KENTARO YANO

Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des « path »

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1938

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1938__207__1_0>

Tome 061-2

SÉRIE A, N°
N° D'ORDRE :

THESES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

KENTARO YANO

1re THÈSE. — LES ESPACES A CONNEXION PROJECTIVE ET LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DES „PATH".

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le... Juin 1938 devant la Commission d'examen.

MM. É. Cartan, *Président.*

G. Valiron, G. Darmois — *Examinateurs.*

IAŞI — TIPOGRAFIA „PRESA BUNĂ" — 1938

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire . . . M. MOLLIARD.

Doyen . . . . C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires

H. LEBESGUE.
A. FERNBACH.
ÉMILE PICARD.
LÉON BRILLOUIN.
GUILLET.
PÉCHARD.
FREUNDLER.
AUGER.
BLAISE.
DANGEARD.
LESPIEAU.
MARCHIS.
VESSIOT.
PORTIER.
MOLLIARD.
LAPICQUE.
G. BERTRAND.
ABRAHAM.
CH. FABRY.
LEON BERTRAND.
WINTREBERT.
DUBOSCQ.
BOHN.

PROFESSEURS

M. CAULLERY .	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN. . .	T	Chimie générale.
ÉMILE BOREL .	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
JEAN PERRIN . .	T	Chimie physique.
E. CARTAN . .	T	Géométrie supérieure
A. COTTON . .	T	Recherches physiques
J. DRACH . . .	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
CHARLES PÉREZ.	T	Zoologie.
E. RABAUD . .	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD .		Chimie minérale.
PAUL MONTEL .	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
L. BLARINGHEM.	T	Botanique.
G. JULIA. . . .	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAGUIN . .	T	Minéralogie.
A.MICHEL-LÉVY	T	Pétrographie.
H. BÉNARD . .	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY . .	T	Application de l'Analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD . . .	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
EUGÈNE BLOCH.	T	Physique.
G. BRUHAT	T	Physique.
E. DARMOIS . .	T	Enseignement de Physique.
A. DEBIERNE .	T	Physique générale et Radioactivité.
A. DUFOUR . .	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER .		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	T	Botanique
M. JAVILLIER .	T	Chimie biologique.
L. JOLEAUD . .		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY .	T	Physiologie comparée.
F. PICARD . . .		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
HENRI VILLAT .	T	Mécanique des fluides et applications.
CH. JACOB . . .	T	Géologie.
P. PASCAL . . .	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET . .	T	Calcul différentiel et Calcul intégral
E. ESCLANGON .	T	Astronomie.
M^me^ RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN . . .	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER . .		Physique (P. C. B.).
DE BROGLIE . .	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE . . .		Physique du Globe.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Mathématiques générales.
PÉRÈS		Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL . . .		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT . . .		Technique Aéronautique.
M. CURIE . . .		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD . . .	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches physiques.
DUPONT	T	Théories chimiques.
LANQUINE	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
VALIRON		Mathématiques générales.
BARRABE		Géologie structurale et Géologie apliquée.
MILLOT		Biologie animale (P. C. B.).
F. PERRIN . . .		Théories physiques.
VAVON		Chimie organique.
G. DARMOIS . .		Calcul des probabilités et Physique mathématique.
CHATTON	T	Biologie maritime.
AUBEL		Chimie biologique.
JACQUES BOURCART		Géographie physique et Géologie dynamique.
M^me^ JOLIOT-CURIE		Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL . . .		Biologie végétale (P. C. B.).
CABANNES . . .		Enseignement de Physique.
GRASSE		Biologie animale (P. C. B.).
PREVOST		Chimie (P. C. B.).

Secrétaire . . . . A. PACAUD.

Secrétaire honoraire . . . . D. TOMBECK.

A mon maître,

Monsieur le Professeur

Elie Cartan

LES ESPACES A CONNEXION PROJECTIVE ET LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DES „PATHS"

par

KENTARO YANO

INTRODUCTION.

Pour étudier la Géométrie projective généralisée, nous avons actuellement trois points de vue différents : le point de vue de M. E. CARTAN, celui de M. T. Y. THOMAS et celui de M. D. VAN DANTZIG. Mais la relation entre la théorie de M. E. CARTAN et celles des autres n'est pas encore complètement éclaircie. Le but de ce Mémoire est de montrer comment on peut traiter la théorie de MM. T. Y. THOMAS et O. VEBLEN avec la méthode du repère mobile de M. E. CARTAN et étudier les notions fondamentales dans la théorie des espaces à connexion projective.

Après avoir exposé l'aperçu historique de cette théorie dans le chapitre I et quelques notions préliminaires dans le chapitre II, nous considérons, dans le chapitre III, les transformations des repères projectifs semi-naturels. Nous montrons qu'on peut décomposer une transformation de repère semi-naturel correspondant au changement de coordonnées, en deux transformations partielles, l'une transformant un repère semi-naturel en un repère semi-naturel ayant le même hyperplan de l'infini que l'ancien et l'autre transformant simplement l'hyperplan de l'infini ; et que la première correspond au changement de coordonnées et la deuxième correspond au changement de la coordonnée surnuméraire de MM. T. Y. THOMAS et O. VEBLEN.

Dans le chapitre IV, nous montrons qu'une transformation des composantes de la connexion projective correspondant à un changement de l'hyperplan de l'infini donne ce que les géomètres américains appellent le changement projectif de la connexion affine.

La chapitre suivant est consacré à l'étude des équations différentielles des géodésiques et du paramètre projectif normal. La notion de paramètre projectif normal dans la Géométrie projective des „*paths*" a été récemment introduite et étudiée par MM. J. H. C. WHITEHEAD, L. BERWALD et J. HAANTJES. Nous montrons, dans ce chapitre, qu'on peut facilement arriver, du point de vue de M. E. CARTAN, à cette notion et qu'on peut lui donner une interprétation géométrique toute naturelle.

Dans le chapitre VI, le tenseur de courbure et de torsion de M. E. CARTAN est considéré et il est montré que ce tenseur, qui est invariant par rapport au changement de l'hyperplan de l'infini s'il n'y a pas de torsion, devient le tenseur projectif de courbure trouvé par M. H. WEYL quand la connexion est normale.

Dans le chapitre VII, nous montrons que les composantes de la connexion projective de M. T. Y. THOMAS ne sont autre choses que les composantes de la connexion par rapport au repère naturel de M. E. CARTAN et, de plus, nous étudions la relation entre le paramètre projectif de M. T. Y. THOMAS et le paramètre projectif normal.

Dans le dernier chapitre, nous nous occupons du problème de la représentation des espaces à connexion projective, c'est-à-dire du problème qui consiste à chercher un espace à connexion affine à $n+1$ dimensions qui peut représenter l'espace donné à connexion projective à n dimensions, une géodésique correspondant à un point et une surface totalement géodésique à une géodésique et nous montrons que les espaces à connexion affine employés par MM. J. H. C. WHITEHEAD et J. HAANTJES sont caractérisés par les mêmes propriétés intrinsèques.

Qu'il nous soit permis d'exprimer ici notre respectueuse gratitude à notre maître, M. E. CARTAN, dont les conseils et l'encouragement ont été extrêmement précieux pour nous.

Chapitre I

APERÇU HISTORIQUE.

On doit la théorie des espaces à connexion affine à M. H. WEYL [(125)] [1]) qui a généralisé la notion de parallélisme de M. T. LEVI-CIVITA [(61)] dans les espaces de Riemann, en prenant $n^2(n+1)/2$ fonctions Π^i_{jk} symétriques par rapport aux indices inférieurs comme composantes de la connexion à la place des symboles de Christoffel.

Dans une variété à connexion affine, les courbes autoparallèles qui correspondent aux courbes géodésiques dans l'espace riemannien sont données par les équations

$$(1.1) \qquad \frac{d^2u^i}{ds^2} + \Pi^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0 .$$

Les courbes définies par les équations différentielles (1.1) sont appelées „*paths*" par les géomètres américains, MM. L. P. EISENHART [(27), (28), (29), (30), (31), (33), (34), (36), (37)], O. VEBLEN (103), (104), (105), (114), (115), (116)], J. M. THOMAS [(91), (92)] et T. Y. THOMAS [(101)].

Les savants américains ont considéré que ce qui est essentiel, c'est l'existence du système de *paths*, tandis que M. H. WEYL a pris comme notion fondamentale celle de parallélisme.

La théorie des invariants différentiels des équations (1.1) a été étudiée par les mathématiciens de l'École de Princeton et nommée par eux la Géométrie des *paths*.

En 1921, M. H. WEYL [(124)] a montré que deux connexions affines Π^i_{jk} et $\overline{\Pi}^i_{jk}$, satisfaisant aux relations

$$(1.2) \qquad \overline{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} - \delta^i_j \Phi_k - \delta^i_k \Phi_j ,$$

où Φ_i sont n fonctions arbitraires, donnent le même système de *paths*.

Dans le sens que cette transformation des composantes de la connexion affine ne change pas le système de *paths* qui correspondent aux droites de l'espace euclidien, ce changement s'appelle changement projectif de la connexion affine. La théorie

---

1) Les nombres figurant entre parenthèses renvoient à la Bibliographie placée à la fin du Mémoire.

des invariants différentiels qui ne dépendent pas de ce changement s'appelle la Géométrie projective des *paths*.

Cette géométrie a été étudiée aussi par M. L. P. EISENHART [(34), (35)] et ses collègues, MM. O. VEBLEN [(103), (114), (115)], J. M. THOMAS [(90)], T. Y. THOMAS [(94), (96), (97), (101)].

La Géométrie projective est la théorie des propriétés des lignes droites qui sont indépendantes des conditions posées dans la Géométrie affine. Ce fait se traduit par celui que la Géométrie des *paths* est la théorie des lignes droites qui sont définies par les équations différentielles (1.1) et qui ne dépendent du choix particulier du paramètre.

MM. L. P. EISENHART [(27)] et O. VEBLEN [(103)] ont montré qu'à un changement de paramètre correspond un changement de la connexion affine de la forme (1.2). Cette question de paramétrisation a été étudiée aussi par M. J. DOUGLAS [(26)] qui a choisi comme équations différentielles définissant les *paths* :

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} = \underset{2}{H}{}^i(u, p), \tag{1.3}$$

où

$$p^i = \frac{du^i}{dt},$$

et les $\underset{2}{H}{}^i(u, p)$ sont des fonctions homogènes du second ordre par rapport aux p^i. Dans le cas considéré par M. J. DOUGLAS, les composantes de la connexion sont données par

$$\Pi^i_{jk} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \underset{2}{H}{}^i}{\partial du^j\,\partial du^k},$$

par conséquent, les Π^i_{jk} sont des fonctions non seulement des variables u^i, mais aussi des différentielles du^i.

M. J. DOUGLAS a montré que si l'on effectue un changement arbitraire du paramètre t, il correspond toujours un changement des composantes de la connexion de la forme (1.2) où les Π^i_{jk} et Φ_j sont des fonctions des variables u^i et des différentielles du^i. Pour bien faire comprendre que les propriétés étudiées dans la Géométrie projective des *paths* sont indépendantes du choix du paramètre, il l'appelle la Géométrie descriptive des *paths*.

On appelle actuellement la géométrie de M. J. DOUGLAS la Géométrie projective générale des *paths*, tandis que la géométrie étudiée par MM. L. P. EISENHART, O. VEBLEN, J. M. THOMAS et T. Y. THOMAS est appelée la Géométrie projective *restreinte* des *paths*.

D'autre part, M. E. CARTAN [(9), (10), (11), (18), (19), (20), (21)] a introduit, dans l'étude des variétés, la méthode du repère mobile et avec cette méthode élégante il a réussi à établir tout naturellement une belle théorie des variétés à connexion projective. Dans cette théorie, M. E. CARTAN a défini une variété à connexion projective comme une variété numérique qui présente, au voisinage immédiat de chaque point, tous les caractères d'un espace projectif ordinaire et doué, de plus, d'une loi permettant de raccorder en un seul espace projectif les deux petits morceaux qui entourent deux points infiniment voisins. En d'autres termes, il a associé à chaque point A_0 de la variété numérique un espace projectif tangent, rapporté à un repère formé avec $n+1$ points analytiques indépendants $A_0, A_1, \dots, A_n$ et il a défini la loi de raccord des espaces attachés aux deux points infiniment voisins A_0 et $A_0 + dA_0$, c'est-à-dire la connexion projective, au moyen d'équations différentielles de la forme

$$
(1.4) \qquad \begin{cases} dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^1 A_1 + \dots\dots + \omega_0^n A_n, \\ dA_1 = \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \dots\dots + \omega_1^n A_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dA_n = \omega_n^0 A_0 + \omega_n^1 A_1 + \dots\dots + \omega_n^n A_n, \end{cases}
$$

où les ω_μ^λ sont des formes de Pfaff par rapport aux coordonnées de la variété initiale et par rapport aux paramètres arbitraires. Il faut bien remarquer que les points $A_0, A_1, \dots, A_n$ sont analytiques, que les formules (1.4) n'ont de sens que dans l'espace projectif tangent et, de plus, que ces formules ne servent que de moyen analytique pour développer une courbe de la variété à connexion projective sur l'espace projectif tangent en un point de cette courbe.

M. E. CARTAN a, de plus, étudié un problème qui consiste à attribuer une connexion projective à une équation différentielle de la forme $y'' = f(x, y, y')$, c'est-à-dire le problème de trouver une connexion projective par rapport à laquelle l'équation différentielle des géodésiques est celle qui précède. Cette étude l'a conduit à la notion de variété d'éléments à connexion projective.

Ce problème a été tout récemment généralisé par M. M. HACHTROUDI [(43)] dans sa Thèse, au cas d'un complexe de surfaces

$$F(x, y, z, a, b,) = 0\,,$$

intégrale générale d'un système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable du second ordre,

$$\begin{cases} r = \varphi(x, y, z, p, q), \\ s = f\,(x, y, z, p, q), \\ t = \psi(x, y, z, p, q), \end{cases}$$

où

$$p = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

La notion de connexion projective étant une fois introduite, les géomètres americains, surtout ceux de l'École de Princeton, ont commencé à étudier les variétés à connexion projective par la méthode du Calcul tensoriel.

En partant du changement de composantes de la connexion (1.2), M. T. Y. THOMAS [(94)] a obtenu les fonctions

$$(1.5) \qquad {}^*\Pi^i_{jk} = \Pi^i_{jk} - \frac{1}{n+1}\,\delta^i_j\,\Pi^l_{lk} - \frac{1}{n+1}\,\delta^i_k\,\Pi^l_{lj}\,.$$

qui ne changent pas quand on effectue un changement de Π^i_{jk} de la forme (1.2).

Il est à remarquer que M. E. CARTAN a, déjà en 1924, considéré ces composantes de la connexion projective en prenant comme repère projectif le repère naturel [(10)].

M. T. Y. THOMAS a choisi les ${}^*\Pi^i_{jk}$ comme composantes de la connexion projective associée au système de *paths* par (1.1).

Les composantes de la connexion projective ${}^*\Pi^i_{jk}$ ne se transforment pas comme composantes d'une connexion affine, mais si l'on ne considère que les transformations de coordonnés dont le jacobien est égal à l'unité, c'est-à-dire les transformations de coordonnées qui ne changent pas les volumes, les ${}^*\Pi^i_{jk}$

se transforment comme composantes d'une connexion affine. M. T. Y. Thomas [(94), (96)] a nommé Géométrie équi-projective des *paths* la géométrie des *paths* vis-à-vis de ce groupe spécial de transformations.

Dans son Mémoire paru en 1926 dans „Mathematische Zeitschrift", M. Y. Thomas [(95)), (98)] a montré qu'il est possible de réduire la Géométrie projective d'une variété à n dimensions à la Géométrie affine d'une autre variété associée, à $n+1$ dimensions.

Il a associé à une transformation de coordonnées u^i de la variété initiale une transformation de la forme

$$(1.6)\qquad \begin{cases} \bar{u}^0 = u^0 + \log \Delta, \\ \bar{u}^i = \bar{u}^i(u), \end{cases}$$

où

$$\Delta = \left| \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} \right|$$

et il a introduit les composantes d'une connexion affine dans la variété associée à $n+1$ dimensions

$$(1.7)\qquad \begin{cases} {}^*\Pi^i_{jk} = \Pi^i_{jk} - \dfrac{1}{n+1}\,\delta^i_j\,\Pi^l_{lk} - \dfrac{1}{n+1}\,\delta^i_k\,\Pi^l_{lj}\,, & \\ {}^*\Pi^\lambda_{\mu 0} = \Pi^\lambda_{0\mu} = -\dfrac{1}{n+1}\,\delta^\lambda_\mu\,, & (i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n), \\ {}^*\Pi^0_{jk} = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) {}^*\Pi^h_{jkh}\,, & (\lambda, \mu, \nu, \ldots = 0, 1, \ldots n), \end{cases}$$

où

$$ {}^*\Pi^h_{jkh} = \frac{\partial\, {}^*\Pi^h_{jk}}{\partial u^h} - {}^*\Pi^l_{hj}\, {}^*\Pi^h_{lk}\,.$$

En utilisant le fait que les fonctions ${}^*\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ se transforment en ${}^*\bar{\Pi}^\lambda_{\mu\nu}$ lors des transformations de la forme (1.6) de la manière suivante :

$$ {}^*\bar{\Pi}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\sigma} \left({}^*\Pi^\sigma_{\tau\omega} \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^\mu} \frac{\partial u^\omega}{\partial \bar{u}^\nu} + \frac{\partial^2 u^\sigma}{\partial \bar{u}^\mu\, \partial \bar{u}^\nu} \right),$$

M. T. Y. Thomas [(98)] a étudié les coordonnées normales projectives, les tenseurs normaux projectifs, le tenseur de courbure projectif, etc...

L'introduction d'une telle coordonnée surnuméraire u^0 a été, en 1929, adoptée par M. O. VEBLEN [(110), (111), (112)]. Il a réussi, par un emploi heureux de cette coordonnée surnuméraire, à établir une théorie projective contenant une Géométrie projective qui peut être regardée comme une généralisation de la Géométrie non euclidienne de Cayley.

MM. O. VEBLEN et B. HOFFMANN [(113)] ont trouvé une belle application de cette théorie projective à la théorie unitaire des champs physiques; M. B. HOFFMANN [(55), (56)] a trouvé même une relation étroite entre cette théorie projective de la relativité et la théorie unitaire des champs d'EINSTEIN et MAYER.

D'autre part, en utilisant les coordonnées homogènes introduites en 1932 par M. D. VAN DANTZIG [(23), (24), (25)], MM. J. A. SCHOUTEN [(76), (77), (78), (79), (80), (81), (82), (83), (84)], J. HAANTJES [(42)], D. VAN DANTZIG [(23), (24), (25)], et ST. GOLAB [(41)] ont développé une théorie des variétés à connexion projective.

M. D. VAN DANTZIG emploie $n+1$ coordonnées homogènes Z^λ pour décrire la variété numérique P_n initialement donnée et suppose que les relations entre les coordonnées ordinaires u^i et ces coordonnées homogènes Z^λ soient données par

$$u^i = u^i\,(Z^0, Z^1, \ldots, Z^n)$$

où $u^i\,(Z)$ sont des fonctions homogènes d'ordre zéro par rapport aux $n+1$ variables Z^λ. Par conséquent, si l'on regarde Z^λ comme les coordonnées ordinaires dans une variété X_{n+1} à $n+1$ dimensions, à une courbe $Z^\lambda = C^\lambda t$ dans cette variété où les C^λ sont constantes correspond un point de la variété P_n.

Donc, l'emploi de telles coordonnées signifie un choix d'un système de courbes spéciales. A notre avis, ces courbes correspondent aux „*rays*" étudiés par M. J. H. C. WHITEHEAD [(127), (123), 129)]. MM. J. A. SCHOUTEN, J. HAANTJES et D. VAN DANTZIG ont aussi trouvé une application de leur théorie à la relativité [(77)].

Comme nous l'avons exposé dans les pages précédentes, la Géométrie projective généralisée a été considérablement développée dans ces derniers temps. Mais malheureusement la relation entre la théorie de M. E. CARTAN et les autresthéories n'est pas encore complètement éclaircie, malgré qu'on ait actuellement les Mémoires de MM. E. CARTAN [(12), (13), (15), (16)],

J. A. SCHOUTEN [(69), (70), (72)], O. VEBLEN [(106), 108)] et H. WEYL [(126)] à ce propos.

M. J. A. SCHOUTEN a montré dans son Mémoire [(72)] comment on peut expliquer la théorie de M. E. CARTAN par la théorie de la connexion de KÖNIG [(60)].

Il s'agit de construire une théorie générale de la connexion de KÖNIG qui contient comme cas spéciaux la théorie des variétés à connexion projective ou conforme de M. E. CARTAN.

La connexion de KÖNIG a été étudiée spécialement par les géomètres japonais, mais cette théorie n'est pas encore suffisamment développée pour qu'on puisse l'appliquer à la théorie de M. E. CARTAN, comme l'a déjà dit M. J. H C. WHITEHEAD [(129)].

Dans la conférence faite au congrès international de Bologne en 1928, M. O. VEBLEN [(108)] a exposé la relation entre l'*Erlanger Programm* et le point de vue pris par les géomètres américains, mais il n'a rien dit sur la relation entre les théories de M. J. A. SCHOUTEN et de M. E. CARTAN et sa propre théorie.

Pour étudier les géométries modernes, presque tous les géomètres ont adopté la notion de parallélisme de M. T. LEVI-CIVITA comme notion fondamentale, tandis que pour M. E. CARTAN [voir par exemple (9), (10)], la notion de transport parallèle n'est pas la notion fondamentale; ce qui est fondamental pour M. E. CARTAN, c'est une loi qui nous permet de raccorder en un seul et même espace deux morceaux infiniment voisins de la variété considérée, ces morceaux pouvant être regardés comme espaces de Klein à groupe fondamental donné.

Quand il s'agit de la théorie des variétés à connexion affine, on peut bien l'étudier soit au point de vue de MM. J. A. SCHOUTEN et O. VEBLEN, soit au point de vue de M. E. CARTAN. Mais quand il s'agit des variétés à connexion projective ou conforme, il faut bien des modifications dans la théorie de M. J. A. SCHOUTEN et celle de M. O. VEBLEN. Ils ont quand même bien réussi à établir une théorie des variétés à connexion projective et à connexion conforme, d'une manière élégante, mais assez artificielle.

Si l'on part de l'idée fondamentale de M. E. CARTAN, la généralisation n'offre ni difficulté, ni inconvénient.

Ce problème a été aussi examiné par M. H. WEYL [(126)] qui a pris l'idée de M. E. CARTAN comme fondamentale et a bien précisé la relation entre la variété et les espaces tangents associés à chaque point de la variété initiale.

Nous allons, dans le présent Mémoire, examiner en détail la relation entre la théorie des variétés à connexion projective de M. E. CARTAN et celles des autres, surtout celle de MM. L. P. EISENHART, O. VEBLEN, T. Y. THOMAS, en nous appuyant sur les travaux cités ci-dessus.

Chapitre II

LES ESPACES PROJECTIFS TANGENTS.

Comme nous avons l'intention d'étudier les relations entre la théorie des variétés à connexion projective de M. E. CARTAN et celle des géomètres américains, nous allons exposer tout d'abord quelques éléments essentiels de la théorie de M. E. CARTAN, d'une manière aussi approchée que possible de celle des auteurs américains.

Imaginons une variété numérique à n dimensions, c'est-à-dire une variété dont chaque point est défini par un système de coordonnées $u^1, u^2, \ldots u^n$. Le voisinage immédiat de cette variété peut être regardé comme un espace ordinaire affine, projectif ou conforme. Dans ce Mémoire, nous allons regarder le voisinage immédiat de chaque point de la variété comme un espace projectif ordinaire. Si l'on se donne une loi qui nous permet de raccorder les espaces projectifs ordinaires atttachés à deux points infiniment voisins de la variété, on obtient une variété à connexion projective.

Pour décrire les espaces projectifs ordinaires attachés à chaque point de la variété (nous les appellerons les espaces projectifs tangents), donnons-nous dans chaque espace projectif tangent, $n+1$ points analytiques $A_0, A_1, \ldots, A_n$ indépendants, fonctions des variables $u^1, u^2, \ldots u^n$.

Il est bien naturel que l'on suppose que A_0 coïncide avec le point $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ de la variété auquel est attaché l'espace projectif tangent, ce que nous ferons toujours dans la suite.

Cela posé, un point quelconque X, situé dans un des espaces projectifs tangents, peut être représenté comme combinaison linéaire des $n+1$ points indépendants $A_0, A_1, \ldots, A_n$ de l'espace considéré:

$$X = X^0 A_0 + X^1 A_1 + \dots + X^n A_n. \tag{2.1}$$

Nous appellerons repère projectif cet ensemble de points $A_0, A_1, \dots, A_n$ et sommets du $(n+1)$-èdre de référence, ces points respectivement.

Il va sans dire qu'il ne s'agit que des rapports mutuels des composantes $X^0, X^1, \dots, X^n$.

Nous appelons $X^0, X^1, \dots, X^n$ les coordonnées homogènes du point X.

Les coordonnées non-homogènes du point X sont définies par :

$$x^i = \frac{X^i}{X^0}. \tag{2.2}$$

Ici l'indice i ne prend que les valeurs $1, 2, \dots, n$. En général nous emploierons les lettres latines $i, j, k, \dots$ pour les indices qui ne prennent que les valeurs $1, 2, \dots, n$, tandis que les lettres grecques seront conservées pour les indices qui parcourent les valeurs $0, 1, 2, \dots n$.

Le choix des $n+1$ points formant un $(n+1)$-èdre de référence étant pour le moment tout à fait arbitraire, on peut prendre $n+1$ points indépendants $B_0, B_1, \dots, B_n$ à la place des $n+1$ points $A_0, A_1, \dots, A_n$. En désignant par $b^0_\lambda, b^1_\lambda, \dots, b^n_\lambda$ respectivement les coordonnées homogènes des points B_λ par rapport au $(n+1)$-èdre de référence formé avec les points A_λ, on a les formules

$$\left\{\begin{array}{l} B_0 = b^0_0 A_0 + b^1_0 A_1 + \cdots + b^n_0 A_n, \\ B_1 = b^0_1 A_0 + b^1_1 A_1 + \cdots + b^n_1 A_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_n = b^0_n A_0 + b^1_n A_1 + \cdots + b^n_n A_n, \end{array}\right. \tag{2.3}$$

le déterminant $|b^\mu_\lambda|$ n'étant pas nul.

D'après la convention de sommation pour les indices répétés deux fois, on peut écrire les formules (2.3) sous la forme plus condensée,

$$B_\lambda = b^\mu_\lambda A_\mu. \tag{2.4}$$

Les $n+1$ points $B_0, B_1, B_2, \dots B_n$ pouvant être regardés comme les $n+1$ sommets d'un nouveau $(n+1)$-èdre de référence, on a les formules suivantes, qui sont les réciproques de (2.4):

$$A_\lambda = a_\lambda^\mu B_\mu, \tag{2.5}$$

où les a_λ^μ satisfont à

$$a_\lambda^\mu b_\mu^\nu = a_\mu^\nu b_\lambda^\mu = \delta_\lambda^\nu \begin{cases} = 1 & \text{si } \lambda = \nu, \\ = 0 & \text{si } \lambda \neq \nu. \end{cases} \tag{2.6}$$

Comme nous avons supposé que le premier sommet du $(n+1)$-èdre de référence coïncide toujours avec le point de la variété auquel est attaché l'espace projectif tangent, les formules (2.3) peuvent être réduites à la forme suivante:

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0, \\ B_1 &= b_1^0 A_0 + b_1^1 A_1 + \cdots + b_1^n A_n, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ B_n &= b_n^0 A_0 + b_n^1 A_1 + \cdots + b_n^n A_n. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Les formules (2.7) ne doivent pas avoir nécessairement cette forme, mais on peut supposer qu'on les ait réduites à cette forme en multipliant au besoin tous les B_λ par un même facteur.

Alors les formules (2.5) s'écrivent

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 \\ A_1 &= a_1^0 B_0 + a_1^1 B_1 + \cdots + a_1^n B_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_n &= a_n^0 B_0 + a_n^1 B_1 + \cdots + a_n^n B_n. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Les matrices $\|a_\lambda^\mu\|$ et $\|b_\lambda^\mu\|$ ont donc respectivement les formes suivantes:

$$\|a_\lambda^\mu\| = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & \cdot & \cdot & \cdot & , 0 \\ a_1^0, & a_1^1, & \cdot & \cdot & \cdot & , a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^0, & a_n^1, & \cdot & \cdot & \cdot & , a_n^n \end{Vmatrix}, \quad \|b_\lambda^\mu\| = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & \cdot & \cdot & \cdot & , 0 \\ b_1^0, & b_1^1, & \cdot & \cdot & \cdot & , b_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n^0, & b_n^1, & \cdot & \cdot & \cdot & , b_n^n \end{Vmatrix}, \tag{2.9}$$

ces deux matrices étant réciproques.

On remarquera dans les formules (2.9) que

$$a_0^\lambda = \delta_0^\lambda \qquad \text{et} \qquad b_0^\lambda = \delta_0^\lambda ,$$

et que, par conséquent, on a

$$a_j^0 + a_j^i b_i^0 = 0 , \qquad a_j^i b_k^j = \delta_k^i ,$$

$$b_j^0 + a_i^0 b_j^i = 0 , \qquad a_k^j b_j^i = \delta_k^i .$$

Cela posé, voyons comment les coordonnées homogènes X^λ d'un point X se transforment par rapport à ce changement du $(n+1)$-èdre. D'après (2.1), on a :

$$X = X^\lambda A_\lambda ;$$

en désignant par $\overline{X}^\lambda$ les coordonnées homogènes du point X par rapport au $(n+1)$-èdre de référence formé avec $B_0, B_1, \ldots B_n$ on a

$$X = \overline{X}^\lambda B_\lambda$$

donc

$$X^\lambda A_\lambda = \overline{X}^\lambda B_\lambda .$$

En substituant (2.5) dans cette équation, on obtient :

$$X^\lambda a_\lambda^\mu B_\mu = \overline{X}^\mu B_\mu ,$$

$$(X^\lambda a_\lambda^\mu - \overline{X}^\mu) B_\mu = 0 .$$

Les $n+1$ points $B_0, B_1, \ldots, B_n$ étant indépendants, les équations précédentes donnent

$$\overline{X}^\mu = a_\lambda^\mu X^\lambda . \tag{2.10}$$

Nous avons ainsi obtenu la loi de transformation des coordonnées homogènes d'un point défini dans un espace tangent, par rapport aux changements des $(n+1)$-èdres de référence.

Il est à remarquer que les équations (2.10) peuvent s'écrire encore sous la forme

$$X^\lambda = b_\mu^\lambda \overline{X}^\mu , \tag{2.11}$$

en vertu des identités (2.6).

Cela étant, cherchons la loi de transformation des coordonnées non-homogènes x^i du point X quelconque. En désignant par $\overline{x}^i$ les coordonnées non-homogènes du point X par rapport au $(n+1)$-èdre de référence formé avec $B_0, B_1, \ldots, B_n$, on a

$$x^i = \frac{X^i}{X^0}, \quad \overline{x}^i = \frac{\overline{X}^i}{\overline{X}^0}.$$

D'autre part, on a d'après (2.10)

$$\left\{\begin{aligned} \overline{X}^0 &= X^0 + a_i^0 X^i, \\ \overline{X}^i &= a_j^i X^j, \end{aligned}\right. \tag{2.12}$$

par suite

$$\overline{x}^i = \frac{a_j^i X^j}{X^0 + a_j^0 X^j} = \frac{a_j^i \left(\dfrac{X^j}{X^0}\right)}{1 + a_j^0 \left(\dfrac{X^j}{X^0}\right)};$$

donc on a finalement

$$\overline{x}^i = \frac{a_j^i x^j}{1 + a_j^0 x^j}, \tag{2.13}$$

la forme réciproque étant

$$x^i = \frac{b_j^i x^j}{1 + b_j^0 x^j}. \tag{2.14}$$

Les équations (2.12) nous montrent que les $\overline{X}^\lambda$ ne dépendent que des X^λ et des coefficients qui définissent le changement du $(n+1)$-èdre de référence, donc on peut dire que les X^λ sont les composantes d'un être géométrique d'après la définition de M. E. Cartan. Comme les $\overline{X}^\lambda$ dépendent en outre linéairement des a_λ^μ, nous appelons le point X, vecteur contrevariant projectif et X^λ ses composantes. M. E. Cartan l'appelle vecteur contrevariant analytique [(20), (21)].

Les deuxièmes équations de (2.12) nous montrent que $\overline{X}^i$ dépendent linéairement des X^i et des a_j^i; donc les X^i sont aussi regardées comme composantes d'un être géométrique; nous l'appellerons simplement vecteur contrevariant et X^i ses composantes.

Quand les coordonnées non-homogènes x^i du point X

sont infinitésimales du premier ordre, les formules (2.13) peuvent s'écrire aux infinitésimales du second ordre près,

$$\overline{x}^i = a^i_j x^j ,$$

où $\overline{x}^i$ sont aussi des quantités infinitésimales du premier ordre.

Donc, si les x^i sont infinitésimales, elles sont aussi regardées comme étant les composantes d'un vecteur contrevariant.

Cela posé, considérons maintenant d'autres figures qui se présentent dans l'espace projectif tangent.

Premièrement, un hyperplan analytique dans un espace projectif tangent est représenté par $n+1$ quantités T_λ telles que l'équation linéaire

$$T_\lambda X^\lambda = 0 , \tag{2.15}$$

où X^λ sont des coordonnées homogènes du point courant, représente l'hyperplan. En substituant (2.11) dans (2.15) on trouve que

$$\overline{T}_\lambda = b^\mu_\lambda T_\mu \tag{2.16}$$

peut être adoptée comme loi de transformation des T_λ. Nous appelons cet hyperplan analytique vecteur covariant projectif et T_λ ses composantes. Les équations (2.16) se décomposent comme il suit :

$$\begin{aligned} \overline{T}_0 &= T_0 \\ \overline{T}_i &= b^0_i T_0 + b^j_i T_j . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Or, on voit que T_0 ne change pas pendant la transformation du $(n+1)$-èdre de référence; nous l'appelons scalaire projectif. Si $T_0 = 0$ par rapport à un $(n+1)$-èdre de référence, cela sera vrai par rapport à tous les $(n+1)$-èdres de référence. Dans ce cas, l'hyperplan passe par le point A_0 et on a

$$\overline{T}_i = b^j_i T_j , \tag{2.18}$$

donc T_i représentent un être géométrique, que nous appelons vecteur covariant et T_i ses composantes.

Comme dernier exemple, prenons une quadrique analytique

$$G_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu = 0 . \tag{2.19}$$

Si l'on effectue un changement de $(n+1)$-èdre de référence, $G_{\lambda\mu}$ se transforment en $\overline{G}_{\lambda\mu}$ de la manière suivante :

$$\overline{G}_{\lambda\mu} = b^{\sigma}_{\lambda}\, b^{\tau}_{\mu}\, G_{\sigma\tau}, \tag{2.20}$$

d'où on a en posant $\lambda = 0$ et $\lambda = \mu = 0$,

$$\overline{G}_{0\mu} = b^{\tau}_{\mu}\, G_{0\tau},$$
$$\overline{G}_{00} = G_{00}.$$

Nous appelons cette quadrique tenseur covariant projectif du second degré et $G_{\lambda\mu}$ ses composantes.

Il est à remarquer que $G_{0\mu}$ sont les composantes d'un vecteur covariant projectif et G_{00} un scalaire projectif. Les $G_{0\mu}$ nous offrent l'interprétation suivante:

Considérons le premier sommet A_0 du $(n+1)$ -èdre de référence; il a $(1.0,\ldots 0)$ comme coordonnées homogènes et l'équation de son hyperplan polaire par rapport à la quadrique (2.19) est

$$G_{0\mu} X^{\mu} = 0 .$$

Si l'on pose

$$\frac{G_{ij}}{G_{00}} = \gamma_{ij}, \quad \frac{G_{0i}}{G_{00}} = \varphi_i, \tag{2.21}$$

l'équation de la quadrique s'écrit, avec les coordonnées nonhomogènes x^i :

$$\gamma_{ij} x^i x^j + 2\varphi_i x^i + 1 = 0. \tag{2.22}$$

L'équation de l'hyperplan polaire du point A_0 par rapport à cette quadrique est

$$\varphi_i x^i + 1 = 0. \tag{2.23}$$

Écrivons encore l'équation du cône de sommet A_0 circonscrit à la même quadrique. De l'équation (2.23) on tire

$$\varphi_i \varphi_j x^i x^j + 2\varphi^i x^i + 1 = 0 .$$

En retranchant cette équation de l'équation (2.22) on trouve l'équation du cône:

$$g_{ij} x^i x^j = 0, \tag{2.24}$$

où
$$g_{ij} = \gamma_{ij} - \varphi_i \varphi_j .$$

La considération des quadriques de cette sorte dans la théorie des variétés à connexion projective a été premièrement donnée par M. E. CARTAN [(13)] et développée par M. O. VEBLEN [(110), (111), (112)], qui a identifié le cône (2.24) avec le cône de lumière dans la théorie projective de la Relativité.

La notion de vecteurs et tenseurs projectifs étant une généralisation de la notion de vecteurs et tenseurs ordinaires, les opérations bien connues pour les vecteurs ou les tenseurs ordinaires, addition, multiplication, contraction, peuvent s'appliquer aux vecteurs et tenseurs projectifs.

Addition : $X^\lambda + Y^\lambda$, $X_\lambda + Y_\lambda$. $G_{\lambda\mu} + F_{\lambda\mu}$.
Multiplication : $X^\lambda\, Y^\mu$, $X^\lambda\, Y^i$, $X^\lambda\, Y_\mu$.
Contraction : $X^\lambda\, Y_\lambda$, $F_{\lambda\mu\nu}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\nu}$.

Dans le Calcul tensoriel projectif, il y a une opération caractéristique.

Prenons par exemple un tenseur projectif $F_{\lambda\mu}^{\cdot\,\cdot\,\nu}$ contrevariant par rapport à l'indice ν et covariant par rapport aux indices λ et μ.

Si l'on pose $\lambda = 0$, les $F_{0\mu}^{\cdot\,\cdot\,\nu}$ sont les composantes d'un tenseur contrevariant par raport à ν et covariant par rapport à μ. Si l'on pose encore $\mu = 0$, les $F_{00}^{\cdot\,\cdot\,\nu}$ sont les composantes d'un vecteur contrevariant projectif. Si l'on pose $\nu = i$ on obtient un autre tenseur projectif, $F_{\lambda\mu}^{\cdot\,\cdot\,i}$.

Sur ces questions, on peut consulter le Mémoire [(20)] sur le Calcul tensoriel projectif ou le livre [(21)] sur les espaces à connexion projective, de M. E. CARTAN.

Chapitre III

LES TRANSFORMATIONS DES REPÈRES PROJECTIFS.

Passons maintenant à la loi qui nous permet de raccorder en un seul les espaces projectifs tangents attachés à deux points infiniment voisins.

Prenons un point $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ de la variété et un $(n+1)$-èdre de référence attaché à ce point, formé avec $n+1$ sommets $A_0, A_1, \dots, A_n$, le premier sommet A_0 coïncidant avec ce point. A un point ($u^1+du^1, u^2+du^2 \dots, u^n+du^n$) infiniment voisin du point ($u^1, \dots u^n$) est associé aussi un $(n+1)$-èdre de référence formé avec les $n+1$ points $A_0+dA_0, \dots, A_n+dA_n$.

Si l'on fait le raccord des deux espaces projectifs tangents, on aura des formules de la forme

$$(3.1) \quad \begin{cases} A_0 + dA_0 = (1+\omega_0^0) A_0 + \omega_0^1 A_1 + \cdots\cdots + \omega_0^n A_n, \\ A_1 + dA_1 = \omega_1^0 A_0 + (1+\omega_1^1) A_1 + \cdots\cdots + \omega_1^n A_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_n + dA_n = \omega_n^0 A_0 + \omega_n^1 A_1 + \cdots\cdots + (1+\omega_n^n) A_n, \end{cases}$$

où les ω_μ^λ sont des formes différentielles linéaires par rapport aux différentielles $du^1, du^2, \dots, du^n$,

$$\omega_\mu^\lambda = \omega_{\mu k}^\lambda \, du^k .$$

Le formules (3.1) peuvent s'écrire

$$(3.2) \quad \begin{cases} dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega_0^1 A_1 + \cdots\cdots + \omega_0^n A_n, \\ dA_1 = \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \cdots\cdots + \omega_1^n A_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dA_n = \omega_n^0 A_0 + \omega_n^1 A_1 + \cdots\cdots + \omega_n^n A_n . \end{cases}$$

Dans les formules (3.2), multiplier $A_0, A_1, \dots A_n$ par un même facteur revient à ajouter une même différentielle exacte aux éléments de la diagonale principale de la matrice $\| \omega_\mu^\lambda \|$.

Mais comme les formules (3.2) ne servent qu'au développement d'une ligne de la variété sur l'espace projectif tangent, on peut ajouter aux éléments de la diagonale principale une même forme de Pfaff quelconque, cette forme de Pfaff étant toujours une différentielle exacte le long de la courbe qu'on développe. Donc on peut dire que la loi de raccord est complètement déterminée par la connaissance des formes[1])

$$\omega_\mu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \omega_0^0 .$$

Nous appelons, avec M. E. CARTAN, ω_0^i, ω_0^i et $\omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0$ les composantes de la connexion projective.

1) Voir E. CARTAN (10), (21).

Cela posé, voyons comment les formes ω_μ^λ se transforment pendant la transformation de $(n+1)$-èdre de référence définie par

(2.5) $$A_\lambda = a_\lambda^\mu B_\mu$$

où

$$a_0^\mu = \delta_0^\mu = \begin{cases} 1 \text{ si } \mu = 0, \\ 0 \text{ si } \mu \neq 0. \end{cases}$$

Désignons par $\overline{\omega}_\mu^\lambda$ les composantes de la connexion projective par rapport au $(n+1)$-èdre de référence formé avec les $n+1$ points $B_0, B_1, \ldots . B_n$; alors on aura :

(3.3) $$\begin{cases} dB_0 = \overline{\omega}_0^0 B_0 + \overline{\omega}_0^1 B_1 + \cdots\cdots + \omega_0^n B_n, \\ dB_1 = \overline{\omega}_1^0 B_0 + \overline{\omega}_1^1 B_1 + \cdots\cdots + \overline{\omega}_1^n B_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dB_n = \overline{\omega}_n^0 B_0 + \overline{\omega}_n^1 B_1 + \cdots\cdots + \overline{\omega}_n^n B_n, \end{cases}$$

ou sous une forme plus condensée :

(3.4) $$dB_\lambda = \overline{\omega}_\lambda^\mu B_\mu .$$

Des formules (2.5), l'on tire :

$$dA_\lambda = (da_\lambda^\mu) B_\mu + a_\lambda^\mu dB_\mu ,$$

d'où

$$\omega_\lambda^\mu A_\mu = (da_\lambda^\mu) B_\mu + a_\lambda^\mu \overline{\omega}_\mu^\nu B_\nu ,$$

$$\omega_\lambda^\mu a_\mu^\nu B_\nu = (da_\lambda^\mu) B_\mu + a_\lambda^\mu \overline{\omega}_\mu^\nu B_\nu ,$$

donc on a

(3.5) $$a_\mu^\nu \omega_\lambda^\mu = da_\lambda^\nu + a_\lambda^\mu \overline{\omega}_\mu^\nu .$$

Posons dans les formules (3.5) $\lambda = 0$, alors on aura, puisque $a_0^\mu = \delta_0^\mu$,

(3.6) $$a_\mu^\nu \omega_0^\mu = \overline{\omega}_0^\nu .$$

En posant encore $\nu = i$ dans les formules (3.6), on a, en vertu des identités $a_0^i = 0$,

$$a_j^i \omega_0^j = \overline{\omega}_0^i .$$

Comme ω^i_0 sont des formes de Pfaff linéairement indépendantes, on peut choisir a^i_j de manière à avoir

$$\overline{\omega}^i_0 = du^i \,.$$

Les repères réalisant cette condition sont appelés *semi-naturels* par M. E. Cartan. Nous supposerons dans la suite que les repères soient toujours semi-naturels, c'est-à-dire que

$$\omega^i_0 = du^i \,.$$

Cherchons la loi de transformation des repères semi-naturels, c'est-à-dire une transformation de la forme (2.5) qui permet de passer d'un repère semi-naturel à un autre repère semi-naturel. A cet effet, posons dans les formules (3.5)

$$\omega^i_0 = du^i \,, \quad \overline{\omega}^i = du^i \,,$$

alors, on obtiendra des (3.5) en posant $\lambda = 0 \,,\ \nu = i$

$$a^i_0\,\omega^0_0 + a^i_j\,\omega^j_0 = d a^i_0 + a^0_0\,\overline{\omega}^i_0 + a^j_0\,\overline{\omega}^i_j\,,$$

$$a^i_j\, du^j = du^i$$

d'où

$$a^i_j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ [1]} \\ 0 & \text{si } i \neq j\,. \end{cases}$$

Donc: Afin que les formules (2.5) fassent passer d'un repère semi-naturel à un repère semi-naturel, il faut et il suffit que la matrice $\| a^\lambda_\mu \|$ ait les éléments $a^\lambda_0 = \delta^\lambda_0$, $a^i_j = \delta^i_j$ et a^0_j arbitraires; soit

$$\| a^\lambda_\mu \| = \left\| \begin{matrix} 1, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ a^0_1, & 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ a^0_2, & 0, & 1, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a^0_n, & 0, & 0, & \cdots, & 1 \end{matrix} \right\| .$$

En d'autres termes: Si les points analytiques A_0, A_i définissent un repère semi-naturel, le plus général repère semi-naturel est défini par les points

1) Les δ^i_j (symboles de Kronecker) s'emploieront dans la suite toujours dans ce sens.

$$\bar{A}_0 = A_0, \quad \bar{A}_i = A_i + \Phi_i A_0$$

avec Φ_i arbitraires. Il s'ensuit qu'un repère semi-naturel est déterminé par la donnée des points A_i sur les tangentes des lignes paramétriques issues du point A_0 ou, ce qui revient au même, par son hyperplan de l'infini.

Nous allons maintenant prouver qu'il y a un repère semi-naturel et un seul, vérifiant la condition

$$\omega_i^i - \delta_i^i \omega_0^0 = \omega_i^i - n\,\omega_0^0 = 0.$$

En effet, posons $\nu = i$, $\lambda = j$ dans les formules (3.5); on a

$$a_\mu^i \omega_j^\mu = da_j^i + a_j^\mu \bar{\omega}_\mu^i,$$

$$a_0^i \omega_j^0 + a_k^i \omega_j^k = da_j^i + a_j^0 \bar{\omega}_0^i + a_j^k \bar{\omega}_k^i,$$

$$\omega_j^i = a_j^0 du^i + \bar{\omega}_j^i;$$

en posant $\lambda = \nu = 0$ dans (3.5) on a

$$a_\mu^0 \omega_0^\mu = da_0^0 + a_0^\mu \bar{\omega}_\mu^0$$

$$\omega_0^0 + a_j^0 du^j = \bar{\omega}_0^0$$

donc on obtient

$$\bar{\omega}_i^i - n\,\bar{\omega}_0^0 = \omega_i^i - n\,\omega_0^0 - (n+1)\,a_j^0 du^j,$$

ce qui nous montre que pour annuler $\bar{\omega}_i^i - n\,\bar{\omega}_0^0$, on n'a qu'à prendre a_j^0 de telle manière qu'on ait

$$\omega_i^i - n\,\omega_0^0 = (n+1)\,a_j^0 du^j.$$

Le repère projectif réalisant cette condition est appelé par M. E. Cartan, *repère naturel.*

Dans la théorie de M. E. Cartan que nous avons exposée, la connexion projective étant complètement déterminée par les formes $\omega_\mu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \omega_0^0$, la forme de Pfaff ω_0^0 ne joue aucun rôle. Mais, dans ce qui suit, nous voudrions présenter les choses d'une autre manière en faisant jouer un rôle à la forme parasite ω_0^0.

Nous avons vu que, pour un système de coordonnées $(u^1, u^2, \ldots u^n)$, on a une classe de repères semi-naturels et un seul repère naturel dans un espace projectif tangent à la variété à connexion projective.

Les coordonnées $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ qui désignent des points de la variété étant tout à fait arbitraires, on peut passer d'un système de coordonnées à un autre système par une transformation analytique

$$u^i = u^i(\bar{u}^j). \tag{3.7}$$

Les repères semi-naturels relatifs à l'ancien système de coordonnées ne peuvent plus évidemment être semi-naturels par rapport au nouveau système. Il se pose alors la question d'étudier le passage d'un repère semi-naturel relatif à l'ancien système, à un repère semi-naturel attaché au nouveau système.

Ce passage peut être effectué en deux étapes : 1° on change les coordonnées (u) et on conserve l'hyperplan de l'infini du repère, et 2° on conserve les coordonnées $(\bar{u})$ et on change l'hyperplan de l'infini du repère.

1° Dans le système de coordonnées $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ on a, pour un repère semi-naturel, la relation caractéristique

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + du^i A_i,$$

où ω_0^0 est une forme de Pfaff ; posons

$$\omega_0^0 = p_i du^i, \tag{3.8}$$

alors on a

$$dA_0 = p_i\, du^i A_0 + du^i A_i. \tag{3.9}$$

Effectuons la transformation de coordonnées (3.7) ; on tire alors des formules (3.9)

$$dA_0 = p_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} d\bar{u}^i A_0 + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} d\bar{u}^i A_j.$$

Cela nous fait voir que le repère défini par les points analytiques

$$\begin{cases} \bar{A}_0 = A_0 \\ \bar{A}_i = \dfrac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} A_j . \end{cases} \tag{3.10}$$

est un repère semi-naturel. Car en posant

$$\bar{p}_j = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} p_i \tag{3.11}$$

on a la relation caractéristique

$$d\bar{A}_0 = \bar{p}_j\, d\bar{u}^j \bar{A}_0 + d\bar{u}^i \bar{A}_i.$$

De plus, comme les points $\bar{A}_i$ dépendent linéairement des points A_i, ce repère a le même hyperplan de l'infini que le repère initial, et cela, comme nous l'avons remarqué, le détermine complètement.

Nous appelons simplement „transformation de coordonnées" cette transformation qui ne change pas l'hyperplan de l'infini.

Cela étant, voyons comment se transforment les coefficients des autres formes de Pfaff ω_j^0 et ω_j^i pendant cette transformation. Posons

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_j^0 = \omega_{jk}^0\, du^k\,, \\ \omega_j^i = \omega_{jk}^i\, du^k\,;\end{array}\right. \tag{3.12}$$

alors on a

$$d\bar{A}_j = \bar{\omega}_{jk}^0\, d\bar{u}^k\, \bar{A}_0 + \bar{\omega}_{jk}^i\, d\bar{u}^k\, \bar{A}_i\,, \tag{3.13}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{A}_0 = A_0, \\ \bar{A}_j = \dfrac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}\, A_i\,.\end{array}\right.$$

Des équations (3.13), l'on déduit

$$\frac{\partial^2 u^a}{\partial \bar{u}^j\, \partial \bar{u}^k}\, d\bar{u}^k\, A_a + \frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^j}\, dA_a = \bar{\omega}_{jk}^0\, d\bar{u}^k\, A_0 + \bar{\omega}_{jk}^i\, d\bar{u}^k\, \frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^i}\, A_a\,,$$

$$\frac{\partial^2 u^a}{\partial \bar{u}^j\, \partial \bar{u}^k}\, d\bar{u}^k\, A_a + \frac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^j}\left(\omega_{bc}^0\, \frac{\partial u^c}{\partial \bar{u}^k}\, d\bar{u}^k\, A_0 + \omega_{bc}^a\, \frac{\partial u^c}{\partial \bar{u}^k}\, d\bar{u}^k\, A_a\right)$$

$$= \bar{\omega}_{jk}^0\, d\bar{u}^k\, A_0 + \bar{\omega}_{jk}^i\, d\bar{u}^k\, \frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^i}\, A_a$$

d'où

$$\omega_{bc}^0\, \frac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^j}\, \frac{\partial u^c}{\partial \bar{u}^k} = \bar{\omega}_{jk}^0\,. \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial^2 u^a}{\partial \bar{u}^j\, \partial \bar{u}^k} + \frac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^j}\, \frac{\partial u^c}{\partial \bar{u}^k}\, \omega_{bc}^a = \frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^i}\, \bar{\omega}_{jk}^i\,. \tag{3.15}$$

Donc on a le théorème :

Pendant la transformation des coordonnées (qui ne change pas l'hyperplan de l'infini) les fonctions ω_{jk}^0 se transforment comme les composantes d'un tenseur covariant affine et les fonctions ω_{jk}^i comme les composantes d'une connexion affine.

2°. Maintenant, nous allons considérer la transformation entre repères semi-naturels relatifs à un même système de coordonnées, c'est-à-dire la transformation qui change l'hyperplan de l'infini.

Nous avons vu plus haut que ce changement peut être représenté par

$$(3.16)\qquad \begin{cases} \overline{A}_0 = A_0 \\ \overline{A}_i = A_i - \Phi_i A_0 \end{cases}$$

où Φ_i sont des fonctions de u^i.

En substituant (3.16) dans

$$d\overline{A}_0 = \overline{\omega}_0^0 \overline{A}_0 + du^i \overline{A}_i .$$

on voit que

$$(3.17)\qquad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 + \Phi_i \, du^i .$$

Ici la forme de Pfaff ω_0^0 joue un rôle assez important, mais il faut remarquer que la considération de cette forme n'a aucun rapport avec la théorie de M. E. Cartan.

Pour apporter plus de symétrie dans la formule

$$dA_0 = p_i \, du^i A_0 + du^i A_i ,$$

nous écrirons

$$(3.18)\qquad du^0 = \omega_0^0 = p_i \, du^i,$$

alors, nous aurons

$$(3.19)\qquad dA_0 = du^0 A_0 + du^i A_i .$$

La forme de Pfaff $\omega_0^0 = p_i \, du^i$ n'étant pas en général une différentielle exacte, u^0 n'est pas une variable véritable ; nous appellerons u^0, avec M. J. A. Schouten [(75), (86)], la variable non-holonome.

La variable non-holonome u^0 étant ainsi définie, la transformation (3.17) peut être représentée comme une transformation de variable non-holonome :

$$(3.20)\qquad d\overline{u}^0 = du^0 + \Phi_i \, du^i .$$

Nous appelons simplement „la transformation de la variable non-holonome u^0" cette transformation qui change l'hyperplan de l'infini en transformant les repères semi-naturels en repères semi-naturels.

Voyons maintenant comment les fonctions ω_{ik}^0 et ω_{jk}^i se transforment quand on effectue cette transformation de la variable non-holonome u^0.

En désignant les fonctions transformées de ω_{jk}^0 et ω_{jk}^i par $\overline{\omega}_{jk}^0$ et $\overline{\omega}_{jk}^i$ respectivement, on a

$$d\overline{A}_j = \overline{\omega}_j^0 \overline{A}_0 + \overline{\omega}_j^i \overline{A}_i ,$$

$$dA_j - (d\Phi_j) A_0 - \Phi_j d\overline{A}_0 = \overline{\omega}_j^0 A_0 + \overline{\omega}_j^i (A_i - \Phi_i A_0) ,$$

$$\omega_j^0 A_0 + \omega_j^i A_i - (d\Phi_j) A_0 - \Phi_j (p_k du^k A_0 + du^i A_i) = \overline{\omega}_j^0 A_0 + \overline{\omega}_j^i (A_i - \Phi_i A_0),$$

d'où

$$\omega_{jk}^0 - \Phi_{j,k} - \Phi_j p_k = \overline{\omega}_{jk}^0 - \Phi_i \overline{\omega}_{jk}^i ,$$

$$\omega_{jk}^i - \Phi_j \delta_k^i = \overline{\omega}_{jk}^i ,$$

où

$$\Phi_{j,k} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial u^k} .$$

Donc on a le théorème :

Pendant la transformation de la variable non-holonome u^0 (transformation de l'hyperplan de l'infini), les fonctions ω_{jk}^0 et ω_{jk}^i se transforment respectivement d'après les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{\omega}_{jk}^0 &= \omega_{jk}^0 - \Phi_j \Phi_k - \Phi_{j,k} + \Phi_i \omega_{jk}^i - \Phi_j p_k , \\ \overline{\omega}_{jk}^i &= \omega_{jk}^i - \Phi_j \delta_k^i . \end{aligned} \right. \tag{3.21}$$

Soulignons, en terminant ce chapitre, qu'une classe de repères semi-naturels par rapport au nouveau système de coordonnées $(\overline{u}^i)$ correspondant à une classe de repères semi-naturels par rapport à l'ancien système de coordonnées (u_i), nous avons décomposé le changement de repère semi-naturel en deux opérations partielles :

— première opération : passer d'un ancien repère semi-naturel au nouveau repère semi-naturel qui a le même hyperplan de l'infini que l'ancien ;

— deuxième opération ; passer d'un repère semi-naturel à un autre repère semi-naturel dans un même système de coordonnées en changeant l'hyperplan de l'infini;

et que nous avons convenu d'appeler la première opération la transformation des coordonnées u^i et la deuxième la transformation de la variable non-holonome u^0.

Chapitre IV

LES TRANSFORMATIONS DES COMPOSANTES DE LA CONNEXION PROJECTIVE.

Considérons un contour fermé infiniment petit, partant d'un point P de la variété et y revenant. Les coordonnées homogènes X^λ d'un point dans un espace projectif tangent attaché à un point P subiront une variation infinitésimale ΔX^λ et on aura les formules [(10), (21)]

$$
(4.1)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\Delta X^0 - \Omega^0_0 X^0 - \Omega^0_1 X^1 - \cdots - \Omega^0_n X^n = 0\,, \\
\Delta X^1 - \Omega^1_0 X^0 - \Omega^1_1 X^1 - \cdots - \Omega^1_n X^n = 0\,, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\Delta X^n - \Omega^n_0 X^0 - \Omega^n_1 X^1 - \cdots - \Omega^n_n X^n = 0\,,
\end{array}\right.
$$

où

$$
(4.2)\qquad \left\{\begin{array}{l}
\Omega^0_0 = -(\omega^0_0)' + [\omega^j_0\,\omega^0_j]\,, \\
\Omega^i_0 = -(\omega^i_0)' + [\omega^0_0\,\omega^i_0] + [\omega^j_0\,\omega^i_j]\,, \\
\Omega^0_i = -(\omega^0_i)' + [\omega^0_i\,\omega^0_0] + [\omega^k_i\,\omega^0_k]\,, \\
\Omega^i_j = -(\omega^i_j)' + [\omega^0_j\,\omega^i_0] + [\omega^h_j\,\omega^i_h]\,.
\end{array}\right.
$$

Il faut remarquer que (4.1), comme (3.2), définissant un déplacement projectif infinitésimal, seules les formes $\Omega^\lambda_\mu - \delta^\lambda_\mu\,\Omega^0_0$ ont un sens géométrique.

Le point P regardé comme étant celui de l'espace projectif tangent a comme coordonnées homogènes $(1, 0, 0, \ldots 0)$. Donc la variation de ce point satisfait à

$$
\left\{\begin{array}{l}
\Delta X^0 - \Omega^0_0 = 0\,, \\
\Delta X^1 - \Omega^1_0 = 0\,, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\Delta X^n - \Omega^n_0 = 0\,.
\end{array}\right.
$$

Si le point P revient à sa premiere position après un tour, on dit que la connexion est *sans torsion.* Une condition nécessaire et suffisante pour que la connexion soit sans torsion, est donnée par les équations suivantes

$$
(4.3)\qquad \Omega^1_0 = 0\,,\ \Omega^2_0 = 0\,, \ldots,\ \Omega^n_0 = 0\,.
$$

D'après les deuxièmes équations de (4.2), ces conditions peuvent s'écrire

$$-(\omega_0^i)' + [\omega_0^0 \, \omega_0^i] + [\omega_0^j \, \omega_j^i] = 0 .$$

En substituant

$$\omega_0^i = du^i ,$$
$$\omega_0^0 = p_k \, du^k ,$$
$$\omega_j^i = \omega_{jk}^i \, du^k ,$$

on obtient

$$[p_k \, du^k , du^i] + [du^j , \omega_{jk}^i \, du^k] = 0 ,$$

$$(\omega_{jk}^i - \delta_j^i \, p_k) \, [du^j \, du^k] = 0 .$$

En posant

$$\Pi_{jk}^i = \omega_{jk}^i - \delta_j^i \, p_k , \tag{4.4}$$

on a, comme condition pour que la connexion soit sans torsion,

$$\Pi_{jk}^i = \Pi_{kj}^i . \tag{4.5}$$

Cela dit, considérons un point

$$X = X^0 A_0 + X^1 A_1 + \cdots + X^n A_n$$

dans un espace projectif attaché à un point $P(u^i)$ de la variété ; ce point viendra coïncider avec le point correspondant quand on fait le raccord des espaces tangents, si l'on a $dX = hX$, où

$$dX = dX^\lambda A_\lambda + X^\lambda dA_\lambda$$
$$= (dX^\lambda + X^\mu \omega_\mu^\lambda) \, A_\lambda ,$$

c'est-à-dire si l'on a

$$dX^\lambda + X^\mu \omega_{\mu i}^\lambda \, du^i = h X^\lambda .$$

Les premiers membres de ces équations s'écrivent encore sous la forme suivante

$$dX^\lambda + X^\mu (\omega_{\mu i}^\lambda - \delta_\mu^\lambda p_i) \, du^i + X^\lambda p_i \, du^i . \tag{4.6}$$

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{\mu i}^\lambda = \omega_{\mu i}^\lambda - \delta_\mu^\lambda \, p_i , \\ \Pi_{\mu 0}^\lambda = \delta_\mu^\lambda , \end{array} \right. \tag{4.7}$$

alors, en remarquant que

$$du^0 = p_i\, du^i\,,$$

on obtient de (4.6)

$$dX^\lambda + X^\mu \Pi^\lambda_{\mu\nu}\, du^\nu. \tag{4.8}$$

Des équations (4.7), on tire les suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} \Pi^0_{0j} = \omega^0_{0j} - p_j = 0\,, \\ \Pi^0_{jk} = \omega^0_{jk}\,, \\ \Pi^i_{0j} = \omega^i_{0j} = \delta^i_j\,, \\ \Pi^i_{jk} = \omega^i_{jk} - \delta^i_j\, p_k\,. \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Les premières et troisièmes relations nous assurent que

$$\Pi^\lambda_{0j} = \delta^\lambda_j\,,$$

donc on a

$$\Pi^\lambda_{\mu 0} = \Pi^\lambda_{0\mu} = \delta^\lambda_\mu. \tag{4.10}$$

Nous avons déjà vu que, pendant la transformation de la variable non-holonome u^0

$$d\overline{u}^0 = du^0 + \Phi_i\, du^i\,,$$

c'est-à-dire pendant la transformation

$$\overline{p}_i = p_i + \Phi_i\,, \tag{4.11}$$

les fonctions ω^0_{jk} et ω^i_{jk} se transforment en $\overline{\omega}^0_{jk}$ et $\overline{\omega}^i_{jk}$ respectivement de la manière suivante:

$$\overline{\omega}^0_{jk} = \omega^0_{jk} - \Phi_{j,k} - \Phi_j \Phi_k + \Phi_i\, \omega^i_{jk} - \Phi_j\, p_k\,, \tag{4.12}$$

$$\overline{\omega}^i_{jk} = \omega^i_{jk} - \Phi_j\, \delta^i_k. \tag{4.13}$$

En outre, nous avons aussi vu que les fonctions ω^0_{jk} et ω^i_{jk} se transforment en $\overline{\omega}^0_{jk}$ et $\overline{\omega}^i_{jk}$ respectivement pendant la transformation de coordonnées u^i de la variété, de la manière suivante :

$$\overline{\omega}^0_{jk} = \omega^0_{lm} \frac{\partial u^l}{\partial \overline{u}^j} \frac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^k}\,, \tag{4.14}$$

$$\overline{\omega}^i_{jk} = \frac{\partial \overline{u}^i}{\partial u^l}\left(\omega^l_{mn} \frac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^j} \frac{\partial u^n}{\partial \overline{u}^k} + \frac{\partial^2 u^l}{\partial \overline{u}^j\, \partial \overline{u}^k} \right). \tag{4.15}$$

Cela étant, voyons comment les fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ se transforment en $\overline{\Pi}^{\lambda}_{\mu\nu}$ pendant les deux transformations.

En tenant compte des formules (4.9), (4.12) et (4.13), on voit que l'effet de la transformation (4.11) est

$$
(4.16)\qquad \begin{cases}
\overline{\Pi}^{0}_{jk} = \Pi^{0}_{0j} = 0\,, \\
\overline{\Pi}^{0}_{jk} = \Pi^{0}_{jk} - \Phi_j\Phi_k - (\Phi_{j,k} - \Phi_i \Pi^{i}_{jk}), \\
\overline{\Pi}^{i}_{0j} = \Pi^{i}_{0j} = \delta^{i}_{j}, \\
\overline{\Pi}^{i}_{jk} = \Pi^{i}_{jk} - \delta^{i}_{j}\Phi_k - \delta^{i}_{k}\Phi_j\,, \\
\overline{\Pi}^{\lambda}_{\mu 0} = \Pi^{\lambda}_{\mu 0} = \delta^{\lambda}_{\mu}.
\end{cases}
$$

Les quatrièmes équations représentent le changement des composantes de la connexion projective, obtenu tout d'abord par MM. H. WEYL, L. P. EISENHART et O. VEBLEN [voir (124), (27), (103), (133)].

Pour un changement des coordonnées u^i de la variété à connexion projective, on a la loi suivante de transformation :

$$
(4.17)\qquad \begin{cases}
\overline{\Pi}^{0}_{0j} = \Pi^{0}_{0j} = 0, \\
\overline{\Pi}^{0}_{jk} = \Pi^{0}_{lm} \dfrac{\partial u^l}{\partial \overline{u}^j}\dfrac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^k}, \\
\Pi^{i}_{0j} = \Pi^{i}_{0j} = \delta^{i}_{j}, \\
\overline{\Pi}^{i}_{jk} = \dfrac{\partial \overline{u}^i}{\partial u^l}\left(\Pi^{l}_{mn}\dfrac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^j}\dfrac{\partial u^n}{\partial \overline{u}^k} + \dfrac{\partial^2 u^l}{\partial \overline{u}^j\,\partial \overline{u}^k}\right), \\
\overline{\Pi}^{\lambda}_{\mu 0} = \Pi^{\lambda}_{\mu 0} = \delta^{\lambda}_{\mu}.
\end{cases}
$$

Enfin, *pour un changement des coordonnées u^i suivi d'un changement de la coordonnée u^0*,

$$
(4.18)\qquad \begin{cases}
d\overline{u}^0 = du^0 + \Phi_i\, du^i \\
\overline{u} = \overline{u}^i\,(u),
\end{cases}
$$

on a les formules suivantes :

$$
(4.19)\qquad \begin{cases}
\overline{\Pi}^{0}_{0j} = \Pi^{0}_{0j} = 0\,, \\
\overline{\Pi}^{0}_{jk} = \Pi^{0}_{lm}\dfrac{\partial u^l}{\partial \overline{u}^j}\dfrac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^k} - \Phi_l\Phi_m\dfrac{\partial u^l}{\partial \overline{u}^j}\dfrac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^k} - (\Phi_{l,m} - \Phi_i\Pi^{i}_{lm})\dfrac{\partial u^l}{\partial \overline{u}^j}\dfrac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^k}, \\
\overline{\Pi}^{i}_{0j} = \Pi^{i}_{0j} = \delta^{i}_{j}, \\
\overline{\Pi}^{i}_{jk} = \dfrac{\partial \overline{u}^i}{\partial u^l}\left(\Pi^{l}_{mn}\dfrac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^j}\dfrac{\partial u^n}{\partial \overline{u}^k} + \dfrac{\partial^2 u^l}{\partial \overline{u}^j\,\partial \overline{u}^k}\right) - \delta^{i}_{j}\Phi_m\dfrac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^k} - \delta^{i}_{k}\Phi_m\dfrac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^j}. \\
\overline{\Pi}^{\lambda}_{\mu 0} = \Pi^{\lambda}_{\mu 0} = \delta^{\lambda}_{\mu}.
\end{cases}
$$

Il est à remarquer que la symétrie de Π^{0}_{jk} par rapport aux indices inférieurs ne se conserve pas en général, tandis que la symétrie de Π^{i}_{jk} par rapport aux indices j et k se conserve toujours.

Remarque. Pour obtenir la condition

$$\Pi^{\lambda}_{\mu 0} = \Pi^{\lambda}_{0\mu} = M\delta^{\lambda}_{\mu}, \qquad (M = \text{constante})$$

posée par M. O. VEBLEN [(112)] et les autres [(1), (53), (98)], on n'a qu'à poser

$$du^0 = \frac{1}{M} p_i\, du^i\ ;$$

alors on aura pour les fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$

$$\Pi^{\lambda}_{\mu 0} = \Pi^{\lambda}_{0\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu},$$

et pour la transformation de la variable non-holonome

$$d\bar{u}^0 = du^0 + \frac{1}{M}\Phi_i\, du^i\ .$$

Chapitre V

LES ÉQUATIONS DES „PATHS" ET LE PARAMÈTRE PROJECTIF NORMAL.

Dans ce Chapitre, nous allons considérer les géodésiques et quelques paramètres spéciaux sur ces courbes, en partant de la définition des géodésiques de M. E. CARTAN [(10), (21)].

Prenons une courbe issue d'un point de la variété. Cette courbe s'appelle géodésique ou *path* si son développement sur l'espace projectif tangent attaché à ce point est une ligne droite.

Ce fait peut être exprimé par

$$d^2 A_0 = \lambda\, dA_0 + \mu A_0,$$

où

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega^0_0 A_0 + du^i A_i \\ d^2A_0 &= d\omega^0_0 A_0 + \omega^0_0\, dA_0 + d^2u^i A_i + du^i\, dA_i \\ &= (d\omega^0_0 + \omega^0_0\omega^0_0 + \omega^0_j\, du^j) A_0 + (\omega^0_0\, du^i + d^2u^i + \omega^i_j\, du^j) A_i\,, \end{aligned}$$

donc, comme équations différentielles définissant les géodésiques, on obtient les suivantes :

$$\frac{d^2u^i + \omega^i_k du^k}{du^i} = \frac{d^2u^j + \omega^j_k du^k}{du^j}.$$

Mais, en choisissant convenablement un paramètre t et une fonction ρ de t sur la géodésique, on peut écrire l'équation de la géodésique sous la forme suivante :

(5.1) $$\frac{d^2\, \rho A_0}{dt^2} = 0.$$

La ligne développée sur l'espace projectif tangent étant une droite, le rapport anharmonique des quatre points sur cette droite correspondant à quatre valeurs de t, est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs de t.

Nous allons chercher l'équation qui définit le paramètre t.

En employant un paramètre arbitraire r sur la géodesique, on a

(5.2) $$\begin{cases} \dfrac{dA_0}{dr} = \dfrac{du^0}{dr} A_0 + \dfrac{du^i}{dr} A_i, \\ \dfrac{dA_j}{dr} = \omega^0_{jk} \dfrac{du^k}{dr} A_0 + \omega^i_{jk} \dfrac{du^k}{dr} A_i, \end{cases}$$

donc

$$\frac{d^2A_0}{dr^2} = \left[\frac{d^2u^0}{dr^2} + \left(\frac{du^0}{dr}\right)^2 + \omega^0_{jk} \frac{du^j}{dr}\frac{du^k}{dr}\right] A_0 + $$
$$+ \left[\frac{d^2u^i}{dr^2} + \omega^i_{jk} \frac{du^j}{dr}\frac{du^k}{dr} + \frac{du^0}{dr}\frac{du^i}{dr}\right] A_i,$$

(5.3) $$\frac{d^2A_0}{dr^2} = \left[\frac{d^2u^0}{dr^2} + \left(\frac{du^0}{dr}\right)^2 + \Pi^0_{jk} \frac{du^j}{dr}\frac{du^k}{dr}\right] A_0 + $$
$$+ \left[\frac{d^2u^i}{dr^2} + \Pi^i_{jk} \frac{du^j}{dr}\frac{du^k}{dr} + 2\frac{du^0}{dr}\frac{du^i}{dr}\right] A_i.$$

Pour que cette courbe soit géodésique, on doit avoir

(5.4) $$\lambda \frac{du^i}{dr} = \frac{d^2u^i}{dr^2} + \Pi^i_{jk} \frac{du^j}{dr}\frac{du^k}{dr} + 2\frac{du^0}{dr}\frac{du^i}{dr}.$$

Alors on aura

$$\frac{d^2A_0}{dr^2} = \lambda \frac{dA_0}{dr} + \mu A_0,$$

où

$$(5.5)\qquad \mu = \frac{d^2u^0}{dr^2} + \left(\frac{du^0}{dr}\right)^2 + \Pi^0_{jk}\frac{du^j}{dr}\frac{du^k}{dr} - \lambda\frac{du^0}{dr}.$$

Cela posé, calculons

$$\frac{d^2\varrho A_0}{dt^2} = 0.$$

On a d'abord

$$\frac{d\varrho A_0}{dt} = \frac{1}{t'}\left(\varrho' A_0 + \varrho\frac{dA_0}{dr}\right),$$

où la l'accent indique la dérivation par rapport au paramètre r. En dérivant encore par rapport à t, on a

$$\frac{d^2\varrho A_0}{dt^2} = \frac{1}{t'^2}\left(\varrho'' A_0 + 2\varrho'\frac{dA_0}{dr} + \varrho\frac{d^2A_0}{dr^2}\right) - \frac{t''}{t'^3}\left(\varrho' A_0 + \varrho\frac{dA_0}{dr}\right)$$

$$= \frac{\varrho}{t'^2}\left(\frac{2\varrho'}{\varrho} + \lambda - \frac{t''}{t'}\right)\frac{dA_0}{dr} + \frac{\varrho}{t'^2}\left(\frac{\varrho''}{\varrho} + \mu - \frac{t''}{t'}\frac{\varrho'}{\varrho}\right)A_0.$$

Donc on a

$$(5.6)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{\varrho'}{\varrho} + \lambda - \dfrac{t''}{t'} = 0, \\[2ex] \dfrac{\varrho''}{\varrho} + \mu - \dfrac{t''}{t'}\dfrac{\varrho'}{\varrho} = 0, \end{cases}$$

comme condition pour que t soit le paramètre cherché.

En éliminant ϱ, on obtient

$$\frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2}\frac{t''^2}{t'^2} = \lambda' - \frac{1}{2}\lambda^2 - 2\mu,$$

ce qui, en posant

$$(5.7)\qquad \{t\}_r = \frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2}\frac{t''^2}{t'^2},$$

s'écrit

$$(5.8)\qquad \{t\}_r = \lambda' - \frac{1}{2}\lambda^2 - 2\mu.$$

[voir E. Cartan (21) p. 5].

L'expression bien connue $\{t\}_r$ s'appelle la dérivée schwarzienne de la fonction $t(r)$ par rapport à la variable r.

Le paramètre t étant ainsi déterminé, nous allons introduire un autre paramètre s qui nous permettra d'écrire les équations des géodésiques sous une forme plus simple.

Des équations (5.4), l'on tire

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} s'^2 + \frac{du^i}{ds} s'' + \Pi^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} s'^2 + 2 \frac{du^0}{ds} \frac{du^i}{ds} s'^2 - \lambda \frac{du^i}{ds} s' = 0,$$

donc, si l'on prend le paramètre s de manière à avoir

$$s'' + 2 \frac{du^0}{ds} s'^2 - \lambda s' = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \frac{s''}{s'} + 2 \frac{du^0}{dr}, \tag{5.9}$$

les équations des géodésiques s'écrivent

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Pi^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0.$$

En substituant (5.5) et (5.9) dans (5.8), on trouve

$$\begin{aligned}
\{t\}_r = {} & \frac{s'''}{s'} - \frac{s''^2}{s'^2} + 2 \frac{d^2 u^0}{dr^2} - \frac{1}{2} \frac{s''^2}{s'^2} - 2 \frac{s''}{s'} \frac{du^0}{dr} - 2 \left(\frac{du^0}{dr}\right)^2 + \\
& - 2 \frac{d^2 u^0}{dr^2} - 2 \left(\frac{du^0}{dr}\right)^2 - 2 \Pi^0_{jk} \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} + 2 \left(\frac{s''}{s'} + 2 \frac{du^0}{dr}\right) \frac{du^0}{dr} \\
= {} & \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2} \frac{s''^2}{s'^2} - 2 \Pi^0_{jk} \frac{du^j}{dr} \frac{du^k}{dr} \\
= {} & \{s\}_r - 2 \Pi^0_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} s'^2
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\{t\}_r - \{s\}_r}{s'^2} = - 2 \Pi^0_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds}.$$

D'après la formule bien connue

$$\frac{\{t\}_r - \{s\}_r}{s'^2} = \{t\}_s, \tag{5.10}$$

on a enfin

$$\{t\}_s = - 2 \Pi^0_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds}.$$

Donc, on peut énoncer le théorème [(134)]:

Le système des géodesiques dans une variété à connexion projective étant donné par

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Pi^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} = 0, \tag{5.11}$$

le paramètre t qui donne la forme (5.1) *à l'équation d'une géodésique est déterminé par*

$$\{t\}_s = -2\,\Pi^0_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} \tag{5.12}$$

sur chaque géodesique.

Nous avons ainsi décomposé les équations des géodésiques en deux systèmes d'équations (5.11) et (5.12). Si l'on se donne arbitrairement, un point et une direction en ce point, c'est-à-dire $(u^i)_0$ et $(du^i / ds)_0$, les équations (5.11) déterminent un *path.* La théorie des équations différentielles de la forme (5.11) a été surtout étudiée par les géomètres de l'École de Princeton. C'est la „*Geometry of paths*" de MM. L. P. Eisenhart [(27), (28), (29), (30), (31), (33), (34)], O. Veblen [(103), (105), (114), (115), (116)], T. Y. Thomas [(101), (116)], J. M. Thomas [(91), (92), (114), (115)].

Les équations différentielles (5.11) déterminant ainsi les géodésiques, l'équation (5.12) détermine une fonction $t(s)$ le long de ces courbes. Comme l'on ne connaît que la dérivée schwarzienne de la fonction $t(s)$, $t(s)$ n'est déterminé qu'à une substitution homographique près, ce qui est évident d'après l'interprétation géométrique de t donnée au début de ce Chapitre.

Ce paramètre t, premièrement introduit par M. J. H. C. Whitehead [(129)] [voir aussi L. Berwald (1)], s'appelle *paramètre projectif normal.*

La théorie des équations différentielles (5.11) par rapport au groupe de transformations

$$\bar{u}^i = \bar{u}^i(u)$$

étant la Géométrie des *paths*, la théorie des équations différentielles (5.11) et (5.12) par rapport au groupe de transformations

$$\begin{cases} d\bar{u}^0 = du^0 + \Phi_i\, du^i \\ \bar{u}^i = \bar{u}^i(u), \end{cases}$$

c'est-à-dire par rapport au groupe de transformations des coordonnées u^i

$$\overline{u}^i = \overline{u}^i(u),$$

et au groupe de transformations de la variable non-holonome u^0

$$d\overline{u}^0 = du^0 + \Phi_i du^i,$$

qui entraînent les transformations des composantes Π^0_{jk} et Π^i_{jk}

$$\begin{cases} \overline{\Pi}^0_{jk} = \Pi^0_{jk} - \Phi_j \Phi_k - \Phi_{j,k} + \Phi_i \Pi^i_{jk}, \\ \overline{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} - \delta^i_j \Phi_k - \delta^i_k \Phi_j, \end{cases}$$

est appelée par les géomètres américains la *Géométrie projective des paths* [(voir (1), (34), (42), (90), (94), (96), (101), (103)].

Comme les fonctions Π^0_{jk} et Π^i_{jk} se transforment respectivement en $\overline{\Pi}^0_{jk}$ et $\overline{\Pi}^i_{jk}$ d'après les formules (4.17) quand on effectue une transformation des coordonnées $\overline{u}^i = \overline{u}^i(u)$, il est évident que les paramètres s et t restent invariants pendant cette transformation.

Si l'on effectue une transformation de la variable non-holonome u^0, c'est-à-dire un changement de l'hyperplan de l'infini, qui entraîne la transformation (4.16) des Π^0_{jk} et Π^i_{jk}, les équations (5.11) prennent la forme suivante:

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \overline{\Pi}^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} + 2\Phi_j \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} = 0. \tag{5.13}$$

Pour mettre ces équations sous la forme de (5.11), effectuons un changement de paramètre s. On définit une fonction $\overline{s}(s)$ par

$$-2\Phi_j \frac{du^j}{ds} = \frac{\dfrac{d^2\overline{s}}{ds^2}}{\dfrac{d\overline{s}}{ds}}, \tag{5.14}$$

c'est-à-dire par

$$\frac{d\overline{s}}{ds} = e^{-2\int \Phi_j du^j}. \tag{5.15}$$

Alors, les équations (5.14) se réduisent aux équations

$$\frac{d^2u^i}{d\overline{s}^2} + \overline{\Pi}^i_{jk} \frac{du^j}{d\overline{s}} \frac{du^k}{d\overline{s}} = 0,$$

où $\bar{s}$ est le paramètre affine relatif aux composantes $\bar{\Pi}^i_{jk}$ de la connexion affine.

En ce qui concerne le paramètre projectif normal t, il est évident, d'après la signification géométrique de t, que t ne changera pas pendant un changement de l'hyperplan de l'infini. En effet, on peut montrer par un calcul facile que

$$\{t\}_{\bar{s}} = -2\bar{\Pi}^0_{jk}\frac{du^j}{d\bar{s}}\frac{du^k}{d\bar{s}}. \tag{5.16}$$

Les u^i et t étant déterminés sur chaque géodésique comme fonctions du paramètre affine s, nous allons chercher la valeur de la variable non-holonome u^0 sur chaque géodésique.

En substituant (5.9) dans la première équation de (5.6), on trouve

$$2\frac{\varrho'}{\varrho} + \frac{s''}{s'} + 2\frac{du^0}{dr} - \frac{t''}{t'} = 0,$$

$$2\log\varrho + \log s' + 2u^0 - \log t' = \text{constante},$$

donc : *on a, à une constante additive près, le long de la géodésique,*

$$u^0 = -\frac{1}{2}\log\left(\varrho^2\frac{ds}{dt}\right). \tag{5.17}$$

On sait que le paramètre projectif normal t étant défini par une dérivée schwarzienne, t peut subir une transformation homographique

$$\bar{t} = \frac{at+b}{ct+d}, \tag{5.18}$$

où l'on peut supposer sans restreindre la généralité

$$ad - bc = 1. \tag{5.19}$$

u^0 étant déterminée sur chaque géodésique, on voit que la fonction ϱ subit, pendant la transformation homographique (5.18) de t, la transformation suivante

$$\bar{\varrho} = \frac{\varrho}{ct+d}. \tag{5.20}$$

Dans son Mémoire intitulé „On the projective Geometry of paths" M. L. Berwald [(1)], essayant d'expliquer, uniquement du point de vue de la Géométrie des *paths*, la théorie des espaces projectifs de l'École de Princeton et l'introduction de la coordonnée surnuméraire u^0, est parvenu à la notion de paramètre projectif normal.

Il part d'un système de *paths* déterminé par

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Pi^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} = 0\,, \tag{5.21}$$

et il définit, sur chaque géodésique, le paramètre projectif normal t par

$$\{t\}_s = -2\,\Pi^0_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} \tag{5.22}$$

et la coordonnée surnuméraire u^0, sur chaque géodésique aussi, par

$$u^0 = -\frac{1}{2}\log\frac{ds}{dt}\,, \tag{5.23}$$

où les Π^0_{jk} et Π^i_{jk} sont *symétriques* par rapport aux indices j et k, et il pose les deux conditions suivantes: 1°, t reste invariant quand on effectue une transformation de coordonnées

$$\bar{u}^i = \bar{u}^i(u)\,,$$

et 2°, t reste invariant quand on effectue un changement des composantes de la connexion affine

$$\bar{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} - \delta^i_j\Phi_k - \delta^i_k\Phi_j\,. \tag{5.24}$$

Le point de vue de M. Berwald est donc différent du précédent, puisqu'il n'introduit pas tout de suite u^0, mais il définit la variable u^0 sur chaque géodésique par $-\frac{1}{2}\log\frac{ds}{dt}$, ce qui veut dire qu'il a choisi s et t sur cette courbe.

De la première condition, on conclut que les Π^0_{jk} sont des composantes d'un tenseur affine, tandis que de la deuxième on obtient la loi de transformation des composantes du tenseur affine Π^0_{jk} vis-à-vis d'une transformation (5.24):

$$\bar{\Pi}^0_{jk} = \Pi^0_{jk} - \Phi_j\Phi_k - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial u^k} + \frac{\partial\Phi_k}{\partial u^j}\right) - \Phi_i\Pi^i_{jk}\right]. \tag{5.25}$$

Ces formules coïncident avec les formules classiques si l'on n'utilise que les repères naturels et qu'on soit dans un espace normal (voir les Chap. VI et VII). Sinon elles ne sont susceptibles d'aucune interprétation géométrique simple, bien que la théorie soit cohérente.

Si l'on effectue le changement des composantes (5.24), le paramètre affine s se transforme en $\overline{s}$ de la manière suivante:

$$\frac{d\overline{s}}{ds} = e^{-2\int \Phi_k du^k}, \tag{5.26}$$

donc, t restant invariant, on obtient la loi de transformation de la variable u^0

$$\overline{u}^0 = u^0 + \int \Phi_k du^k. \tag{5.27}$$

Il est très intéressant d'examiner la théorie de M. L. Berwald de notre point de vue.

Dans la Géométrie des *paths* on a les équations différentielles

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + \Pi^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds} = 0,$$

définissant le système de *paths*, et l'introduction d'un tenseur affine Π^0_{jk} veut dire que l'on considère une variété à connexion projective dont les composantes sont Π^0_{jk} et Π^i_{jk} et dont le système de géodésiques coïncide avec celui de *paths*.

Comme le système de géodésiques d'une variété à connexion projective est complètement déterminé par les fonctions Π^i_{jk}, on peut choisir arbitrairement les fonctions Π^0_{jk}.

Alors le paramètre projectif normal de M. L. Berwald coïncide avec notre paramètre t, et le changement (5.24) correspond au changement de notre variable non-holomone u^0. Mais les (5.25) ne coïncident pas tout à fait avec nos équations

$$\overline{\Pi}^0_{jk} = \Pi^0_{jk} - \Phi_j \Phi_k - (\Phi_{j,k} - \Phi_i \Pi^i_{jk}).$$

Ce fait revient à ce que, dans la théorie de M. L. Berwald, on n'a besoin que de la partie symétrique des fonctions Π^0_{jk}.

La définition de la coordonnée surnuméraire de M. L. Berwald,

$$u^0 = -\frac{1}{2}\log\frac{ds}{dt},$$

et notre résultat

$$u^0 = -\frac{1}{2}\log \varrho^2\frac{ds}{dt},$$

ne coïncident pas non plus en général.

Quand on effectue une transformation homographique sur t, la coordonnée surnuméraire de M. L. Berwald change en général tandis que notre u^0 reste invariant grâce à la présence de ϱ^2.

Chapitre VI

LE TENSEUR DE COURBURE ET DE TORSION DE M. E. CARTAN.

Rappelons-nous les équations de structure de la variété à connexion projective

$$(6.1)\quad \begin{cases} \Omega_0^0 = [\omega_0^j\omega_j^0] - (\omega_0^0)', \\ \Omega_0^i = [\omega_0^0\omega_0^i] + [\omega_0^j\omega_j^i] - (\omega_0^i)', \\ \Omega_j^0 = [\omega_j^0\omega_0^0] + [\omega_j^k\omega_k^0] - (\omega_j^0)', \\ \Omega_j^i = [\omega_j^0\omega_0^i] + [\omega_j^k\omega_k^i] - (\omega_j^i)'. \end{cases}$$

Les formes bilinéaires différentielles $\Omega_j^i - \delta_j^i\Omega_0^0$ avec Ω_0^i et Ω_j^0 définissent complètement le tenseur de courbure et de torsion de M. E. Cartan.

Les identités correspondant à celles de Bianchi peuvent être obtenues en dérivant extérieurement les (6,1) et en tenant compte des (6.1) elles-mêmes,

$$(6.2)\quad \begin{cases} (\Omega_0^0)' = -[\Omega_0^j\omega_j^0] + [\omega_0^j\Omega_j^0], \\ (\Omega_0^i)' = -[\Omega_0^0\omega_0^i] + [\omega_0^0\Omega_0^i] - [\Omega_0^j\omega_j^i] + [\omega_0^j\Omega_j^i], \\ (\Omega_j^0)' = -[\Omega_j^0\omega_0^0] + [\omega_j^0\Omega_0^0] - [\Omega_j^k\omega_k^0] + [\omega_j^k\Omega_k^0], \\ (\Omega_j^i)' = -[\Omega_j^0\omega_0^i] + [\omega_j^0\Omega_0^i] - [\Omega_j^k\omega_k^i] + [\omega_j^k\Omega_k^i]. \end{cases}$$

Nous allons d'abord calculer explicitement les composantes du tenseur de courbure et de torsion de M. E. Cartan. A cet effet, posons :

$$(6.3)\qquad \begin{cases} \Omega^i_0 = \frac{1}{2}\,\Omega^i_{0jk}\,[\,du^j\,du^k\,], \\ \Omega^0_i = \frac{1}{2}\,\Omega^0_{ijk}\,[\,du^j\,du^k\,], \\ \Omega^i_j - \delta^i_j\,\Omega^0_0 = \frac{1}{2}\,\Omega^i_{jkh}\,[\,du^k\,du^h\,]. \end{cases}$$

Des deuxièmes équations de (6.1), on tire, en tenant compte de $\omega^0_0 = p_i\,du^i$ et de $\omega^i_0 = du^i$,

$$\begin{aligned} \Omega^i_0 &= \frac{1}{2}\,\Omega^i_{0jk}\,[\,du^j\,du^k\,] \\ &= p_j\,[\,du^j\,du^i\,] + \omega^i_{jk}\,[\,du^j\,du^k\,] \\ &= (\omega^i_{jk} + \delta^i_k\,p_j)\,[\,du^j\,du^k\,], \end{aligned}$$

donc :

$$\Omega^i_{0jk} = \omega^i_{jk} + \delta^i_k\,p_j - \omega^i_{kj} - \delta^i_j\,p_k,$$

et on a, en tenant compte des équations

$$(6.4)\qquad \begin{aligned} \Pi^i_{jk} &= \omega^i_{jk} - \delta^i_j\,p_k, \\ \Omega^i_{0jk} &= \Pi^i_{jk} - \Pi^i_{kj}. \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la connexion projective soit sans torsion est $\Omega^i_0 = 0$, par conséquent

$$\Pi^i_{jk} = \Pi^i_{kj}.$$

Des troisièmes éqations (6.1), on tire

$$\begin{aligned} \Omega^0_i &= \frac{1}{2}\,\Omega^0_{ijk}\,[\,du^j\,du^k\,], \\ &= \omega^0_{ij}\,p_k\,[\,du^j\,du^k\,] - \omega^h_{ij}\,\omega^0_{hk}\,[\,du^j\,du^k\,] - \frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j}\,[\,du^j\,du^k\,] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega^0_{ijk} &= \omega^0_{ij}\,p_k - \omega^0_{ik}\,p_j + \omega^h_{ij}\,\omega^0_{hk} - \omega^h_{ik}\,\omega^0_{hj} - \frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k}. \\ &= \frac{\partial\omega^0_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial\omega^0_{ik}}{\partial u^j} + (\omega^h_{ij} - \delta^h_i\,p_j)\,\omega^0_{hk} - (\omega^h_{ik} - \delta^h_i\,p_k)\,\omega^0_{hj}. \end{aligned}$$

Donc on a finalement

$$(6.5)\qquad \Omega^0_{ijk} = \frac{\partial\Pi^0_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial\Pi^0_{ik}}{\partial u^j} + \Pi^h_{ij}\,\Pi^0_{hk} - \Pi^h_{ik}\,\Pi^0_{hj}.$$

Le calcul pour les dernières formules (6.3) est le plus compliqué. Calculons d'abord Ω_0^0 et Ω_j^i séparément,

$$\Omega_0^0 = \omega_{jk}^0 [du^j du^k] + \frac{\partial p_j}{\partial u^k} [du^j du^k]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_j}{\partial u^k} - \frac{\partial p_k}{\partial u^j} + \omega_{jk}^0 - \omega_{kj}^0\right)[du^j du^k],$$

$$\Omega_j^i = \omega_{jk}^0 \delta_h^i [du^k du^h] + \omega_{jk}^m \omega_{mh}^i [du^k du^h] - \frac{\partial \omega_{jh}^i}{\partial u^k} [du^k du^h]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\omega_{jk}^0 \delta_h^i - \omega_{jh}^0 \delta_k^i + \omega_{jk}^m \omega_{mh}^i - \omega_{jh}^m \omega_{mk}^i - \frac{\partial \omega_{jh}^i}{\partial u^k} + \frac{\partial \omega_{jk}^i}{\partial u^h}\right)[du^k du^h].$$

En substituant $\omega_{jk}^0 = \Pi_{jk}^0$ et $\omega_{jk}^i = \Pi_{jk}^i + \delta_j^i p_k$ dans

$$\Omega_j^i - \delta_j^i \Omega_0^0 = \frac{1}{2} \Omega_{jkh}^i [du^k du^h],$$

on obtient :

$$\Omega_{jkh}^i = \frac{\partial \Pi_{jk}^i}{\partial u^h} - \frac{\partial \Pi_{jh}^i}{\partial u^k} + \Pi_{jk}^m \Pi_{mh}^i - \Pi_{jh}^m \Pi_{mk}^i + \Pi_{jk}^0 \delta_k^i - \Pi_{jh}^0 \delta_k^i - \delta_j^i (\Pi_{kh}^0 - \Pi_{hk}^0). \tag{6.6}$$

En posant

$$\Pi_{jkh}^i = \frac{\partial \Pi_{jk}^i}{\partial u^h} - \frac{\partial \Pi_{jh}^i}{\partial u^k} + \Pi_{jk}^m \Pi_{mh}^i - \Pi_{jh}^m \Pi_{mk}^i, \tag{6.7}$$

on a :

$$\Omega_{jkh}^i = \Pi_{jkh}^i + \Pi_{jk}^0 \delta_h^i - \Pi_{jh}^0 \delta_k^i - \delta_j^i (\Pi_{kh}^0 - \Pi_{hk}^0). \tag{6.8}$$

Toutes les composantes du tenseur de courbure et de torsion étant calculées, voyons comment se transforment ces composantes lors des transformations de variables.

Nous allons d'abord considérer l'effet des transformations des variables u^i, c'est-à-dire des changements de repère semi-naturel avec conservation de l'hyperplan de l'infini.

Nous savons que les Π_{jk}^i et Π_{jk}^0 se transforment respectivement comme composantes d'une connexion affine et d'un tenseur affine quand on effectue une transformation de coordonnés u^i .

Par conséquent, il est bien évident que Ω_{0jk}^i, Ω_{ijk}^0 et Ω_{jkh}^i sont des composantes des affineurs par rapport aux transformations de variables u^i .

Considérons ensuite la transformation de la variable non-holonome u^0, c'est-à-dire changement de l'hyperplan de l'infini,

$$d\overline{u}^0 = du^0 + \Phi_i\, du^i .$$

On sait qu'alors les fonctions Π^0_{jk} et Π^i_{jk} se transforment respectivement en $\overline{\Pi}^0_{jk}$ et $\overline{\Pi}^i_{jk}$ de la manière suivante :

$$(6.9)\qquad \begin{cases} \overline{\Pi}^0_{jk} = \Pi^0_{jk} - \Phi_j \Phi_k - \Phi_{j,k} + \Phi_i \Pi^i_{jk} , \\ \overline{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk} - \delta^i_j \Phi_k - \delta^i_k \Phi_j . \end{cases}$$

En désignant par $\overline{\Omega}^i_{0jk}$ les composantes transformées de Ω^i_{0jk} on a :

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}^i_{0jk} &= \overline{\Pi}^i_{jk} - \overline{\Pi}^i_{kj} \\ &= \Pi^i_{jk} - \Pi^i_{kj} , \end{aligned}$$

donc :

$$(6.10)\qquad \overline{\Omega}^i_{0jk} = \Omega^i_{0jk} .$$

Les composantes Ω^i_{0jk} sont donc invariantes par rapport à cette transformation.

Calculons ensuite les composantes $\overline{\Omega}^0_{ijk}$. En substituant (6.9) dans les formules analogues de (6.5)

$$\overline{\Omega}^0_{ijk} = \frac{\partial \overline{\Pi}^0_{ij}}{du^k} - \frac{\partial \overline{\Pi}^0_{ik}}{du^j} + \overline{\Pi}^h_{ij}\, \overline{\Pi}^0_{hk} - \overline{\Pi}^h_{ik}\, \overline{\Pi}^0_{hj} ,$$

on obtient

$$\overline{\Omega}^0_{ijk} = \Omega^0_{ijk} + \Phi_m \Pi^m_{ijk} + \Phi_m (\Pi^0_{ij} \delta^m_k - \Pi^0_{ik} \delta^m_j - \delta^m_i \Pi^0_{jk} + \delta^m_i \Pi^0_{kj}) - \Phi_i \Phi_m (\Pi^m_{jk} - \Pi^m_{kj}) ,$$

donc on a

$$(6.11)\qquad \overline{\Omega}^0_{ijk} = \Omega^0_{ijk} + \Phi_m \Omega^m_{ijk} - \Phi_i \Phi_m \Omega^m_{0jk} .$$

Calculons enfin les composantes $\overline{\Omega}^i_{jkh}$. A cet effet, nous allons d'abord calculer les composantes $\overline{\Pi}^i_{jkh}$; on a par la définition (6.7),

$$\overline{\Pi}^i_{jkh} = \frac{\partial \overline{\Pi}^i_{jk}}{\partial u^k} - \frac{\partial \overline{\Pi}^i_{jh}}{\partial u^k} + \overline{\Pi}^m_{jk}\, \overline{\Pi}^i_{mh} - \overline{\Pi}^m_{jh}\, \overline{\Pi}^i_{mk} ,$$

et tenant compte des relations (4.16) on obtient

$$(6.12)\qquad \begin{aligned} \overline{\Pi}^i_{jkh} = \Pi^i_{jkh} &+ (\Phi_{j,k} - \Phi_m \Pi^m_{jk} + \Phi_j \Phi_k) \delta^i_h - (\Phi_{j,h} - \Phi_m \Pi^m_{jh} + \Pi_j \Pi_h) \delta^i_k + \\ &- \delta^i_j (\Phi_{k,h} - \Phi_{h,k}) - \Phi_j (\Pi^i_{kh} - \Pi^i_{hk}) . \end{aligned}$$

Les $\overline{\Pi}^i_{jkh}$ étant obtenues, en substituant ces valeurs dans

$$\overline{\Omega}^i_{jkh} = \overline{\Pi}^i_{jkh} + \overline{\Pi}^0_{jk} \delta^i_h - \overline{\Pi}^0_{jh} \delta^i_k - \delta^i_j (\overline{\Pi}^0_{kh} - \overline{\Pi}^0_{hk}) ,$$

on obtiendra après un calcul facile

$$\overline{\Omega}^i_{jkh} = \Omega^i_{jkh} - \delta^i_j \Phi_m \Omega^m_{0kh} - \Phi_j \Omega^i_{0kh}. \tag{6.13}$$

Les formules (6.10), (6.11) et (6.13) étant obtenues, on voit que seules les composantes Ω^i_{0jk} restent invariantes, dans le cas général, par rapport au changement de l'hyperplan de l'infini. Dans le cas de la connexion sans torsion, on voit que les composantes Ω^i_{jkh} sont aussi invariantes par rapport à cette transformation.

Supposons dans la suite que la connexion soit sans torsion. Comme Ω^i_{jkh} est un tenseur invariant, le tenseur défini par

$$\Omega_{jk} = \Omega^h_{jkh}, \tag{6.14}$$

est aussi invariant.

En contractant dans (6.8) par rapport aux indices i et h, on obtient

$$\Omega_{jk} = \Pi_{jk} + n\,\Pi^0_{jk} - \Pi^0_{kj}, \tag{6.15}$$

où

$$\Pi_{jk} = \Pi^h_{jkh}. \tag{6.16}$$

Les tenseurs Ω^i_{jkh} et Ω_{jk} étant invariants, le tenseur défini par

$$C^i_{jkh} = \Omega^i_{jkh} + \delta^i_j \Omega_{kh}, \tag{6.17}$$

est aussi invariant.

Le tenseur C^i_{jkh} étant invariant, le tenseur contracté

$$C_{jk} = C^h_{jkh} \tag{6.18}$$

est aussi invariant.

De (6.17), on tire

$$C_{jk} = \Omega_{jk} + \Omega_{kj}. \tag{6.19}$$

En substituant (6.15) dans (6.19), on obtient

$$C_{kj} = (\Pi_{jk} + \Pi_{kj}) + (n-1)(\Pi^0_{jk} + \Pi^0_{kj}). \tag{6.20}$$

Ainsi a-t-on obtenu les tenseurs suivants qui sont invariants par rapport à la transformation de la variable non-holonome u^0,

$$\left\{\begin{aligned} \Omega^i_{jkh} &= \Pi^i_{jkh} + \Pi^0_{jk}\delta^i_h - \Pi^0_{jh}\delta^i_k - \delta^i_j(\Pi^0_{kh} - \Pi^0_{hk}), \\ \Omega_{jk} &= \Pi_{jk} + n\,\Pi^0_{jk} - \Pi^0_{kj} \\ C^i_{jkh} &= \Pi_{jkh} + \delta^i_j \Pi_{kh} + \Pi^0_{jk}\delta^i_h - \Pi^0_{jh}\delta^i_k + \delta^i_j(n-1)\Pi^0_{kh}; \\ C_{jk} &= (\Pi_{jk} + \Pi_{kj}) + (n-1)(\Pi^0_{jk} + \Pi^0_{kj}). \end{aligned}\right. \tag{6.21}$$

Nous pouvons annuler

$$\Omega_{jk} = \Pi_{jk} + n\,\Pi^{k}_{j0} - \Pi^{0}_{jk}$$

en choisissant convenablement les fonctions Π^0_{jk} :

$$\Omega_{jk} = 0\,. \tag{6.22}$$

La connexion projective sans torsion réalisant ces conditions est appelée par M. E. Cartan la connexion projective *normale* [(10), (21)].

De l'équation

$$\Pi_{jk} + n\,\Pi^0_{jk} - \Pi^0_{kj} = 0,$$

on a

$$\Pi_{kj} + n\,\Pi^0_{kj} - \Pi^0_{jk} = 0,$$

donc

$$\Pi^0_{jk} + \Pi^0_{kj} = -\frac{1}{n-1}(\Pi_{jk} + \Pi_{kj}), \tag{6.23}$$

$$\Pi^0_{jk} - \Pi^0_{kj} = -\frac{1}{n+1}(\Pi_{jk} - \Pi_{kj})\,. \tag{6.24}$$

Par conséquent, on obtient une propriété du tenseur C^i_{jkh} dans le cas de la connexion projective normale :

$$C_{jk} = 0. \tag{6.25}$$

Des (6.23) et (6.24), on obtient

$$\Pi^0_{jk} = -\frac{n}{n^2-1}\Pi_{jk} - \frac{1}{n^2-1}\Pi_{kj}\,. \tag{6.26}$$

Substituons cette expression de Π^0_{jk} dans (6.8); alors on aura

$$\Omega^i_{jkh} = \Pi^i_{jkh} + \frac{1}{n^2-1}(n\,\Pi_{jh} + \Pi_{hj})\,\delta^i_k + \tag{6.27}$$

$$-\frac{1}{n^2-1}(n\,\Pi_{jk} + \Pi_{kj})\,\delta^i_h + \frac{1}{n+1}\delta^i_j(\Pi_{kh} - \Pi_{hk});$$

dans ce cas C^i_{jkh} coïncide avec Ω^i_{jkh}.

Le tenseur Ω^i_{jkh} (6.27) obtenu tout d'abord par M. H. Weyl [(124)] s'appelle le tenseur projectif de Weyl.

Dans le cas de la connexion projective normale les équations des géodésiques prennent la forme suivante, en vertu des équations (6.23):

$$\begin{cases} \{t\}_s = \dfrac{2}{n-1}\,\Pi_{jk}\,\dfrac{du^j}{ds}\,\dfrac{du^k}{ds}, \\ \dfrac{d^2 u^i}{ds^2} + \Pi^i_{jk}\,\dfrac{du^j}{ds}\,\dfrac{du^k}{ds} = 0. \end{cases}$$

Le paramètre t défini ici est le „*preferred projective normal parameter*" de M. L. Berwald [(1)].

Chapitre VII

RELATIONS ENTRE LA THÉORIE DE M. E. CARTAN ET CELLE DE M. T. Y. THOMAS.

Jusqu'à présent, nous n'avons employé que les repères que M. E. Cartan appelle les repères semi-naturels. Ces repères étant adoptés, on a

$$(7.1)\qquad \begin{cases} dA_0 = p_i\,du^i\,A_0 + du^1 A_1 + \cdots + du^n A_n, \\ dA_1 = \omega_1^0 A_0 + \omega_1^1 A_1 + \cdots + \omega_1^n A_n, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ dA_n = \omega_n^0 A_0 + \omega_n^1 A_1 + \cdots + \omega_n^n A_n. \end{cases}$$

M. T. Y. Thomas a employé un repère qui a, en outre, la propriété

$$(7.2)\qquad {}^*\Pi^l_{lk} = 0,$$

où

$${}^*\Pi^i_{jk} = {}^*\omega^i_{jk} - \delta^i_j\,{}^*p_k,$$

$${}^*\omega^0_0 = {}^*p_i\,du^i,$$

$${}^*\omega^i_j = {}^*\omega^i_{jk}\,du^k.$$

Ce repère est le repère naturel de M. E. Cartan [(10), (21)]. Il est bien facile de choisir un repère naturel parmi les repères semi-naturels.

En effet, faisons un changement de la forme $p_i\,du^i$, soit:

$${}^*p_i = p_i + \Phi_i,$$

alors on aura

$${}^*\Pi^i_{jk} = \Pi^i_{jk} - \delta^i_j\,\Phi_k - \delta^i_k\,\Phi_j,$$

donc, pour avoir

$${}^*\Pi^l_{lk} = 0,$$

nous n'avons qu'à prendre

$$\Phi_j = \frac{1}{n+1}\Pi^l_{lj} \tag{7.3}$$

et par conséquent

$$*\Pi^0_{jk} = \Pi^0_{jk} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\Pi^l_{lj}\Pi^m_{mk} + \Pi^l_{lj,k} - \Pi^l_{li}\Pi^i_{jk}\right), \tag{7.4}$$

$$*\Pi^i_{jk} = \Pi^i_{jk} - \frac{1}{n+1}(\delta^i_j\Pi^l_{lk} + \delta^i_k\Pi^l_{lj}). \tag{7.5}$$

Les $*\Pi^i_{jk}$ sont les composantes de la connexion projective de M. T. Y. Thomas [(94), (101)].

Le repère naturel étant ainsi choisi, voyons comment se transforment les fonctions $*\Pi^0_{jk}$ et $*\Pi^i_{jk}$ pendant une transformation de coordonnées

$$\overline{u}^i = \overline{u}(u^1, \ldots, u^n). \tag{7.6}$$

On sait que les fonctions p_i et Π^i_{jk} se transforment respectivement en $\overline{p}_i$ et $\overline{\Pi}^i_{jk}$ d'après la loi de transformation,

$$\overline{p}_i = \frac{\partial u^j}{\partial \overline{u}^i} p_j, \tag{7.7}$$

$$\overline{\Pi}^i_{jk} = \frac{\partial \overline{u}^i}{\partial u^h}\left(\frac{\partial u^l}{\partial \overline{u}^j}\frac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^k}\Pi^h_{lm} + \frac{\partial^2 u^h}{\partial \overline{u}^j \partial \overline{u}^k}\right). \tag{7.8}$$

Des équations (7.8), on tire la loi de transformation des fonctions Π^l_{lk},

$$\overline{\Pi}^l_{lk} = \frac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^k}\Pi^l_{lm} + \frac{\partial \log \Delta}{\partial \overline{u}^k}, \tag{7.9}$$

où

$$\Delta = \left|\frac{\partial u}{\partial \overline{u}}\right|, \tag{7.10}$$

donc on a la loi suivante de transformation des fonctions Φ_j :

$$\overline{\Phi}_k = \frac{\partial u^m}{\partial \overline{u}^k}\Phi_m + \frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^k}. \tag{7.11}$$

Or, nous avons les équations définissant la connexion projective dans les deux systèmes de coordonnées :

$$(7.12)\quad \begin{cases} d^*A_0 = {}^*p_i\,du^i\,{}^*A_0 + du^1\,{}^*A_1 + \cdots + du^n\,{}^*A_n, \\ d^*A_1 = {}^*\omega_1^0\,{}^*A_0 + {}^*\omega_1^1\,{}^*A_1 + \cdots + {}^*\omega_1^n\,{}^*A_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d^*A_n = {}^*\omega_n^0\,{}^*A_0 + {}^*\omega_n^1\,{}^*A_1 + \cdots + {}^*\omega_n^n\,{}^*A_n, \end{cases}$$

et

$$(7.13)\quad \begin{cases} d^*\bar{A}_0 = {}^*\bar{p}_i\,d\bar{u}^i\,{}^*\bar{A}_0 + d\bar{u}^1\,{}^*\bar{A}_1 + \cdots + d\bar{u}^n\,{}^*\bar{A}_n, \\ d^*\bar{A}_1 = {}^*\bar{\omega}_1^0\,{}^*\bar{A}_0 + {}^*\bar{\omega}_1^1\,{}^*\bar{A}_1 + \cdots + {}^*\omega_1^n\,{}^*\bar{A}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d^*\bar{A}_n = {}^*\bar{\omega}_n^0\,{}^*\bar{A}_0 + {}^*\bar{\omega}_n^1\,{}^*\bar{A}_1 + \cdots + {}^*\bar{\omega}_n^n\,{}^*\bar{A}_n. \end{cases}$$

Comme on obtient des équations (7.7) et (7.11)

$$(7.14)\quad \begin{aligned} {}^*\bar{p}_i &= \frac{\partial u^m}{\partial \bar{u}^i}(p_m + \Phi_m) + \frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \bar{u}^i}, \\ {}^*\bar{p}_i &= \frac{\partial u^m}{\partial \bar{u}^i}\,{}^*p_m + \frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \bar{u}^i}, \end{aligned}$$

on a, en remarquant que ${}^*\bar{A}_0 = {}^*A_0$,

$$\left({}^*p_m \frac{\partial u^m}{\partial \bar{u}^i}\,d\bar{u}^i + \frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \bar{u}^i}\,d\bar{u}^i\right){}^*\bar{A}_0 + d\bar{u}^1\,{}^*\bar{A}_1 + \cdots + d\bar{u}^n\,{}^*\bar{A}_n$$

$$= {}^*p_k \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i}\,d\bar{u}^i\,{}^*A_0 + \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^i}\,d\bar{u}^i\,{}^*A_1 + \cdots + \frac{\partial u^n}{\partial \bar{u}^i}\,d\bar{u}^i\,{}^*A_n,$$

d'où résultent les formules :

$$(7.15)\quad \begin{cases} {}^*\bar{A}_0 = {}^*A_0, \\ {}^*\bar{A}_i = \dfrac{\partial u^m}{\partial \bar{u}^i}\,{}^*A_m - \dfrac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \bar{u}^i}\,{}^*A_0, \end{cases}$$

qui nous donnent la loi de transformation du repère naturel quand nous effectuons une transformation de coordonnées (7.6).

Les formules (7.15) étant obtenues, on peut trouver sans difficulté la loi de transformation des fonctions ${}^*\omega_{jk}^0$ et ${}^*\omega_{jk}^i$: en substituant les formules (7.15) dans (7.13) et en comparant les coefficients de ${}^*A_0, {}^*A_1, \cdots, {}^*A_n$, on a

$$(7.16)\quad \begin{aligned} {}^*\overline{\omega}^0_{jk} &= \frac{\partial u^a}{\partial \overline{u}^j}\frac{\partial u^b}{\partial \overline{u}^k}\,{}^*\omega^0_{ab} - \frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^j}\frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^k} - \frac{\partial^2 \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^j\,\partial \overline{u}^k} + \\ &+ \frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^i}\left[\frac{\partial \overline{u}^i}{\partial u^a}\left\{\frac{\partial u^b}{\partial \overline{u}^j}\frac{\partial u^c}{\partial \overline{u}^k}({}^*\omega^a_{bc} - \delta^a_b\,{}^*p_c) + \frac{\partial^2 u^a}{\partial \overline{u}^j\,\partial \overline{u}^k}\right\}\right], \end{aligned}$$

$$(7.17)\quad {}^*\overline{\omega}^i_{jk} = \frac{\partial \overline{u}^i}{\partial u^a}\left(\frac{\partial u^b}{\partial \overline{u}^j}\frac{\partial u^c}{\partial \overline{u}^k}\,{}^*\omega^a_{bc} + \frac{\partial^2 u^a}{\partial u^j\,\partial \overline{u}^k}\right) - \frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^j}\,\delta^i_k$$

d'où on tire la loi de transformation des fonctions ${}^*\Pi^0_{jk}$ et ${}^*\Pi^i_{jk}$:

$$(7.18)\quad \begin{aligned} {}^*\overline{\Pi}^0_{jk} &= \frac{\partial u^a}{\partial \overline{u}^j}\frac{\partial u^b}{\partial \overline{u}^k}\,{}^*\Pi^0_{ab} - \frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^j}\frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^k} - \frac{\partial^2 \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^j\,\partial \overline{u}^k} + \\ &+ \frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^i}\left[\frac{\partial u^i}{\partial u^a}\left(\frac{\partial \overline{u}^b}{\partial \overline{u}^j}\frac{\partial u^c}{\partial \overline{u}^k}\,{}^*\Pi^a_{bc} + \frac{\partial^2 u^a}{\partial \overline{u}^j\,\partial \overline{u}^k}\right)\right], \end{aligned}$$

$$(7.19)\quad \begin{aligned} {}^*\overline{\Pi}^i_{jk} &= \frac{\partial \overline{u}^i}{\partial u^a}\left(\frac{\partial u^b}{\partial \overline{u}^j}\frac{\partial u^c}{\partial \overline{u}^k}\,{}^*\Pi^a_{bc} + \frac{\partial^2 u^a}{\partial \overline{u}^j\,\partial \overline{u}^k}\right) + \\ &- \delta^i_j\,\frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^k} - \delta^i_k\,\frac{\partial \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial \overline{u}^j}. \end{aligned}$$

Donc on peut dire que :

Pour étudier le cas de M. T. Y. Thomas, *il faut considérer toujours la transformation de coordonnées non-holonome et holonomes,*

$$(7.20)\quad \begin{cases} d\overline{u}^0 = du^0 + d\log \Delta^{\frac{1}{n+1}}, \\ \overline{u}^i = \overline{u}^i(u^1, u^2, \ldots, u^n), \end{cases}$$

qui entraîne une transformation de repère naturel (7.15) *et de fonctions* ${}^*\Pi^0_{jk}$ *et* ${}^*\Pi^i_{jk}$ (7.18) *et* (7.19) ; $d \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}$ étant toujours une différentielle exacte, la loi de transformation peut s'écrire

$$(7.21)\quad \begin{cases} \overline{u}^0 = u^0 + \dfrac{1}{n+1}\log \Delta, \\ \overline{u}^i = \overline{u}^i(u^1, u^2, \ldots, u^n), \end{cases}$$

et on obtient le groupe de transformations ${}^*G$ de M. T. Y. Thomas [(95), (98), (101)].

Nous supposerons dans la suite que les fonctions Π^0_{jk} et Π^i_{jk} et par suite $^*\Pi^0_{jk}$ et $^*\Pi^i_{jk}$ soient symétriques par rapport aux indices inférieurs et la variable u^0 soit holonome ; alors on voit facilement, d'après (7.18) et (7.19), que cette propriété se conserve toujours pendant la transformation (7.21).

Cela posé, considérons les quantités $^*\Omega^i_{ojk}$, $^*\Omega^0_{ijk}$ et $^*\Omega^i_{jkh}$ formées avec les grandeurs astérisées, et correspondant respectivement aux Ω^i_{ojk}, Ω^0_{ijk} et Ω^i_{jkh},

$$^*\Omega^i_{ojk} = {}^*\Pi^i_{jk} - {}^*\Pi^i_{kj},$$

$$^*\Omega^0_{ijk} = \frac{\partial^*\Pi^0_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial^*\Pi^0_{ik}}{\partial u^j} + {}^*\Pi^h_{ij}\,{}^*\Pi^0_{hk} - {}^*\Pi^h_{ik}\,\Pi^0_{hj},$$

$$^*\Omega^i_{jkh} = {}^*\Pi^i_{jkh} + {}^*\Pi^0_{jk}\,\delta^i_h - {}^*\Pi^0_{jh}\,\delta^i_k - \delta^i_j\,({}^*\Pi^0_{kh} - {}^*\Pi^0_{hk}),$$

où

$$^*\Pi^i_{jkh} = \frac{\partial^*\Pi^i_{jk}}{\partial u^h} - \frac{\partial^*\Pi^i_{jh}}{\partial u^k} + {}^*\Pi^m_{jk}\,{}^*\Pi^i_{mh} - {}^*\Pi^m_{jh}\,{}^*\Pi^i_{mk}.$$

En remarquant que $^*\Pi^0_{jk} = {}^*\Pi^0_{kj}$ et $^*\Pi^i_{jk} = {}^*\Pi^i_{kj}$, on obtient:

$$^*\Omega^i_{ojk} = 0, \tag{7.22}$$

$$^*\Omega^0_{ijk} = \frac{\partial^*\Pi^0_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial^*\Pi^0_{ik}}{\partial u^j} + {}^*\Pi^h_{ij}\,{}^*\Pi^0_{hk} - {}^*\Pi^h_{ik}\,{}^*\Pi^0_{hj}, \tag{7.23}$$

$$^*\Omega^i_{jkh} = {}^*\Pi^i_{jkh} + {}^*\Pi^0_{jk}\,\delta^i_h - {}^*\Pi^0_{jh}\,\delta^i_k. \tag{7.24}$$

Or, les quantités $^*\Omega_{jk}$ et $^*C^i_{jkh}$ corespondant respectivement aux grandeurs Ω_{jk} et C^i_{jkh} sont données par

$$^*\Omega_{jk} = {}^*\Pi_{jk} + (n-1)\,{}^*\Pi^0_{jk}, \tag{7.25}$$

$$^*C^i_{jkh} = {}^*\Omega^i_{jkh} + \delta^i_j\,{}^*\Omega_{kh}, \tag{7.26}$$

où

$$^*\Pi_{jk} = {}^*\Pi^h_{jkh}. \tag{7.26}$$

Supposons que

$$^*\Omega^h_{jkh} = 0, \tag{7.27}$$

c'est-à-dire

$$^*\Omega_{jk} = 0, \tag{7.28}$$

ce qui suppose que la connexion soit normale ; on a alors d'après la formule (7.25)

$$(7.29) \qquad {}^*\Pi^0_{jk} = -\frac{1}{n-1}\, {}^*\Pi_{jk}\,.$$

En substituant ces équations dans (7.24), on obtient :

$$(7.30) \qquad {}^*\Omega^i_{jkh} = {}^*\Pi^i_{jkh} + \frac{1}{n-1}\left({}^*\Pi_{jh}\,\delta^i_k - {}^*\Pi^0_{jk}\,\delta^i_h\right).$$

Cela posé, calculons les ${}^*\Pi^i_{jkh}$.

En substituant (7.5) dans

$$(7.31) \qquad {}^*\Pi^i_{jkh} = \frac{\partial^*\Pi^i_{jk}}{\partial u^h} - \frac{\partial^*\Pi^i_{jh}}{\partial u^k} + {}^*\Pi^m_{jk}\,{}^*\Pi^i_{mh} - {}^*\Pi^m_{jh}\,{}^*\Pi^i_{mk}\,,$$

on trouve

$$(7.32) \qquad {}^*\Pi^i_{jkh} = \Pi^i_{jkh} + \frac{1}{n+1}\,\delta^i_j\,(\Pi_{kh} - \Pi_{hk}) + \delta^i_h\,A_{jk} - \delta^i_k\,A_{jh}$$

où

$$(7.33) \qquad A_{jk} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\,\Pi^l_{lj}\,\Pi^m_{mk} + \Pi^l_{lj,k} - \Pi^l_{li}\,\Pi^i_{jk}\right).$$

En contractant dans (7.32) par rapport aux indices i et h, on obtient encore

$$(7.34) \qquad {}^*\Pi_{jk} = \frac{n\,\Pi_{jk} + \Pi_{kj}}{n+1} + (n-1)\,A_{jk}\,.$$

En substituant enfin (7.32) et (7.34) dans (7.30), on a

$$(7.35) \qquad \begin{aligned} {}^*\Omega^i_{jkh} = \Pi^i_{jkh} &+ \frac{1}{n-1}\,(n\,\Pi_{jh} + \Pi_{hj})\,\delta^i_k - \frac{1}{n^2-1}\,(n\,\Pi_{jk} + \Pi_{kj})\,\delta^i_h + \\ &+ \frac{1}{n+1}\,\delta^i_j\,(\Pi_{kh} - \Pi_{hk})\,; \end{aligned}$$

ainsi a-t-on retrouvé le tenseur de M. H. WEYL.

Remarque. Pour obtenir la transformation

$$(7.36) \qquad \begin{cases} \bar u^0 = u^0 - \log\Delta, \\ \bar u^i = \bar u^i(u)\,, \end{cases}$$

et les composantes de la connexion projective

$$(7.37)\qquad \begin{cases} {}^*\Pi^0_{jk} = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) {}^*\Pi_{jk}\,, \\ {}^*\Pi^i_{jk} = {}^*\Pi^i_{kj} = \Pi^i_{jk} - \dfrac{1}{n+1}\left(\delta^i_j \Pi^l_{lk} + \delta^i_k \Pi^l_{lj}\right), \\ {}^*\Pi^\lambda_{\mu 0} = {}^*\Pi^\lambda_{0\mu} = -\dfrac{1}{n+1}\,\delta^\lambda_\mu\,, \end{cases}$$

introduites par M. T. Y. THOMAS, nous n'avons qu'à définir la variable u^0 par

$$du^0 = -(n+1)\,{}^*p_k\,du^k\,,$$

alors la transformation de la forme ${}^*\omega^0_0$

$${}^*p_k\,du^k \to {}^*\overline{p}_k\,d\overline{u}^k + d\log \Delta^{\frac{1}{n+1}}$$

peut être représentée par

$$d\overline{u}^0 = du^0 - d\log\Delta\,,$$

$$\overline{u}^0 = u^0 - \log\Delta\,.$$

Si l'on définit ${}^*\Pi^0_{jk}$ et ${}^*\Pi^i_{jk}$ par

$${}^*\Pi^0_{jk} = -(n+1)\,{}^*\omega^0_{jk}\,,$$

$${}^*\Pi^i_{jk} = {}^*\omega^i_{jk} - \delta^i_j\,{}^*p_k\,,$$

les équations (7.24) et (7.25) prennent la forme suivante

$${}^*\Omega^i_{jkh} = {}^*\Pi^i_{jkh} - \frac{1}{n+1}\,{}^*\Pi^0_{jk}\,\delta^i_h + \frac{1}{n+1}\,{}^*\Pi^0_{jh}\,\delta^i_k\,,$$

$${}^*\Omega_{jk} = {}^*\Pi_{jk} - \frac{n-1}{n+1}\,{}^*\Pi^0_{jk}\,,$$

donc: *quand la connexion projective est normale,* c'est-à-dire

$${}^*\Omega_{jk} = 0,$$

on trouve les formules:

$${}^*\Pi^0_{jk} = \frac{n+1}{n-1}\,{}^*\Pi_{jk}\,,$$

initialement introduites par M. T. Y. THOMAS [(95), (98), (101)].

Revenons à notre cas et considérons les équations des géodésiques

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Pi^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0; \tag{7.38}$$

en substituant (7,5) dans (7.38), on obtient

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} + {}^*\Pi^i_{jk} \frac{du^j}{ds} \frac{du^k}{ds} + \frac{2}{n+1} \Pi^l_{lj} \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} = 0. \tag{7.39}$$

Effectuons maintenant une transformation de paramètre définie par

$$\frac{d^2p}{ds^2} + \frac{2}{n+1} \Pi^l_{lj} \frac{du^j}{ds} \left(\frac{dp}{ds}\right)^2 = 0, \tag{7.40}$$

c'est-à-dire par

$$\frac{dp}{ds} = e^{-\frac{2}{n+1}\int \Pi^l_{lj} du^j}; \tag{7.41}$$

alors les équations (7.39) deviennent:

$$\frac{d^2u^i}{dp^2} + {}^*\Pi^i_{jk} \frac{du^j}{dp} \frac{du^k}{dp} = 0. \tag{7.42}$$

Le paramètre p introduit ici est le paramètre projectif de M. T. Y. Thomas [(94), (96)].

En dérivant le premier membre de l'équation (7.40) par rapport au paramètre s, on a

$$\frac{d^3p}{ds^3} + \frac{2}{n+1} \frac{\partial \Pi^l_{lj}}{\partial u^k} \frac{du^j}{dp} \frac{du^k}{dp} \left(\frac{dp}{ds}\right)^3 + \frac{2}{n+1} \Pi^l_{lj} \frac{d^2u^j}{dp^2} \left(\frac{dp}{ds}\right)^3 +$$
$$+ \frac{4}{n+1} \Pi^l_{lj} \frac{du^j}{ds} \frac{dp}{ds} \frac{d^2p}{ds^2} = 0,$$

d'où, en tenant compte de

$$\frac{d^2u^j}{dp^2} = - \Pi^j_{ab} \frac{du^a}{dp} \frac{du^b}{dp} + \frac{2}{n+1} \Pi^l_{lk} \frac{du^k}{dp} \frac{du^j}{dp},$$

$$\frac{2}{n+1} \Pi^l_{lj} \frac{du^j}{dp} = - \frac{\frac{d^2p}{ds^2}}{\left(\frac{dp}{ds}\right)^2},$$

on obtient

$$(7.43)\qquad \frac{\dfrac{d^3p}{ds^3}}{\dfrac{dp}{ds}} - 2\left\{\frac{\dfrac{d^2p}{ds^2}}{\dfrac{dp}{ds}}\right\}^2 = -\frac{2}{n+1}\left[\frac{2}{n+1}\Pi^l_{lj}\Pi^m_{mk} + \Pi^l_{lj,k} - \Pi^l_{lm}\Pi^m_{jk}\right]\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}.$$

D'autre part, on a d'après (7.40)

$$(7.44)\qquad \frac{1}{2}\left\{\frac{\dfrac{d^2p}{ds^2}}{\dfrac{dp}{ds}}\right\}^2 = \frac{2}{n+1}\left[\frac{1}{n+1}\Pi^l_{lj}\Pi^m_{mk}\right]\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds},$$

donc on obtient finalement, en ajoutant les équations (7.43) et (7.44) et tenant compte de (7.33),

$$(7.45)\qquad \{p\}_s = -2A_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}.$$

Les fonctions A_{jk} n'étant pas en général les composantes d'un tenseur, le deuxième membre de l'équation (7.45) n'est pas invariant par rapport à la transformation de coordonnées, donc on voit que *le paramètre projectif de* M. T. Y. Thomas *n'est pas invariant par rapport à la transformation des coordonnées.* Cherchons cette loi de transformation.

Supposons que les équations des géodésiques dans le système de coordonnées $\bar{u}^1, \bar{u}^2, \ldots \bar{u}^n$, soient

$$(7.46)\qquad \frac{d^2\bar{u}^i}{d\bar{p}^2} + {}^*\bar{\Pi}^i_{jk}\frac{d\bar{u}^j}{d\bar{p}}\frac{d\bar{u}^k}{d\bar{p}} = 0.$$

Alors, les équations (7.42) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial\bar{u}^l\partial\bar{u}^m}\frac{d\bar{u}^l}{d\bar{p}}\frac{d\bar{u}^m}{d\bar{p}}\left(\frac{d\bar{p}}{dp}\right)^2 + \Pi^i_{lm}\frac{\partial u^l}{\partial\bar{u}^j}\frac{\partial u^m}{\partial\bar{u}^k}\frac{d\bar{u}^j}{d\bar{p}}\frac{d\bar{u}^k}{d\bar{p}}\left(\frac{d\bar{p}}{dp}\right)^2 +$$
$$+\frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^j}\frac{d^2\bar{u}^j}{d\bar{p}^2}\left(\frac{d\bar{p}}{dp}\right)^2 + \frac{\partial u^i}{\partial\bar{u}^j}\frac{d\bar{u}^j}{d\bar{p}}\frac{d^2\bar{p}}{dp^2} = 0,$$

d'où on a, en tenant compte de la loi de transformation des fonctions ${}^*\Pi^i_{jk}$ (7.19),

$$\left({}^*\bar{\Pi}^i_{lm} + \delta^i_l\frac{\partial\log\Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial\bar{u}^m} + \delta^i_m\frac{\partial\log\Delta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial\bar{u}^l}\right)\frac{d\bar{u}^l}{d\bar{p}}\frac{d\bar{u}^m}{d\bar{p}}\left(\frac{d\bar{p}}{dp}\right)^2 +$$
$$+\frac{d^2\bar{u}^i}{d\bar{p}^2}\left(\frac{d\bar{p}}{dp}\right)^2 + \frac{d\bar{u}^i}{d\bar{p}}\frac{d^2\bar{p}}{dp^2} = 0.$$

Donc on a, en tenant compte de (7.46),

$$2\frac{d\log\Delta^{\frac{1}{n+1}}}{dp}\left(\frac{d\bar{p}}{dp}\right)^2+\frac{d^2\bar{p}}{dp^2}=0,$$

d'où

$$\frac{d\bar{p}}{dp}=\Delta^{-\frac{2}{n+1}}. \tag{7.47}$$

M. T. Y. Thomas [(94), (96)] a remarqué que si l'on considère la classe de transformations (7.21) qui satisfait à la condition $\Delta=1$,

$$\begin{cases}\bar{u}^0=u^0,\\ \bar{u}^i=\bar{u}^i(u),\end{cases} \tag{7.48}$$

les équations (7.18) et (7.19) se réduisent aux suivantes :

$$\begin{cases}{}^*\overline{\Pi}^0_{jk}=\dfrac{\partial u^l}{\partial\bar{u}^j}\dfrac{\partial u^m}{\partial\bar{u}^k}\,{}^*\Pi^0_{lm}\\[2mm] {}^*\overline{\Pi}^i_{jk}=\dfrac{\partial\bar{u}^i}{\partial u^a}\left(\dfrac{\partial u^b}{\partial\bar{u}^j}\dfrac{\partial u^c}{\partial\bar{u}^k}\,{}^*\Pi^a_{bc}+\dfrac{\partial^2u^a}{\partial\bar{u}^j\,\partial\bar{u}^k}\right),\end{cases} \tag{7.49}$$

ce qui dit que les fonctions ${}^*\Pi^i_{jk}$ se transforment comme composantes d'une connexion affine et les fonctions ${}^*\Pi^0_{jk}$ comme les composantes d'un tenseur affine du second ordre ; et il a nommé la géométrie des *paths* vis-à-vis de ces transformations la *Géométrie équi-projective des paths.*

Cela étant, nous allons montrer que *le paramètre projectif normal est aussi défini au moyen des* ${}^*\Pi^i_{jk}$ *et* p, *par*

$$\{t\}_p=-2\,{}^*\Pi^0_{jk}\frac{du^j}{dp}\frac{du^k}{dp} \tag{7.50}$$

[voir L. Berwald (1)].

En effet, on a d'après les équations (7.4) et (7.33)

$${}^*\Pi^0_{jk}=\Pi^0_{jk}-A_{jk},$$

donc on a

$$-2\,{}^*\Pi^0_{jk}\frac{du^j}{dp}\frac{du^k}{dp}=-2\,\Pi^0_{jk}\frac{du^j}{dp}\frac{du^k}{dp}+2\,A_{jk}\frac{du^j}{dp}\frac{du^k}{dp}$$

$$=\Big[\{t\}_s-\{p\}_s\Big]\left(\frac{ds}{dp}\right)^2=\{t\}_p,$$

en raison de (5.12), (7.45) et de la formule connue (5.10) sur la la dérivée schwarzienne.

Chapitre VIII

REPRÉSENTATION DES ESPACES À CONNEXION PROJECTIVE.

On doit à M. T. Y. THOMAS [(95), (98), (100), (101)] l'introduction d'une variable surnuméraire u^0 pour ramener l'étude des espaces à connexion projective à n dimensions, à l'étude des espaces à connexion affine à $n+1$ dimensions.

D'autre part, M. D. VAN DANTZIG [(23), (24), (25)] a introduit $n+1$ coordonnées homogènes pour décrire l'espace projectif généralisé à n dimensions et $(n+1)^3$ fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ de ces coordonnées homogènes pour définir la dérivée covariante. M. J. HAANTJES [(42)] a tout récemment montré que l'on peut aussi bien étudier, du point de vue de M. D. VAN DANTZIG, la Géométrie projective des *paths* de l'École de Princeton.

Nous allons, dans ce dernier Chapitre, examiner les propriétés des espaces à connexion affine employés dans ces deux théories pour représenter les espaces à connexion projective et montrer que *les espaces à connexion affine de* MM. T. Y. THOMAS *et* J. HAANTJES *ont les mêmes propriétés caractéristiques.*

Considerons une variété à connexion affine à $n+1$ dimensions, rapportée à un système de coordonnées u^{λ} dont les composantes de la connexion sont $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$, et un champ de vecteur contrevariant ξ^{λ} et supposons que cette variété à connexion affine vérifie les trois conditions suivantes :

$$\text{(I)} \qquad \Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = \Pi^{\lambda}_{\nu\mu},$$

$$\text{(II)} \qquad \xi^{\lambda}_{;\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu},$$

$$\text{(III)} \qquad \Pi^{\lambda}_{\mu\omega\nu}\,\xi^{\omega} = 0,$$

où le point-virgule représente la dérivée covariante et $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu\omega}$ les composantes du tenseur de courbure, soit

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu\omega} = \Pi^{\lambda}_{\mu\nu,\omega} - \Pi^{\lambda}_{\mu\omega,\nu} + \Pi^{\alpha}_{\mu\nu}\,\Pi^{\lambda}_{\alpha\omega} - \Pi^{\alpha}_{\mu\omega}\,\Pi^{\lambda}_{\alpha\nu},$$

où

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu,\omega} = \frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial u^{\omega}}.$$

La première condition veut dire que la connexion est sans torsion. La deuxième signifie qu'il y a un point invariant par rapport au groupe d'holonomie.

En effet, en attachant, à chaque point M de la variété le repère naturel $\overrightarrow{e_\lambda}$, on a

$$d(M - \xi^\lambda \overrightarrow{e_\lambda}) = dM - \xi^\lambda_{;\nu} du^\nu \overrightarrow{e_\lambda}$$
$$= du^\lambda \overrightarrow{e_\lambda} - du^\lambda \overrightarrow{e_\lambda} = 0.$$

On peut donner une autre interprétation à la deuxième condition.

Considérons une courbe engendrée par le champ de vecteur ξ^λ, c'est-à-dire définie par

$$\frac{du^\lambda}{dr} = \xi^\lambda ;$$

cette courbe est auto-parallèle. En effet,

$$\frac{d^2 u^\lambda}{dr^2} + \Pi^\lambda_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{dr} \frac{du^\nu}{dr} = \xi^\lambda_{;\nu} \frac{du^\nu}{dr} = \frac{du^\lambda}{dr} .$$

Nous appelons ces courbes *rayons*, avec M. J. H. C. Whitehead [(129)].

La troisième condition avec la première et la deuxième expriment que cette variété à connexion affine admet une collinéation affine.

En effet, une condition nécessaire et suffisante pour que cette variété admette une collinéation dans la direction ξ^λ est

$$\xi^\lambda_{;\mu;\nu} + \Pi^\lambda_{\mu\nu\omega} \xi^\omega = 0.$$

Mais le premier terme dans le premier membre est nul à cause de la première condition et de la deuxième.

La considération générale étant faite, examinons maintenant les cas de M. T. Y. Thomas et de M. J. Haantjes.

Prenons d'abord le cas de M. T. Y. Thomas et J. H. C. Whitehead.

On choisit un système de coordonnées par rapport auquel le vecteur ξ^λ a les composantes

$$\xi^\lambda = \delta^\lambda_0 ; \tag{8.1}$$

alors les rayons peuvent être représentés par

(8.2)
$$\begin{cases} u^0 = \text{arbitraire}, \\ u^i = \text{constantes}. \end{cases}$$

Pour rester toujours dans le système de coordonnées réalisant la condition (8.1), nous ne devons considérer que les transformations de la forme,

(8.3)
$$\begin{cases} \bar{u}^0 = u^0 + \psi(u^1, \ldots, u^n), \\ \bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, \ldots, u^n). \end{cases}$$

Le système de coordonnées étant ainsi choisi, les trois conditions prennent la forme suivante

(8.4)
$$\Pi^\lambda_{\mu\nu} = \Pi^\lambda_{\nu\mu},$$

(8.5)
$$\Pi^\lambda_{\mu 0} = \delta^\lambda_\mu,$$

(8.6)
$$\Pi^\lambda_{\mu\nu,0} = 0.$$

Ce sont les conditions posées par M. T. Y. Thomas et J. H. C. Whitehead sur l'espace affine à $n+1$ dimensions qui représente un espace projectif à n dimensions.

Cela dit, prenons dans la variété à connexion affine, une géodésique définie par

(8.7)
$$\frac{d^2 u^\lambda}{dt^2} + \Pi^\lambda_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{dt} \frac{du^\nu}{dt} = 0,$$

ou par

(8.8)
$$\frac{d^2 u^0}{dt^2} + \Pi^0_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} + \left(\frac{du^0}{dt}\right)^2 = 0$$

et

(8.9)
$$\frac{d^2 u^i}{dt^2} + \Pi^i_{jk} \frac{du^j}{dt} \frac{du^k}{dt} + 2 \frac{du^0}{dt} \frac{du^i}{dt} = 0,$$

et considérons la surface formée par les rayons qui rencontrent cette géodésique.

Si l'on effectue sur cette surface le déplacement de points

(8.10)
$$\begin{cases} u^0 \to u^0 + \text{constante}, \\ u^i \to u^i, \end{cases}$$

les équations (8.8) et (8.9) ne changent pas, donc les géodésiques se transforment en géodésiques par le déplacement (8.10) et le paramètre affine reste invariant pendant ce déplacement.

Cela étant, nous allons montrer que l'on peut déterminer une fonction $\sigma(t)$ qui n'est pas constante, telle que le déplacement

$$\left\{\begin{aligned} {}^*u^0 &= u^0 + \sigma(t), \\ {}^*u^i &= u^i, \end{aligned}\right. \tag{8.11}$$

transporte les géodésiques en géodésiques.

En effet, on a de (8.11)

$$u^\lambda = {}^*u^\lambda - \delta^\lambda_0 \sigma(t); \tag{8.12}$$

le point u^λ décrivant une géodésique, portons (8.12) dans (8.7), alors on obtiendra

$$\frac{d^2 {}^*u^\lambda}{dt^2} + \Pi^\lambda_{\mu\nu} \frac{d^*u^\mu}{dt}\frac{d^*u^\nu}{dt} - 2\frac{d\sigma}{dt}\frac{d^*u^\lambda}{dt^2} - \delta^\lambda_0 \left[\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] = 0. \tag{8.13}$$

Pour que cette courbe soit aussi géodésique, il faut et il suffit que le dernier terme du premier membre ait la forme

$$\delta^\lambda_0 \left[\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right] = f(t)\frac{d^*u^\lambda}{dt},$$

d'où

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 0. \tag{8.14}$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$\sigma = -\log(\alpha t + \beta). \tag{8.15}$$

Donc, si l'on se donne deux points sur la surface, on peut déterminer les constantes α et β de manière que l'on ait une et une seule géodésique se trouvant entièrement sur cette surface et passant par ces deux points. En portant (8.15) dans (8.13), on obtient

$$\frac{d^2 {}^*u^\lambda}{dt^2} + \Pi^\lambda_{\mu\nu} \frac{d^*u^\mu}{dt}\frac{d^*u^\nu}{dt} + \frac{2\alpha}{\alpha t + \beta}\frac{d^*u^\lambda}{dt} = 0. \tag{8.16}$$

Le paramètre affine ${}^*t$ pour la géodésique (8.16) est défini par

$$\frac{\dfrac{d^2t}{d^*t^2}}{\left(\dfrac{dt}{d^*t}\right)^2} = \frac{2\,\alpha}{\alpha t + \beta},$$

ou par

$$\frac{\dfrac{d^{2*}t}{dt^2}}{\dfrac{d^*t}{dt}} = -\frac{2\,\alpha}{\alpha t + \beta},$$

d'où

$$^*t = \frac{\gamma t + \delta}{\alpha t + \beta},$$

donc on voit que le paramètre affine t subit, dans ce cas, une transformation homographique.

D'après les considérations faites ci-dessus, on peut dire que la surface engendrée par les rayons qui rencontrent une géodésique est totalement géodésique.

Si l'on prend l'espace à connexion affine de cette sorte et fait correspondre, à un rayon de cet espace affine, un point de la variété à connexion projective, alors la géodésique de la variété projective peut être représentée par une surface totalement géodésique.

Alors, le paramètre t correspond à notre paramètre projectif normal.

Car, comme M. J. H. C. WHITEHEAD l'a déjà remarqué [(129), p. 345], on voit de la condition (II) que tous les rayons se rencontrent en un même point qui peut être considéré comme „*point idéal*" de l'espace à connexion affine, donc le rapport anharmonique des quatre valeurs de t représente le rapport anharmonique des quatre rayons qui se rencontrent en un même point, par conséquent le rapport anharmonique des quatre valeurs de t représente celui des quatre points de la variété à connexion projective qui sont représentés par les rayons.

Passons ensuite au cas de MM. D. VAN DANTZIG et J. HAANTJES.

On prend un système de coordonnées par rapport auquel on a

(8.17) $$\xi^\lambda = u^\lambda\,;$$

alors les rayons peuvent être représentés par

$$u^{\lambda} = C^{\lambda} r, \tag{8.18}$$

où les C^{λ} sont constantes est r est paramètre.

Pour rester toujours dans le système de coordonnées réalisant la condition (8.17), on ne doit considérer que les transformations de la forme

$$\overline{u}^{\lambda} = \overline{u}^{\lambda}(u), \tag{8.19}$$

où les $\overline{u}^{\lambda}(u)$ sont des fonctions homogènes de degré 1, parce que des équations

$$\xi^{\lambda} = u^{\lambda},$$
$$\overline{\xi}^{\lambda} = \overline{u}^{\lambda},$$
$$\overline{\xi}^{\lambda} = \frac{\partial \overline{u}^{\lambda}}{\partial u^{\mu}} \xi^{\mu},$$

l'on tire

$$\overline{u}^{\lambda} = \frac{\partial \overline{u}^{\lambda}}{\partial u^{\mu}} u^{\mu}. \tag{8.20}$$

Cela étant, les trois conditions (I), (II) et (III) prennent la forme sutvante :

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = \Pi^{\lambda}_{\nu\mu}, \tag{8.21}$$

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} u^{\nu} = 0, \tag{8.22}$$

$$\frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial u^{\omega}} u^{\omega} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = 0, \tag{8.23}$$

(8.23) exprimant que les fonctions $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ sont homogènes de degré 1.

Ce sont les conditions posées par M. J. Haantjes [(42)] pour étudier, du point de vue de M. D. van Dantzig, la Géométrie projective des *paths.*

Dans ce système de coordonnées, les équations des *paths* étant données par

$$\frac{d^2 u^{\lambda}}{dr^2} + \Pi^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{du^{\mu}}{dr} \frac{du^{\nu}}{dr} = \alpha u^{\lambda} + \beta \frac{du^{\lambda}}{dr},$$

on peut choisir un paramètre t et une fonction $\varrho(t)$ tels que l'on puisse écrire les équations sous la forme

$$\frac{d^2 \varrho u^\lambda}{dt^2} + \Pi^\lambda_{\mu\nu}(\varrho u) \frac{d \varrho u^\mu}{dt} \frac{d \varrho u^\nu}{dt} = 0.$$

Le paramètre t correspond à notre paramètre projectif normal.

Remarque. Dans leur théorie des espaces à connexion projective, MM. J. A. Schouten, D. van Dantzig, J. Haantjes et St. Golab, en employant les coordonnées homogènes, ont supposé seulement que les composantes de la connexion $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ sont des fonctions homogènes de degré 1, c'est-à-dire la condition (8.23).

Comme ils ne considèrent que les transformations de coordonnées

$$\overline{u}^\lambda = \overline{u}^\lambda(u)$$

où les $\overline{u}^\lambda$ sont homogènes de degré 1, les u^λ sont les composantes d'un vecteur contrevariant, donc de

$$\begin{aligned} u^\lambda_{;\nu} &= u^\lambda_{,\nu} + u^\mu \Pi^\lambda_{\mu\nu} \\ &= \delta^\lambda_\nu + u^\mu \Pi^\lambda_{\mu\nu} \end{aligned}$$

on conclut que

(8.24) $$u^\mu \Pi^\lambda_{\mu\nu} = u^\lambda_{;\nu} - \delta^\lambda_\nu$$

sont des composantes d'un affineur.

Pour mettre (8.23) sous une forme tensorielle, formons

$$\Pi^\lambda_{\mu\nu\omega} u^\omega = \left[\frac{\partial \Pi^\lambda_{\mu\nu}}{\partial u^\omega} - \frac{\partial \Pi^\lambda_{\mu\omega}}{\partial u^\nu} + \Pi^\alpha_{\mu\nu} \Pi^\lambda_{\alpha\omega} - \Pi^\alpha_{\mu\omega} \Pi^\lambda_{\alpha\nu} \right] u^\omega,$$

et substituons, dans ces équations, (8.23) et

$$\Pi^\lambda_{\omega\nu} + u^\mu \frac{\partial \Pi^\lambda_{\mu\nu}}{\partial u^\omega} = \frac{\partial u^\lambda_{;\nu}}{\partial u^\omega},$$

qui s'obtiennent de (8.24). Alors on aura

(8.25) $$\Pi^\lambda_{\mu\nu\omega} u^\omega = \left(u^\lambda_{;\mu} + S^\lambda_{\mu\omega} u^\omega \right)_{;\nu}$$

où

$$S^{\lambda}_{\mu\omega} = \Pi^{\lambda}_{\mu\omega} - \Pi^{\lambda}_{\omega\mu} .$$

Donc, on voit que l'espace à connexion affine employé par M. D. VAN DANTZIG est un peu plus général que celui de M. T. Y. THOMAS.

Mais, si l'on pose les conditions suivantes dans la théorie de M. D. VAN DANTZIG

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = \Pi^{\lambda}_{\nu\mu} ,$$

$$u^{\lambda}_{;\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu} ,$$

pour étudier la géométrie projective des *paths*, ces deux espaces sont caractérisés par les mêmes propriétés (I), (II) et (III).

BIBLIOGRAPHIE.

BERWALD L.

1. On the projective geometry of paths, Ann. of Math. 37, 879 - 898, 1936.

BORTOLOTTI E.

2. Connessioni proiettive. Boll. Unione Mat. Ital. 9, 288 - 294, 1930 ; 10, 28-34 et 83-90, 1931.
3. Differential invariants of direction and point displacement. Ann. of Math. 32, 361 - 377, 1931.
4. Spazi proiettivamente piani. Ann. Mat. pura appl. 11, 111 - 134, 1932.
5. Sulle connessioni proiettive. Rend. Circ. Mat. Palermo 56, 1 - 57, 1932.

BORTOLOTTI E. et HLAVATY V.

6. Contributi alla teoria delle connessioni I. Connessioni proiettive. Ann. Mat. pura appl. 15, 1-45, 129 - 154, 1936.

CARTAN E.

7. Leçons sur les invariants intégraux. Paris, Hermann, 1922.
8. Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité. C. R. Ac. Paris 174, 734 - 737, 1922.
9. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Ann. Éc. Norm. Sup. 40, 325 - 412, 1923.
10. Sur les variétés à connexion projective. Bull. Soc. Math. de France 52, 205 - 241, 1924.
11. Sur la connexion projective des surfaces. C. R. Ac. Paris 178, 750 - 752, 1924.
12. Les récentes généralisations de la notion d'espace. Bull. Sc. Math. 48, 294 - 320, 1924.

13. La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle. L'Enseignement Math. **24**, 1 - 18, 1925.

14. La géométrie des espaces de Riemann. Mémorial des Sc. Math. 1925.

15. La théorie des groupes et la géométrie. L'Enseignement Math. **26**, 200 - 225, 1927.

16. Rapport sur le Mémoire de J. A. Schouten intitulé „Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie" Bull. Soc. Phys - Math. Kazan **2**, 71 - 76, 1927.

17. Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

18. Le calcul tensoriel en géométrie projective. C. Ac. Paris. **198**, 2033 - 2037, 1934.

19. La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés. Paris, Herman, 1935.

20. Le calcul tensoriel projectif. Recueil mathématique Soc. Math. Moscou 42, 131 - 147, 1935.

21. Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. Paris Gauthier - Villars, 1937.

CHURCH A.

22. On the form of differential equations of a system of paths. Ann. of Math. **28**, 629 - 630, 1927.

DANTZIG D. VAN

23. Theorie des projektiven Zusammenhangs n - dimensionaler Räume. Math. Ann. **106**, 400 - 454, 1932.

24. Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie I et II. Proc. Akad. Amsterdam. **35**, 524 - 534, 535 - 542, 1932.

25. On the general projective differential geometry, III. Proc. Akad. Amsterdam, **37**, 150 - 155, 1934.

DOUGLAS J.

26. The general geometry of paths. Ann. of Math. **29**, 143 - 168, 1928.

EISENHART L. P.

27. Spaces with corresponding paths. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **8**, 233 - 238, 1922.

28. Fields of parallel vectors in the geometry of paths. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **8**, 207 - 212, 1922.

29. Affine geometries of paths possessing an invariant integral. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **9**, 4 - 7, 1923.

30. The geometry of paths and general relativity. Ann. of Math. **24**, 367 - 392, 1923.

31. Geometries of paths for which the equations of the paths admit a quadratic first integral. Trans. Amer. Math. Soc. **26**, 378 - 384, 1924.

32. Riemannian Geometry. Princeton University Press, 1926.

33. Geometries of paths for which the equations of the paths admit $n(n+1)/2$ independent linear first integrals. Trans. Amer. Math. Soc. **28**, 330 - 338, 1926.

34. Non Riemannian Geometry. Amer. Math. Soc. Coll. Public. VIII **1927**.

35. Projective normal coordinates. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **16**, 731-740, 1930.

EISENHART L. P. et KNEBELMAN M. S.

36. Displacement in a geometry of paths which carries pats into paths. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **13**, 38 - 42, 1927.

EISENHART L. P. et VEBLEN O.

37. The Riemannian geometry and its generalisation. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **8**, 19 - 23, 1922.

EYRAUD H.

38. Sur le caractère riemannien projectif du champ gravifique électromagnétique. C. R. Ac. Paris, **180**, 127 - 130, 1925.

FRIESECKE H.

39. Vektorübertragung, Richtungsübertragung, Metrik. Math. Ann. **94**, 101 - 118, 1925.

FUBINI G. et ČECH E.

40. Géométrie projective différentielle. Paris, Gauthier - Villars, 1931.

GOLAB ST.

41. Uber verallgemeinerte projektive Geometrie. Prace mat. - fiz. Warszawa. **37**, 91 - 153, 1930.

HAANTJES J.

42. On the projective geometry of paths. Proc. Edinburgh Math. Soc. **5**, 103 - 115, 1937.

HACHTROUDI M.

43. Les espaces d'éléments à connexion projective normale (Thèse). Paris. Hermann, 1937.

HESSENBERG G.

44. Beispiele zur Richtungsübertragung. Jahresbericht der D. M. V. **33**, 93 - 95. 1924.

HLAWATY V.

45. Sur les déplacements isohodoïques. L'Enseignement Math. **26**, 84 - 97, 1927.

46. Bemerkung zur Arbeit von Herrn T. Y. Thomas „A projective theory of affinely connected manifolds". Math. Zeitschr. **28**, 142 - 146, 1928.

47. Projektiven Invarianten einer Kurvenkongruenz und einer Kurve. Math. Zeitschr. **34**, 58 - 73, 1931.

48. Invariants projectifs différentiels d'une courbe dans l'espace projectif P_{n-1} Accad. Naz. Lincei Rend. Roma. **16**, 109 - 114, 206 - 211, 299 - 304, 1932.

49. Connexion projective et déplacement **projectif. Ann. Mat. pura appl. 12,** 217 - 294, 1933.

50. Invariants projectifs d'une hypersurface. Rend. Circ. Mat. Palermo. **57.** 402 - 430, 1933.

51. Über eine Art der Punktkonnexion. Math. Zeitschr. **38,** 135 - **145, 1934,**

52. Espaces abstraits courbes de König. Rend. Circ. Mat, Palermo, **59, 1-39,** 1933.

53. Système complet des invariants différentiels projectifs d'une **courbe** dans un espace projectif courbe. Abhandlungen **des** Moskauer Seminar für Tensoranalysis **2 - 3,** 13 - 50, **1935.**

HLAVATY V. et GOLAB ST.

54. Zur Theorie der Vektor - und Punktkonnexion. Praces mat. fiz. **Warszawa.** 39, 119 - 129, 1932.

HOFFMANN B.

55. Projective relativity and the quantum field. Phys. Review **37, 88 - 89,** 1931.

56. Projective relativity and the Einstein - Mayer **unified field theory.** Phys. Review. **43,** 615 - 619, 1933.

KANITANI J.

57. Géométrie différentielle projective. Ryojun Coll. **eng. 1931.**

KNEBELMAN M. S.

58. Groups of collineations in a space of paths. Proc. Nat. **Acad. Sc. U. S. A. 13,** 396 - 400, 1927.

59. Collineations of projectively related affine connections. **Ann. of Math. 29,** 389 - 394, 1928.

KÖNIG R.

60. Beiträge zu einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. **Jahresbericht der** D. W. V. 28, 213 - 228, 1920.

LEVI - CIVITA T.

61. Der Absolute Differentialkalkül. Berlin, **Julius Springer, 1928.**

LEVY H.

62. Normal coordinates in the geometry of **paths.** Proc. **Nat. Acad. Sc. U. S. A. 16** 492 - 496, **1930.**

MICHAL A. D.

63. Projective integral invariants attached to the trajectories of **differential** systems. Bull. Amer. Soc. **37, 447 - 454, 1931.**

NEWMAN M. H. A.

64. A gauge - invariant tensor calculus. Proc. Royal Soc. **116, 603 - 623, 1927.**

PAULI W.

65. Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf **homogenen Koordinaten.** Ann. der Physik 18, 305 - 336, 1933.

ROBERTSON H. P.

66. Note on projective coordinates. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. 14, 153-154, 1928.

ROBERTSON H. P. et WEIL H.

67. On a problem in the theory of groups arising in the foundations of infinitesimal geometry. Bull. Amer. Math. Soc. 35, 686 - 690, 1929.

SCHOUTEN J. A.

68. Der Ricci - Kalkül. Berlin Springer, 192[illegible].

69. Sur les connexions conformes et projectives de M. Cartan et la connexion linéaire générale de M. König. C. R. Ac. Paris 178, 2044 - 2046, 1924.

70. On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear d splacements. Proc. Acad. Amsterdam 27, 407 - 424, 1924.

71. On the condition of integrability of covariant differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 27, 441 - 473, 1925.

72. Erlanger Programm und Übertragungslehre. Neue Gesichtspunkte zur Grundlegung der Geometrie. Rend. Circolo Mat. Palermo 50, 142 - 169, 1926.

73. Über die Projektivkrümmung und Konformkrümmung halbsymmetrischer Übertragungen. Bull. Soc. Phys. Math. Kazan. 2, 90 -98, 1924.

74. Projective and conformal invariants of half symmetrical connections. Proc. Akad. Amsterdam. 29, 334 - 336, 1926.

75. Über nicht - holonome Übertragungen in einer L_n. Math. Zeitschr 30, 1[illegible]9 - 172, 1929.

76. Zur generellen Feldtheorie. Zeitschr, für Physik. 81, 129 - 138 , 1931 (G F. IV), 405 - 417 (G. F. V.) ; 84, 92 - 111, 1933 (G. F. VII).

77. La théorie projective de la relativité. Annales Inst. H. Poincaré 5, 51 - 88, 1935.

SCHOUTEN J. A. et DANTZIG D. VAN.

78. Über eine vierdimensionale Deutung der neusten Feldtheorie. Proc. Akad. Amsterdam 34, 1398 - 1407, 1931.

79. Zum Unifizierungsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie. Proc. Akad. Amsterdam. 35, 642 - 655, 1932.

80. Zur generellen Feldtheorie (G. F. III). Zeitschr. für Physik. 78, 639 - 667, 1932.

81. On projective connections and their application to the general field theory (G. F. VI). Ann. of Math. 34, 271 - 312, 1933.

SCHOUTEN J. A. et GOLAB ST.

82. Über projective Übertragungen und Ableitungen. I, Math. Zeitschr. 30, 149 - 172, 1929 ; II, Ann. Mat. pura appl. 8, 141 - 157, 1931

SCHOUTEN J. A. et HAANTJES J.

83. Autogeodätische Linien und Weltlinien (G. F. VIII) Zeitschr. für Physik. **89**, 357 - 369, 1934.

84. Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie. Comp. Math. **3**, 1 - 51, 1936.

SCHOUTEN J. A. et HLAVATY V.

85. Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung. Math. Zeitschr, **30**, 414 - 432, 1929.

SCHOUTEN J. A. et KAMPEN E. R VAN.

86. Zur Einbettung - und Krümmungstheorie nicht - holonomer Gebilde. Math. Ann. **103**, 752 - 783, 1930.

SCHOUTEN J. A. et STRUIK D. J

87. Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. Groningen, Noordhoff, 1935.

STRUIK D. J.

88. On the theory of linear displacement. Bull. Amer. Math. Soc. **33**, 523-564, 1927.

89. The theory of linear connections. Berlin, Julius Springer, 1934.

THOMAS J. M.

90. Note on the projective geometry of paths. Proc. Nat, Acad. Sc. U. S. A. **11**, 207 - 200, 1925.

91. On normal coordinates in the geometry of paths. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **12**, 58 - 63, 1926.

92. First integrals in the geometry of paths. Proc. Nat. Acad. Sc: U. S. A. **12**, 117 - 124, 1926.

93. Asymmetric displacement of a vector. Trans. Amer. Math. Soc. **28**, 658 - 670, 1926.

THOMAS T. Y.

94. On the projective and equiprojective geometries of paths. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **11**, 199 - 203, 1925.

95. Announcement of a projective theory of affinely connected manifolds. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **11**, 588 - 589, 1925.

96. On the equiprojective geometry of paths Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **11**, 592 - 594, 1925.

97. Note on the projective geometry of paths. Bull. Amer. Math. Soc. **31**, 318 - 322, 1925.

98. A projective theory of affinely connected manifolds. Math. Zeitschr. **25**, 723 - 733, 1926.

99. The replacement theorem and related questions in the projective geometry of paths. Ann. of Math. **28**, 549 - 561, 1927.

100. Concerning the *G group of transformations. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **14**, 728 - 734, 1928.

101. The differential invariants of generalized spaces. Cambridge University Press. 1935.
102. On normal coordinates. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **22**, 309 - 312, 1936.

VEBLEN O.

103. Projective and affine geometry of paths. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. 8, 347 - 350. 1922.
104. Normal coordinates for the geometry of paths. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. 8, 192 - 197, 1922.
105. Equi - affine geometry of paths. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **9**, 3 - 4, 1923.
106. Remarks on the foundation of geometry. Bull. Amer. Math. Soc. **31**, 121 - 141, 1925.
107. Invariants of quadratic differential forms. London Cambridge Tract. 1927.
108. Differential invariants and geometry. Atti Congresso Internazionale Bologna 1, 181 - 189.
109. Projective tensors and connections. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **14**, 154 - 166, 1928.
110. Generalized projective geometry. Journal of London Math. Soc. **4**, 140-160, 1929.
111. A generalisation of the quadratic differential form. The Quarterly Journal of Math. **1**, 60 - 76, 1930.
112. Projektive Relativitätstheorie. Berlin Springer, 1933.

VEBLEN O. et HOFFMANN B.

113. Projective relativity. Physical Review. **36**, 810 - 822, 1930.

VEBLEN O. et THOMAS J. M.

114. Projective normal coordinates for the geometry of paths. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **11**, 204 - 207, 1925.
115. Projective invariants of affine geometry of paths. Ann. of Math. **27**, 279 - 296. 1926.

VEBLEN O. et THOMAS T. Y.

116. The geometry of paths. Trans. Amer. Math. Soc. **25**, 551 - 608, 1923.
117. Extensions of relative tensors. Trans. Amer. Math. Soc. **26**, 373 - 377, 1924.

VEBLEN O. et WHITEHEAD J. H. C.

118. A set of axioms for differential geometry. Proc. Nat. Acad. Sc. **17**, 551 - 561, 1931.
119. The foundations of differential geometry. London Cabridge Tract. 1932.

VRANCEANU G.

120. Les espaces non holonomes. Memorial des Sc. Math. 1936.
121. Sur une théorie unitaire non holonome des champs physiques. Journal de Physique et le Radium 7, 514 - 526, 1936.

WEITZENBÖCK R.

122. Über projectiven Differentialinvarianten. VII. Proc. **Akad. Amsterdam** **35**, 462 - 468, 1932.

123. Über den Reduktionssatz bei affinem und projektivem **Zusammenhang** Proc. Acad. Amsterdam. **35**, 1220 - 1229, 1932.

WEYL H.

124. Zur Infinitesimalgeometrie. Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. Gött. Nachr. 99 - 112, 1921.

125. Temps, Espace, Matière. Paris Blanchard, 1922.

126. On the foundations of general infinitesimal geometry. Bull. Amer. Math. Soc. **35**, 716 - 725, 1929.

WHITEHEAD J.H.C.

127. A method of obtaining normal representations for a projective connection. Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **16**, 754 - 760, 1930.

128. On a class of projectively flat affine connections. Proc. London Math. Soc. **32**, 93 - 114, 1931.

129. The representation of projective spaces. Ann. of Math. **32**, 327 - 360, 1931.

130. On linear connections. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 191 - 209, 1931.

131. Convex regions in the geometry of paths. Quart. Journal Math. **3**, 33-42, 1932.

132. Affine spaces of paths. which are symmetric about each point. Math. Zeitschr. **35**, 644 - 659, 1932.

YANO K.

133. Sur le changement des coefficients d'une connexion projective. C. R. Acad. Paris **205**, 637 - 639, 1937.

134. Sur les équations des géodésiques dans une variété à connexion projective. C. R. Ac. Paris **205**, 829 - 831, 1937.

135. Sur la théorie unitaire non holonome des champs I, II, Proc. Phys Math. Soc. Japon. **19**, 867 - 896, 945 - 976, 1937.

136. The non holonomic representation of projective spaces (sous presse).

TABLE DES MATIÈRES.