ABBAS-RIAZI KERMANI

Sur un espace attaché à l'équation de M. P. Humbert

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1938
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1938__210__1_0>

THÈSE Nº 25

—

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

(SCIENCES MATHÉMATIQUES)

PAR

ABBAS-RIAZI KERMANI

(IRANIEN)

Diplômé de l'École normale supérieure de Téhéran

Licencié ès Sciences

1re THÈSE. — SUR UN ESPACE ATTACHÉ A L'ÉQUATION DE M. P. HUMBERT.

2e THÈSE. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 1938, *devant la Commission d'Examen*

MM. P. HUMBERT..... *Président*

SOULA .... } *Assesseurs*

VASILESCO..... }

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

49, boulevard Saint-Michel, Ve

PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES
DE
L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

	MM.	
Doyen	M. GODECHOT, Correspondant de l'Institut, Professeur de Chimie.	
Doyen honoraire	S. DAUTHEVILLE.	
Professeurs honoraires	E. FABRY, O. DUBOSQ, J. CURIE, F. BEAULARD DE LENAIZAN, E BATAILLON, R. JACQUES, J. PAVILLARD, J CABANNES et E. CHATTON.	
Maître de Conférences honoraire.	F. MOURGUES.	
	MM.	
Professeurs	G. REBOUL	Physique.
	E. TURRIÈRE	Mécanique rationnelle.
	P. HUMBERT	Mathématiques pures.
	L. GAY	Chimie.
	J. SOULA	Mathématiques.
	E. CARRIÈRE	Chimie.
	J. DURAND	Chimie.
	L. EMBERGER	Botanique.
	CH. BOUHET	Physique.
	P. MATHIAS	Zoologie et Biologie générale.
	M. THORAL	Géologie.
	MM.	
Maîtres de Conférences	F. VASILESCO	Mathématiques.
	O. TUZET (Mlle)	Zoologie.
	P. CHATELAIN	Minéralogie.
	MM.	
Secrétaire	A. BABY.	
Secrétaire honoraire	L. DUBOIS.	

A SA MAJESTÉ IMPÉRIALE,
RÉSA SHAH PAHLEVI.

A MON MAITRE,
MONSIEUR LE PROFESSEUR PIERRE HUMBERT.

Hommage de respectueuse reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE

SUR UN ESPACE ATTACHÉ A L'ÉQUATION DE M. P. HUMBERT

INTRODUCTION

Pour la première fois, M. le Pr P. HUMBERT a introduit dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, l'équation

$$\Delta_3 U = \frac{\delta^3 U}{\delta x^3} + \frac{\delta^3 U}{\delta y^3} + \frac{\delta^3 U}{\delta z^3} - 3 \frac{\delta^3 U}{\delta x \, \delta y \, \delta z} = 0 \qquad (1)$$

qui est une généralisation de l'équation de LAPLACE dans l'espace à deux dimensions.

M. D. V. JONESKO a ensuite démontré un théorème relatif à l'équation (1) analogue au théorème de Lord KELVIN.

Puis, cette équation a encore été étudiée par d'autres savants, en particulier par M. le Pr P. HUMBERT, dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*.

Plus tard, l'étude complète de (1) a été donnée à M. J. DEVISME par M. le Pr P. HUMBERT (thèse, 1933, Paris).

Dans ce présent mémoire, j'ai réuni toutes les études faites sur l'espace attaché à l'équation (1), en ajoutant les résultats de mes études.

A la fin du mémoire, je donne une liste des travaux se rapportant à l'espace attaché à l'équation (1).

Cette liste bibliographique présente donc un aspect complet de ce qui a été publié actuellement sur ce sujet.

Ce m'est un devoir particulièrement agréable de remercier ici M. le Pr P. HUMBERT dont les conseils m'ont été si précieux pendant tout le cours de mes recherches.

A. RIAZI.

Chapitre Premier

I. — ÉTUDE DE QUELQUES CHANGEMENTS DE VARIABLES

1. Quelle est l'équation de Monge-Ampère des surfaces (s) dont un système des lignes asymptotiques se projette sur le plan xoy suivant un réseau orthogonal.

Soient $z = \mathrm{U}\ (x, y)$ on a

$$ty'^2 + 2\,sy' + r = 0$$

d'où

$$\frac{r}{t} = -1 \qquad \text{ou} \qquad r + t = 0 \tag{1}$$

c'est l'équation de Laplace dans l'espace de deux dimensions.

Si on pose

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$

l'équation (1) s'écrit

$$\Delta_2 \mathrm{U} = \frac{\delta^2 \mathrm{U}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \mathrm{U}}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 \mathrm{U}}{\delta r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 \mathrm{U}}{\delta \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\delta \mathrm{U}}{\delta \theta} = 0 \tag{1'}$$

si l'on y fait le changement de variables $u = x + iy$, $v = x - iy$ elle devient

$$\frac{\delta^2 \mathrm{U}}{\delta u\, \delta v} = 0$$

prenons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\delta^3 \mathrm{U}}{\delta u\, \delta v\, \delta w} = 0 \tag{2}$$

et posons

$$\begin{aligned} u &= x + y + z \\ v &= x + jy + j^2 z \\ w &= x + j^2 y + jz \end{aligned} \tag{3}$$

où j et j^2 sont les racines impaires cubiques de l'unité

$$j = \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \qquad j^3 = 1 \qquad j^2 + j^4 = -1$$

$$j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \qquad j + j^2 = -1 \qquad j^4 = j$$

calculons le produit uvw et l'autre formule dont on a besoin dans le chapitre (ci-après)

$$\begin{gathered} u \times v \times w = (x + y + z)\ (x + jy + j^2 z) \\ (x + j^2 y + jz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz \end{gathered} \tag{3}$$

$$\frac{\delta^2 U}{\delta x^2} = S\frac{\delta^2 U}{\delta u^2} + 2S\frac{\delta^2 U}{\delta u\,\delta v}$$

$$\frac{\delta^2 U}{\delta y\,\delta z} = S\frac{\delta^2 U}{\delta u^2} - S\frac{\delta^2 U}{\delta u\,\delta v}$$

$$\Delta_3 U = 27\frac{\delta^3 U}{\delta u\,\delta v\,\delta w} = \frac{\delta^3 U}{\delta x^3} + \frac{\delta^3 U}{\delta y^3} + \frac{\delta^3 U}{\delta z^3} - 3\frac{\delta^3 U}{\delta x\,\delta y\,\delta z} \tag{4}$$

L'équation (4) s'appelle l'opérateur de M. P. Humbert : c'est une généralisation de l'équation (1).

2. Considérons maintenant les 3 fonctions d'Appell [1]

$$\begin{aligned} P(\theta, \varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + e^{j\theta+j^2\varphi} + e^{j^2\theta+j\varphi}}{3} \\ Q(\theta, \varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + j^2 e^{j\theta+j^2\varphi} + je^{j^2\theta+j\varphi}}{3} \\ R(\theta, \varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + je^{j\theta+j^2\varphi} + j^2 e^{j^2\theta+j\varphi}}{3} \end{aligned} \tag{5}$$

chacune de ces trois fonctions possède trois couples de périodes conjuguées savoir : pour θ

$$2\pi i \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \qquad \pi i + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

pour φ

$$2\pi i \qquad -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \qquad \pi i - \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

quand on augmente les variables du tiers de deux périodes conjuguées,

[1] Les nombres entre crochets renvoient au numéro correspondant de la liste bibliographique placé à la fin du mémoire.

on reproduit une des fonctions multipliée par un facteur constant. On a, par exemple,

$$P\left(\theta+\frac{2\pi i}{3},\varphi+\frac{2\pi i}{3}\right)=e^{\frac{4\pi i}{3}}P(\theta,\varphi)$$

$$P\left(\theta+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},\varphi-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)=R(\theta,\varphi)$$

$$P\left(\theta+\frac{\pi i}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}},\varphi+\frac{\pi i}{3}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)=e^{\frac{2\pi i}{3}}Q(\theta,\varphi)$$

Ces fonctions sont liées par la relation algébrique

$$P^3+Q^3+R^3-3\,PQR=1 \tag{6}$$

et l'on a, entre leurs dérivées partielles, les relations

$$\frac{\delta R}{\delta\theta}=\frac{\delta Q}{\delta\theta}=\frac{\delta^2 P}{\delta\theta\,\delta\varphi}=\frac{\delta^3 P}{\delta\theta^3}=\frac{\delta^3 P}{\delta\varphi^3}=P$$

et celle qu'on en déduit par permutation des lettres P, Q et R. Soient x, y et z les coordonnées d'un point de l'espace. Il existe une seule quantité réelle P et une infinité de nombres θ et φ différant les uns des autres par des périodes conjuguées vérifiant les relations :

$$\begin{aligned} x &= \rho P\ (\theta,\ \varphi)\\ y &= \rho Q\ (\theta,\ \varphi)\\ z &= \rho R\ (\theta,\ \varphi)\end{aligned} \tag{7}$$

on en déduit les relations

$$\begin{aligned}
\frac{\delta U}{\delta x} &= \frac{\delta U}{\delta\rho}P(-\theta,-\varphi)+\frac{1}{\rho}\frac{\delta U}{\delta\theta}Q(-\theta,-\varphi)+\frac{1}{\rho}\frac{\delta U}{\delta\varphi}R(-\theta,-\varphi)\\
\frac{\delta U}{\delta y} &= \frac{\delta U}{\delta\rho}R(-\theta,-\varphi)+\frac{1}{\rho}\frac{\delta U}{\delta\theta}P(-\theta,-\varphi)+\frac{1}{\rho}\frac{\delta U}{\delta\varphi}Q(-\theta,-\varphi)\\
\frac{\delta U}{\delta z} &= \frac{\delta U}{\delta\rho}Q(-\theta,-\varphi)+\frac{1}{\rho}\frac{\delta U}{\delta\theta}R(-\theta,-\varphi)+\frac{1}{\rho}\frac{\delta U}{\delta\varphi}P(-\theta,-\varphi)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 U}{\delta x^2}-\frac{\delta^2 U}{\delta y\,\delta z} &= P\left(\frac{\delta^2 U}{\delta\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\delta^2 U}{\delta\theta\,\delta\varphi}+\frac{1}{\rho}\frac{\delta U}{\delta\rho}\right)+\\
&+R\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\delta^2 U}{\delta\theta^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\delta^2 U}{\delta\rho\,\delta\varphi}\right)+\\
&+Q\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\delta^2 U}{\delta\varphi^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\delta^2 U}{\delta\rho\,\delta\theta}\right)\\
\frac{\delta^2 U}{\delta y^2}-\frac{\delta^2 U}{\delta z\,\delta x} &= Q\left(\frac{\delta^2 U}{\delta\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\delta^2 U}{\delta\theta\,\delta\varphi}+\frac{1}{\rho}\frac{\delta U}{\delta\rho}\right)+\\
&+P\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\delta^2 U}{\delta\theta^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\delta^2 U}{\delta\rho\,\delta\varphi}\right)+
\end{aligned}$$

$$+ R\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\delta^2 U}{\delta\varphi^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\delta^2 U}{\delta\rho\,\delta\theta}\right)$$

$$\frac{\delta^2 U}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 U}{\delta x\,\delta y} = R\left(\frac{\delta^2 U}{\delta\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\delta^2 U}{\delta\theta\,\delta\varphi} + \frac{1}{\rho}\frac{\delta U}{\delta\rho}\right) +$$

$$+ Q\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\delta^2 U}{\delta\theta^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\delta^2 U}{\delta\rho\,\delta\varphi}\right) +$$

$$+ P\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\delta^2 U}{\delta\varphi^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\delta^2 U}{\delta\rho\,\delta\theta}\right)$$

et enfin

$$\Delta_3 U = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta^2 U}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 U}{\delta y\,\delta z}\right) + \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta^2 U}{\delta y^2} - \frac{\delta^2 U}{\delta x\,\delta z}\right) + \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta^2 U}{\delta z^2} - \frac{\delta^2 U}{\delta x\,\delta j}\right) =$$

$$= \frac{\delta^3 U}{\delta\rho^3} + \frac{1}{\rho^3}\frac{\delta^3 U}{\delta\theta^3} + \frac{1}{\rho^3}\frac{\delta^3 U}{\delta\varphi^3} - \frac{3}{\rho^2}\frac{\delta^3 U}{\delta\rho\,\delta\theta\,\delta\varphi} + \frac{3}{\rho^2}\frac{\delta^2 U}{\delta\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\delta U}{\delta\rho} \qquad (7')$$

Si on fait le changement de variables

$$\begin{array}{lcl} x = e^r\, P\ (\theta,\ \varphi) & & \log\ u = r + \theta + \varphi \\ y = e^r\, Q\ (\theta,\ \varphi) & \text{ou} & \log\ v = r + j\theta + j^2\varphi \\ z = e^r\, R\ (\theta,\ \varphi & & \log\ w = r + j^2\theta + j\varphi \end{array} \qquad (8')$$

on en déduit la relation

$$\Delta_3 U = e^{-3r}\left(\frac{\delta^3 U}{\delta r^3} + \frac{\delta^3 U}{\delta\theta^3} + \frac{\delta^3 U}{\delta\varphi^3} - 3\frac{\delta^3 U}{\delta r\,\delta\theta\,\delta\varphi}\right) = 0$$

3. En différenciant les 3 fonctions d'APPELL (5), on a :

$$\begin{aligned} dP &= R\,d\theta + Q\,d\varphi \\ dQ &= P\,d\theta + R\,d\varphi \\ dR &= Q\,d\theta + P\,d\varphi \end{aligned} \qquad (9)$$

de même, on a, entre ces fonctions, les relations

$$\begin{aligned} P^2(\theta,\ \varphi) - Q\ (\theta,\ \varphi)\ R\ (\theta,\ \varphi &= P\ (-\theta,\ -\varphi) = P^0(\theta,\ \varphi) \\ R^2(\theta,\ \varphi) - P\ (\theta,\ \varphi)\ Q\ (\theta,\ \varphi) &= Q\ (-\theta,\ -\varphi) = Q^0\ (\theta,\ \varphi) \\ Q^2(\theta,\ \varphi) - R\ (\theta,\ \varphi)\ P\ (\theta,\ \varphi) &= R\ (-\theta,\ -\varphi) = R^0\ (\theta,\ \varphi) \end{aligned} \qquad (10)$$

et aussi

$$\begin{aligned} &P\ (\theta + \theta',\ \varphi + \varphi') = \\ &= P\ (\theta, \varphi)\ P\ (\theta', \varphi') + Q\ (\theta, \varphi)\ R\ (\theta', \varphi') + R\ (\theta, \varphi)\ Q\ (\theta', \varphi') \\ &Q\ (\theta + \theta',\ \varphi + \varphi') = \\ &= R\ (\theta, \varphi)\ R\ (\theta', \varphi') + P\ (\theta, \varphi)\ Q\ (\theta', \varphi') + Q\ (\theta, \varphi)\ P\ (\theta', \varphi') \\ &R\ (\theta + \theta',\ \varphi + \varphi') = \\ &= Q\ (\theta, \varphi)\ Q\ (\theta', \varphi') + R\ (\theta, \varphi)\ P\ (\theta', \varphi') + P\ (\theta, \varphi)\ R\ (\theta', \varphi') \end{aligned} \qquad (11)$$

si on prend :

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi' \\ \theta &= \theta' \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} P(2\theta, 2\varphi) &= P^2(\theta, \varphi) + 2Q(\theta, \varphi)R(\theta, \varphi) \\ Q(2\theta, 2\varphi) &= R^2(\theta, \varphi) + 2P(\theta, \varphi)Q(\theta, \varphi) \\ R(2\theta, 2\varphi) &= Q^2(\theta, \varphi) + 2R(\theta, \varphi)P(\theta, \varphi) \end{aligned} \tag{12}$$

On peut en déduire, de proche en proche, les formules d'additions pour trois, quatre couples d'arguments ainsi que les formules de multiplications correspondantes.

Enfin prenons

$$\theta' = -\theta_1 \text{ et } \varphi' = -\varphi_1$$

$$\begin{aligned} &P(\theta - \theta_1, \varphi - \varphi_1) = \\ &= P(\theta, \varphi)\, P(-\theta_1, -\varphi_1) + Q(\theta, \varphi)\, R(-\theta_1, -\varphi_1) + R(\theta, \varphi) \\ &Q(-\theta_1, -\varphi_1) = P(\theta, \varphi)\, P^0(\theta_1, \varphi_1) + Q(\theta, \varphi)\, R^0(\theta_1, \varphi_1) + R(\theta, \varphi)\, Q^0 \\ &\qquad (\theta_1, \varphi_1) \\ &Q(\theta - \theta_1, \varphi - \varphi_1) = \\ &= R(\theta, \varphi)\, R^0(\theta_1, \varphi_1) + P(\theta, \varphi)\, Q^0(\theta_1, \varphi_1) + Q(\theta, \varphi)\, P^0(\theta_1, \varphi_1) \\ &R(\theta - \theta_1)\ \varphi - \varphi_1) = \\ &= Q(\theta, \varphi)\, Q^0(\theta_1, \varphi_1) + R(\theta, \varphi)\, P^0(\theta_1, \varphi_1) + P(\theta, \varphi)\, R^0(\theta_1, \varphi_1) \end{aligned} \tag{13}$$

II. — SUR DES TRANSFORMATIONS AUX TRANSFORMATIONS CONFORMES

4. Dans l'équation de MONGE-AMPÈRE (1) se trouve rattachée l'expression :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2$$

carré de la distance entre deux points voisins. Nous allons voir si la quantité :

$$ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\, dx\ dy\ dz$$

joue un rôle analogue dans le cas actuel Δ_3, $U = 0$.

Effectuons d'abord le changement de variables (3), (7), (8′) on obtient :

$$\begin{aligned} ds^3 &= du\ dv\ dw \\ ds^3 &= d\rho^3 + \rho^3\, d\theta^3 + \rho^3\, d\varphi^3 - 3\rho^2\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \\ ds^3 &= e^{3r}\,(d\rho^3 + d\theta^3 + d\varphi^3 - 3\, d\rho\, d\theta\, d\varphi) \end{aligned} \tag{14}$$

on voit que le changement de variables (7) joue par rapport à l'expression ds^3 le même rôle que le passage en coordonnées polaires pour l'expression ds^2.

5. Soient $f(z) = X + iY = f(x + iy)$, on considère la transformation

$$\begin{aligned} X &= X(x, y) \\ Y &= Y(x, y) \end{aligned} \tag{15}$$

On peut imaginer 2 figures : un point « *m* » décrit les courbes tracées dans le plan *yox*. En vertu des formules (15), il y aura une correspondance entre ces courbes et deux autres courbes tracées dans le plan Y*o*X. On a :

$$dX = \frac{\delta X}{\delta x} dx + \frac{\delta X}{\delta y} dy$$

$$dY = \frac{\delta Y}{\delta x} dx + \frac{\delta Y}{\delta y} dy$$

Élevons au carré et ajoutons

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = \left[\left(\frac{\delta X}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{\delta x}\right)^2\right] dx^2 + 2\left(\frac{\delta X}{\delta x}\frac{\delta X}{\delta y} + \frac{\delta Y}{\delta x}\frac{\delta Y}{\delta y}\right) dx\, dy + $$
$$+ \left[\left(\frac{\delta X}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{\delta y}\right)^2\right] dy^2$$

Or les fonctions X et Y sont harmoniques. Dans ces conditions on a :

$$\frac{\delta X}{\delta x} = \frac{\delta Y}{\delta y} \qquad \frac{\delta X}{\delta y} = -\frac{\delta Y}{\delta x} \qquad \text{(Cauchy)}$$

on a donc $ds^2 = \varphi(x, y)\, ds^2$ ou $ds = \varphi(x, y)\, ds$.

6. Existe-t-il un ou plusieurs changements de variables ?

$$\begin{aligned} X &= X(x, y, z) \\ Y &= Y(x, y, z) \\ Z &= Z(x, y, z) \end{aligned}$$

tels que l'on ait l'identité

$$ds^3 = dX^3 + dY^3 + dZ^3 - 3\, dX\, dY\, dZ = \lambda(x, y, z)\, ds^3$$

où $\lambda(x, y, z)$. C'est une fonction de x, y et z.

Avec la simplicité de l'expression $ds^3 = du\, dv\, dw$ on peut raisonner en variables u, v et w et résoudre le problème suivant : quels sont les changements de variables

$$\begin{aligned} u' &= u'(u, v, w) \\ v' &= v'(u, v, w) \\ w' &= w'(u, v, w) \end{aligned}$$

tels que l'on ait

$$du'\, dv'\, dw' = A(u, v, w)\, du\, dv\, dw$$

et comme

$$\begin{aligned}
du' &= \frac{\delta u'}{\delta u} du + \frac{du'}{\delta v} dv + \frac{\delta u'}{\delta w} dw \\
dv' &= \frac{\delta v'}{\delta u} du + \frac{\delta v'}{\delta v} dv + \frac{\delta v'}{\delta w} dw \\
dw' &= \frac{\delta w'}{\delta u} du + \frac{\delta w'}{\delta v} dv + \frac{\delta w'}{\delta w} dw
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
du'\,dv'\,dw' = {} & \frac{\delta u'}{\delta u}\frac{\delta v'}{\delta u}\frac{\delta w'}{\delta u} du^3 + \frac{\delta u'}{\delta v}\frac{\delta v'}{\delta v}\frac{\delta w'}{\delta v} dv^3 + \frac{\delta u'}{\delta w}\frac{\delta v'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta w} dw^3 + \\
+ du\,dv\,dw & \left(\frac{\delta v'}{\delta v}\frac{\delta u'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta u} + \frac{\delta u'}{\delta v}\frac{\delta v'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta u} + \frac{\delta u'}{\delta w}\frac{\delta v'}{\delta u}\frac{\delta w'}{\delta v} + \frac{\delta u'}{\delta u}\frac{\delta v'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta v} + \right. \\
& \left. + \frac{\delta u'}{\delta u}\frac{\delta v'}{\delta v}\frac{\delta w'}{\delta w} + \frac{\delta v'}{\delta u}\frac{\delta u'}{\delta v}\frac{\delta w'}{\delta w} + \right) \\
+ du\,dv^2 & \left(\frac{\delta u'}{\delta v}\frac{\delta v'}{\delta v}\frac{\delta w'}{\delta u} + \frac{\delta u'}{\delta u}\frac{\delta v'}{\delta v}\frac{\delta w'}{\delta v} + \frac{\delta u'}{\delta u}\frac{\delta u'}{\delta v}\frac{\delta w'}{\delta v} \right) + \\
+ du\,dw^2 & \left(\frac{\delta u'}{\delta w}\frac{\delta v'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta u} + \frac{\delta u'}{\delta w}\frac{\delta v'}{\delta u}\frac{\delta w'}{\delta w} + \frac{\delta u'}{\delta u}\frac{\delta v'}{\delta v}\frac{\delta w'}{\delta w} \right) + \\
+ dv\,du^2 & \left(\frac{\delta u'}{\delta u}\frac{\delta v'}{\delta v}\frac{\delta w'}{\delta u} + \frac{\delta v'}{\delta u}\frac{\delta u'}{\delta v}\frac{\delta w'}{\delta u} + \frac{\delta u'}{\delta u}\frac{\delta v'}{\delta u}\frac{dw'}{\delta v} \right) + \\
+ dv\,dw^2 & \left(\frac{\delta u'}{\delta w}\frac{\delta v'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta v} + \frac{\delta u'}{\delta v}\frac{\delta u'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta w} + \frac{\delta u'}{\delta v}\frac{\delta v'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta w} \right) + \\
+ du^2\,dw & \left(\frac{\delta u'}{\delta w}\frac{\delta v'}{\delta u}\frac{\delta w'}{\delta u} + \frac{\delta u'}{\delta u}\frac{\delta v'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta u} + \frac{\delta u'}{\delta u}\frac{\delta v'}{\delta u}\frac{\delta w'}{\delta w} \right) + \\
+ dw\,dv^2 & \left(\frac{\delta u'}{\delta v}\frac{\delta v'}{\delta v}\frac{\delta w'}{\delta w} + \frac{\delta v'}{\delta v}\frac{\delta u'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta v} + \frac{\delta u'}{\delta v}\frac{\delta v'}{\delta w}\frac{\delta w'}{\delta v} \right)
\end{aligned}$$

En identifiant les termes du^3..., on est conduit à énoncer que les fonctions u', v', w' sont des fonctions d'une seule des variables u, v, w.

7. Élargissons la question pour voir ce que deviennent les conditions précédentes en variables x, y, z.

Si on fait toutes les combinaisons possibles des variables $u\ v\ w$, on obtient les six cas suivants où nous avons posé

$$\begin{aligned}
u &= x + y + z & \qquad u' &= X + Y + Z \\
v &= x + jy + j^2 z & \qquad v' &= X + JY + J^2 Z \\
w &= x + j^2 y + jz & \qquad w' &= X + J^2 Y + JZ
\end{aligned}$$

$$(1, 2, 3)\ S_1 \left\{ \begin{aligned}
\frac{\delta X}{\delta x} &= \frac{\delta Y}{\delta y} = \frac{\delta Z}{\delta z} \\
\frac{\delta X}{\delta z} &= \frac{\delta Y}{\delta x} = \frac{\delta Z}{\delta y} \\
\frac{\delta X}{\delta y} &= \frac{\delta Y}{\delta z} = \frac{\delta Z}{\delta x}
\end{aligned} \right.$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
(2,\,3,\,1)\ S_2 & \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\delta X}{\delta x} = j^2 \dfrac{\delta Y}{\delta y} = j \dfrac{\delta Z}{\delta z} \\[2mm]
\dfrac{\delta X}{\delta z} = j^2 \dfrac{\delta Y}{\delta x} = j \dfrac{\delta Z}{\delta y} \\[2mm]
\dfrac{\delta X}{\delta y} = j^2 \dfrac{\delta Y}{\delta z} = j \dfrac{\delta Z}{\delta x}
\end{array}\right. \\[8mm]
(3,\,1,\,2)\ S_3 & \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\delta X}{\delta x} = j \dfrac{\delta Y}{\delta y} = j^2 \dfrac{\delta Z}{\delta z} \\[2mm]
\dfrac{\delta X}{\delta z} = j \dfrac{\delta Y}{\delta x} = j^2 \dfrac{\delta Z}{\delta y} \\[2mm]
\dfrac{\delta X}{\delta y} = j \dfrac{\delta Y}{\delta z} = j^2 \dfrac{\delta Z}{\delta x}
\end{array}\right. \\[8mm]
(3,\,2,\,1)\ S_4 & \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\delta X}{\delta x} = j \dfrac{\delta Z}{\delta y} = j^2 \dfrac{\delta Y}{\delta z} \\[2mm]
\dfrac{\delta X}{\delta z} = j \dfrac{\delta Z}{\delta x} = j^2 \dfrac{\delta Y}{\delta x} \\[2mm]
\dfrac{\delta X}{\delta y} = j \dfrac{\delta Z}{\delta z} = j^2 \dfrac{\delta Y}{\delta x}
\end{array}\right. \\[8mm]
(2,\,1,\,3)\ S_5 & \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\delta X}{\delta x} = j^2 \dfrac{\delta Z}{\delta y} = j \dfrac{\delta Y}{\delta z} \\[2mm]
\dfrac{\delta X}{\delta z} = j^2 \dfrac{\delta Z}{\delta x} = j \dfrac{\delta Y}{\delta y} \\[2mm]
\dfrac{\delta X}{\delta y} = j^2 \dfrac{\delta Z}{\delta z} = j \dfrac{\delta Y}{\delta x}
\end{array}\right. \\[8mm]
(1,\,3,\,2)\ S_6 & \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\delta X}{\delta x} = \dfrac{\delta Z}{\delta y} = \dfrac{\delta Y}{\delta z} \\[2mm]
\dfrac{\delta X}{\delta z} = \dfrac{\delta Z}{\delta x} = \dfrac{\delta Y}{\delta y} \\[2mm]
\dfrac{\delta Y}{\delta y} = \dfrac{\delta Z}{\delta z} = \dfrac{\delta Y}{\delta x}
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (16)
$$

Ces systèmes d'équations généralisent les systèmes de Cauchy dans l'étude des fonctions analytiques.

On a toujours

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \left(\frac{\delta X}{\delta x}\right)^3 + \left(\frac{\delta X}{\delta y}\right)^3 + \left(\frac{\delta X}{\delta z}\right)^3 - 3\,\frac{\delta X}{\delta x}\,\frac{\delta Y}{\delta y}\,\frac{\delta Z}{\delta z} = \\
&= \left(\frac{\delta Y}{\delta x}\right)^3 + \left(\frac{\delta Y}{\delta y}\right)^3 + \left(\frac{\delta Y}{\delta z}\right)^3 - 3\,\frac{\delta Y}{\delta x}\,\frac{\delta Y}{\delta y}\,\frac{\delta Y}{\delta z} = \\
&= \left(\frac{\delta Z}{\delta x}\right)^3 + \left(\frac{\delta Z}{\delta y}\right)^3 + \left(\frac{\delta Z}{\delta z}\right)^3 - 3\,\frac{\delta Z}{\delta x}\,\frac{\delta Z}{\delta y}\,\frac{\delta Z}{\delta z}
\end{aligned}
$$

8. Soient en effet $d\ \delta\ \theta$ trois symboles de différenciations. On voit que si XYZ sont trois intégrales d'un des systèmes (s), on peut écrire

$$\begin{vmatrix} dX & dY & dZ \\ \delta Z & \delta X & \delta Y \\ \theta Y & \theta Z & \theta X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\delta X}{\delta x} & \frac{\delta X}{\delta y} & \frac{\delta X}{\delta z} \\ \frac{\delta X}{\delta z} & \frac{\delta X}{\delta x} & \frac{\delta X}{\delta y} \\ \frac{\delta X}{\delta y} & \frac{\delta X}{\delta z} & \frac{\delta X}{\delta x} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \delta z & \delta x & \delta y \\ \theta y & \theta z & \theta x \end{vmatrix} \qquad (17)$$

On déduit de cette expression que les transformations (23) conservent à la fois l'expression ds^2 et ses formes polaires :

$$dX\,[\delta X^2 - \delta Y\,\delta Z] + dY\,[\delta Y^2 - \delta Z\,\delta X] + dZ\,[\delta Z^2 - \delta X\,\delta Y] \qquad (18)$$

$$\begin{aligned} &dX\,[2\,\delta X\theta X - \delta Y\theta Z - \theta Y\,\delta Z] \\ +\,&dY\,[2\,\delta Y\theta Y - \delta Z\theta X - \theta Z\,\delta X] \\ +\,&dZ\,[2\,\delta Z\theta Z - \delta X\theta Y - \theta X\,\delta Y] \end{aligned} \qquad (19)$$

les expressions

$$\frac{S\,dx\,(\delta x^2 - \delta y\,\delta z)}{dS\,(\delta S)^2} \qquad \frac{S\,dx\,[2\,\delta x\theta x - \delta y\theta z - \theta y\,\delta x]}{dS\,\delta S\theta S} \qquad (19')$$

sont aussi invariantes pour les transformations considérées. C'est une propriété analogue à l'invariance de l'expression :

$$\frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}$$

Remarque 1. — Si X, Y, Z étant intégrales de l'un des systèmes (S) on a

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ \frac{\delta}{\delta z} & \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} & \frac{\delta}{\delta x} \end{vmatrix} U = \begin{vmatrix} \frac{\delta X}{\delta x} & \frac{\delta X}{\delta y} & \frac{\delta X}{\delta z} \\ \frac{\delta X}{\delta z} & \frac{\delta X}{\delta x} & \frac{\delta X}{\delta y} \\ \frac{\delta X}{\delta y} & \frac{\delta X}{\delta z} & \frac{\delta X}{\delta x} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\delta}{\delta X} & \frac{\delta}{\delta Y} & \frac{\delta}{\delta Z} \\ \frac{\delta}{\delta Z} & \frac{\delta}{\delta X} & \frac{\delta}{\delta Y} \\ \frac{\delta}{\delta Y} & \frac{\delta}{\delta Z} & \frac{\delta}{\delta X} \end{vmatrix} U$$

Remarque 2. — Les propriétés d'invariance appartiennent aussi à l'expression :

$$\begin{aligned} d\,6^3 = {} & (dy\,\delta z - dz\,\delta y)^3 + (dz\,\delta x - dx\,\delta z)^3 + (dx\,\delta y - dy\,\delta x)^3 \\ & - 3\,(dy\,\delta z - dz\,\delta y)\,(dz\,\delta x - dx\,\delta z)\,(dx\,\delta y - dy\,\delta z) \end{aligned} \qquad (20)$$

si on pose

$$\begin{aligned} x &= \rho P\ (\theta,\ \varphi) \\ y &= \rho Q\ (\theta,\ \varphi) \\ z &= \rho R\ (\theta,\ \varphi), \end{aligned}$$

on obtient :

$$d\,6^3 = \rho^6 (d\theta\, \delta\varphi - d\varphi\, \delta\theta) + \rho^3 (d\varphi\, \delta\rho - d\rho\, \delta\varphi) + \rho^3 (d\rho\, \delta\theta - d\theta\, \delta\rho)$$
$$- 2\, \rho^4 (d\theta\, \delta\varphi - d\varphi\, \delta\theta)(d\varphi\, \delta\rho - d\rho\, \delta\varphi)(d\rho\, \delta\theta - d\theta\, \delta\rho) -$$

III. — COMPARAISON AVEC LES FONCTIONS HARMONIQUES

8. On sait que les permutations des lettres x, y, z, laissent invariant $\Delta_3 U$ c'est-à-dire géométriquement que la droite $x = y = z$ joue le rôle d'un axe de répétition d'ordre 3.

Faisons donc un changement d'axes tels que les nouveaux $o\zeta$ étant portés par la droite $x = y = z$.

Nous pouvons prendre [2]

$$\begin{aligned} \xi &= (x + y - 2z)\frac{\sin\alpha}{2} = R\cos\varpi \\ \eta &= (y - x)\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = R\sin\varpi \\ \zeta &= (x + y + z)\cos\alpha \end{aligned} \qquad (20')$$

Écrivons la première et la dernière

$$(x + y)\frac{1}{2} - z = \frac{\xi}{\sin\alpha}$$
$$x + y + z = \frac{\zeta}{\cos\alpha}$$

d'où, en additionnant

$$x + y = \frac{2}{3}\left(\frac{\xi}{\sin\alpha} + \frac{\zeta}{\cos\alpha}\right)$$

de la deuxième on tire

$$x - y = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\eta}{\sin\alpha}$$

Nous pouvons calculer très aisément

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{3\sin\alpha} - \frac{\eta}{\sqrt{3}\sin\alpha} + \frac{\zeta}{3\cos\alpha} \\ y &= \frac{\xi}{3\sin\alpha} + \frac{\eta}{\sqrt{3}\sin\alpha} + \frac{\zeta}{3\cos\alpha} \\ z &= -\frac{2\xi}{3\sin\alpha} + \frac{\zeta}{3\cos\alpha} \end{aligned} \qquad (20'')$$

Nous allons interpréter les fonctions P (θ, φ), Q (θ, φ) et R $(\theta, \varphi$ dans ce système de coordonnées.

D'après les formules 5 et 7 :

$$\xi = \rho \frac{\sin\alpha}{2}$$

$$\frac{e^{\theta+\varphi} + e^{j\theta+j^2\varphi} + e^{j^2\theta+j\varphi} + e^{\theta+\varphi} + j^2 e^{j\theta+j^2\varphi} + j e^{j^2\theta+j\varphi} - 2e^{\theta+\varphi} - 2j e^{j\theta+j^2\varphi} - 2j^2 e^{j^2\theta+j\varphi}}{3}$$

$$\xi = \rho \frac{\sin\alpha}{2} \frac{e^{j\theta+j^2\varphi}(1+j^2-2j) + e^{j^2\theta+j\varphi}(1+j-2j^2)}{}$$

et comme

$$1 + j^2 = -j$$
$$1 + j \;= -j^2$$

$$\xi = -\rho \frac{\sin\alpha}{2} \frac{j e^{j\theta+j^2\varphi} + j^2 e^{j^2\theta+j\varphi}}{}$$

$$\eta = \rho \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\alpha \frac{e^{\theta+\varphi} + j^2 e^{j\theta+j^2\varphi} + j e^{j^2\theta+j\varphi} - e^{j\theta+j^2\varphi} - e^{j^2\theta+j\varphi} - e^{\theta+\varphi}}{3}$$

$$\eta = -\frac{\rho \sin \sin\alpha}{2\sqrt{3}} \frac{(1-j^2) e^{j\theta+j^2\varphi} + (1-j) e^{j^2\theta+j\varphi}}{}$$

$$\zeta = \rho\cos\alpha \frac{3e^{\theta+\varphi} + (1+j+j^2) e^{j\theta+j^2\varphi} + (1+j+j^2) e^{j^2\theta+j\varphi}}{3}$$

$\zeta = \rho\cos\alpha\, e^{\theta+\varphi}$ parce que $1 + j + j^2 = 0$

tirons R et ϖ de ces formules ; il revient :

$$R^2 = \xi^2 + b^2 = \frac{\rho^2 \sin\alpha}{4}\left(j^2 e^{2(j\theta+j^2\varphi)} + j^4 e^{2(j^2\theta+j\varphi)} + 2j^3 e^{\theta(j+j^2)+\varphi(j+\varphi)}\right) +$$

$$+\frac{\rho^2\sin^2\alpha}{12}\left((1+j^4-2j^2) e^{2(j\theta+j^2\varphi)} + (1+j^2-2j) e^{2(j^2\theta+j\varphi)} + 2(1-j^2-j+j^3) e^{-(\theta+\varphi)}\right) =$$

$$= \frac{\rho^2\sin^2\alpha}{12}$$

$$[(3j^2+1+j^4-2j^2) e^{2(j\theta+j^2\varphi)} + (3j^4+1+j^2-2j) e^{2(j^2\theta+j\varphi)} + (8j^2+2-2j^2-2j) e^{-(\theta+\varphi)}]$$

et comme :

$$1 + j^2 + j^4 = 0 \text{ et } j^4 = j$$
$$8j^3 + 2 - 2(j^2 + j) = 12$$
$$R^2 = \rho^2 \sin^2 \alpha e^{-(\theta+\varphi)} \qquad (21)$$

$$\operatorname{tg} w = \frac{\eta}{\xi} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(j^3-1) e^{j\theta+j^2\varphi} + (j-1) e^{j^2\theta+j\varphi}}{j e^{j\theta+j^2\varphi} + j^2 e^{j^2\theta+j\varphi}}$$

et comme $j^4 = j$

$$\operatorname{tg} w = -\frac{(j-1)}{\sqrt{3}\, j^2} \frac{(j+1) e^{j\theta+j^2\varphi} + e^{j^2\theta+j\varphi}}{j^2 e^{j\theta+j^2\varphi} + e^{j^2\theta+j\varphi}}$$

ou encore $j+1=-j^2$

$$\operatorname{tg} w = + \frac{(j-1)}{\sqrt{3}\, j^2} \, \frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{\theta(j-j^2)+\varphi(j-j^2)}-1}{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{\theta(j-j^2)-\varphi(j-j^2)}+1}$$

et comme

$$j-1=\frac{i\sqrt{3}}{2}+\frac{i^2(\sqrt{3})^2}{2} \quad \text{et} \quad j^2 = i^2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

on a

$$\operatorname{tg} w = \frac{1}{i}\, \frac{e^{i\left[\sqrt{3}(\theta-\varphi)+\frac{4\pi}{3}\right]}-1}{e^{i\left[\sqrt{3}(\theta-\varphi)+\frac{4\pi}{3}\right]}+1}$$

d'où

$$w=\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)+\frac{2\pi}{3}+k\pi \tag{22}$$

Dans l'expression (21) si on fait $\theta+\varphi=$ constante on trouve des cônes de révolution d'axe $o\zeta$.

De même, si dans l'expression (22) on fait $\theta-\varphi=$ constante on trouve des plans.

On peut trouver les expressions $\theta+\varphi$,$\theta-\varphi$ en exprimant P (θ, φ), Q (θ, φ) et R (θ, φ) en fonction des lignes trigonométriques, on a d'abord :

$$e^{j\theta+j^2\varphi}=e^{\theta\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)-\varphi\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)}$$

$$e^{j^2\theta+j\varphi}=e^{-\theta\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\varphi\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}=e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)}$$

donc, on a :

$$P(\theta,\varphi)=\frac{e^{\theta+\varphi}+e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)}+e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)}}{3}=$$

$$=\frac{e^{\theta+\varphi}+2e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)}\left(\dfrac{e^{+i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)}+e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)}}{2}\right)}{3}$$

$$Q(\theta,\varphi)=\frac{e^{\theta+\varphi}-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{j\theta+j^2\varphi}+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)e^{j^2\theta+j\varphi}}{3}=$$

$$=\frac{e^{\theta+\varphi}-2e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{3}\right)}\left(\dfrac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)}+e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)}}{2}\right)}{3}$$

$$R(\theta, \varphi) = \\
= \frac{e^{\theta+\varphi} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)} - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi}}{3} = \\
= \frac{e^{\theta+\varphi} - 2e^{-\frac{\theta+\varphi}{2}} \left(\frac{e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi) + \frac{2i\pi}{3}} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi) - \frac{2i\pi}{3}}}{2}\right)}{3}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
P(\theta, \varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + 2e^{-(\theta+\varphi)} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)\right]}{3} \\
Q(\theta, \varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + 2e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi) + \frac{4\pi}{3}\right]}{3} \qquad (23) \\
R(\theta, \varphi) &= \frac{e^{\theta+\varphi} + 2e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi) + \frac{2\pi}{3}\right]}{3}
\end{aligned}$$

ce sont les formules données par APPELL.

9. De même que :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (24)$$

$$\Delta_2 Z = r + t = 0 \qquad (25)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (26)$$

sont des cas particuliers de l'espace généralisé [1],

$$ds^2 = g_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad (24')$$

$$\Delta_2 Z = K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D \qquad (25')$$

$$r^2 = g''_{ij}\, x_i\, x_j \qquad (26')$$

existe un espace plus général sous la forme :

$$ds^3 = g_{ijk}\, dx_i\, dx_j\, dx_k \qquad (24'')$$

$$\Delta^3 U = g'_{ijk} \frac{\delta^3 U}{\delta x_i\, \delta x_j\, \delta x_k} \qquad (25'')$$

$$r^3 = g''_{ijk}\, x_i\, x_j\, x_k \qquad (26'')$$

[1] Voir mon ouvrage *Sur la métrique angulaire des espaces de Riemann* (Téhéran, 1938 .

que dans le cas tout à fait simple donne l'espace attaché à l'équation de M. P. HUMBERT en prenant

$$\begin{array}{ll} x_i = x & g_{111} = g_{222} = g_{333} = 1 \\ x_j = y & g_{221} = g_{112} = g_{331} = g_{122} \dots = 0 \\ x_k = z & g_{231} = g_{123} = g_{312} = -1 \\ & g_{132} = g_{213} = g_{312} = 0 \end{array}$$

on obtient

$$ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\,dx\,dy\,dz \qquad (24''')$$

$$\Delta_3 U = \frac{\delta^3 U}{\delta x^3} + \frac{\delta^3 U}{\delta y^3} + \frac{\delta^3 U}{\delta z^3} - 3\frac{\delta^3 U}{\delta x\,\delta y\,\delta z} \qquad (25''')$$

$$r^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz \qquad (26''')$$

On voit que, dans le cas actuel, les expressions (24''') (25''') (26''') et les 3 fonctions P (θ, φ), Q (θ, φ) et R (θ, φ) jouent le même rôle que les expressions (24), (25), (26) et les 2 fonctions cos θ, sin θ.

Ces fonctions P (θ, φ), Q (θ, φ) et R (θ, φ) satisfont aux équations différentielles (9) qui suffisent à les caractériser si l'on ajoute ces conditions que

$$P(0,0) = 1 \qquad Q(0,0) = 0 \qquad R(0,0) = 0 \qquad (27)$$

et qui sont analogues aux équations différentielles les fonctions

$$\begin{aligned} S &= \sin x \\ C &= \cos x \end{aligned}$$

avec les conditions

$$\left.\begin{aligned} dC &= |S\,dx| \\ dS &= |C\,dx| \\ C(0) &= 1 \\ S(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Les propriétés des fonctions (P (θ, φ), Q (θ, φ) et R (θ, φ) permettent d'imaginer un calcul de quantités complexes dans l'espace, dans lequel le produit des deux quantités représentées par les points

$$M \left\{\begin{aligned} x &= \rho P\ (\theta,\ \varphi) \\ y &= \rho Q\ (\theta,\ \varphi) \\ z &= \rho R\ (\theta,\ \varphi) \end{aligned}\right.$$

$$M' \left\{\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 P\ (\theta_1,\ \varphi_1) \\ y_1 &= \rho_1 Q\ (\theta_1,\ \varphi_1) \\ z_1 &= \rho_1 R\ (\theta_1,\ \varphi_1) \end{aligned}\right.$$

serait la quantité représentée par le point ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned} X &= \rho\rho_1 \, P \; (\theta + \theta_1, \; \varphi + \varphi_1) \\ Y &= \rho\rho_1 \, Q \; (\theta + \theta_1, \; \varphi + \varphi_1) \\ Z &= \rho\rho_1 \, R \; (\theta + \theta_1, \; \varphi + \varphi_1) \end{aligned}$$

10. **Remarque 1.** — $ds^2 = g_{ij} \, dx_i \, dx_j$ est la forme quadrique fondamentale, c'est d'elle que procèdent la géométrie métrique et la gravitation.

Remarque 2. — $r^2 = g_{ij} \, x_i \, x_j$ c'est la distance de deux points dans l'espace à n dimensions.

Remarque 3. — L'équation $K \, (rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D = 0$ que nous dirons être du type Bückland en laquelle chacun des coefficients K, A, B, C, D est d'abord considéré comme une fonction absolument quelconque de x, y, z, p, q.

Il y a des équations de Monge-Ampère des surfaces qui admettent les intégrales intermédiaires.

Comme l'équation de Monge-Ampère, des surfaces dont le réseau des lignes de courbure toujours orthogonal sur la surface donne, aussi par projection sur oxy un réseau plan orthogonal.

Cette équation admet l'intégrale intermédiaire $p^2 + q^2 = f \; (z)$ $p^2 - q^2) \; s - pq \; (r - t) = 0$.

Et l'équation $rt - s^2 = 0$ qui admet également $p = f \; (q)$ comme intégrale intermédiaire.

Et l'équation $r + t = 0$ qui n'admet pas l'intégrale intermédiaire.

Remarque 4. — Les expressions (9) et (27) nous conduisent à étudier les n fonctions y_1, $y_2 \ldots y_n$ des $(n - 1)$ variables indépendantes x_1, $x_2 \ldots x_{n-1}$ définies par le système suivant d'équations différentielles.

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 \, dx_1 + y_3 \, dx_2 \ldots + y_n \, dx_{n-1} \\ dy_2 &= y_3 \, dx_1 + y_4 \, dx_2 \ldots + y_1 \, dx_{n-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dy_n &= y_1 \, dx_1 + y_2 \, dx_2 \ldots + y_{n-1} \, dx_{n-1} \end{aligned} \tag{29}$$

avec les conditions, qui achèvent de déterminer les fonctions de façon que toutes s'annulent pour

$$x = x_2 \ldots x_{n-1} = 0$$

sauf une d'entre elles, y_1 qui devient égale à l'unité.

Il résulte des équations (76) que chacune des fonctions « y » satisfait aux relations suivantes

$$\frac{\delta^n y}{\delta x^n{}_1} = \frac{\delta^n y}{\delta^n x_2} \dots = \frac{\delta^n y}{\delta x} = y$$

Ces fonctions liées par la relation algébrique :

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_{n-1} \\ y_n & y_1 & y_{n-2} \\ y_{n-1} & y_n & y_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (30)$$

analogue à la relation

$$\begin{vmatrix} C & S \\ -S & C \end{vmatrix} = 1$$

qui lie les fonctions C et S.

Les valeurs z_1, $z_2 \dots z_n$ de ces fonctions relatives aux valeurs $x_1 + x'_1$, $x^2 + x'_2 \dots x_{n-1} + x'_{n-1} \dots$ des variables s'expriment algébriquement d'une manière simple, en fonction des valeurs $y_1, y_2 \dots y_n$ correspondant aux valeurs x_1, $x_2 \dots x_{n-1}$ des variables et des valeurs $y'_1, y'_2 \dots y'_{n-1}$ correspondant à x'_1, $x'_2 — x'_{-n1}$, on a :

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 y'_1 + y_2 y'_n + y_3 y'_{n-1} \dots \; y_n y'_2 \\ z_2 &= y_1 y'_2 + y_2 y'_1 + y_3 y'_n \qquad y_n y'_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n &= y_1 y'_n + y_2 y'_{n-1} + y_3 y'_{n-2} \quad + y_n y'_1 \end{aligned}$$

Toutes ces propriétés peuvent se démontrer sur les équations différentielles (29) ou au moyen des expressions des fonctions y, en sommes d'exponentielles obtenues de la façon suivante ; soit « α » une racine de l'équation $u^n = 1$.

Multiplions les deux membres de la 2e des équations (29) par α ceux de la 3e par α^2 et ainsi de suite, ceux de la dernière par α_{n-1} et ajoutons membre à membre, nous aurons :

$$\begin{gathered} d(y_1 + \alpha y_2 \dots + \alpha^{n-1} y_n) = \\ = (y_1 + \alpha y_2 \dots + \alpha^{n-1} y_n)\, d(\alpha^{n-1} x + \alpha^{n-2} x_2 \dots dx_{n-1}) \end{gathered}$$

d'où

$$y_1 + \alpha y_2 + \dots + \alpha^{n-1} y_n = e^{\alpha^{n-1} x_1 + \alpha^{n-2} x_2 \qquad + \alpha x_{n-1}}$$

Si l'on remplace α successivement par les autres racines α_2, α_3, α_{n-1}, α_i étant égale à α^i et α une racine primitive, on a :

$$\begin{array}{llll}
y_1 + \alpha y_2 + \ldots + \alpha^{n-1} y_n & = e^{\alpha^{n-1} x_1 + \alpha^{n-2} x_2} & + \alpha x_{n-1} & \\
y_1 + \alpha_2 y_2 \qquad + \alpha^{n-1}{}_2 y_n & = e^{\alpha^{n-1}{}_2 x_1 + + \alpha^{n-2}{}_2 x_2 + \alpha_2 x_{n-1}} & & \\
y_1 + \alpha_3 y_2 \qquad + \alpha^{n-1}{}_3 y_n & = e^{\alpha^{n-1}{}_3 x_1 + \alpha^{n-2}{}_3 x_2} & + \alpha_3 x_{n-1} & (31) \\
\ldots & & & \\
\ldots & & & \\
y_1 + y_2 \qquad + y_n & = e^{x_1 + x_2} & + x_{n-1} &
\end{array}$$

En multipliant, membre à membre, toutes ces équations et remarquant que le produit des seconds membres est égal à l'unité, on obtient la relation algébrique (30).

Les expressions précédentes des fonctions « y » permettent de démontrer qu'elles possèdent $(n - 1)$ groupes de périodes conjuguées.

Considérons à cet effet, les fonctions des variables qui entrent en exposants dans les seconds membres des relations (31) et posons

$$\alpha^{n-1}{}_k \alpha_1 + \alpha^{n-2}{}_k x_2 \qquad + \alpha_k x_{n-1} = \varphi_k$$

les n équations

$$\varphi_1 = 0 \qquad \varphi_2 = 0 \qquad \varphi_k = 2\pi i \qquad \varphi_{n-1} = 0 \qquad \varphi_n = -2\pi i$$

(où l'on considère comme inconnues $x_1\ x_2\ x_{n-1}$) sont compatibles car on a identiquement

$$\varphi_1 + \varphi_2 \quad - \quad + \varphi_n = 0$$

On peut donc les réduire aux $n - 1$ premières.

Soient

$$\xi_{1k} \qquad \xi_{2k} \qquad \xi_{n-1k}$$

Les valeurs de x_1, x_2, x_{n-1} tirées de ces équations ; ces valeurs forment évidemment un groupe de périodes conjuguées, comme l'indice k qui marque le rang de la fonction φ_1 qu'on égale à $2\pi i$, pent prendre toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à $(n - 1)$, il y a $(n - 1)$ groupes distincts de périodes conjuguées. Il est aisé de s'assurer que, si l'on forme un tableau de ces périodes en écrivant dans une ligne horizontale, les périodes d'un même groupe et dans une ligne verticale les périodes correspondant à une même variable, on obtient un déterminant symétrique.

Ce préliminaire nous amènera, au chapitre suivant, à introduire un espace où la nouvelle notion d'angle sera défini à partir de la première des expressions (12) et la distance de deux points par la racine cubique de l'expression (24''').

Chapitre II

11. **Définition.** — Soient deux points infiniment voisins M (x, y, z) et M′ $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ [3].

Nous appellerons distance entre ces deux points la quantité

$$dS = \sqrt[3]{dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\, dx\, dy\, dz}$$

Si nous cherchons le plus court chemin entre les deux points M et M, l'intégrale S qui fait connaître la distance MM′ mesurée le long d'un arc de courbe quelconque, s'écrit :

$$S = \int_{MM'} \sqrt{1 + y'^3 + z'^3 - 3\, y'\, z'}\, dx$$

l'équation principale nous fournit le système d'équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = a \qquad \frac{dz}{dx} = b$$

où, a et b sont deux constantes. En intégrant, on a :

$$\begin{aligned} y - y_0 &= a\ (x - x_0) \\ z - z_0 &= b\ (x - x_0) \end{aligned}$$

où

$$\frac{y - y_0}{a} = \frac{z - z_0}{b} = \frac{x - x_0}{1}$$

Les équations générales de ces courbes s'écrivent :

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \tag{32}$$

où x_0, y_0, z_0, α, β, γ sont des constantes qu'on déterminera en écrivant que la courbe passe par deux points M et M′. Nous leurs réserverons le nom des droites.

Théorème. — Le lieu du point M, dont les coordonnées x, y, z, vérifient un système de deux équations distinctes du premier degré est une droite. En effet, supposons d'abord que ce système soit de la forme :

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \tag{32'}$$

$x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$ étant des constantes, ces constantes définissent deux points M (x_0, y_0, z_0) M' (α, β, γ) et par suite une droite Δ menée par M parallèlement à Δ' M. D'après ce qui précède, cette droite (Δ) est bien le lieu des points M dont les coordonnées satisfont aux équations (32).

Supposons maintenant que ce système soit formé de deux équations quelconques du premier degré

$$\begin{aligned} Ax + By + cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + c'z + D' &= 0 \end{aligned} \qquad (33)$$

Ces équations étant distinctes, on peut les résoudre par rapport à deux des coordonnées z, y par exemple et par conséquent mettre le système sous la forme

$$\begin{aligned} z &= mx + h \\ y &= nx + k \end{aligned} \qquad (33')$$

ou enfin, en vertu de la convention des proportions :

$$\frac{z-h}{m} = \frac{y-k}{n} = \frac{x-v}{1}$$

On retrouve, ainsi deux équations de la forme (32) et le théorème est démontré.

Condition de parallélisme de deux droites. — Soient Δ et Δ' deux droites d'équations

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$$
$$\frac{x-x'_0}{\alpha'} = \frac{y-y'_0}{\beta'} = \frac{z-z'_0}{\gamma'}$$

Considérons les parallèles δ et δ' menées par l'origine. Le premier δ passe par l'origine dont les coordonnées sont toutes nulles. La direction est définie par le même point M (α, β, γ) que Δ. Ces équations sont donc :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

Cela étant, pour que Δ et Δ' soient parallèles, il faut et il suffit que δ et δ' soient confondus ou encore que le point M'_1 $(\alpha'\ \beta'\ \gamma')$ soit sur δ, d'où les conditions cherchées :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

En langage ordinaire, pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que leurs coefficients directeurs soient proportionnels.

Les équations générales des droites issues de l'origine sont en particulier

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

Nous appellerons plan, la surface d'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

où A, B, C, D sont des constantes arbitraires.

Soient les deux plans P et P′ d'équations

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned}$$

Pour que deux plans définis par leurs équations soient parallèles, il faut et il suffit que les coefficients de x, y, z, dans ces deux équations, soient proportionnels. D'après ce qui précède, la génération du plan fera l'objet des mêmes remarques qu'en géométrie Euclidienne a 3 dimensions.

12. **Définition.** — Soient deux points M_1 (x, y, z), M_2 $(x_1\ y_1\ z_1)$ il passe une droite et une seule par ces deux points.

Nous appellerons distance $\overrightarrow{M_1 M_2}$ la longueur du segment de droite $\overrightarrow{M_1 M_2}$

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \sqrt[3]{(x_1-x)^3+(y_1-y)^3+(z_1-z)^3-3(x_1-x)(y_1-y)(z_1-z)}$$

Cette relation donne lieu à l'identité

$$\overrightarrow{M_1 M_2} + \overrightarrow{M_2 M_1} = 0$$

Comme dans la géométrie Euclidienne.

Soient deux points distincts. Leur distance est en général différente de zéro ; leur distance est nulle si les deux points sont situés dans le plan d'équation : $x + y + z = C^{te}$.

La même propriété appartient aux plans d'équations

$$\begin{aligned} x + jy + j^2 z &= C^{te} \\ x + j^2 y + jz &= C^{te} \end{aligned}$$

Ces trois familles de plans jouent donc ici le même rôle que les droites

$$\begin{aligned} x + iy &= C^{te} \\ x - iy &= C^{te} \end{aligned}$$

On les appelle droites isotropes, on peut vérifier que la distance de deux points quelconques appartenant à l'une de ces droites est toujours égale à zéro.

On appelle en général, droites isotropes issues du point $(x_0\ y_0\ z_0)$ les droites qui joignent ce point aux points cycliques.

Prenons le point M_0 (x_0, y_0, z_0). Le lieu des points situés à une distance l de ce point sera la surface d'équation

$$(x - x_0)^3 + (y - y_0)^3 + (z - z_0)^3 - 3(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0) = l^3$$

Distance d'un point à l'origine : si on fait $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, la distance $d = \mathrm{OM}$ d'un point M (x, y, z) à l'origine est

$$d = \sqrt{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}$$

13. Considérons un point M (a, b, c), d'après les formules (7) on peut écrire :

$$\begin{aligned} a &= \rho \mathrm{P}\ (\theta, \varphi) \\ b &= \rho \mathrm{Q}\ (\theta, \varphi) \\ c &= \rho \mathrm{R}\ (\theta, \varphi) \end{aligned}$$

et d'après ce qui précède la distance $\mathrm{OM} = \rho$ peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\theta, \varphi) &= \frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}} \\ \mathrm{Q}(\theta, \varphi) &= \frac{b}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}} \qquad (34) \\ \mathrm{R}(\theta, \varphi) &= \frac{c}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}} \end{aligned}$$

On dira que l'on a les cosinus directeurs d'Appell de la droite OM plus généralement les expressions (34) définissent les cosinus directeurs d'Appell d'une droite de paramètres directeurs a, b, c.

14. **Angle de deux droites.** — Soient (Δ, Δ') deux droites de coefficients directeurs a, b, c et a', b', c'.

Désignons par P (θ, φ), Q (θ, φ), R (θ, φ) et P (θ', φ'), Q (θ', φ'), R (θ', φ') les angles qu'elles font respectivement avec les axes de coordonnées. Ici, nous ferons appel à la fonction (P (θ, φ) θ' φ') ; mais cette fonction n'étant pas paire nous considérons à la fois les deux expressions :

$$\mathrm{P}\ (\theta' - \theta, \varphi' - \varphi) \text{ et } \mathrm{P}\ (\theta - \theta', \varphi - \varphi')$$

et nous appellerons angle de deux directions l'ensemble des deux quantités $\theta - \theta'$, $\varphi - \varphi'$ où les six quantités a, b, c, a', b', c' sont connues d'après les formules (13) et (34)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\theta - \theta', \varphi - \varphi') &= \frac{a(a'^2 - b'c') + b(b'^2 - a'c') + c(c'^2 - a'b')}{\sqrt[3]{(a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c')(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2}} \\ & \qquad (35) \\ \mathrm{P}(\theta' - \theta, \varphi' - \varphi) &= \frac{a'(a^2 - bc) + b'(b^2 - ac) + c'(c^2 - ab)}{\sqrt[3]{(a'^3 + b'^3 + c'^3 - 3a'b'c')(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2}} \end{aligned}$$

En géométrie Euclidienne plane la condition de perpendicularité de deux droites Δ, Δ' est $\cos\theta = 0$.

Par analogie nous dirons ici que deux directions sont orthogonales au sens d'APPELL lorsque on a en même temps :

$$P(\theta - \theta', \varphi - \varphi') = P(\theta' - \theta, \varphi' - \varphi) = 0 \qquad (36)$$

15. **Soit une droite donnée** (Δ). — Pour trouver les droites orthogonales au sens d'APPELL à cette droite, on doit résoudre les équations (36) qui s'écrivent encore

$$\begin{aligned} a\,(a'^2 - b'c') + b\,(b'^2 - a'c') + c\,(c'^2 - a'b') &= 0 \\ a'\,(a^2 - bc) + b'\,(b^2 - ac) + c'\,(c^2 - ab) &= 0 \end{aligned} \qquad (36')$$

où a, b, c sont les données, a', b', c' les inconnues.

En géométrie Euclidienne à trois dimensions, la première équation représente un cône du second degré ayant son sommet à l'origine et la seconde un plan passant par l'origine. Il y a donc, au plus deux solutions réelles qui sont

$$\begin{array}{lll} a' = b & b' = c & c' = a \\ a' = c & b' = a & c' = b \end{array} \qquad (37)$$

et qui vérifient le système. On en déduit que ce sont les solutions cherchées.

Théorème. — Par un point d'une droite on peut élever à cette droite deux perpendiculaires, au sens d'APPELL et deux seulement.

16. Étant donné les trois droites Δ, Δ' Δ'' issues d'un même point et dont les paramètres directeurs sont respectivement :

$$\begin{array}{lll} \alpha = a & \beta = b & \gamma = c \\ \alpha' = c & \beta' = a & \gamma' = b \\ \alpha'' = b & \beta'' = c & \gamma'' = a \end{array} \qquad (38)$$

Ces droites prises, deux à deux, vérifient les équations (36′).

Elles sont orthogonales au sens d'APPELL, on dira qu'elles constituent un trièdre trirectangle au sens d'APPELL.

17. **Transformation ne déplaçant pas l'origine.** — Supposons que le premier système d'axes ox, oy, oz et le second système ox', oy', oz, aient la même origine o.

Prenons comme données du problème, les cosinus directeurs de chacun des nouveaux axes par rapport aux premiers, les cosinus dont les valeurs sont représentées dans le tableau ci-contre où la première ligne (par exemple) indique que l'axe ox' a pour cosinus directeurs P, Q, R par rapport aux axes ox, oy et oz.

	ox	oy	oz
ox'	$P(\theta, \varphi)$	$Q(\theta, \varphi)$	$R(\theta, \varphi)$
oy'	$R(\theta, \varphi)$	$P(\theta, \varphi)$	$Q(\theta, \varphi)$
oz'	$Q(\theta, \varphi)$	$R(\theta, \varphi)$	$P(\theta, \varphi)$

La notion de parallélisme étant conservée, on peut appliquer le théorème des projections. On en déduit les formules de changements d'axes :

$$
\begin{aligned}
x &= x' P(\theta, \varphi) + y' R(\theta, \varphi) + z' Q(\theta, \varphi) \\
y &= x' Q(\theta, \varphi) + y' P(\theta, \varphi) + z' R(\theta, \varphi) \\
z &= x' R(\theta, \varphi) + y' Q(\theta, \varphi) + z' P(\theta, \varphi)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

18. **Transformation générale.** — Supposons que les deux systèmes d'axes ox, oy, oz, $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ soient quelconques.

La transformation de coordonnées peut être effectuée par deux transformations successives : la première amenant par translation, l'origine o en o' et les axes ox, oy, oz en $o'x_1$, $o'y_1$, $o'z_1$ la seconde ne changeant pas l'origine o' et faisant passer de ce dernier système au $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ dans ces conditions. Si l'on désigne par x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque M dans l'ancien système, par x', y', z', ses coordonnées dans le nouveau et par x_1, y_1, z_1 ses coordonnées dans le système intermédiaire.

Les deux transformations successives se font en appliquant la règle de la géométrie Euclidienne

$$
\begin{aligned}
x &= a + x_1 \\
y &= b + y_1 \\
z &= c + z_1
\end{aligned}
$$

où abc sont les coordonnées : par rapport $oxyz$, on en déduit les formules cherchées

$$
\begin{aligned}
x &= a + x' P(\theta_0, \varphi_0) + y' R(\theta_0, \varphi_0) + z' Q(\theta_0, \varphi_0) \\
y &= b + x' Q(\theta_0, \varphi_0) + y' P(\theta_0, \varphi_0) + z' R(\theta_0, \varphi_0) \\
z &= c + x' R(\theta_0, \varphi_0) + y' Q(\theta_0, \varphi_0) + z' P(\theta_0, \varphi_0)
\end{aligned}
\tag{40}
$$

sur lesquelles nous nous bornerons à faire cette remarque essentielle que x, y, z sont des expressions du premier degré en x', y', et z'. Les constantes a, b, c définissent la grandeur de la translation et les constantes θ_0, φ_0 l'amplitude de la rotation.

En posant

$$P^2 - QR = P^0$$
$$Q^2 - RP = R^0$$
$$R^2 - PQ = Q^0$$

multiplions les deux membres des expressions (39) respectivement par P^0, R^0 et Q^0, on obtient en ajoutant :

$$xP^0 + yR^0 + zQ^0 = x'$$

De la même manière en multipliant par Q^0, P^0 et R^0 et après par R^0, Q^0, P^0, on trouve y' et z', de sorte que :

$$\begin{aligned} x' &= xP^0 + yR^0 + zQ^0 \\ y' &= xQ^0 + yP^0 + zR^0 \\ z' &= xR^0 + yQ^0 + zP^0 \end{aligned} \qquad (41)$$

de l'identité

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz = (x + y + z)\ (x + jy + j^2 z)\ (x + j^2 y + jz)$$
$$= (x' + y' + z')\ (P + Q + R)\ (x' + jy' + j^2 z')\ (P + jQ + j^2 R)$$
$$(x' + j^2 y' + jz')\ (P + j^2 Q + jR) = x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3\,x'\,y'\,z'$$

on déduit que la distance d'un point M à l'origine est invariante par ce changement de variable. Il en est de même de la distance de deux points quelconques.

Si on considère une droite de cosinus directeurs $P\ (\theta, \varphi)$, $Q\ (\theta, \varphi)$ et $R\ (\theta, \varphi)$ un point M de cette droite situé à la distance ρ de l'origine a pour coordonnées dans le trièdre $oxyz$, ρP, ρQ, ρR.

Ses coordonnées dans le trièdre ox', y', z' seront d'après (41)

$$x' = \rho P\ (\theta, \varphi)\ [P^2\ (\theta_0\ \varphi_0) - R\ (\theta_0\ \varphi_0)\ Q\ (\theta_0\ \varphi_0)] + \rho Q$$
$$[Q^2\ (\theta_0\,\varphi_0) - P\ (\theta_0\,\varphi_0)\ R\ (\theta_0\,\varphi_0)] + \rho R\ [R^2\ (\theta_0\,\varphi_0) - P\ (\theta_0\,\varphi_0)\ Q\ (\theta_0\,\varphi_0)]$$

ou enfin

$$\begin{aligned} x' &= \rho P\ (\theta - \theta_0,\ \varphi - \varphi_0) \\ y' &= \rho Q\ (\theta - \theta_0,\ \varphi - \varphi_0) \\ z' &= \rho R\ (\theta - \theta_0,\ \varphi - \varphi_0) \end{aligned} \qquad (42)$$

Les arguments des cosinus directeurs d'une droite quelconque se trouvent ainsi tous diminués d'une même quantité θ_0, φ_0, on en déduit que l'angle de deux directions tel que nous l'avons défini est invariant par le changement de variable (39).

19. **Composition des vitesses.** — Prenons maintenant dans la formule (40) a, b, c, $\theta_0\ \varphi_0$ variables et dérivons par rapport au temps [4]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\frac{da}{dt} + x'\frac{dP}{dt} + y'\frac{dR}{dt} + z'\frac{dQ}{dt}\right) + \left(P\frac{dx'}{dt} + R\frac{dy'}{dt} + Q\frac{dz'}{dt}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= \left(\frac{db}{dt} + x'\frac{dQ}{dt} + y'\frac{dP}{dt} + z'\frac{dR}{dt}\right) + \left(Q\frac{dx'}{dt} + P\frac{dy'}{dt} + R\frac{dz'}{dt}\right) \\ \frac{dz}{dt} &= \left(\frac{dc}{dt} + x'\frac{dR}{dt} + y'\frac{dQ}{dt} + z'\frac{dP}{dt}\right) + \left(R\frac{dx'}{dt} + Q\frac{dy'}{dt} + P\frac{dz'}{dt}\right) \end{aligned} \qquad (43)$$

Les premiers membres de ces formules représentent les composantes suivant les axes fixes de la vitesse absolue de M, les premières parenthèses des seconds membres qui sont les résultats de la dérivation de x, y, z en traitant x', y' z', comme des constantes, c'est-à-dire en supposant M lié au solide, représentent les composantes suivant les axes fixes de la vitesse d'entraînement de M, enfin les composantes suivant les axes mobiles de la vitesse relative de M étant $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, on voit que les deuxièmes parenthèses des seconds membres représentent les composantes suivant les axes fixes de cette vitesse relative. Les formules (43) expriment donc le théorème suivant :

Dans cet espace la vitesse absolue d'un mobile est la résultante de sa vitesse d'entraînement et de sa vitesse relative.

20. **Composition des accélérations.** — Une première dérivation par rapport au temps des formules (40) nous a conduit aux formules (43) exprimant le théorème de la composition des vitesses une seconde dérivation nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2}&=\left(\frac{d^2a}{dt^2}+x'\frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}+y'\frac{d^2\mathrm{R}}{dt^2}+z'\frac{d^2\mathrm{Q}}{dt^2}\right)+\left(\mathrm{P}\frac{d^2x'}{dt^2}+\mathrm{R}\frac{d^2y'}{dt^2}+\mathrm{Q}\frac{d^2z'}{dt^2}\right)+\\
&\qquad+2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\mathrm{P}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\mathrm{R}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\mathrm{Q}}{dt}\right)\\
\frac{d^2y}{dt^2}&=\left(\frac{d^2b}{dt^2}+x'\frac{d^2\mathrm{Q}}{dt^2}+y'\frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}+z'\frac{d^2\mathrm{R}}{dt^2}\right)+\left(\mathrm{Q}\frac{d^2x'}{dt^2}+\mathrm{P}\frac{d_2y'}{dt^2}+\mathrm{R}\frac{d^2z'}{dt^2}\right)+\\
&\qquad+2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\mathrm{Q}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\mathrm{P}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)\\
\frac{d^2z}{dt^2}&=\left(\frac{d^2c}{dt^2}+x'\frac{d^2\mathrm{R}}{dt^2}+y'\frac{d^2\mathrm{Q}}{dt^2}+z'\frac{d^2\mathrm{P}}{dt^2}\right)+\left(\mathrm{R}\frac{d^2x'}{dt^2}+\mathrm{Q}\frac{d^2y'}{dt^2}+\mathrm{P}\frac{d^2z'}{dt^2}\right)+\\
&\qquad+2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\mathrm{R}}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\mathrm{Q}}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\mathrm{P}}{dt}\right)
\end{aligned}\tag{44}$$

Les premiers membres de ces formules représentent les composantes suivant les axes fixes de l'accélération absolue du point M ; les premières parenthèses des seconds membres (qui sont le résultat de la dérivation de x, y, z en traitant, x', y', z', comme des constantes, c'est-à-dire en supposant M lié au solide), représentent les composantes suivant les axes fixes de l'accélération d'entraînement de M. Les composantes suivant les axes mobiles de l'accélération relative de M étant $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$, $\frac{d^2z'}{dt^2}$, on voit que les deuxièmes parenthèses des seconds membres représentent les composantes suivant les axes fixes de cette accélération relative. Enfin, les dernières parenthèses des seconds membres représentent les composantes d'un vecteur appelé accélération complémentaire de M les formules de (44) expriment ainsi le théorème suivant.

L'accélération absolue d'un mobile est la résultante de son accélération d'entraînement de son accélération relative et de son accélération complémentaire.

21. Pour interpréter les formules (43) d'une façon simple, cherchons les projections de la vitesse v sur les axes mobiles projections que nous appelons vx', vy', vz',

On a évidemment :

$$\begin{aligned} vx' &= v_x\, P^0 + v_y\, R^0 + v_z\, Q^0 \\ vy' &= v_x\, Q^0 + v_y\, P^0 + v_z\, R^0 \\ vz' &= v_x\, R^0 + v_y\, Q^0 + v_z\, P^0 \end{aligned} \tag{45}$$

Calculons les seconds membres en y remplaçant v_x, v_y, v_z par les expressions (43) et en remarquant que les quantités telles que

$$\begin{aligned} P^0 \frac{dP}{dt} + R^0 \frac{dQ}{dt} + Q^0 \frac{dR}{dt} &= 0 \\ Q^0 \frac{dR}{dt} + P^0 \frac{dP}{dt} + R^0 \frac{dQ}{dt} &= 0 \\ R^0 \frac{dQ}{dt} + Q^0 \frac{dR}{dt} + P^0 \frac{dP}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

sont nulles en vertu des relations

$$\begin{aligned} P^3 + Q^3 + R^3 - 3\,PQR &= 1 \\ R^3 + P^3 + Q^3 - 3\,RPQ &= 1 \\ Q^3 + R^3 + P^3 - 3\,QRP &= 1 \end{aligned}$$

Puis tenons compte des relations

$$\begin{aligned} P^0\, R + Q^0\, Q + R^0\, P &= 0 \\ Q^0\, P + P^0\, Q + R^0\, R &= 0 \\ R^0\, R + Q^0\, P + P^0\, Q &= 0 \end{aligned} \tag{47}$$

Nous trouvons ainsi

$$\begin{aligned} vx' = {} & P^0 \frac{da}{dt} + R^0 \frac{db}{dt} + Q^0 \frac{dc}{dt} + z'\left(P^0 \frac{dQ}{dt} + R^0 \frac{dR}{dt} + Q^0 \frac{dP}{dt}\right) + \\ & + y'\left(P^0 \frac{dR}{dt} + R^0 \frac{dP}{dt} + Q^0 \frac{dQ}{dt}\right) \\ vy' = {} & Q^0 \frac{da}{dt} + P^0 \frac{db}{dt} + R^0 \frac{dc}{dt} + x'\left(Q^0 \frac{dP}{dt} + P^0 \frac{dQ}{dt} + R^0 \frac{dR}{dt}\right) + \\ & + z'\left(Q^0 \frac{dQ}{dt} + P^0 \frac{dR}{dt} + R^0 \frac{dP}{dt}\right) \end{aligned} \tag{48}$$

$$vz' = \mathrm{R}^0 \frac{da}{dt} + \mathrm{Q}^0 \frac{db}{dt} + \mathrm{P}^0 \frac{dc}{dt} + y'\left(\mathrm{R}^0 \frac{d\mathrm{R}}{dt} + \mathrm{Q}^0 \frac{d\mathrm{P}}{dt} + \mathrm{P}^0 \frac{d\mathrm{Q}}{dt}\right) +$$
$$+ x'\left(\mathrm{R}^0 \frac{d\mathrm{P}}{dt} + \mathrm{Q}^0 \frac{d\mathrm{Q}}{dt} + \mathrm{P}^0 \frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)$$

Remarque. — En dérivant les conditions des perpendicularités (47) on a :

$$\left(\mathrm{P}^0 \frac{d\mathrm{Q}}{dt} + \mathrm{R}^0 \frac{d\mathrm{R}}{dt} + \mathrm{Q}^0 \frac{d\mathrm{P}}{dt}\right) = -\left(\mathrm{Q} \frac{d\mathrm{P}^0}{dt} + \mathrm{R} \frac{d\mathrm{R}^0}{dt} + \mathrm{P} \frac{d\mathrm{Q}^0}{dt}\right) \equiv (p)$$
$$-\left(\mathrm{P}^0 \frac{d\mathrm{R}}{dt} + \mathrm{Q}^0 \frac{d\mathrm{Q}}{dt} + \mathrm{R}^0 \frac{d\mathrm{P}}{dt}\right) = \left(\mathrm{R} \frac{d\mathrm{P}^0}{dt} + \mathrm{Q} \frac{d\mathrm{Q}^0}{dt} + \mathrm{P} \frac{d\mathrm{R}^0}{dt}\right) \equiv (r)$$
$$\left(\mathrm{R}^0 \frac{d\mathrm{R}}{dt} + \mathrm{Q}^0 \frac{d\mathrm{P}}{dt} + \mathrm{P}^0 \frac{d\mathrm{Q}}{dt}\right) = -\left(\mathrm{R} \frac{d\mathrm{R}^0}{dt} + \mathrm{P} \frac{d\mathrm{Q}^0}{dt} + \mathrm{Q} \frac{d\mathrm{P}^0}{dt}\right) \equiv (q)$$

22. **Composantes de la rotation instantanée en fonction des cosinus directeurs d'Appell.** — En désignant par p, q et r les composantes de la rotation w avec

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3\,pqr = w^3$$

nous allons trouver leur expression en fonction P, Q, R ...

En effet considérons sur ox le point M tel que $o\mathrm{M} = 1$. Ses coordonnées relatives sont P, R et Q. Comme il est fixe dans l'espace, sa vitesse absolue est nulle de sorte que l'on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{d\mathrm{P}}{dt} + q\mathrm{Q} - r\mathrm{R} = 0 \\
&\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + q\mathrm{R} - r\mathrm{P} = 0 \qquad \mathrm{I} \\
&\frac{d\mathrm{R}}{dt} + q\mathrm{P} - r\mathrm{Q} = 0 \\[1ex]
&\frac{d\mathrm{R}}{dt} + r\mathrm{P} - p\mathrm{Q} = 0 \\
&\frac{d\mathrm{P}}{dt} + r\mathrm{Q} - p\mathrm{R} = 0 \qquad \mathrm{II} \\
&\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + r\mathrm{R} - p\mathrm{P} = 0 \\[1ex]
&\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + p\mathrm{R} - q\mathrm{P} = 0 \\
&\frac{d\mathrm{R}}{dt} + p\mathrm{P} - q\mathrm{Q} = 0 \qquad \mathrm{III} \\
&\frac{d\mathrm{P}}{dt} + p\mathrm{Q} - q\mathrm{R} = 0
\end{aligned} \qquad (49)$$

Les deux autres groupes s'obtiennent d'une manière analogue par les considérations des deux autres points homologues sur *oy* et *oz*. Cela posé, multiplions le premier groupe de la formule (49) par R^0, Q^0, P^0 et après par Q^0, P^0, R^0 et ajoutons membre à membre. En tenant compte des relations (47) il vient :

$$R^0\frac{dP}{dt}+Q^0\frac{dQ}{dt}+P^0\frac{dR}{dt}+q[Q(Q^2-PR)+R(R^2-PQ)+P(P^2-QR)]=0$$

$$Q^0\frac{dP}{dt}+P^0\frac{dQ}{dt}+R^0\frac{dR}{dt}-r[R(R^2-PQ)+P(P^2-QR)+Q(Q^2-PR)]=0$$

d'où

$$\begin{aligned} q &= -\left(R^0\frac{dP}{dt}+Q^0\frac{dQ}{dt}+P^0\frac{dR}{dt}\right)\\ r &= \left(Q^0\frac{dP}{dt}+P^0\frac{dQ}{dt}+R^0\frac{dR}{dt}\right)\end{aligned}\qquad(50)$$

En multipliant le deuxième groupe des formules (49) respectivement par P^0, R^0, Q^0 et après P^0, R^0, Q^0 et ajoutant membre à membre, on a :

$$R^0\frac{dR}{dt}+Q^0\frac{dP}{dt}+P^0\frac{dQ}{dt}-p[Q(Q^2-PR)+R(R^2-PQ)+P(P^2-QR)]=0$$

$$P^0\frac{dR}{dt}+R^0\frac{dP}{dt}+Q^0\frac{dQ}{dt}+r[P(P^2-QR)+Q(Q^2-PR)+R(R^2-PQ)]=0$$

d'où

$$\begin{aligned} p &= \left(R^0\frac{dR}{dt}+Q^0\frac{dP}{dt}+P^0\frac{dQ}{dt}\right)\\ r &= -\left(P^0\frac{dR}{dt}+R^0\frac{dP}{dt}+Q^0\frac{dQ}{dt}\right)\end{aligned}\qquad(50')$$

De même, en multipliant le troisième groupe des formules (49) respectivement par Q^0, P^0, R^0 et après par P^0, R^0, Q^0 et ajoutant membre à membre, il vient :

$$Q^0\frac{dQ}{dt}+P^0\frac{dR}{dt}+R^0\frac{dP}{dt}+p[R(R^2-PQ)+P(P^2-QR)+Q(Q^2-PR)]=0$$

$$P^0\frac{dQ}{dt}+R^0\frac{dR}{dt}+Q^0\frac{dP}{dt}-q[P(P^2-QR)+Q(Q^2-PR)+R(R^2-PQ)]=0$$

d'où

$$\begin{aligned} p &= -\left(Q^0\frac{dQ}{dt}+P^0\frac{dR}{dt}+R^0\frac{dP}{dt}\right)\\ q &= P^0\frac{dQ}{dt}+R^0\frac{dR}{dt}+Q^0\frac{dP}{dt}\end{aligned}\qquad(50'')$$

En tenant compte des relations (50), (50′), (50″), et pour simplifier l'écriture, posons :

$$v^0{}_{x'} = \mathrm{P}^0 \frac{da}{dt} + \mathrm{R}^0 \frac{db}{dt} + \mathrm{Q}^0 \frac{dc}{dt}$$

$$v^0{}_{y'} = \mathrm{Q}^0 \frac{da}{dt} + \mathrm{P}^0 \frac{db}{dt} + \mathrm{R}^0 \frac{dc}{dt}$$

$$v^0{}_{z'} = \mathrm{R}^0 \frac{da}{dt} + \mathrm{Q}^0 \frac{db}{dt} + \mathrm{P}^0 \frac{dc}{dt}$$

($v^0{}_{x'}$, $v^0{}_{y'}$, $v^0{}_{z'}$ désignant les projections de la vitesse v^0 du point O sur les axes mobiles) les relations (48) s'écrivent :

$$\begin{aligned} v_{x'} &= v^0{}_{x'} + qz' - ry' \\ v_{y'} &= v^0{}_{y'} + rx' - pz' \\ v_{z'} &= v^0{}_{z'} + py' - qx' \end{aligned} \tag{51}$$

Pour interpréter les formules (43), considérons le vecteur j ayant pour origine le point M et pour projection sur les axes fixes les quantités :

$$\begin{aligned} j'_x &= 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\mathrm{R}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\mathrm{Q}}{dt}\right) \\ j'_y &= 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right) \\ j'_z &= 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\mathrm{R}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\mathrm{P}}{dt}\right) \end{aligned} \tag{52}$$

Cherchons les projections de j' sur les axes mobiles $j'_{x'}$, $j'_{y'}$, $j'_{z'}$ on a :

$$\begin{aligned} j'_{x'} &= \mathrm{P}^0 j'_x + \mathrm{R}^0 j'_y + \mathrm{Q}^0 j'_z \\ j'_{y'} &= \mathrm{Q}^0 j'_x + \mathrm{P}^0 j'_y + \mathrm{R}^0 j'_z \\ j'_{z'} &= \mathrm{R}^0 j'_x + \mathrm{Q}^0 j'_y + \mathrm{P}^0 j'_z \end{aligned} \tag{53}$$

En substituant les valeurs j'_x, j'_y et j'_z dans (53) et en tenant compte des relations (46) et (50), (50′), (50″), on trouve :

$$\begin{aligned} j'_{x'} &= 2\left(q\frac{dz'}{dt} - r\frac{dy'}{dt}\right) \\ j'_{y'} &= 2\left(r\frac{dx'}{dt} - p\frac{dz'}{dt}\right) \\ j'_{z'} &= 2\left(p\frac{dy'}{dt} - q\frac{dx'}{dt}\right) \end{aligned} \tag{54}$$

Ce qui montre que l'expression de l'accélération complémentaire est la même que dans l'espace Euclidien à 3 dimensions.

23. **Accélération tangentielle et accélération normale.** — Si on

considère la courbe comme trajectoire d'un certain mouvement d'équations :

$$x = x\ (t)$$
$$y = y\ (t)$$
$$z = z\ (t)$$

On aura en posant $v = \dfrac{ds}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} = \alpha v$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \beta v$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dt} = \gamma v$$

En dérivant une autre fois

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \alpha \frac{dv}{dt} + v \frac{d\alpha}{dt} = \alpha \frac{dv}{dt} + v \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} = \alpha \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{d\alpha}{ds}$$

mais d'après la formule (85)

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R},\ d\ldots$$
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \alpha \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{\alpha'}{R}$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \beta \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{\beta'}{R}$$
$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \gamma \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{\gamma'}{R}$$

En multipliant respectivement par α^0, β^0, γ^0 et après par $\alpha^{0\prime}$, $\beta^{0\prime}$, $\gamma^{0\prime}$ et enfin par $\alpha^{0\prime\prime}$, $\beta^{0\prime\prime}$, $\gamma^{0\prime\prime}$ en tenant compte des relations

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 1$$
$$\alpha'^3 + \beta'^3 + \gamma'^3 - 3\alpha'\beta'\gamma' = 1$$
$$\alpha''^3 + \beta''^3 + \gamma''^3 - 3\alpha''\beta''\gamma'' = 1$$
$$\alpha\ (\alpha'^2 - \beta'\gamma') + \beta\ (\beta'^2 - \gamma'\alpha') + \gamma\ (\gamma'^2 - \alpha'\beta') = 0$$
$$\alpha''\ (\alpha'^2 - \beta'\gamma') + \beta''\ (\beta'^2 - \gamma'\alpha') + \gamma''\ (\gamma'^2 - \alpha'\beta') = 0$$
$$\alpha''\ (\alpha^2 - \beta\gamma) + \beta''\ (\beta^2 - \alpha\gamma) + \gamma''\ (\gamma^2 - \alpha\beta) = 0$$
$$\alpha^0 = \alpha^2 - \beta\gamma$$

. . . .

. . . .

$$\alpha^{0\prime} = \alpha'^2 - \beta'\gamma'$$

. . . .

. . . .

$$\alpha^{0\prime\prime} = \alpha^{0\prime\prime} - \beta''\gamma''$$

. . . .

. . . .

on trouve :

$$\begin{aligned}
\Gamma_t &= \frac{dv}{dl} = \alpha^0 \frac{d^2 x}{dl^2} + \beta^0 \frac{d^2 y}{dl^2} + \gamma^0 \frac{d^2 z}{dl^2} \\
\Gamma_N &= \frac{v^2}{R} = \alpha^{0'} \frac{d^2 x}{dl^2} + \beta^{0'} \frac{d^2 y}{dl^2} + \gamma^{0'} \frac{d^2 z}{dl^2} \\
\Gamma_b &= 0 = \alpha^{0''} \frac{d^2 x}{dl^2} + \beta^{0''} \frac{d^2 y}{dl^2} + \gamma^{0''} \frac{d^2 z}{dl^2}
\end{aligned} \tag{55}$$

L'accélération Γ peut donc ici encore être considérée comme résultante d'une accélération tangentielle et d'une accélération normale.

24. Revenons maintenant aux transformations (39) et considérons un système d'intégrales :

$$\begin{aligned}
X &= X\ (x,\ y,\ z) \\
Y &= Y\ (x,\ y,\ z) \\
Z &= Z\ (x,\ y,\ z).
\end{aligned}$$

De l'un de ces systèmes, soient

$$\begin{aligned}
X\ (x,\ y,\ z) &= \alpha \\
Y\ (x,\ y,\ z) &= \beta \\
Z\ (x,\ y,\ z) &= \gamma
\end{aligned}$$

(où α β γ sont des constantes arbitraires), les équations des 3 familles de surfaces ; les équations des plans tangents respectifs en un point M_0 $(x_0\ y_0\ z_0)$ sont (les notions de contact étant conservées) :

$$\begin{aligned}
\frac{\delta X}{\delta x}(x - x_0) + \frac{\delta X}{\delta y}(y - y_0) + \frac{\delta X}{\delta z}(z - z_0) &= 0 \\
\frac{\delta Y}{\delta x}(x - x_0) + \frac{\delta Y}{\delta y}(y - y_0) + \frac{\delta Y}{\delta z}(z - z_0) &= 0 \\
\frac{\delta Z}{\delta x}(x - x_0) + \frac{\delta Z}{\delta y}(y - y_0) + \frac{\delta Z}{\delta z}(z - z_0) &= 0
\end{aligned}$$

les coefficients directeurs des arêtes du trièdre formé par ces trois plans sont :

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta Y}{\delta y}\frac{\delta Z}{\delta z} - \frac{\delta Y}{\delta z}\frac{\delta Z}{\delta y} = a & \qquad &\frac{\delta Z}{\delta y}\frac{\delta X}{\delta z} - \frac{\delta Z}{\delta z}\frac{\delta X}{\delta y} = a' \\
&\frac{\delta Y}{\delta z}\frac{\delta Z}{\delta x} - \frac{\delta Y}{\delta x}\frac{\delta Z}{\delta z} = b & \qquad &\frac{\delta Z}{\delta z}\frac{\delta X}{\delta x} - \frac{\delta Z}{\delta x}\frac{\delta X}{\delta z} = b' \\
&\frac{\delta Y}{\delta x}\frac{\delta Z}{\delta y} - \frac{\delta Y}{\delta y}\frac{\delta Z}{\delta x} = c & \qquad &\frac{\delta Z}{\delta x}\frac{\delta X}{\delta y} - \frac{\delta Z}{\delta y}\frac{\delta X}{\delta x} = c'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta X}{\delta y}\frac{\delta Y}{\delta z}-\frac{\delta X}{\delta z}\frac{\delta Y}{\delta y}=a''\\
&\frac{\delta X}{\delta z}\frac{\delta Y}{\delta x}-\frac{\delta X}{\delta x}\frac{\delta Y}{\delta z}=b''\\
&\frac{\delta X}{\delta x}\frac{\delta Y}{\delta y}-\frac{\delta X}{\delta y}\frac{\delta Y}{\delta x}=c''
\end{aligned} \tag{56}$$

Si on pose

$$X=\left(\frac{\delta X}{\delta x}\right)^2-\frac{\delta X}{\delta y}\frac{\delta X}{\delta z} \qquad Y=\left(\frac{\delta X}{\delta y}\right)^2-\frac{\delta X}{\delta z}\frac{\delta X}{\delta x}$$

$$Z=\left(\frac{\delta X}{\delta z}\right)^2-\frac{\delta X}{\delta x}\frac{\delta X}{\delta y}$$

les paramètres directeurs dans le cas du système (S_1) peuvent encore s'écrire :

$$\begin{matrix} X & Z & Y \\ Y & X & Z \\ Z & Y & X \end{matrix} \tag{57}$$

Et dans le cas du système (S_6) nous aurions des résultats analogues avec les autres systèmes (S). Mais nous verrions apparaître les coefficients 1, j, j^2 ce qui ne changerait du reste pas les résultats au point de vue orthogonalité du sens d'APPELL.

Cela démontre que, avec (38) le trièdre considéré est un trièdre d'APPELL. On dit que les familles des surfaces envisagées forment un système triple orthogonal au sens d'APPELL.

Ces familles de surfaces jouent donc, ici, le même rôle que les systèmes de courbes isothermes dans l'étude du Laplacien à deux dimensions.

Une famille de surfaces triples orthogonales au sens d'APPELL particulièrement simple sera celle définie par les équations :

$$\rho = a \qquad \theta = b \qquad \varphi = c$$

où ρ est la fonction module, θ, φ les deux fonctions arguments.

Considérons une fonction F formée à l'aide de symboles élémentaires de la quantité $x + jy + j^2 z$. Cette fonction pourra se mettre sous la forme $F\,(x + jy + j^2 z) = f_1\,(x,\ y,\ z) + jf_2\,(x,\ y,\ z) + j^2 f_3\,(x,\ y,\ z)$ et l'on aura :

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z) &= \frac{F(x+jy+j^2z)+F(x+j^2y+jz)+F(x+y+z)}{3}\\
f_2(x,y,z) &= \frac{j^2F(x+jy+j^2z)+jF(x+j^2y+jz)+F(x+y+z)}{3}\\
f_3(x.y,z) &= \frac{jF(x+jy+j^2z)+j^2F(x+j^2y+jz)+F(x+y+z)}{3}
\end{aligned} \tag{58}$$

Les fonctions f_1, f_2, f_3, que l'on obtient ainsi, satisfont aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_1}{\delta x} = \frac{\delta f_2}{\delta y} = \frac{\delta f_3}{\delta z} \\ \frac{\delta f_1}{\delta z} = \frac{\delta f_2}{\delta y} = \frac{\delta f_3}{\delta z} \end{aligned} \tag{59}$$

Ces relations montrent que les trois familles de surfaces :

$$\begin{aligned} f_1\,(x, y, z) &= a \\ f_2\,(x, y, z) &= b \\ f_3\,(x, y, z) &= c \end{aligned} \tag{60}$$

(a, b, c, étant des constantes) sont telles que les plans tangents en un point, aux trois surfaces qui passent par ce point, forment un trièdre régulier dont les arêtes sont également inclinées sur la droite $x = y = z$.

Telles sont, par exemple, les surfaces

$$\begin{aligned} x^2 - 2\,yz &= \alpha \\ y^2 - 2\,xz &= \beta \\ z^2 - 2\,xy &= \gamma \end{aligned}$$

que l'on obtient en considérant la fonction

$$(x + jy + j^2 z)^2$$

si l'on résout les équations (60) par rapport à x, y, z

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1\,(a, b, c) \\ y &= \varphi_2\,(a, b, c) \\ z &= \varphi_3\,(a, b, c) \end{aligned}$$

les trois fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ des variables a, b, c satisfont aussi aux relations (59) et par conséquent les trois familles de surfaces

$$\begin{aligned} \varphi_1\,(x, y, z) &= a \\ \varphi_2\,(x, y, z) &= b \\ \varphi_3\,(x, y, z) &= c \end{aligned}$$

possèdent la même propriété que la surface (60).

Soient enfin trois fonctions f_1, f_2, f_3 satisfaisant aux relations (59) et trois autres fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ satisfaisant à ces mêmes relations ; les fonctions :

$$\begin{aligned} F_1\,(x, y, z) &= f_1\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ F_2\,(x, y, z) &= f_2\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \\ F_3\,(x, y, z) &= f_3\,(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \end{aligned}$$

obtenues en remplaçant dans f_1, f_2, f_3 ; x, y, z par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y satisfont également.

RemarqueI — Nous appelons le système Σ le système d'équations aux dérivées partielles du second ordre

$$D_x U = \frac{\delta^2 U}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 U}{\delta y \, \delta z} = 0$$
$$D_y U = \frac{\delta^2 U}{\delta y^2} - \frac{\delta^2 U}{\delta z \, \delta x} = 0$$
$$D_z U = \frac{\delta^2 U}{\delta z^3} - \frac{\delta^2 U}{\delta x \, \delta y} = 0$$

25. Nous pouvons donner une interprétation géométrique à l'équation de M. P. Humbert, analogue à celle de Laplacien à deux dimensions. Considérons le système Σ, on peut l'écrire :

$$D_x U = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta U}{\delta x}\right) - \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta U}{\delta z}\right) = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta U}{\delta x}\right) - \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta U}{\delta y}\right) = 0$$
$$D_y U = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta U}{\delta y}\right) - \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta U}{\delta x}\right) = \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta U}{\delta y}\right) - \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta U}{\delta z}\right) = 0$$
$$D_z U = \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta U}{\delta z}\right) - \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta U}{\delta y}\right) = \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta U}{\delta z}\right) - \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta U}{\delta x}\right) = 0$$

Par analogie de la géométrie Euclidienne, nous appelons tourbillons d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ (x, y, z) le vecteur de composantes

$$\xi = \frac{\delta Z}{\delta y} - \frac{\delta Y}{\delta z}$$
$$\eta = \frac{\delta X}{\delta z} - \frac{\delta Z}{\delta x} \qquad (61)$$
$$\zeta = \frac{\delta Y}{\delta x} - \frac{\delta X}{\delta y}$$

et si on pose

$$X = \frac{\delta U}{\delta z} \qquad Y = \frac{\delta U}{\delta x} \qquad Z = \frac{\delta U}{\delta y}$$

le système Σ s'écrit :

$$D_x U = \zeta = 0$$
$$D_y U = \xi = 0 \qquad (62)$$
$$D_z U = \eta = 0$$

Si on prend

$$X = \frac{\delta U}{\delta y} \qquad Y = \frac{\delta U}{\delta z} \qquad Z = \frac{\delta U}{\delta z}$$

le système Σ s'écrit :

$$D_x U = -\eta = 0$$
$$D_y U = -\zeta = 0 \qquad (63)$$
$$D_z U = -\xi = 0$$

Si on transforme un vecteur $\vec{V}$ en un vecteur de même longueur porté par une de ses perpendiculaires d'APPELL, on appelle cette opération la rotation orthogonale.

Les vecteurs définis par les composantes (62), (63) sont déduits du gradient $\frac{\delta U}{\delta x}, \frac{\delta U}{\delta y}, \frac{\delta U}{\delta z}$ par une rotation orthogonale d'APPELL.

Les équations (62), (63) expriment que les tourbillons des nouveaux vecteurs sont encore nuls. On a donc :

Théorème. — Le système Σ exprime que le champ de vecteur obtenu à partir du champ de gradient de la fonction U en effectuant une rotation orthogonale d'APPELL, est encore un champ de gradient.

L'équation de M. P. HUMBERT peut se mettre sous la forme

$$D_3 U = \frac{\delta}{\delta x}(D_x U) + \frac{\delta}{\delta y}(D_y U) + \frac{\delta}{\delta z}(D_z U) = 0$$

On exprime ainsi que la divergence du champ de vecteur $D_x U$, $D_y U$, $D_z U$ est nulle, c'est-à-dire que ce champ de vecteur est un champ de tourbillon. En remarquant les relations (62) (63), on voit que le champ de vecteurs $D_x U$, $D_y U$, $D_z U$ est un champ de tourbillon lui-même. On peut donc dire.

Théorème. — L'équation de M. P. HUMBERT exprime que le champ de tourbillon du champ de vecteur obtenu en effectuant une rotation orthogonale d'APPELL sur le champ de gradient de la fonction U reste encore un champ de tourbillon, lorsqu'on effectue sur lui une rotation orthogonale d'APPELL.

26. Revenons à l'espace Euclidien. Comme nous avons montré que les surfaces $\theta + \varphi = C^{te}$ et $\theta - \varphi = C^{te}$ sont respectivement des cônes de révolution ayant pour sommet l'origine et d'axe commun $o\zeta$ $(x = y = z)$ et demi-plans issus de cet axe. Mais les trièdres d'APPELL ont leurs arêtes également inclinées sur cet axe et ils sont équifaciaux. La forme analytique de ce trièdre est plus simple que celle que l'on a dans l'espace Euclidien.

Nous allons voir inversement quelle est la condition d'orthogonalité au sens d'APPELL en utilisant l'espace Euclidien.

Soient les deux droites correspondant aux valeurs θ, φ, θ', φ'. D'après ce qui précède, on a (21), (22)

$$\begin{aligned} \theta + \varphi &= \theta' + \varphi' \\ \theta - \varphi &= \theta' - \varphi' + \frac{4\,\varepsilon\pi}{3\sqrt{3}} \qquad \varepsilon^2 = 1 \end{aligned} \tag{64}$$

d'où

$$\theta - \theta' = \frac{2\,\varepsilon\pi}{3\sqrt{3}}$$

et

$$\varphi - \varphi' = -\frac{2\,\varepsilon\pi}{3\sqrt{3}}$$

Comme vérification prenons la formule

$$\mathrm{P}(\theta, \varphi) = \frac{e^{\theta+\varphi} + 2\,e^{-\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)} \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\varphi)\right]}{3}$$

donc

$$\mathrm{P}(\theta-\theta', \varphi-\varphi') = \frac{1 + 2\cos\left[\frac{2\,\varepsilon\pi}{3}\right]}{3} = \theta$$

en remplaçant $\theta = \theta - \theta'$, $\varphi = \varphi - \varphi'$.

27. On appelle normale en un point d'une courbe la polaire de la tangente par rapport aux deux droites isotropes issues du point contact. Par analogie dans cet espace, on fait la même chose en remplaçant les deux droites isotropes par les trois plans qui jouent le même rôle que les plans isotropes.

Soit la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.

Prenons un point (x_0, y_0, z_0) de la surface. On prend ce point comme origine des coordonnées.

Le plan tangent au point (x_0, y_0, z_0) a pour équation :

$$\mathrm{X}f'_{x_0} + \mathrm{Y}f'_{y_0} + \mathrm{Z}f'_{z_0} = 0$$

et les équations des trois plans isotropes

$$(\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z})\,(\mathrm{X}+\mathrm{JY}+\mathrm{J}^2\mathrm{Z})$$
$$(\mathrm{X}+\mathrm{J}^2\mathrm{Y}+\mathrm{JZ}) = \mathrm{X}^3+\mathrm{Y}^3+\mathrm{Z}^3-3\,\mathrm{XYZ} = 0$$

En passant en coordonnées tangentielles le plan tangent a pour coordonnées :

$$u_0 = f'_{x_0} \qquad v_0 = f'_{y_0} \qquad w_0 = f'_{z_0} \qquad r_0 = 0$$

Et le cône décomposé en trois plans a pour équation tangentielle :

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3\,uvw = 0 \qquad r = 0$$

L'équation tangentielle de la première polaire du plan tangent par rapport au cône décomposé s'écrit :

$$u_0\,(u^2 - vw) + v_0\,(v^2 - uw) + w_0\,(w^2 - uv) = 0 \quad r = 0$$

l'équation du cône en coordonnées ponctuelles est :

$$(v^2_0 - 4\,v_0\,w_0)\ X^2 + (v^2_0 - 4\,v_0\,w_0)\ Y^2 + (w^2_0 - 4\,u_0\,v_0)$$
$$Z^2 - 2\,(2\,u^2_0 - v_0\,w_0)\ YZ - 2\,(2\,v^2_0 - u_0\,w_0)\ XZ - 2$$
$$(2\,w^2_0 - u_0\,v_0)\ XY = 0$$

la deuxième polaire du plan tangent par rapport au cône décomposé a pour équation tangentielle :

$$(u^2_0 - v_0\,w_0)\,u - (v^2_0 - u_0\,w_0)\,v + (w^2_0 - u_0\,v_0)\,w = 0 \quad r = 0 \quad (64')$$

c'est l'équation d'une droite passant par le point x_0, y_0, z_0 ayant pour paramètres directeurs

$$(f'_{x_0})^2 - f'_{y_0}\,f'_{z_0} \quad (f'_{y_0})^2 - f'_{z_0}\,f'_{x_0} \quad (f'_{z_0})^2 - f'_{x_0}\,f'_{y_0} \qquad (65)$$

28. L'équation du plan tangent à une surface $f\,(x,\,y,\,z) = 0$ vérifie le système Σ. On peut toujours l'incorporer dans un système triple orthogonal, la droite qui a pour paramètres directeurs (65) sera l'intersection des deux autres plans passant par le point commun. Et ces trois plans forment un trièdre d'APPELL. Prenons un plan et un point de ce plan, on peut le prendre comme face d'un trièdre d'APPELL ayant ce point pour sommet, la troisième arête (non contenue dans le plan) de ce trièdre est la droite qui a pour paramètres directeurs (65).

Les droites dont les paramètres directeurs sont données par les expressions (65) où, $f\,(x,\,y,\,z) = 0$ est l'équation d'un plan, sont dites normales d'APPELL à toutes les surfaces tangentes au plan au point considéré. Réciproquement étant donné une droite et un point de cette droite, il passe par ce point deux perpendiculaires au sens d'APPELL à la droite considérée. Ces deux droites déterminent le plan normal d'APPELL en ce point à la droite donnée. Ceci nous amène à nous poser le problème suivant :

Problème. — Quel est au sommet d'un faisceau plan de droites l'enveloppe des plans normaux d'APPELL à toutes ces droites ? la théorie des formes polaires nous en donne la solution immédiate, cette enveloppe est la première polaire (64′) du plan des droites par rapport au cône isotrope ayant même sommet que le faisceau.

Application. — Cherchons l'équation normale d'un plan. Soit la droite issue de l'origine d'équations :

$$x = \rho P\ (\theta,\ \varphi)$$
$$y = \rho Q\ (\theta,\ \varphi)$$
$$z = \rho R\ (\theta,\ \varphi)$$

où θ, φ sont deux constantes et ρ la distance à l'origine du point considéré $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

L'équation du plan normal s'écrit

$$(x - x_0)\ [P^2(\theta,\ \varphi) - Q\ (\theta,\ \varphi)\ R\ (\theta,\ \varphi)] + (y - y_0)$$
$$[Q^2(\theta,\ \varphi) - R\ (\theta,\ \varphi)\ P\ (\theta,\ \varphi)] + (z - z_0)$$
$$[R^2(\theta,\ \varphi) - P\ (\theta,\ \varphi)\ Q\ (\theta,\ \varphi)]$$

our encore

$$xP^0(\theta,\ \varphi) + yR^0(\theta,\ \varphi) + zQ^0(\theta,\ \varphi) = d \qquad (66)$$
$$d = x_0\,P^0(\theta,\ \varphi) + y_0\,R^0(\theta,\ \varphi) + z_0\,Q^0(\theta,\ \varphi)$$

où d est la distance du point $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ à l'origine.

29. Prenons la surface $x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz = \rho^3$ qui, dans diverses théories, porte de ce fait des noms différents. On l'appelle aussi sphère affine, hyperboloïde cubique ou encore sphère d'Appell.

Pour montrer que c'est une surface de révolution, écrivons sous la forme

$$(x + y + z)\ (x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$$

On a d'autre part

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\,xy + 2\,yz + 2\,zx$$

d'où

$$xy + yz + zx = \frac{(x+y+z)^2}{2} - \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

donc

$$(x+y+z)\left[x^2+y^2+z^2+\frac{x^2+y^2+z^2}{2}-\frac{(x+y+z)^2}{2}\right]=\rho^3$$

ou encore

$$(x + y + z)\ [3\,(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2] = 2\,\rho^3$$

les surfaces S et P sont apparues. On a

$$P\ (3\,S - P^2) = 2\,\rho^3$$

c'est bien de la forme

$$f\ (s,\ p) = 0$$

La sphère d'Appell a l'origine pour centre. Les plans des parallèles sont parallèles au plan $x + y + z = 0$.

D'une manière générale, reconnaître si la surface ($f\ (x,\ y,\ z) = 0$ est ou n'est pas une surface de révolution.

Pour cela, il faut savoir si $f\ (x,\ y,\ z)$ est une fonction de S et P, sachant que :

$$S = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

et

$$P = Lx + My + Nz$$

Il faut que le Jacobien, ou déterminant fonctionnel, soit nul

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} & \frac{\delta f}{\delta y} & \frac{\delta f}{\delta z} \\ \frac{\delta S}{\delta x} & \frac{\delta S}{\delta y} & \frac{\delta S}{\delta z} \\ \frac{\delta P}{\delta x} & \frac{\delta P}{\delta y} & \frac{\delta P}{\delta z} \end{vmatrix} = 0$$

En effet si f est une fonction de S et P

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta f}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta P}\frac{\delta P}{\delta x}$$
$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\delta f}{\delta s}\frac{\delta S}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta P}\frac{\delta P}{\delta y}$$
$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta f}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta P}\frac{\delta P}{\delta z}$$

En substituant dans le déterminant les valeurs $\frac{\delta f}{\delta x}$, $\frac{\delta f}{\delta y}$ et $\frac{\delta f}{\delta z}$, on a :

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta f}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta P}\frac{\delta P}{\delta x} & \frac{\delta f}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta P}\frac{\delta P}{\delta y} & \frac{\delta f}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta z} + \frac{\delta f}{\delta P}\frac{\delta P}{\delta z} \\ \frac{\delta s}{\delta x} & \frac{\delta s}{\delta y} & \frac{\delta s}{\delta z} \\ \frac{\delta P}{\delta x} & \frac{\delta P}{\delta y} & \frac{\delta P}{\delta z} \end{vmatrix} = 0$$

En multipliant la 2e ligne par $\frac{\delta f}{\delta S}$ et la 3e par $\frac{\delta f}{\delta P}$ ajoutons la 2e et 3e en mettant la somme à la place de la 2e ligne ; le déterminant à deux lignes identiques est donc nul.

Prenons encore la surface $x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz = \rho^3$, si on y fait les changements de variables (20″), on obtient $\frac{\xi}{\cos\alpha}\frac{\zeta^2+\eta^2}{3\sin^2\alpha} = \rho^3$, on voit qu'il est sous la forme $\varphi\,(\zeta,\ \xi^2 + \eta^2) = 0$.

Elle établit une relation entre la distance d'un point au plan $\xi o \eta$ et sa distance à l'axe $o\zeta$, donc c'est une surface de révolution autour de l'axe $o\zeta$. Pour obtenir leur méridienne, il suffit de la couper par le plan $\xi o \zeta$, $\eta = 0$, ce qui donne la courbe

$$\xi^2\zeta - 2\,\rho^3 \cos\alpha\ \sin^2\alpha = 0$$

30. Soit un élément sphérique $d\,6$ sur sphère d'Appell et considérons dw l'élément découpé sur le cylindre circonscrit à la sphère d'Appell entre $d\,6$ redressé et dw. On a la relation [5]

$$\frac{d\,6\,P\,(\theta - \theta')}{r} = \frac{dw}{\rho} \qquad \text{mais} \qquad r = \rho P\,(\theta - \theta')$$

il en résulte

$$d\,6 = dw$$

Remarque. — Prenons la formule de STOKES

$$\iint_s \begin{vmatrix} dy\,dz & dz\,dx & dx\,dy \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

soit N une fonction homogène d'ordre — 2 d'après le théorème d'EULER

$$x\frac{\delta N}{\delta x} + y\frac{\delta N}{\delta y} + z\frac{\delta N}{\delta z} = -2\,N \tag{67}$$

Supposons que, dans la formule de STOKES $P = yN$, $Q = -xN$, $R = 0$ la formule devient

$$\iint_s \left[\left(\alpha x\frac{\delta N}{\delta z} + \beta y\frac{\delta N}{\delta z}\right) + \gamma\left(-N - x\frac{\delta N}{\delta x} - N - y\frac{\delta N}{\delta y}\right)\right] d6 =$$
$$= -\int_c N\,(x\,dy - y\,dx)$$

En tenant compte de (67) on aura

$$\iint \frac{\delta N}{\delta z}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,d6 = -\int N\,(x\,dy - y\,dx)$$

soient L et M deux fonctions homogènes d'ordre — 2 et écrivons des formules analogues avec $\frac{\delta L}{\delta x}$, $\frac{\delta M}{\delta y}$ en additionnant on a

$$\iint_s \left(\frac{\delta L}{\delta x} + \frac{\delta M}{\delta y} + \frac{\delta N}{\delta z}\right)(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,d6 = \int_c \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} \tag{68}$$

31. Rappelons comment on mesure un angle en géométrie plane ; on trace une circonférence de centre O. L'arc $\widehat{ab}$ est une mesure de $\widehat{AOB}$.

Dans cet espace de o comme centre, traçons une sphère d'APPELL de rayon 1. Le cône (dans cet espace) découpe sur cette sphère une certaine aire.

Il y a, dans le cône, un angle spatial correspondant au contour c et qui est mesuré par l'aire sphérique π découpée sur la sphère d'APPELL.

Soit un élément d'aire $d\,6$ considéré sur la cloison S. Il faut calculer l'élément d'aire sphérique correspondant. La comparaison directe n'est pas possible, car ces éléments peuvent être considérés comme plans (au sens d'APPELL) mais non parallèles.

Projetons $d6$ sur la sphère d'APPELL auxiliaire centrée en o et passant par $d6$. En désignant par λ l'angle de oM et de la normale oN (dans cet espace).

P $(\theta - \theta')\, d6$ est l'élément $d6$ redressé, on a donc

$$\frac{d\pi}{1^2} = \frac{\mathrm{P}(\theta - \theta')\, d6}{r^2} \qquad \text{avec} \qquad r = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz}$$

Évaluons P $(\theta - \theta')$

λ est l'angle de deux directions de cosinus directeurs α, β, γ et

$$\frac{x}{r} \quad \frac{y}{r} \quad \frac{z}{r}$$

donc

$$\mathrm{P}(\theta - \theta') =$$
$$= \frac{x(\alpha^2 - \beta\gamma) + y(\beta^2 - \alpha\gamma) + z(\gamma^2 - \alpha\beta)}{r\sqrt[3]{[(\alpha^2 - \beta\gamma)^3 + (\beta^2 - \alpha\gamma)^3 + (\gamma^2 - \alpha\beta)^3 - 3(\alpha^2 - \beta\gamma)(\beta^2 - \alpha\gamma)(\gamma^2 - \alpha\beta)]^2}}$$

mais

$$(\alpha^2 - \beta v)^3 + (\beta^2 - \alpha v)^3 + (\gamma^2 - \alpha\beta)^3 - 3\,(\alpha^2 - \beta\gamma)$$
$$(\beta^2 - \alpha\gamma)\,(\gamma^2 - \alpha\beta) = (d^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\,\alpha\beta\gamma)^2$$

et comme d'ailleurs

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\,\alpha\beta\gamma = 1$$

et en posant

$$\alpha^2 - \beta\gamma = \lambda$$
$$\beta^2 - \alpha\gamma = \mu$$
$$\gamma^2 - \alpha\beta = \gamma$$

on a donc

$$d\pi = d6\,\frac{\lambda x + \mu y + \gamma z}{r^3}$$

Remarquons bien que l'expression $\lambda x + \mu y + \gamma z$ est la distance du point (M (x, y, z) à l'origine dans cet espace.

Dans ces conditions, on a l'intégrale double étendue à la cloison S :

$$\pi = \iint_{\mathrm{S}} \frac{\lambda x + \mu y + \gamma z}{r^3}\, d6$$

Pour que cette intégrale double soit stokienne, on doit avoir :

$$\frac{\delta}{\delta x}\frac{x}{r^3} + \frac{\delta}{\delta y}\frac{y}{r^3} + \frac{\delta}{\delta z}\frac{z}{r^3} = 0$$

avec

$$r^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz$$

Ceci est identiquement vérifié. En effet,

$$\frac{r^3 - 3\,x(x^2 - yz) + r^3 - 3\,y(y^2 - xz) + r^3 - 3\,z(z^2 - xy)}{r^6} =$$

$$= \frac{(a^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz) - 3(x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz)}{r^6} = 0$$

On peut appliquer (68) et il suffit de déterminer les fonctions L, M et N homogènes d'ordre — 2, telles que :

$$\frac{\delta L}{\delta x}+\frac{\delta M}{\delta y}+\frac{\delta N}{\delta z}=\frac{1}{r^3}$$

Le problème est évidemment indéterminé. On peut le résoudre simplement en prenant L = 0, M = 0

$$\frac{\delta N}{\delta z}=\frac{1}{x^3+y^3+z^3-3\,xyz}$$

donc

$$N=\int\frac{dz}{x^3+y^3+z^3-3\,xyz}=\int\frac{dz}{3\,(x^2+y^2+xy)\,(x+y+z)}-$$

$$-\int\frac{z\,dz-\frac{1}{2}\,(x+y)\,dz}{3\,(x^2+y^2+xy)\,(z^2-(x+y)\,z+x^2+y^2-xy)}+$$

$$+\int\frac{(x+y)\,dz}{3-2\,(x^2+y^2+xy)\,(z^2-z\,(x+y)+x^2+y^2-x)}+c$$

Pour réduire le 3^e^ terme posons $t=\dfrac{2\,z-(x+y)}{\sqrt{3}\,(x-y)}$

il revient

$$\frac{\sqrt{3}\,(x+y)}{x-y}\int\frac{dt}{1+t^2}$$

donc

$$N=\frac{1}{3\,(x^2+y^2+xy)}$$

$$\left[\log\frac{x+y+z}{(z^2-(x+y)z+x^2+y^2-xy)}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,(x+y)}{x-y}.\mathrm{arc\,tg}\frac{2z-(x+y)}{\sqrt{3}\,(x-y)}\right]+C$$

Donc N est une fonction homogène d'ordre — 2 et (C) est une fonction de x, y prenons égale à zéro.

Alors, d'après (68) en prenant L = 0 M = 0 N $=-\frac{1}{2}$, on obtient

$$\pi=\frac{1}{2}\int_c x\,dy-y\,dx \tag{69}$$

donc le cône déterminera, sur sphère d'Appell, une aire π et sur la surface S, un contour dont la projection, sur oxy enfermera une aire plane égale à π. Il n'y a qu'un moyen parmi d'autres, de faire une carte plane de la sphère d'Appell avec conservation des aires. Ce procédé cartographique fait intervenir la surface 2 N = — 1, mais la détermination de N n'exige qu'une quadrature élémentaire à résultat algébrico-logarithmique. Donc on peut, par des opérations algébrico-logarithmiques, transporter, sur la sphère d'APPELL, toute aire plane donnée, quelle que soit sa nature arithmétique.

32. On peut représenter la sphère d'APPELL paramétriquement par les formules

$$x = \rho_0 \, P \; (\theta, \; \varphi)$$
$$y = \rho_0 \, Q \; (\theta, \; \varphi)$$
$$z = \rho_0 \, R \; (\theta, \; \varphi)$$

Les paramètres directeurs de la normale d'après (65) au point x_0, y_0, z_0 sont :

$$(x^2{}_0 - y_0 \, z_0)^2 - (y^2{}_0 - x_0 \, z_0) \; (z^2{}_0 - x_0 \, y_0) = x^4{}_0 + y^2{}_0 \, z^2{}_0 -$$
$$- 2 \, x^2{}_0 \, y_0 \, z_0 - (y^2{}_0 \, z^2{}_0 - z^2{}_0 \, x_0 \, z_0 - x_0 \, y^3{}_0 + x^2{}_0 \, y_0 \, z_0) =$$
$$= x_0 \, (x^3{}_0 + y^3{}_0 + z^3{}_0 - 3 \, y_0 \, z_0 \, x_0) = x_0 \, \rho^3{}_0$$

c'est-à-dire

$$(x^2{}_0 - y_0 \, z_0)^2 - (y^2{}_0 - x_0 \, z_0) \; (z^2{}_0 - x_0 \, y_0) = x_0 \, \rho^3{}_0$$
$$(y^2{}_0 - x_0 \, z_0)^2 - (z^2{}_0 - x_0 \, y_0) \; (x^2{}_0 - y_0 \, z_0) = y_0 \, \rho^3{}_0$$
$$(z^2{}_0 - x_0 \, y_0)^2 - (x^2{}_0 - y_0 \, z_0) \; (y^2{}_0 - x_0 \, z_0) = z_0 \, \rho^3{}_0$$

La normale est donc confondue avec le rayon vecteur.

L'équation du plan tangent au point θ_0, φ_0 s'écrit :

$$(x - x_0) \; (x^2 - yz) + (y - y_0) \; (y^2 - xz) + (z - z_0) \; (z^2 - xy) = 0$$

ou encore :

$$x P^0 \, (\theta, \; \varphi) + y R^0 \, (\theta, \; \varphi) + z Q^0 \, (\theta, \; \varphi) = \rho_0 \qquad (70)$$

33. Comme en géométrie plane [4] les coordonnées d'un point d'une droite en fonction d'un paramètre s'écrivent :

$$x = z_0 + a\lambda$$
$$y = y_0 + b\lambda$$
$$z = z_0 + c\lambda$$

Avec $a^3 + b^3 + c^3 - 3 \, abc = 1$.

En substituant les valeurs x, y, z dans l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3 \, xyz = \rho^3$$

l'équation aux λ des points d'intersections de la droite et de la surface est :

$$(x_0 + a\lambda)^3 + (y_0 + b\lambda)^3 + (z_0 + c\lambda)^3 - 3 \; (x_0 + a\lambda) \; (y_0 + b\lambda)$$
$$(z_0 + c\lambda) - \rho^3 = x^3{}_0 + y^3{}_0 + z^3{}_0 - 3 \, x_0 \, y_0 \, z_0 - \rho^3 +$$
$$+ 3 \, \lambda \, (ax^2{}_0 + by^2{}_0 + cz^2{}_0 - ay_0 \, z_0 - bx_0 \, z_0 - cx_0 \, y_0) +$$
$$+ 3 \, \lambda^2 \, (a^2 \, x_0 + l^2 \, y_0 + c^2 \, z_0 - abz_0 - acy_0 - bcx_0) +$$
$$+ \lambda^3 \, (a^3 + b^3 + c^3 - 3 \, abc) = 0$$

Le produit des 3 racines λ_1, λ_2, λ_3 s'écrit donc :

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \rho^3{}_0 - \rho^3$$

où ρ_0 est la distance oM. On appelle la valeur $\rho^3{}_0 - \rho^3$ la puissance du point par rapport à la surface. Le lieu des surfaces d'égale puissance sont des sphères d'Appell concentriques.

34. On peut définir une transformation analogue à l'inversion dans le plan, si on pose [6]

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x^2 - yz}{p} \mathrm{K} \\ \eta &= \frac{y^2 - xz}{p} \mathrm{K} \\ \zeta &= \frac{z^2 - xy}{p} \mathrm{K} \end{aligned} \tag{71}$$

avec

$$p = x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz$$

Remarquons l'identité

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \mathrm{K}$$

et encore

$$\begin{aligned} \xi^2 - \eta\zeta &= \mathrm{K}^2 \frac{x}{p} \\ \eta^2 - \xi\zeta &= \mathrm{K}^2 \frac{y}{p} \\ \zeta^2 - \xi\eta &= \frac{\mathrm{K}^2 z}{p} \end{aligned}$$

Prenons deux points M (x, y, z) et μ (ξ, η, ζ), lesquels vérifient les relations :

$$\frac{\xi}{x^2 - yz} = \frac{\eta}{y^2 - zx} = \frac{\zeta}{z^2 - xy} = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz} = \frac{\mathrm{K}}{\rho^3}$$

donc

$$\begin{aligned} \xi^3 &= (x^2 - yz)^3 \frac{\mathrm{K}^3}{\rho^9} \\ \eta^3 &= (y^2 - xz)^3 \frac{\mathrm{K}^3}{\rho^9} \\ \zeta^3 &= (z^2 - xy)^3 \frac{\mathrm{K}^3}{\rho^9} \end{aligned} \tag{72}$$

et

$$\xi\eta\zeta = \frac{\mathrm{K}^3}{\rho^9} (x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$$

d'où

$$\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 - 3\,\xi\eta\zeta =$$

$$= \frac{\mathrm{K}^3}{\rho^9} \left[(x^2 - yz)^3 + (y^2 - zx)^3 + (z^2 - xy)^3 - 3\,(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy) \right]$$

ou encore

$$\xi^3+\eta^3+\zeta^3-3\,\xi\eta\zeta=\frac{K^3}{\rho^3}\equiv\frac{K^3}{\rho^9}\,(x^3+y^3+z^3-3\,xyz)^2$$

de même

$$\frac{x}{\xi^2-\eta\zeta}=\frac{y}{\eta^2-\xi\zeta}=\frac{z}{\zeta^2-\xi\eta}=\frac{K}{\xi^3+\eta^3+\zeta^3-3\,\xi\eta\zeta}\,.$$

ce qui montre les rôles réciproques jouës par les points M, et μ. On a d'ailleurs les relations

$$(x^2-yz)\,(\xi^2-\eta\zeta)+(y^2-xz)\,(\eta^2-\xi\zeta)+(z^2-xy)\,(\zeta^2-\xi\eta)=K^2$$

on voit facilement que les droites oM et $o\mu$ sont dans le même plan avec l'axe $x=y=z$.

35. On peut exprimer la transformation au moyen des coordonnées ρ, θ, φ, le point

$$x=\rho P\ (\theta,\ \varphi)$$
$$y=\rho Q\ (\theta,\ \varphi)$$
$$z=\rho R\ (\theta,\ \varphi)$$

alors d'après ce qui précède

$$\xi=\frac{K}{\rho}\,P\,(-\theta-\varphi)=\frac{K}{\rho}\,P^0(\theta,\varphi)\ .$$
$$\eta=\frac{K}{\rho}\,Q\,(-\theta-\varphi)=\frac{K}{\rho}\,R^0(\theta,\varphi)$$
$$\zeta=\frac{K}{\rho}\,R\,(-\theta-\varphi)=\frac{K}{\rho}\,Q^0(\theta,\varphi)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\rho_1=\frac{K}{\rho}\qquad\Theta=-\varphi\qquad\Phi=-\theta$$

c'est-à-dire

$$x=\rho_1\,P\ (\theta,\ \varphi)$$
$$y=\rho_1\,Q\ (\theta,\ \varphi)$$
$$z=\rho_1\,R\ (\theta,\ \varphi)$$

Donc la transformation échange les surfaces concentriques $\rho=C^{te}$ et du reste la transformation revient à une sorte de symétrie par rapport à la courbe $\theta+\varphi=C^{te}$.

Si on prend les courbes $\theta=C^{te}$, $\varphi=C^{te}$ tracées sur la sphère d'Appell, ces courbes forment un réseau orthogonal.

Comme d'après ce qui précède les familles de surfaces

$$\rho=a\qquad\theta=b\qquad\varphi=c$$

forment un système triple orthogonal.

ABBAS-RIAZI KERMANI

Dans la formule (24″) si on fait $\rho = \rho_0 = C^{te}$, on a :

$$ds = \sqrt[3]{\rho^3_0 (d\theta^3 + d\varphi^3)} \tag{73}$$

et la distance géodésique entre deux points M_1 (θ_1, φ_1) et M_2 (θ_2, φ_2) est donnée par la formule :

$$M_1 M_2 = \sqrt[3]{\rho^3_0 (\theta_2 - \theta_1)^3 + (\varphi_2 - \varphi_1)^3}$$

Considérons le plan xoy d'un trièdre d'APPELL. La distance de deux points M_1 et M_2 infiniment voisins est

$$ds = \sqrt[3]{dx^3 + dy^3}$$

et pour deux points distincts M_1 (x_1, y_1) et M_2 (x_2, y_2)

$$ds = \sqrt[3]{(x_2 - x_1)^3 + (y_2 - y_1)^3}$$

on peut donc établir une correspondance entre la sphère d'APPELL et d'un plan.

Si nous prenons

$$\begin{aligned} x &= \rho_0 \theta \\ y &= \rho_0 \varphi \end{aligned} \tag{74}$$

la mesure de longueur sera

$$ds = \sqrt[3]{\rho^3_0 (d\theta^3 + d\varphi^3)}$$

sur le plan qui est le même que sur la sphère (73).

Prenons deux courbes de la surface et leur représentation plan essayons de voir si l'angle d'APPELL de ces deux courbes est le même que celui de leurs représentations.

On suppose les courbes issues du point $\theta = \varphi = 0$, on a donc

$$\begin{aligned} \theta &= \lambda \varphi \\ \theta &= \mu \varphi \end{aligned} \tag{75}$$

Les paramètres directeurs de la tangente pour la 1re courbe sont

$$dx \qquad dy \qquad dz$$

et pour la 2e

$$\delta x \qquad \delta y \qquad \delta z$$

l'angle de deux directions sera :

$$\frac{dx\,(\delta x^2 - \delta y\,\delta z) + dy\,(\delta y^2 - \delta x\,\delta z) + dz\,(\delta z^2 - \delta x\,\delta y)}{\sqrt[3]{\begin{gathered}(dx^3 + dy^2 + dz^3 - 3\,dx\,dy\,dz) \\ \begin{bmatrix}(\delta x^2 - \delta y\,\delta z)^3 + (\delta y^2 - \delta x\,\delta z)^3 + (\delta z^2 - \delta x\,\delta y)^3 \\ -3\,(\delta x^2 - \delta y\,\delta z)\,(\delta y^2 - \delta x\,\delta z)\,(\delta z^2 - \delta x\,\delta y)\end{bmatrix}\end{gathered}}} \tag{76}$$

mais d'après (54), (56), (74), (75)

$$\begin{aligned} dx &= (\lambda R + Q)\ d\varphi & \delta x &= (\mu R + Q)\ \delta\varphi \\ dy &= (\lambda P + R)\ d\varphi & \delta y &= (\mu P + R)\ \delta\varphi \\ dz &= (\lambda Q + P)\ d\varphi & \delta z &= (\mu Q = P)\ \delta\varphi \end{aligned} \tag{77}$$

donc (76) s'écrit

$$\frac{1+\lambda\mu^2}{\sqrt[3]{(1+\lambda^3)(1+\mu^3)^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1+\lambda^2\mu}{\sqrt[3]{(1+\lambda^3)^2(1+\mu^3)}} \tag{78}$$

Pour la représentation du plan xoy on a $dz = \delta z = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ll} dx = \lambda\, dy & \delta x = \mu\, \delta y \\ dy = dy & \delta y = \delta y \\ dz = 0 & \delta z = 0 \end{array}$$

et le calcul de (76) redonne les expressions (78).

Si on prend comme élément d'aire $d\,6$ (20) la transformation (75) établit une correspondance à aire égale entre le plan oxy et la sphère d'Appell.

Donc on peut énoncer le théorème suivant :

La sphère d'Appell est applicable sur tout plan de l'espace. On en déduit que les lignes géodésiques de la surface sont les courbes

$$a\theta + b\varphi + c = 0 \tag{79}$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires.

36. **Mouvement d'un point pesant sur la courbe $\rho = \rho_0 = C^{te}$ et $\varphi = \varphi_0 = C^{te}$ tracée sur la sphère d'Appell.** — On a en prenant la direction de oz dans le trièdre d'Appell vers le haut

$$\begin{aligned} M\frac{d^2x}{dt^2} &= N\frac{x}{\rho_0} \\ M\frac{d^2y}{dt^2} &= N\frac{y}{\rho_0} \\ M\frac{d^2z}{dt^2} &= N\frac{z}{\rho_0} - Mg \end{aligned} \tag{80}$$

En multipliant les équations (80) respectivement par $dx^2 - dy\,dz$, $dy^2 - dx\,dz$, $dz^2 - dx\,dy$ et en ajoutant membre à membre, on obtient :

$$M\left[\left(\frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy\,dz}{dt^2}\right)d^2x + \left(\frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dx\,dz}{dt^2}\right)d^2y + \left(\frac{dz^2}{dt^2} - \frac{dx\,dy}{dt^2}\right)d^2z\right] =$$

$$= \frac{N}{\rho_0}[x(dx^2 - dy\,dz) + y(dy^2 - dx\,dz) + z(dz^2 - dx\,dy)] - Mg(dz^2 - dx\,dy)$$

le premier membre peut s'écrire

$$\frac{M}{3}d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^3 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^3 - 3\frac{dx\,dy\,dz}{dt^3}\right] = \frac{N}{\rho_0}[x(dx^2 - dy\,dz\ldots)]$$

En passant en coordonnées polaires (7), et l'on fait ρ = constante et $\varphi = \varphi_0 = C^{te}$

$$\frac{M}{3} d\left(\rho^3{}_0 \frac{d\theta^3}{dt^3}\right) = -Mg\,\rho^2{}_0 (Q^2 - PR)\, d\theta^2 +$$
$$+ \frac{N}{\rho_0} \rho^3{}_0 [P(R^2 - PQ) + Q(P^2 - QR) + R(Q^2 - PR)]$$

en tenant compte de (47) le 2e membre s'écrit

$$\frac{M}{3} d\left(\rho^3{}_0 \frac{d\theta^3}{dt^3}\right) = -Mg\rho^2{}_0 (Q^2 - PR)\, d\theta^2 \qquad (81)$$

évaluons l'angle de deux directions R (o, o) et R (θ, φ_0). C'est-à-dire d'après la formule (13)

$$R\ (o - \theta,\ o - \varphi) = Q\ (o,\ o)\ Q\ (-\theta,\ -\varphi) + R\ (o,\ o)$$
$$P\ (-\theta,\ -\varphi_0) + P\ (o,\ o)\ R\ (-\theta,\ -\varphi_0)$$

mais d'après (27) le 2e membre (81) s'écrit :

$$\frac{M}{3} d\left(\rho^3{}_0 \frac{d\theta^3}{dt^3}\right) = -Mg\rho^2{}_0 R(0 - \theta, 0 - \varphi_0)$$

ou enfin

$$\theta'' + \frac{g}{\rho_0} R^0(\theta, \varphi_0) = 0 \qquad (82)$$

qu'il est analogue à la formule de pendule simple dans l'espace de Riemann à 3 indices. Et de même le travail de Réaction est nul en ne tenant pas compte du frottement. D'après la formule (55) on a :

$$m\frac{dv}{dt} = F_t \qquad \text{et} \qquad \frac{ds}{dt} = v$$

multiplions par ds et remplaçons $\frac{ds}{dt}$ par v on a :

$$dm\frac{v^2}{2} = F_t\, ds$$

équation dont le 2e membre est le travail élémentaire de F correspondant au déplacement ds.

37. Soit une courbe gauche Γ. Supposons que les coordonnées d'un point M de cette courbe soient fonction de l'abscisse curviligne :

$$x = x\ (s)$$
$$y = y\ (s)$$
$$z = z\ (s) \qquad (83)$$

les cosinus directeurs de la tangente au point M seront :

$$x' = \frac{dx}{ds} = \alpha \qquad y' = \frac{dy}{ds} = \beta \qquad z' = \frac{dz}{ds} = \gamma \qquad (84)$$

avec

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\,\alpha\beta\gamma = 1\,.$$

l'équation du plan normal au point M sera :

$$(X - x)\,(x'^2 - y'z') + (Y - y)\,(y'^2 - x'z') + (Z - z)\,z'^2 - y'x') = 0$$

Comme la théorie de contact est encore valable, l'équation du plan osculateur est :

$$(X - x)\;(y'z'' - z'y'') \;+\; (Y - y)$$
$$(z'x'' - x'z'') + (Z - z)\;(x'y'' - y'x'') = 0$$

Ces deux plans se coupent suivant une droite que l'on appellera normale principale à la courbe.

Les coefficients directeurs de cette droite sont x'' y'' z''. Si on désigne par α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale principale

$$\frac{x''}{\sqrt[3]{x''^3 + y''^3 + z''^3 - 3\,x''\,y''\,z''}} = \alpha' \qquad \text{et} \qquad x' = R\,\frac{d\alpha}{ds} = \alpha'$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\alpha'}{R} \\ \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\beta'}{R} \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\gamma'}{R} \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{R^3} = x''^3 + y''^3 + z''^3 - 3x''y''z'' \end{aligned} \tag{85}$$

Ce sont les formules de FRENET.

Nous avons utilisé les deux identités

$$x'^3 + y'^3 + z'^3 - 3\,x'y'z' = 1$$
$$x''\,(x'^2 - y'z') + y''\,(y'^2 - x'z') + z''\,(z'^2 - x'y') = 0$$

Application. — Prenons la courbe $\varphi = \varphi_0$ sur une surface $\rho = \rho_0$, on a les équations paramétriques

$$\begin{aligned} x &= \rho_0\,P\;(\theta,\,\varphi_0) \qquad & dx &= \rho_0\,R\,d\theta \\ y &= \rho_0\,Q\;(\theta,\,\varphi_0) \qquad & dy &= \rho_0\,P\,d\theta \\ z &= \rho_0\,R\;(\theta,\,\varphi_0) \qquad & dy &= \rho_0\,Q\,d\theta \end{aligned} \tag{86}$$

et comme $ds = \rho_0\,d\theta$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{dx}{ds} = R\,(\theta,\,\varphi_0) \\ \beta &= \frac{dy}{ds} = P\,(\theta,\,\varphi_0) \\ \gamma &= \frac{dz}{ds} = Q\,(\theta,\,\varphi_0) \end{aligned} \tag{87}$$

l'équation du plan normal s'écrit :

$$(X - x)\,[R^2 - PQ] + (Y - y)\,[P^2 - RQ] + (Z - z)\,[Q^2 - PR] = 0$$

ou encore

$$XQ^0(\theta, \varphi_0) + YP^0(\theta, \varphi_0) + ZR^0(\theta, \varphi_0) = 0$$

ce plan passe donc par l'origine.

Les cosinus directeurs de la normale principale, sont :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dR}{ds} = Q(\theta, \varphi_0).$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{dP}{ds} = R(\theta, \varphi_0)$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{dQ}{ds} = P(\theta, \varphi_0)$$

ou encore

$$Q(\theta, \varphi_0) \qquad R(\theta, \varphi_0) \qquad P(\theta, \varphi_0)$$

on voit que le trièdre formé par le rayon vecteur normal et la normale principale est un trièdre régulier au sens d'APPELL.

R	$P(\theta, \varphi_0)$	$Q(\theta, \varphi_0)$	$R(\theta, \varphi_0)$
N	$R(\theta, \varphi_0)$	$P(\theta, \varphi_0)$	$Q(\theta, \varphi_0)$
NP	$Q(\theta, \varphi_0)$	$R(\theta, \varphi_0)$	$P(\theta, \varphi_0)$

Ce qui montre que cette normale est orthogonale au sens d'APPELL au rayon vecteur, c'est-à-dire le plan osculateur à la courbe est le plan tangent à la surface $\rho = \rho_0$.

Les courbes $\varphi = \varphi_0$ sont donc (comme dans l'espace de RIEMANN à 3 indices) des lignes asymptotiques de la surface $\rho = \rho_0$ et le rayon de courbure est égal à ρ_0.

38. Nous avons démontré que si $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ vérifient un système (S) les trois familles de surfaces d'équations.

$$\begin{aligned} X(x, y, z) &= \alpha \\ Y(x, y, z) &= \beta \\ Z(x, y, z) &= \gamma \end{aligned} \tag{88}$$

forment un système triple orthogonal au sens d'APPELL. Cherchons réciproquement les conditions que doivent vérifier X, Y, Z pour que les équations (88) définissent un système triple orthogonal au sens d'APPELL.

D'après ce que nous venons de voir, on peut écrire les relations suivantes

$$\begin{aligned} a &= \lambda c'' \qquad & b' &= \mu c'' \\ b &= \lambda a'' \qquad & c' &= \mu a'' \\ c &= \lambda b'' \qquad & a' &= \mu b'' \end{aligned}$$

où λ, μ sont deux fonctions arbitraires.

On peut voir facilement que les dérivées de X, Y, Z par rapport à x, y, z sont les mineures du déterminant.

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

$$\frac{\delta X}{\delta x} = b' c'' - c' b'' = \mu (c''^2 - a'' b'')$$

$$\frac{\delta X}{\delta y} = c' a'' - a' c'' = \mu (a''^2 - b'' c'')$$

$$\frac{\delta X}{\delta z} = a' b'' - b' a'' = \mu (b''^2 - a'' c'')$$

$$\frac{\delta Y}{\delta x} = b'' c - c'' b = \lambda (b''^2 - a'' c'')$$

$$\frac{\delta Y}{\delta y} = c'' a - a'' c = \lambda (c''^2 - a'' b'')$$

$$\frac{\delta Y}{\delta z} = a'' b - b'' a = \lambda (a''^2 - b'' c'')$$

$$\frac{\delta Z}{\delta x} = bc' - cb' = \lambda\mu (a''^2 - b'' c'')$$

$$\frac{\delta Z}{\delta y} = ca' - ac' = \lambda\mu (b''^2 - a'' c'')$$

$$\frac{\delta Z}{dz} = ab' - ba' = \lambda\mu (c''^2 - a'' b'')$$

Donc X, Y, Z vérifient le système d'équations aux dérivées partielles.

$$\lambda \frac{\delta X}{\delta x} = \mu \frac{\delta Y}{\delta y} = \frac{\delta Z}{\delta z}$$

$$\lambda \frac{\delta X}{\delta z} = \mu \frac{\delta Y}{\delta x} = \frac{\delta Z}{\delta y}$$

$$\lambda \frac{\delta X}{\delta y} = \mu \frac{\delta Y}{\delta z} = \frac{\delta Z}{\delta x}$$

système déduit de (S) par multiplication des deux premières colonnes par les facteurs λ, μ.

Si on prend l'autre hypothèse de proportionnalité des a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', on trouve de même un système analogue à (56) en ne se restreignant plus au seul domaine réel ; nous verrions apparaître des systèmes analogues à (S_2) (S_3) (S_4) (S_5) que nous appelons système (S'') ces systèmes. Alors nous pouvons énoncer :

Pour que les équations (88) définissent un système triple orthogonal au sens d'APPELL, il faut, et il suffit que les fonctions X (x, y, z), Y (x, y, z), Z (x, y, z) vérifient un système (S′). Dans le cas où le système (S″) se réduit à un système (S) on a de plus un système isotherme de surfaces.

39. Soit la surface $\rho = Ce^{\alpha\theta + \beta\varphi}$ qui est une généralisation de la spirale logarithmique du plan Euclidien.

Prenons un point M sur cette surface. A ce point passe une courbe Γ en supposant la courbe issue du point $\theta = \varphi = 0$, on a donc $\theta = \lambda\varphi$.

Les coordonnées paramétriques d'un point de Γ s'écrivent :

$$\begin{aligned} x &= Ce^{(\alpha\lambda+\beta)\varphi}\, P\,(\lambda\varphi,\ \varphi) \\ y &= Ce^{(\alpha\lambda+\beta)\varphi}\, Q\,(\lambda\varphi,\ \varphi) \\ z &= Ce^{(\alpha\lambda+\beta)\varphi}\, R\,(\lambda\varphi,\ \varphi) \end{aligned}$$

Les paramètres directeurs de la tangente au point M sont en posant $\alpha\lambda + \beta = \mu$

$$\begin{aligned} dx &= Ce^{\mu\varphi}\,(\mu P + \lambda R + Q)\, d\varphi \\ dy &= Ce^{\mu\varphi}\,(\mu Q = \lambda P + R)\, d\varphi \\ dz &= Ce^{\mu\varphi}\,(\mu R + \lambda Q + P)\, d\varphi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ds^3 &= dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\, dx\, dy\, dz = \\ &= C^3 e^{3\varphi\mu}\,(1 + \lambda^3 + \mu^3 - 3\,\mu\lambda)\, d\varphi^3 \end{aligned}$$

d'autre part

$$dx^2 - dy\, dz = C^2 e^{2\mu\varphi}$$
$$[(\mu^2 - \lambda)\ (P^2 - QR) + (\lambda^2 - \mu)\ (R^2 - PQ) + (1 - \lambda\mu)\ (Q^2 - PR)]$$
$$dy^2 - dx\, dz = C^2 e^{2\mu\varphi}$$
$$[(\mu^2 - \lambda)\ (Q^2 - PR) + (\lambda^2 - \mu)\ (P^2 - QR) + (1 - \lambda\mu)\ (R^2 - PQ)]$$
$$dz^2 - dx\, dy = C^2 e^{2\mu\varphi}$$
$$[(\mu^2 - \lambda)\ (R^2 - PQ) + (\lambda^2 - \mu)\ (Q^2 - PR) + (1 - \lambda\mu)\ (P^2 - QR)]$$

et comme

$$\begin{aligned} &(dx^2 - dy\, dz)^3 + (dy^2 - dx\, dz)^3 + (dz^2 - dx\, dy)^3 - \\ &- 3\,(dx^2 - dy\, dz)\ (dy^2 - dx\, dz)\ (dz^2 - dx\, dy) = \\ &= (dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\, dx\, dy\, dz)^2 = \\ &= C^6 e^{6\mu\varphi}\,(1 + \lambda^3 + \mu^3 - 3\,\mu\lambda)^2\, d\varphi^6 \end{aligned}$$

Soit (θ, φ) l'angle de la tangente avec le rayon vecteur nous aurons

$$P(\Theta, \Phi) =$$
$$= \frac{Ce^{\mu\varphi}}{\sqrt[3]{ds^3}}[(P^2 - QR)(\mu P + \lambda R + Q) + (Q^2 - PR)(\mu Q + \lambda P + R) + (R^2 - PQ)(\mu R + \lambda Q + P)] =$$

$$= \frac{\mu}{(\mu^3 + \lambda^3 + 1 - 3\,\mu\lambda)} \tag{89}$$

$$P(-\Theta,-\Phi)=$$

$$=\frac{P}{ds^{\frac{2}{3}}}[(\mu^2-\lambda)(P^2-QR)+(\lambda^2-\mu)(R^2-PQ)+(1-\lambda\mu)(Q^2-PR)]+$$

$$+\frac{Q}{ds^{\frac{2}{3}}}[(\mu^2-\lambda)(Q^2-PR)+(\lambda^2-\mu)(P^2-QR)+(1-\mu\lambda)(R^2-PQ)]+$$

$$+\frac{R}{ds^{\frac{2}{3}}}[(\mu^2-\lambda)(R^2-PQ)+(\lambda^2-\mu)(Q^2-PR)+(1-\mu\lambda)(P^2-QR)]=$$

$$=\frac{\mu^2-\lambda}{(\mu^3+\lambda^3+1-3\mu\lambda)^{\frac{2}{3}}} \tag{89'}$$

Les seconds membres par chaque courbe sont des constantes. L'angle (Θ,Φ) est donc constant et ceci généralise la propriété classique de la spirale logarithmique.

40. On peut traiter cette question d'une manière différente, en démontrant que l'angle de la normale d'Appell à la surface

$$\rho - Ce^{\alpha\theta+\beta\varphi} \equiv f\ (x,\ y,\ z) = 0$$

(c, α, β sont des constantes), avec le rayon vecteur est constant.

Les paramètres directeurs de la normale d'Appell d'après (65), sont

$$\begin{aligned} a &= (f'x)^2{}_0-(f'y)_0\,(f'z)_0\\ b &= (f'y)^2{}_0-(f'x)_0\,(f'y)_0\\ c &= (f'z)^2{}_0-(f'x)_0\,(f'x)_0 \end{aligned}$$

d'ailleurs on a d'après (8)

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x} &= P^0(\theta,\varphi)-\alpha Q^0(\theta,\varphi)-\beta R^0(\theta,\varphi)\\ \frac{\delta f}{\delta y} &= R^0(\theta,\varphi)-\alpha P^0(\theta,\varphi)-\beta Q^0(\theta,\varphi)\\ \frac{\delta f}{\delta z} &= Q^0(\theta,\varphi)-\alpha R^0(\theta,\varphi)-\beta P^0(\theta,\varphi) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a &= (1-\alpha\beta)\ P\ (\theta,\ \varphi)+(\beta^2+\alpha)\ Q\ (\theta,\ \varphi)+(\alpha^2+\beta)\ R\ (\theta,\ \varphi)\\ b &= (1-\alpha\beta)\ Q\ (\theta,\ \varphi)+(\beta^2+\alpha)\ R\ (\theta,\ \varphi)+(\alpha^2+\beta)\ P\ (\theta,\ \varphi)\\ c &= (1-\alpha\beta)\ R\ (\theta,\ \varphi)+(\beta^2+\alpha)\ P\ (\theta,\ \varphi)+(\alpha^2+\beta)\ Q\ (\theta,\ \varphi) \end{aligned}$$

et comme

$$a^3+b^3+c^3-3\,abc=(1-\alpha^3-\beta^3-3\,\alpha\beta)^2$$

$$a^2-bc=(1-\alpha^3-\beta^3-3\,\alpha\beta)\,\frac{\delta f}{\delta x}$$

$$b^2 - ac = (1 - \alpha^3 - \beta^3 - 3\,\alpha\beta)\frac{\delta f}{\delta y}$$

$$c^2 - ab = (1 - \alpha^3 - \beta^3 - 3\,\alpha\beta)\frac{\delta f}{\delta z}$$

on a d'ailleurs

$$(a^2 - bc)^3 + (b^2 - ac)^3 + (c^2 - ab)^3 - 3\,(a^2 - bc)\,(b^2 - ac)\,(c^2 - ab) = (a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc)^2$$

soit (θ, φ) l'angle de la normale d'APPELL avec le rayon vecteur nous aurons (35)

$$\mathrm{P}(\theta, \varphi) = \frac{a\mathrm{P}^0(\theta, \varphi) + b\mathrm{R}^0(\theta, \varphi) + c\mathrm{Q}^0(\theta, \varphi)}{\sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc}}$$

$$\mathrm{P}(-\theta, -\varphi) = \frac{\mathrm{P}(\theta, \varphi)\,(a^2 - bc) + \mathrm{Q}(\theta, \varphi)\,(b^2 - ac) + \mathrm{R}(\theta, \varphi)\,(c^2 - ab)}{\sqrt[3]{[a^3 + b^3 + c^3 - 3\,abc]^2}}$$

En tenant compte des relations précédentes, cela s'écrit :

$$\mathrm{P}(\theta, \varphi) = \frac{1 - \alpha\beta}{(1 - \alpha^3 - \beta^3 - 3\,\alpha\beta)^{\frac{2}{3}}} \tag{90}$$

$$\mathrm{P}(-\theta, -\varphi) = \frac{1}{(1 - \alpha^3 - \beta^3 - 3\,\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}} \tag{90'}$$

les seconds membres sont constants, ce qui démontre la proposition demandée.

Ce problème sous cette forme a été posé par M. P. HUMBERT à M. J. DEVISME qui lui a donné la réponse dans une note présentée aux Congrès des Sociétés savantes de 1937.

VU ET APPROUVÉ :

Montpellier, le 14 juin 1938.

Le doyen de la Faculté des Sciences de Montpellier :

M. GODECHOT.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Montpellier, le 14 juin 1938.

Le recteur de l'Académie :

H. PARISELLE.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. APPELL. — *Propositions de géométrie déduites de la considération des racines cubiques de l'unité* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris), 84 1877, p. 540.

— *Et sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires*, p. 1378.

[2] G. BOULIGAND. — *Cours de géométrie analytique*, 2e édition, p. 35.

[4] *Cours de Mécanique rationnelle de la Faculté des Sciences de Toulouse.*

[5] A. BUHL. — *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles*, p. (8) et p. (19-21).

[3] J. DEVISME. — *Thèse* (1933, Paris), sur l'équation de M. P. HUMBERT, p. (38-61).

[6] D. V. JONESCO. — Sur une équation aux dérivées partielles du 3e ordre *(Bulletin de la Société Mathématique de France)*, 58-1930, p. (224).

TABLE DES MATIÈRES