de régime harmonique.

60. L'état de régime harmonique.....	137
--------------------------------------	-----

CHAPITRE X.

*Onde progressive quand le second milieu est le vide.
Discontinuités cinématiques. Termes primaires.*

61. Rappel des notations.....	144
62. Expression de l_p	146
63. Expression de l_z	147
64. Expression de $A_3 \left(\frac{R'}{\Omega_1} \right)$ et de $B \left(\frac{R_1}{\Omega_1} + \frac{R_2}{\Omega_2} + 0 \right)$	148

	Pages.
65. Termes primaires et termes secondaires.....	148
66. Élongations à la surface du sol.....	149
67. Discontinuités cinématiques.....	150
68. Valeurs numériques de la discontinuité cinématique propagée par l'onde réfléchie de condensation.....	154
69. Valeurs numériques de la discontinuité cinématique propagée par l'onde réfléchie de distorsion.....	155
70. Discontinuité cinématique à la surface du sol.....	161
71. Décomposition des facteurs de transmission $M_p, M_z, N_p, N_z, S_p, S_z$	163
72. Nouveaux termes primaires provenant de $M_p^{(R)}, M_z^{(R)}, N_p^{(R)}, N_z^{(R)}$	164
73. Discussion des termes primaires.....	166
74. Termes primaires de première catégorie.....	166
75. Termes primaires de seconde catégorie.....	167
76. Termes primaires de troisième catégorie.....	168
77. Termes primaires de quatrième catégorie.....	169

CHAPITRE XI.

*Onde progressive quand le second milieu est le vide (suite).
L'onde de Rayleigh.*

78. Modules et arguments de quantités complexes.....	170
79. Facteurs de transmission de l'onde de Rayleigh.....	172
80. Concentration de l'énergie au voisinage de la surface du sol.....	173
81. Expressions limites des modules et arguments (phénomène superficiel).....	174
82. Étude d'un mouvement.....	176
83. Forme des courbes représentatives des facteurs de transmission de l'onde de Rayleigh. Déformation en fonction de ρ ou de z	180
84. Allure du séismogramme. Comparaison avec la phase L des séismogrammes d'observatoire. Relation entre la période et la profondeur de l'hypocentre..	184

CHAPITRE XII.

*Onde progressive quand le second milieu est le vide (suite).
Deuxième onde superficielle.*

85. Changement de variable pour l'étude des termes $M^{(E)}, N^{(E)}, S^{(E)}$	193
86. Formules asymptotiques pour les grandes valeurs de R'	195
87. Les facteurs $N_p^{(E)}$ et $N_z^{(E)}$ ne présentent aucune particularité lorsque R' est infini et τ infiniment voisin de $v \sin I'$, si $\cos I'$ n'est pas infiniment petit...	197
88. Étude des intégrales $I_{\rho, \eta} = \int_B^A \frac{(A - \lambda)^{p + \frac{1}{2}}}{(A + \varepsilon - \lambda)^{q + \frac{1}{2}}} F(\lambda) d\lambda$	199
89. Formules asymptotiques pour $M^{(E)}$ et $S^{(E)}$ (phénomène superficiel).....	201
90. Formules asymptotiques pour les dérivées $\frac{d^n M^{(E)}}{d\nu^n}$ et $\frac{d^n S^{(E)}}{d\nu^n}$ (phénomène superficiel).....	203
91. Étude des intégrales dépendant du radical P. Fonctions $N_p^{(E)}, N_z^{(E)}$ et leurs dérivées.....	206
92. Courbes représentatives.....	209

	Pages.
93. Comparaison de l'ordre de grandeur de la largeur des ondulations dans l'onde de Rayleigh et dans la deuxième onde superficielle.....	213
94. Allure de l'ensemble du phénomène superficiel.....	213

CHAPITRE XIII.

Onde progressive quand le second milieu est le vide (fin).

Pseudo-onde sphérique de distorsion aux grandes distances de la source.

95. Les facteurs $M^{(E)}$, $S^{(E)}$ ne présentent pas d'autres anomalies que celles qui correspondent à la deuxième onde superficielle.....	217
96. Nouvelle anomalie des facteurs $N^{(E)}$	217
97. Étude des intégrales $\int_{\lambda_0-a}^{\lambda_0+a} [(\lambda - \lambda_0 - \omega_1)(\lambda - \lambda_0 - \omega_2)]^{-\frac{2k+1}{2}} s(\lambda) d\lambda$	219
98. Parties principales des facteurs $N^{(E)}$ et de leurs dérivées dans le domaine de la pseudo-onde sphérique de distorsion.....	221
99. Étude des facteurs $N^{(E)}$ et de leurs dérivées, aux grandes distances de la source, pour l' voisin de l , τ voisin de ν	225
100. Discussion des formules (41) et (42).....	229

CHAPITRE XIV.

Cas de deux milieux quelconques.

101. L'onde de Rayleigh à l'intersurface de deux milieux quelconques.....	233
102. Ondes superficielles du second type et pseudo-ondes sphériques ou coniques à l'intérieur des deux milieux, aux grandes distances de la source.....	237
103. Discontinuités cinématiques localisées sur les fronts d'onde véritables.....	245