MOHSEN HACHTROUDI

Les espaces d'éléments à connexion projective normale

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1937

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1937__195__1_0>

SÉRIE A, N° 1736
N° D'ORDRE :
2602

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR LE

GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Mohsen HACHTROUDI

1re THÈSE. — LES ESPACES D'ÉLÉMENTS A CONNEXION PROJECTIVE NORMALE.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le Juillet 1937, devant la Commission d'Examen

MM. CARTAN........ *Président*
MONTEL........ } *Examinateurs*
GARNIER....... }

PARIS
HERMANN ET Cie, ÉDITEURS
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1937

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire .... M. MOLLIARD.

Doyen .... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires...

H. LEBESGUE.	FREUNDLER.	MARCHIS.
A. FERNBACH.	AUGER.	VESSIOT.
Émile PICARD.	BLAISE.	PORTIER.
Léon BRILLOUIN.	DANGEARD.	MOLLIARD.
GUILLET.	LESPIEAU.	LAPICQUE.
PÉCHARD.		

PROFESSEURS

G. BERTRAND	T	Chimie biologique.
M. CAULLERY	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	T	Chimie générale.
Émile BOREL	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Jean PERRIN	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM.......	T	Physique.
E. CARTAN	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON.........	T	Recherches physiques.
J. DRACH..........	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles FABRY.....	T	Enseignement de Physique.
Charles PÉREZ	T	Zoologie.
Léon BERTRAND ...	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
E. RABAUD	T	Biologie expériment.
M. GUICHARD......		Chimie minérale.
Paul MONTEL	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
P. WINTREBERT ...	T	Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM ...	T	Botanique.
O. DUBOSCQ	T	Biologie maritime.
G. JULIA	T	Mécanique analytique et mécan. céleste.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie
A. MICHEL-LÉVY ...	T	Pétrographie.
H. BÉNARD	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la géométrie.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT		Physique.
E. DARMOIS		Physique.
A. DEBIERNE	T	Physique générale et radioactivité.
A. DUFOUR........	T	Physique (P. C. B.).
L. DUNOYER		Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND ..	T	Botanique.
M. JAVILLIER		Chimie biologique.
L. JOLEAUD		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY	T	Physiologie comparée.
F. PICARD		Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT......	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET.......	T	Calcul différentiel et calcul intégral.
E. ESCLANGON.....	T	Astronomie.
Mme RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.
H. BÉGHIN........	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH.............		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN..........		Optique appliquée.
P. JOB............		Chimie générale.
LABROUSTE		Physique du Globe.
PRENANT		Zoologie.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
BOHN.............		Zoologie (P. C. B.).
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Mathématiques générales.
PÉRÈS		Mécanique des fluides.
HACKSPILL		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER...........	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY............	T	Mécanique rationnelle.
GAULT		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches physiques
DUPONT	T	Théories chimiques.
LANQUINE		Géologie.
VALIRON		Mathématiques générales.
BARRABÉ..........		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT		Zoologie (P. C. B.).
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON		Chimie organique.
G. DARMOIS		Calcul des Probabilités et Physique Mathématique.

Secrétaire .... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire.............. D. TOMBECK.

INTRODUCTION

Dans son mémoire paru au *Bulletin de la Société Mathématique de France* (t. XLII, fascicule II, 1924) M. Cartan a montré comment la notion d'un espace d'éléments linéaires à connexion projective normale peut définir les invariants ponctuels d'une équation différentielle $y'' = f(x, y, y')$ du second ordre.

Le problème ainsi posé est la géométrisation d'une équation différentielle générale du second ordre, en ce sens que les courbes intégrales d'une telle équation sont considérées comme les géodésiques d'un espace à connexion projective.

Dans ce mémoire nous cherchons une généralisation du problème précédent étudié par M. Cartan. Un complexe de surfaces $F(x, y, z, a, b, c) = o$ étant donné nous déterminons une connexion projective définie d'une manière intrinsèque et invariante, telle que l'espace étant doué de cette connexion les complexes $F = O$ jouissent des propriétés d'un plan. Le problème ainsi envisagé est du domaine de topologie.

Dans le premier chapitre nous étudions le cas d'un espace à trois dimensions en cherchant premièrement à déterminer la connexion privilégiée (la connexion normale) dans un repère fondamental défini par les variables x, y, z, et les paramètres non-homogènes p, q de l'élément plan. Ensuite une fois la nature de la connexion normale étant connue, nous fondons une théorie des formes génératrices en partant d'un repère naturel par rapport aux variables x, y, z ; mais cette fois en nous servant des paramètres homogènes de l'élément plan.

Dans le deuxième chapitre nous étudions en particulier le cas de dégénérescence de l'espace d'éléments en espace ponctuel. Nous montrons l'équivalence de cet espace ponctuel avec l'espace projectif ordinaire. Nous vérifions ensuite l'équivalence de deux connexions normales rattachées aux plans et aux géodésiques de l'espace. Cette connexion normale commune étant la connexion sans courbure.

L'espace étant projectif nous déterminons ainsi les conditions necessaires et suffisantes pour qu'un système de deux équations différentielles du second ordre soit réductibles à la forme :

$$y'' = 0 \qquad z'' = 0.$$

Dans le troisième chapitre (1re partie) nous généralisons la notion des formes génératrices pour un espace à n dimensions. Ainsi nous déterminons la connexion projective normale qui définit les invariants différentiels d'un système complet d'équations aux dérivées partielles du second ordre. En étudiant le cas de l'espace ponctuel, nous trouvons un ensemble des systèmes associés à un système d'équations différentielles du second ordre dans le cas où ce système est réductible à la forme $y'' = 0$ $z'' = 0$... etc., et ainsi nous montrons que les conditions de réductibilité, s'expriment toujours par l'intégrabilité d'un des systèmes associés.

Dans la seconde partie du même chapitre nous étudions sommairement les espaces d'éléments linéaires à connexion projective normale et nous définissons ainsi un générateur pour l'espace en l'appelant le potentiel affine de l'espace.

Enfin dans le dernier chapitre nous étudions les surfaces et les courbes d'un espace d'éléments plans à trois dimensions en appliquant la méthode de repère mobile.

Qu'il me soit permis en terminant d'exprimer ici toute ma reconnaissance et ma gratitude pour mon Maître M. Elie Cartan qui a bien voulu accepter la direction de ce travail.

CHAPITRE I

LES ESPACES D'ÉLÉMENTS-PLANS A TROIS DIMENSIONS

I. — LE REPÈRE FONDAMENTAL ET LA DÉTERMINATION DE LA CONNEXION NORMALE

1. — Soit un complexe de surfaces :

$$F(x, y, z, a, b, c) = 0$$

l'intégrale générale du système d'équations aux dérivées partielles du second ordre :

$$(1) \qquad \begin{cases} r = \varphi(x, y, z, p, q) \\ s = f(x, y, z, p, q) \\ t = \psi(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

où les fonctions analytiques φ, f, ψ satisfont aux conditions d'intégrabilité.

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + f\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \psi\dfrac{\partial\varphi}{\partial q} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z} + \varphi\dfrac{\partial f}{\partial p} + f\dfrac{\partial f}{\partial q} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z} + f\dfrac{\partial f}{\partial p} + \psi\dfrac{\partial f}{\partial q} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + p\dfrac{\partial\psi}{\partial z} + \varphi\dfrac{\partial\psi}{\partial p} + f\dfrac{\partial\psi}{\partial q} \end{cases}$$

nous nous proposons de chercher une connexion projective telle que l'espace étant doué de cette connexion le complexe $F = O$ définisse les plans de l'espace.

Remarquons que le système (1) peut se mettre sous la forme d'un système de Pfaff complètement intégrable :

$$(3) \qquad \begin{cases} dz - pdx - \varphi dy = 0 \\ dp - \varphi dx - fdy = 0 \\ dq - fdx - \psi dy = 0 \end{cases}$$

En se servant des opérations symboliques

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} = \dfrac{\partial}{\partial x} + p\dfrac{\partial}{\partial z} + \varphi\dfrac{\partial}{\partial p} + f\dfrac{\partial}{\partial q} \\ \dfrac{d}{dy} = \dfrac{\partial}{\partial y} + q\dfrac{\partial}{\partial z} + f\dfrac{\partial}{\partial p} + \psi\dfrac{\partial}{\partial q} \end{cases}$$

les conditions d'intégrabilité (2) s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} &= \frac{d\psi}{dx} \end{aligned}\right.$$

Nous aurons recours dans ce qui suit à ces opérations symboliques.

2. — Notions d'espace d'éléments plans. Un espace d'éléments plans est une variété à cinq dimensions définie par un point appelé le centre d'éléments et par un plan passant par le centre.

Un espace d'éléments à connexion projective est le résultat de raccordement des petits morceaux d'espace d'éléments suivant une loi bien déterminée, ce raccord se faisant de proche en proche.

3. — Soit alors le repère :

$$\left\{\begin{aligned} dA &= \omega_0^0 A + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 A_3 \\ dA_1 &= \omega_1^0 A + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 \\ dA_2 &= \omega_2^0 A + \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 \\ dA_3 &= \omega_3^0 A + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 \end{aligned}\right. \tag{5}$$

où le point origine A est supposé le centre d'éléments plan A, A_1 A_2 définissant cette connexion entre les espaces projectifs tangents.

Les composantes ω_j^i du déplacement infinitésimal de ce repère sont des formes linéaires et homogènes par rapport aux différentielles

$$dx, dy, dz, dp, dq.$$

Le point A étant le centre, les équations différentielles des points de l'espace sont :

$$\omega^1 = 0 \qquad \omega^2 = 0 \qquad \omega^3 = 0.$$

De même A A_1 A_2 étant l'élément plan passant par le centre A les équations différentielles des plans de l'espace sont

$$\omega^3 = 0 \qquad \omega_1^3 = 0 \qquad \omega_2^3 = 0.$$

Si le centre A reste fixe en doit avoir :

$$\omega^1 = 0 \qquad \omega^2 = 0 \qquad \omega^3 = 0$$

avec

$$dx = dy = dz = 0$$

il s'en suit alors que les ω_i sont des formes linéaires et homogènes en dx, dy, dz seulement, d'autre part si le point A reste dans le plan (élément-plan rattaché au centre) $AA_1 A_2$ on doit avoir

$$\omega^3 = 0$$

avec :

$$dz - pdx - qdy = 0$$

donc ω^3 est égal à dz-pdx-qdy à un coefficient près. Donc en développant dA suivant les différentielles dp, dq, dx, dy, dz-pdx-qdy et en choisissant les coefficients de trois dernières pour A_1, A_2, A_3 on aura :

$$\omega^1 = dx$$
$$\omega^2 = dy$$
$$\omega^3 = dz - pdx - qdy$$

Remarquons qu'on peut encore ajouter des multiples quelconques de A aux points A_1, A_2, A_3 alors en choisissant convenablement. les coefficients de ces multiples on peut avoir :

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 3\omega_0^0 = \mathcal{A}dp + \mathcal{B}dq$$

Nous appellerons un tel repère, le repère fondamental par rapport aux variables x, y, z.

4. — Les équations des plans étant :

$$\omega^3 = 0 \qquad \omega_1^3 = 0 \qquad \omega_2^3 = 0$$

on doit avoir :

$$(6) \begin{cases} \omega_1^3 = m(dp - \varphi dx - fdy) + n(dq - fdx - \psi dy) + g(dz - pdx - qdy) \\ \omega_2^3 = m'(dp - \varphi dx - fdy) + n'(dq - fdx - \psi dy) + h(dz - pdx - qdy) \end{cases}$$

on voit alors qu'il existe une infinité des connexions projectives telles qu'elles imposent le complexe F = O comme des plans à l'espace.

Ces connexions dépendent de six arbitraires m, n, m', n', g , h avec des formes quelconques pour les autres ω_j^i.

Nous allons montrer que parmi ces connexions il existe une seule privilégiée en ce sens qu'elle est déterminée d'une manière invariante.

Pour cela nous allons écrire les équations de la structure de l'espace.

$$
(7) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\Omega^i &= (\omega^i)' - [\omega_0^0 \omega^i] - [\omega^k \omega_k^i] \\
\Omega_i^j &= (\omega_i^j)' - [\omega_i^0 \omega^j] - [\omega_i^k \omega_k^j] \\
\Omega_i^0 &= (\omega_i^0)' - [\omega_i^0 \omega_0^0] - [\omega_i^k \omega_k^0] \\
\Omega_0^0 &= (\omega_0^0)' - [\omega^k \omega_k^0]
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces formules l'indice muet k est l'indice de sommation.

5. — Annulons d'abord la composante Ω^3 de la courbure :

$$\Omega^3 = (\omega^3)' - [\omega^1 \omega_1^3] - [\omega^2 \omega_2^3] - [\omega^3(\omega_3^3 - \omega_0^0)] = 0$$

ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
&-[dpdx]-[dqdy]+m[(dp-\varphi dx-fdy)dx]+n[(dq-fdx-\psi dy)dx] \\
&+g[(dz-pdx-qdy)dx]+m'[(dp-\varphi dx-fdy)dy]+n'[(dq-fdx \\
&-\psi dy)dy]+h[(dz-pdx-qdy)dy]-[(\omega_3^3-\omega_0^0)(dz-pdx-qdy)]=0
\end{aligned}
$$

On peut annuler cette composante en posant :

$$m = n' = 1$$
$$m' = n = 0$$
$$\omega_3^3 - \omega_0^0 = gdx + hdy + \gamma(dz - pdx - qdy)$$

On a ainsi :

$$\omega_1^3 = dp - \varphi dx - fdy + g(dz - pdx - qdy)$$
$$\omega_2^3 = dq - fdx - \psi dy + h(dz - pdx - qdy)$$

Annulons maintenant les composantes Ω^1 et Ω^2 de la courbure :

$$\Omega^1 = (\omega^1)' - [\omega^1(\omega_1^1 - \omega_0^0)] - [\omega^2 \omega_2^1] - [\omega^3 \omega_3^1] = 0$$
$$\Omega^2 = (\omega^2)' - [\omega^1 \omega_1^2] - [\omega^2(\omega_2^2 - \omega_0^0)] - [\omega^3 \omega_3^2] = 0$$

ce qui donne :

$$[dx(\omega_1^1 - \omega_0^0)] + [dy\omega_2^1] + [(dz - pdx - qdy)\omega_3^1] = 0$$
$$[dx\omega_1^2] + [dy(\omega_2^2 - \omega_0^0)] + [(dz - pdx - qdy)\omega_3^2] = 0$$

D'après le lemme de Cartan on trouve :

$$\left\{\begin{aligned}
\omega_1^1 - \omega_0^0 &= \alpha dx + \beta dy + \lambda(dz - pdx - qdy)\\
\omega_2^1 &= \beta dx + \mu dy + \nu(dz - pdx - qdy)\\
\omega_3^1 &= \lambda dx + \nu dy + \rho(dz - pdx - qdy)\\
\omega_1^2 &= \alpha' dx + \beta' dy + \lambda'(dz - pdx - qdy)\\
\omega_2^2 - \omega_0^0 &= \beta' dx + \mu' dy + \nu'(dz - pdx - qdy)\\
\omega_3^2 &= \lambda' dx + \nu' dy + \rho'(dz - pdx - qdy)
\end{aligned}\right.$$

Sachant que $\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 3\,\omega_0^0$ ne dépend que de dp et dq on doit avoir :

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 3\omega_0^0 = 0$$

ce qui donne :

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha + \beta' + g &= 0\\
\beta + \mu' + h &= 0\\
\lambda + \nu' + \gamma &= 0
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Annulons ensuite les composantes Ω_1^3 et Ω_2^3 de la courbure :

$$\Omega_1^3 = (\omega_1^3)' - [\omega_1^0\omega^3] - [(\omega_1^1 - \omega_3^3)\omega_1^3] - [\omega_1^2\omega_2^3] = 0$$
$$\Omega_2^3 = (\omega_2^3)' - [\omega_2^0\omega^3] - [\omega_2^1\omega_1^3] - [(\omega_2^2 - \omega_3^3)\omega_2^3] = 0$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&- [d\varphi dx] - [dfdy] + [dg(dz - pdx - qdy)] - g[dpdx] - g[dqdy]\\
&- [\omega_1^0(dz - pdx - qdy)] - (\alpha - g)[dx(dp - \varphi dx - fdy)] - (\alpha - g)\\
&\quad g[dx(dz - pdx - qdy)] - (\beta - h)[dy(dp - \varphi dx - fdy)] - (\beta - h)\\
&\quad g[dy(dz - pdx - qdy)] - (\lambda - \gamma)[(dz - pdx - qdy)(dp - \varphi dx - fdy)]\\
&- \alpha'[dx(dq - fdx - \psi dy)] - \alpha' h[dx(dy - pdx - qdy)] - \beta'[dy\\
&\quad (dq - fdx - \psi dy)] - \beta' h[dy(dz - pdx - qdy)] - \lambda'[(dz - pdx - qdy)\\
&\quad (dq - fdx - \psi dy)] = 0
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
&- [dfdx] - [d\psi dy] + [dh(dz - pdx - qdy)] - h[dpdx] - h[dqdy]\\
&- [\omega_2^0(dz - pdx - qdy)] - \beta[dx(dp - \varphi dx - fdy)] - \beta g[dx\\
&\quad (dz - pdx - qdy)] - \mu[dy(dp - \varphi dx - fdy)] - \mu g[dy(dz - pdx\\
&- qdy)] - \nu[(dz - pdx - qdy)(dp - \varphi dx - fdy)] - (\beta' - g)\\
&\quad [dx(dq - fdx - \psi dy)] - (\beta' - g)h]dx(dz - pdx - qdy)] - (\mu' - h)\\
&\quad [dy(dq - fdx - \psi dy)] - (\mu' - h)h[dy(dz - pdx - qdy)] - (\nu' - \gamma)\\
&\quad [(dz - pdx - qdy)(dq - fdx - \psi dy)] = 0
\end{aligned}$$

On annule ces composantes en posant :

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha - 2g = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p} \quad \beta - h = \dfrac{\partial f}{\partial p} \quad \beta' - g = \dfrac{\partial f}{\partial q} \quad \alpha' = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q} \text{ (pour la 1}^{\text{re}}\text{)} \\ \mu' - 2h = \dfrac{\partial\psi}{\partial q} \quad \beta - h = \dfrac{\partial f}{\partial p} \quad \beta' - g = \dfrac{\partial f}{\partial q} \quad \mu = \dfrac{\partial\psi}{\partial p} \text{ (pour la 2}^{\text{eme}}\text{)} \end{cases}$$

et en prenant pour ω_1^0 et ω_2^0 les valeurs suivantes (en tenant compte des conditions d'intégrabilité (2)) :

$$\begin{cases} \omega_1^0 = (\lambda - \gamma)(dp - \varphi dx - f dy) + \lambda'(dq - f dx - \psi dy) - \dfrac{1}{4} \\ d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \dfrac{\partial f}{\partial q}\right) + \mathrm{K}(dz - p dx - q dy) + \left[\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \dfrac{1}{16}\right. \\ \left.\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial p} + \dfrac{\partial f}{\partial q}\right)\left(3\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} - \dfrac{\partial f}{\partial q}\right)\right]dx + \left[\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial f}{\partial p}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \dfrac{\partial f}{\partial q}\right) + \dfrac{1}{16}\right. \\ \left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(3\dfrac{\partial\varphi}{\partial q} - \dfrac{\partial f}{\partial p}\right)\right]dy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_2^0 = \nu(dp - \varphi dx - f dy) + (\nu' - \gamma)(dz - p dx - q dy) - \dfrac{1}{4} d \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \mathrm{P}(dz - p dx - q dy) + \left[\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial f}{\partial q}\left(\dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \dfrac{1}{16}\right. \\ \left.\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \dfrac{\partial f}{\partial q}\right)\left(3\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)\right]dx + \left[\dfrac{\partial\psi}{\partial z} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\psi}{\partial p}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \dfrac{\partial f}{\partial q}\right) + \dfrac{1}{16}\right. \\ \left.\left(\dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(3\dfrac{\partial\psi}{\partial q} - \dfrac{\partial f}{\partial p}\right)\right]dy \end{cases}$$

Les équations (9) avec les deux premières équations du système (8) donnent :

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right) \qquad \beta' = \frac{1}{4}\left(3\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) \qquad g = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)$$

$$\beta = \frac{1}{4}\left(3\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\right) \qquad \mu' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\right) \qquad h = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)$$

On a alors le tableau suivant :

$$\omega^1 = dx \qquad \omega^2 = dy \qquad \omega^3 = dz - p dx - q dy \qquad \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 3\omega_0^0 = 0$$

$$\omega_1^3 = dp - \varphi dx - f dy - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)(dz - p dx - q dy)$$

$$\omega_2^3 = dq - f dx - \psi dy - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)(dz - p dx - q dy)$$

$$\omega_3^3 - \omega_0^0 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)dx - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)dy + \gamma(dz - p dx - q dy)$$

$$\omega_1^1 - \omega_0^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right)dx + \frac{1}{4}\left(3\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)dy + \lambda(dz - p dx - q dy)$$

$$\omega_2^2 - \omega_0^0 = \frac{1}{4}\left(3\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\right)dy + \nu'(dz - pdx - qdy)$$

$$\omega_1^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial q}dx + \frac{1}{4}\left(3\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)dy + \lambda'(dy - pdx - qdy)$$

$$\omega_2^1 = \frac{1}{4}\left(3\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial q}\right)dx + \frac{\partial \psi}{\partial p}dy + \nu(dz - pdx - qdy)$$

$$\omega_3^1 = \lambda dx + \nu dy + \rho(dz - pdx - qdy)$$

$$\omega_3^2 = \lambda' dx + \nu' dy + \rho'(dz - pdx - qdy)$$

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1^0 &= (\lambda - \gamma)(dp - \varphi dx - f dy) + \lambda'(dq - f dx - \psi dy) - \frac{1}{4}d\left(\frac{\partial \varphi}{dp} + \frac{\partial f}{dq}\right) \\ &+ \mathrm{K}(dz - pdx - qdy) + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial \varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(3\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]dx + \left[\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right. \\ &\left. + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(3\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right]dy \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \omega_2^0 &= \nu(dp - \varphi dx - f dy) + (\nu' - \gamma)(dq - f dx - \psi dy) - \frac{1}{4}d\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) \\ &+ \mathrm{P}(dz - pdx - qdy) + \left[\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right. \\ &\left.\left(3\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\right]dx + \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial \psi}{\partial p}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \psi}{\partial q}\right)\left(3\frac{\partial \psi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\right)\right]dy \end{aligned}\right.$$

avec la conditions :

$\lambda + \nu' + \gamma = o$ (3^e équation du système (8)).

On voit que la connexion dépend encore de 8 arbitraires λ, ν, ρ, λ', ν', ρ', P. K avec pour ω_3^0 une forme arbitraire.

Annulons maintenant la composante $\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \Omega_3^3 - 3\,\Omega_0^0$ de la courbure :

$$\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \Omega_3^3 - 3\Omega_0^0 = \left(\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 3\omega_0^0\right)' - 4\left[\omega_1^0\omega^1\right] - 4\left[\omega_2^0\omega^2\right] - 4\left[\omega_3^0\omega^3\right] = 0$$

d'où :

$$[\omega_1^0 dx] + [\omega_2^0 dy] + [\omega_3^0(dz - pdx - qdy)] = 0$$

et d'après le lemme de Cartan on trouve :

$$\begin{aligned} \omega_1^0 &= \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3(dz - pdx - qdy) \\ \omega_2^0 &= \alpha_2 dx + \beta_1 dy + \gamma_1(dz - pdx - qdy) \\ \omega_3^0 &= \alpha_3 dx + \gamma_1 dy + \gamma_2(dz - pdx - qdy) \end{aligned}$$

On voit alors que ω_1^0 et ω_2^0 sont indépendantes de dp et dq annulant alors les coefficients de ces différentuelles en ω_1^0 et en ω_2^0 on trouve :

$$\lambda' = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right) \qquad \nu' - \gamma = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)$$

$$\nu = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}\right) \qquad \lambda - \gamma = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}\right)$$

qui, en tenant compte de :

$$\lambda + \nu' + \gamma = 0$$

donnent :

$$\gamma = -\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2 q}{\partial q^2}\right)$$

$$\nu' = \frac{1}{12}\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} - \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{12}\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)$$

On trouve alors pour ω_1^0, ω_2^0, ω_3^3 les formes suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}\omega_1^0 = &\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(3\frac{\gamma\varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right) - \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]dx \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(3\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) - \frac{1}{4}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]dy \\ &+ K_1(dz - pdx - qdy)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\omega_2^0 = &\left[\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(3\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\right. \\ &\left.\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{d\psi}{\partial q}\right)\right]dx + \left[\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial\psi}{\partial p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(3\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\right)\right. \\ &\left. - \frac{1}{4}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\right]dy + P_1(dz - pdx - qdx).\end{aligned}\right.$$

$$\omega_3^0 = K_1 dx + P_1 dy + R(dz - pdx - qdy).$$

(Il est facile de vérifier, en tenant compte des conditions d'intégrabilité que les coefficients de dy et de dx successivement en ω_1^0 et ω_2^0 sont égaux).

La connexion dépend encore de 5 arbitraires ρ, ρ', K_1, P_1, R.

Annulons maintenant la composante $\Omega_3^3 - \Omega_0^0$ de la courbure :

$$\Omega_3^3 - \Omega_0^0 = (\omega_3^3 - \omega_0^0)' - [\omega_3^0\omega^3] - [\omega_3^1\omega_1^3] - [\omega_3^2\omega_2^3] = 0$$
$$(\text{car} \quad [\omega_1^0\omega^1] + [\omega_2^0\omega^2] + [\omega_3^0\omega^3] = 0),$$

on trouve ainsi :

$$\rho = \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^3} + 2\,\frac{\partial^3 f}{\partial p^2\partial q} + \frac{\partial^3\psi}{\partial p\partial q^2}\right) \qquad \rho' = \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^2\partial q} + 2\,\frac{\partial^3 f}{\partial p\partial q^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial q^3}\right)$$

$$\mathrm{K}_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial q\partial z}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{48}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} - \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right) - \frac{1}{12}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)$$

$$\mathrm{P}_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q\partial z}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\right)$$
$$+ \frac{1}{48}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + 2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right) - \frac{1}{12}\,\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)$$

On a alors pour les composantes du déplacement infinitésimal :

$$\omega^1 = dx \qquad \omega^2 = dy \qquad \omega^3 = dz - p dx - q dy$$

$$\omega_1^3 = dp - \varphi dx - f dy - \frac{1}{4}\left(\frac{d\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(dz - p dx - q dy\right)$$

$$\omega_2^3 = dq - f dx - \psi dy - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(dz - p dx - q dy\right)$$

$$\omega_3^3 - \omega_0^0 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)dx - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)dy$$
$$- \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)(dz - p dx - q dy$$

$$\omega_1^2 = \frac{\partial\varphi}{\partial q}\,dx + \frac{1}{4}\left(3\,\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)dy + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right)(dz - p dx - q dy)$$

$$\omega_2^1 = \frac{1}{4}\left(3\,\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)dx + \frac{\partial\psi}{\partial p}\,dy + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}\right)(dz - p dx - q dy)$$

$$\omega_1^1 - \omega_0^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right)dx + \frac{1}{4}\left(3\,\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)dy$$
$$+ \frac{1}{12}\left(2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} - \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)(dz - p dx - q dy)$$

$$\omega_2^2 - \omega_0^0 = \frac{1}{4}\left(3\,\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\right)dy$$
$$+ \frac{1}{12}\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + 2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)(dz - p dx - q dy)$$

$$\omega_3^1 = \frac{1}{12}\left(2\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} - \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)dx + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}\right)dy$$
$$+ \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^3} + 2\,\frac{\partial^3 f}{\partial p^2\partial q} + \frac{\partial^3\psi}{\partial p\partial q^2}\right)(dz - p dx - q dy)$$

$$\omega_3^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right)dx + \frac{1}{12}\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + 2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)dy$$
$$+ \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^2\partial q} + 2\,\frac{\partial^3 f}{\partial p\partial q^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial q^3}\right)(dz - p dx - q dy)$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\omega_1^0 = & \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(3\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right) \right. \\
& \qquad \left. - \frac{1}{4} dx\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right] dx \\
& + \left[\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(3\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) \right. \\
& \qquad \left. - \frac{1}{4}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\right] dy \\
& + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial q\partial z}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right) \right. \\
& \qquad + \frac{1}{48}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} - \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right) \\
& \qquad \left. - \frac{1}{12}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)\right](dz - pdx - qdy)
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\omega_2^0 = & \left[\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(3\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\right) - \frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\right] dx \\
& + \left[\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{4}\frac{\partial\psi}{\partial p}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(3\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p}\right) - \frac{1}{4}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\right] dy \\
& + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q\partial z}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}\right) \right. \\
& \qquad + \frac{1}{48}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right) \\
& \qquad \left. - \frac{1}{12}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)\right](dz - pdx - qdy)
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\omega_3^0 = & \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial q\partial z}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right) \right. \\
& \qquad + \frac{1}{48}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} - \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right) \\
& \left. - \frac{1}{12}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)\right] dx + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q\partial z}\right) \right. \\
& \qquad + \frac{1}{16}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}\right) \\
& + \frac{1}{48}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right) \\
& \qquad \left. - \frac{1}{12}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)\right] dy + \mathrm{R}(dz - pdx - qdy).
\end{aligned}
\right.
$$

La connexion ne dépend plus que d'un seul arbitraire R.

Avant de pousser plus loin le normalisation de la connexion, écrivons les équations de la conservation de la courbure pour les composantes Ω^1, Ω^2, Ω^3, Ω_1^3, Ω_2^3, $\Omega_3^3 - \Omega_0^0$, $\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \Omega_3^3 - 3\Omega_0^0$ qui sont annulées déjà. En posant pour simplifier l'écriture :

$$\Omega_1^1 - \Omega_0^0 = -\left(\Omega_2^2 - \Omega_0^0\right) = \Omega_1^1 - \Omega_2^3 = -\left(\Omega_2^2 - \Omega_3^3\right) = \Omega$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
&[\omega^1\Omega] + [\omega^2\Omega_2^1] + [\omega^3\Omega_3^1] = 0\\
&[\omega^3\Omega_1] + [\omega_1^3\Omega] + [\omega_2^3\Omega_1^2] = 0\\
&[\omega^3\Omega_3^0] + [\omega_1^3\Omega_3^1] + [\omega_2^3\Omega_3^2] = 0\\
&[\omega^1\Omega_1^2] - [\omega^2\Omega] + [\omega^3\Omega_3^2] = 0\\
&[\omega^3\Omega_2^0] + [\omega_1^3\Omega_2^1[- [\omega_2^3\Omega] = 0\\
&[\omega^1\Omega_1^0] + [\omega^2\Omega_2^0] + [\omega^3\Omega_3^0] = 0,
\end{aligned}$$

on voit d'après ces relations que les composantes Ω, Ω_1^2, Ω_2^1 de la courbure sont complètement déterminées et si l'on pose :

$$\begin{aligned}
\Omega_i^j = a_i^j[\omega^1\omega^2] + b_i^j[\omega^1\omega^3] + c_i^j[\omega^1\omega_1^3] + d_i^j[\omega^1\omega_2^3] + f_i^j[\omega^2\omega^3] + g_i^j[\omega^2\omega_1^3]\\
+ h_i^j[\omega^2\omega_2^3] + {}_i^j[\omega^3\omega_1^3] + m_i^j[\omega^3\omega_2^3] + n_i^j[\omega_1^3\omega_2^3],
\end{aligned}$$

on a en particulier :

$$a_i^j = n_i^j = 0 \qquad c_3 = b_3^1 = m_2 \qquad h_3 = f_3^2 = k_1,$$

les six dernières étant les seules composantes du tenseur de courbure qui dépendent de l'indéterminé R.

Annulons maintenant :

$$b_3^1 + f_3^2 = m_2 + k_1 = c_3 + h_3,$$

on trouve ainsi pour R :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = &\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right) + \frac{1}{64}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)^2\\
&+ \frac{1}{192}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q^2}\right)^2 - \frac{1}{48}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^3} + 2\frac{\partial^3 f}{\partial p^2\partial q} + \frac{\partial^3\psi}{\partial p\partial q^2}\right)\\
&- \frac{1}{48}\left(\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^2\partial q} + 2\frac{\partial^3 f}{\partial p\partial q^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial q^3}\right) - \frac{1}{24}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^3} + 2\frac{\partial^3 f}{\partial p^2\partial q} + \frac{\partial^3\psi}{\partial p\partial q^2}\right)\\
&- \frac{1}{24}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^2\partial q} + 2\frac{\partial^3 f}{\partial p\partial q^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial q^3}\right) + \frac{1}{24}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial p^2\partial z} + 2\frac{\partial^3 f}{\partial p\partial q\partial z} + \frac{\partial^3\psi}{\partial q^2\partial z}\right).
\end{aligned}$$

6. — Il est intéressant de remarquer que dans les ω_j^i les dérivées successives de ψ, f, φ interviennent seulement jusqu'à quatrième ordre et que par rapport aux x, y, z ces dérivées ne sont que du premier ordre seulement.

La connexion ne dépend plus d'aucun arbitraire, nous l'appellerons normale suivant M. Cartan.

Il est facile d'examiner que les conditions imposées pour normer la connexion sont invariantes (vis-à-vis de changements de variables indépendantes).

On sait que les premiers membres des relations (7) (les composantes de courbure de l'espace) sont les composantes d'un déplacement infinitésimal rattaché à un cycle élémentaire, de sorte que les variations subies par le points A, A_1, A_2, A_3 dans le développement du cycle sur l'espace projectif ordinaire tangent en A, par rapport au repère initial rattaché au point, A sont données par :

$$(10)\qquad \begin{cases} \Delta A \;= \Omega_0^0 A + \Omega^1 A_1 + \Omega^2 A_2 + \Omega^3 A_3 \\ \Delta A_1 = \Omega_1^0 A + \Omega_1^1 A_1 + \Omega_1^2 A_2 + \Omega_1^3 A_3 \\ \Delta A_2 = \Omega_2^0 A + \Omega_2^1 A_1 + \Omega_2^2 A_2 + \Omega_2^3 A_3 \\ \Delta A_3 = \Omega_3^0 A + \Omega_3^1 A_1 + \Omega_3^2 A_2 + \Omega_3^3 A_3. \end{cases}$$

1° les conditions :

$$\Omega^1 = 0 \qquad \Omega^2 = 0 \qquad \Omega^3 = 0,$$

expriment l'invariance de A (l'absence de torsion ponctuelle) dans ce déplacement.

2° les conditions :

$$\Omega^3 = 0 \qquad \Omega_1^3 = 0 \qquad \Omega_2^3 = 0,$$

expriment l'invariance de l'élément-plan AA_1A_2 rattaché au centre A (l'absence de torsion tangentielle) dans ce déplacement

7. — On peut voir directement ces propriétés sur les équations finies du groupe engendré par la transformation infinitésimale rattachée au repère (10). Exprimons en réalité que le point :

$$M = A + y^1 A_1 + y^2 A_2 + y^3 A_3,$$

est fixe dans l'espace, les variations relatives de ses coordonnées dans le développement du cycle élémentaire sont :

$$(11)\qquad \begin{cases} \Delta y^1 + \Omega^1 + (\Omega_1^1 - \Omega_0^0) y^1 + \Omega_2^1 y^2 + \Omega_3^1 y^3 - (\Omega_1^0 y^1 + \Omega_2^0 y^2 + \Omega_3^0 y^3) y^1 \;= 0 \\ \Delta y^2 + \Omega^2 + \Omega_1^2 y^1 + (\Omega_2^2 - \Omega_0^0) y^2 + \Omega_3^2 y^3 - (\Omega_1^0 y^1 + \Omega_2^0 y^2 + \Omega_3^0 y^3) y^2 = 0 \\ \Delta y^3 + \Omega^3 + \Omega_1^3 y^2 + \Omega_2^3 y^2 + (\Omega_3^3 - \Omega_0^0) y^3 - (\Omega_1^0 y^1 + \Omega_2^0 y^2 + \Omega_3^0 y^3) y^3 = 0 \end{cases}$$

En tenant compte des conditions :

$$\Omega^1 = 0 \quad \Omega^2 = 0 \quad \Omega^3 = 0 \quad \Omega_1^3 = 0 \quad \Omega_2^3 = 0$$
$$\Omega_3^3 - \Omega_0^0 = 0 \quad \Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \Omega_3^3 - 3\Omega_0^0 = 0.$$

la transformation infinitésimale (11) s'écrit :

$$(12) \begin{cases} \Delta y^1 + (\Omega_1^1 - \Omega_0^0)y^1 + \Omega_2^1 y^2 + \Omega_3^1 y^3 - (\Omega_1^0 y^1 + \Omega_2^0 y^2 + \Omega_3^0 y^3)y^1 = 0 \\ \Delta y^2 + \Omega_1^2 y^1 + (\Omega_2^2 - \Omega_0^0)y^2 + \Omega_3^2 y^3 - (\Omega_1^0 y^1 + \Omega_2^0 y^2 + \Omega_3^0 y^3)y^2 = 0 \\ \Delta y^3 - (\Omega_1^0 y^1 + \Omega_2^0 y^2 + \Omega_3^0 y^3)y^3 = 0. \end{cases}$$

avec la condition :

$$\Omega_1^1 + \Omega_2^2 - 2\Omega_0^0 = 0$$

on voit que pour :

$$y^1 = y^2 = y^3 = 0.$$

on a :

$$\Delta y^1 = \Delta y^2 = \Delta y^3 = 0.$$

donc le point origine A reste fixe.

De même pour :

$$y^3 = 0.$$

on a :

$$\Delta y^3 = 0.$$

donc l'élément - plan $AA_1\ A_2$ reste fixe.

8. — Ecrivons les équations finies du groupe correspondant à la transformation infinitésimale (12) on trouve :

$$(19) \begin{cases} (y^1)' = \dfrac{ay^1 + a'y^2 + a''y^3}{1 + cy^1 + c'y^2 + c''y^3} \\ (y^2)' = \dfrac{by^1 + b'y^2 + b''y^3}{1 + cy^1 + c'y^2 + c''y^3} \\ (y^3)' = \dfrac{y^3}{1 + cy^1 + c'y^2 + c''y^3}. \end{cases}$$

On voit alors que $\Omega_3^3 - \Omega_0^0 = 0$ exprime qu'en dehors de l'élément plan $y^3 = 0$ il n'existe aucun autre point isolé invariant. On peut rattacher une propri étégéométrique à la condition $\Omega_3^3 - \Omega_0^0 = 0$, Soit Δ une direction issue du point fixe A le groupe (13) la transforme en une direction Δ' passant par A, soit alors (B, B'), (C, C'), (D, D')... etc... des couples de points homologues. Les droites

BB', CC', DD',... etc... se rencontrent en un même point situé dans l'élément plan $AA_1\ A_2$ ce qui exprime une sorte d'équipollence projective pour les vecteurs $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}\right)\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD'}\right)$,$\cdots$ On peut dire alors que le groupe (13) transforme les directions issues du point fixe A par équipollence.

Enfin en écrivant la transformation dualistique infinitésimale de (12) on a :

$$\begin{aligned}
&\Delta\xi_1 + \Omega_1^0 + (\Omega_1^1 - \Omega_0^0)\,\xi_1 + \Omega_1^2\xi_2 = 0\\
&\Delta\xi_2 + \Omega_2^0 + \Omega_2^1\xi_1 + (\Omega_2^2 - \Omega_0^0)\xi_2 = 0\\
&\Delta\xi_3 + \Omega_3^0 + \Omega_3^1\xi_1 + \Omega_3^2\xi_2 = 0
\end{aligned}$$

C'est une transformation infinitésimale engendrant un groupe affine ; la condition :

$$\Omega_1^1 + \Omega_2^2 - 2\Omega_0^0 = 0$$

exprime que ceci est un groupe de Mobius (l'existence d'une mesure absolue de volumes) ce qui correspond pour le groupe fini (13) à la condition :

$$ab' - ba' = 1,$$

on voit ainsi que les conditions :

$$\begin{gathered}
\Omega^1 = 0 \qquad \Omega^2 = 0 \qquad \Omega^3 = 0 \qquad \Omega_1^3 = 0 \qquad \Omega_2^3 = 0\\
\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \Omega_3^3 - 3\Omega_0^0 = 0 \qquad \Omega_3^3 - \Omega_0^0 = 0,
\end{gathered}$$

correspondant aux propriétés géométriques intrinsèques sont invariantes. Il faut remarquer que ceci tient à ce que les composantes ci-dessus de la courbure se répartissent en des groupes jouant le rôle de tenseurs partiels par rapport aux changements de repères laissant fixe le point A et l'élément plan $AA_1\ A_2$ c'est-à-dire pour un changement de repère :

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= A\\
\overline{A_1} &= A_1 + \alpha A\\
\overline{A_2} &= A_2 + \beta A\\
\overline{A_3} &= A_3 + \lambda A_2 + \mu A_1 + \nu A,
\end{aligned}$$

les composantes :

$$\overline{\Omega}^1 \quad \overline{\Omega}^2 \quad \overline{\Omega}^3 \quad \overline{\Omega}_1^3 \quad \overline{\Omega}_2^3 \quad \overline{\Omega}_3^3 - \overline{\Omega}_0^0 \quad \overline{\Omega}_1^1 + \overline{\Omega}_2^2 + \overline{\Omega}_3^3 - 3\overline{\Omega}_0^0,$$

de nouveau tenseur de courbure s'exprimant linéairement en fonction des mêmes composantes de l'ancien tenseur de courbure de l'espace. D'ailleurs en plus Ω^1, Ω^2, Ω^3 forment à eux seuls un tenseur partiel, ainsi que Ω^3, Ω_1^3, Ω_2^3.

Enfin la dernière condition que l'on a considérée pour la détermination de l'indéterminé R revient à l'annulation du tenseur contracté de courbure :

$$R_{ij} = R_{ijk}^{k}.$$

En réalité :

$$b_3^1 + f_3^2 = 0,$$

est exactement la composante :

$$R_{33} = R_{331}^{1} + R_{332}^{2},$$

du tenseur contracté de courbure et par le théorème de la conservation de la courbure (relative aux sept composantes nulles) on voit facilement que toutes les autres composantes du tenseur contracté de la courbure sont identiquement nulles. Ainsi la condition :

$$R_{33} = 0,$$

est invariante.

9. — Cette connexion projective normale exprime en quelque sorte les invariants différentiels du système (3) vis-à-vis du groupe de transformations ponctuelles les plus générales.

En géométrie projective la notion d'élément est sa propre dualistique et en considérant le repère dualistique formé par les plans :

$$P = [AA_1A_2] \qquad P_1 = [AA_1A_3] \qquad P_2 = [AA_2A_3] \qquad P_3 = [A_1A_2A_3]$$

et en indiquant par ϖ_i^j les composantes du déplacement infinitésimal de ce repère on trouve :

$$\begin{array}{llll}
\varpi^1 = \omega_2^3 & \varpi^2 = -\omega_1^3 & \varpi^3 = \omega^3 & \varpi_1^0 = \omega_3^2 \\
\varpi_1^1 - \varpi_0^0 = \omega_3^3 - \omega_2^2 & \varpi_1^2 = \omega_1^2 & \varpi_1^3 = -\omega^2 & \varpi_2^0 = -\omega_3^1 \\
\varpi_2^1 = \omega_1^1 & \varpi_2^2 - \varpi_0^0 = \omega_3^3 - \omega_1^1 & \varpi_2^3 = \omega^1 & \varpi_3^0 = \omega_3^0 \\
\varpi_3^1 = -\omega_2^0 & \varpi_3^2 = \omega_1^0 & \varpi_3^3 - \varpi_0^0 = \omega_3^3 - \omega_0^0, &
\end{array}$$

on a ainsi :

$$\Pi_2^3 = 0 \quad \Pi_1^3 = \Pi^1 = 0 \quad \Pi^2 = 0 \quad \Pi^3 = 0 \quad \Pi_3^3 - \Pi_0^0 = 0$$
$$\Pi_1^1 + \Pi_2^2 + \Pi_3^3 - 3\Pi_0^0 = 0 \qquad Q_{ij} = 0,$$

$Q_{ij} = Q_{ij}^k k$ étant le tenseur contracté de courbure.

On voit alors que la dualistique d'une variété d'éléments à connexion projective normale est encore une variété d'éléments à connexion projectile normale. La relation qui existe entre les deux variétés dualistiques exprime géométriquement la correspondance qui existe entre les systèmes d'équations aux dérivées partielles déduits du complexe :

$$F(x, y, z, a, b, c,) = 0,$$

l'un des systèmes étant

$$\begin{aligned} r &= \varphi(x, y, z, p, q) \\ s &= f(x, y, z, p, q) \\ t &= \psi(x, y, z, p, q), \end{aligned}$$

Et ses transformées par une transformation ponctuelle quelconque, l'autre système étant déduit de $F = O$ en considérant x, y, z, comme des constantes et a, b, c, comme des variables. Ainsi les plans de la variété dialistique seront fournis par la même équation $F = O$ en considérant x, y, z comme des constantes et a, b, c, comme des variables.

II. — LE REPÈRE NATUREL ET LES FORMES GÉNÉRATRICES

10. — Nous dirons qu'un repère est naturel par rapport aux variables x^1, x^2, x^2 si les ω_i^j étant les composantes du déplacement infinitésimal du repère :

$$\begin{aligned} dA &= \omega_0^0 A + \omega^i A_i \\ dA_i &= \omega_i^0 A + \omega_i^k A_k \qquad (i, k = 1, 2, 3 \cdots n) \end{aligned}$$

on a :

$$\omega^i = dx^i \qquad \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 3\omega_0^0 = C_i^{ik} du_k$$

u_k étant les paramètres homogènes de l'élément plan passant par le centre A de coordonnées x^1, x^2, x^3. Il est évident que u_1, u_2, u_3 n'ont pas d'individualité à eux seuls et c'est leurs rapports mutuels qui interviennent dans la détermination des ω_i^j. Ainsi dans le repère naturel les formes ω_i^j sont données par :

$$\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j dx^k + C_i^{jk} du_k$$

les Γ_{ik}^j étant homogènes et de degré zéro par rapport aux u_k et

C_i^{ij} étant homogènes et de degré moins un par rapport aux u_k. Ces derniers coefficients satisfont en outre aux conditions :

$$u_k C_i^{jk} = 0.$$

11. — Les équations différentielles du complexe $F = O$ s'écrivent alors en remplaçant p et q respectivement par : $-\frac{u_1}{u_3}$ et $-\frac{u_2}{u_3}$:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & u_1 dx^1 + u_2 dx^2 + u_3 dx^3 = 0 \\ & \frac{u_1}{u_3} du_3 - du_1 + L dx^1 + M dx^2 = 0 \\ & \frac{u_2}{u_3} du_3 - du_2 + M dx^1 + N dx^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

les fonctions analytiques L, M, N, étant homogènes et degré un par rapport aux u_k satisfaisant aux conditions d'intégrabilité suivante :

$$u_2 L_{/3} - u_1 M_{/3} = u_3(L_{/2} - M_{/1}) + u_3(ML^1 - LM^2) + u_3(NL^2 - MM^2)$$
$$u_2 M_{/3} - u_1 N_{/3} = u_3(M_{/2} - N_{/1}) + u_3(MM^1 - LN^2) + u_3(NM^2 - MN^2)$$

où l'on s'est servi des notations :

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = F^k \qquad \frac{\partial F}{\partial x^k} = F_{/k}.$$

(Nous avons supprimé la barre pour les indices supérieurs car, comme on verra dans la suite, il n'existe pas des indices supérieurs individuels, excepté zéro, tandis que pour les indices inférieurs, pour éviter l'ambiguité avec les indices essentiels, nous nous sommes servis de la barre pour indiquer l'indice qui s'ajoute par suite d'une dérivation par rapport aux x_k)

12. — soit alors le repère :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} dA &= \omega_0^0 A + \omega^i A_i \\ dA_i &= \omega_i^0 A + \omega_i^k A_k \end{aligned}\right.$$

exprimons que le point :

$$M = A + y^i A_i$$

reste fixe dans l'espace on trouve les conditions :

$$(4)\qquad dy^i + \omega^i + \omega_k^i y^k - \omega_k^0 y^k y^i = 0$$

où $\omega_i^i - \omega_0^0$ est remplacé par ω_i^i ce que nous ferons désormais toutes les fois qu'on aura à s'en servir des $\omega_i^i - \omega_0^0$ dans les formules symboliques.

Supposons maintenant que le point M appartient à l'élément plan u_i on doit avoir :

$$u_i y^i = u_1 y^1 + u_2 y^2 + u_3 y^3 = 0$$

et les conditions (4) s'écrivent alors :

$$u_i dy^i + u_i \omega^i + u_i \omega_k^i y^k = 0 \tag{5}$$

d'où en tenant compte de :

$$u_i y^i = 0$$

on trouve :

$$u_i \omega^i + (u_i \omega_k^i - du_k) y^k = 0.$$

Telles sont les conditions différentielles pour qu'un point appartienne à l'élément plan u_i. Ces conditions s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} & u_i \omega^i = 0 \\ & (u_i \omega_k^i - du_k) y^k = 0 \end{aligned}\right. \tag{6}$$

avec la relation :

$$u_i y^i = 0 \tag{7}$$

En remplaçant y^3 tiré de la relation (7) dans la deuxième des équations du système (6) on a le système différentiel des plans de l'espace qui est :

$$\left\{\begin{aligned} & u_1\omega^1 + u_2\omega^2 + u_3\omega^3 = 0 \\ & u_1(\omega_1^1 - \omega_0^0) + u_2\omega_1^2 + u_3\omega_1^3 - du_1 - \frac{u_1}{u_3}\left[u_1\omega_3^1 + u_2\omega_3^2 + u_3(\omega_3^3 - \omega_0^0) - du_3\right] = 0 \\ & u_1\omega_2^1 + u_2(\omega_2^2 - \omega_0^0) + u_3\omega_2^3 - du_2 - \frac{u_2}{u_3}\left[u_1\omega_3^1 + u_2\omega_3^2 + u_3(\omega_3^3 - \omega_0^0) - du_3\right] = 0 \end{aligned}\right. \tag{8}$$

13. — Supposons maintenant que le repère (3) est un repère naturel et exprimons que le point M appartient à l'élément plan u_i, le système différentiel (8) s'écrit :

$$\left\{\begin{aligned} & u_1 dx^1 + u_2 dx^2 + u_3 dx^3 = 0 \\ & u_1(\omega_1^1 - \omega_0^0) + u_2\omega_1^2 + u_3\omega_1^3 - du_1 - \frac{u_1}{u_3}\left[u_1\omega_3^1 + u_2\omega_3^2 + u_3(\omega_3^3 - \omega_0^0) - du_3\right] = 0 \\ & u_1\omega_2^1 + u_2(\omega_2^2 - \omega_0^0) + u_3\omega_2^3 - du_2 - \frac{u_2}{u_3}\left[u_1\omega_3^1 + u_2\omega_3^2 + u_3(\omega_3^3 - \omega_0^0) - d\dot{u}_3\right] = 0 \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Ce système doit être une combinaison linéaire des équations du système (1) ce qui donne les conditions :

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
& u_1(\omega_1^1-\omega_0^0)+u_2\omega_1^2+u_3\omega_1^3-du_1-\frac{u_1}{u_3}\left[u_1\omega_3^1+u_2\omega_3^2+u_3(u_3^3-\omega_0^0)-du_3\right] \\
& \quad = g(u_1dx^1+u_2dx^2+u_3dx^3)+m\left(\frac{u_1}{u_3}du_3-du_1+\mathrm{L}dx^1+\mathrm{M}dx^2\right) \\
& \quad + n\left(\frac{u_2}{u_3}du_3-du_2+\mathrm{M}dx^1+\mathrm{N}dx^2\right) \\
& u_1\omega_2^1+u_2(\omega_2^2-\omega_0^0)+u_3\omega_2^3-du_2-\frac{u_2}{u_3}\left[u_1\omega_3^1+u_2\omega_3^2+u_3(\omega_3^3-\omega_0^0)-du_3\right] \\
& \quad = h(u_1dx^2+u_2dx^2+u_2dx^3)+m'\left(\frac{u_1}{u_3}du_3-du_1+\mathrm{L}dx^1+\mathrm{M}dx^2\right) \\
& \quad + n'\left(\frac{u_2}{u_3}du_3-du_2+\mathrm{M}dx^1+\mathrm{N}dx^2\right)
\end{aligned}
\right.
$$

g, h, m', m, n', n étant homogènes et de degré zéro par rapport aux u_k.

Donc pour que l'espace admette le complexe intégral général du système (1) comme des plans il faut que les composantes ω_i^j du déplacement infinitésimal du repère naturel satisfont aux équations (10). On voit qu'il existe une infinité de connexions projectives satisfaisant à cette condition.

14. — Nous allons former maintenant des conditions invariantes pour normer la connexion de l'espace.

Soit un cycle élémentaire et soient Ω_i^j les composantes du déplacement infinitésimal rattaché à ce cycle, on a pour la variation du repère rattaché au point A :

$$\Delta \mathrm{A} = \Omega_0^0\mathrm{A} + \Omega^i\mathrm{A}_i$$
$$\Delta \mathrm{A}_i = \Omega_i^0\mathrm{A} + \Omega_i^k\mathrm{A}_k$$

on aura par suite pour les variations des coordonnées y_i du point :

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + y^i\mathrm{A}_i$$

les formules :

$$(11)\qquad \Delta y^i + \Omega^i + \Omega_k^i y^k - \Omega_k^0 y^k y^i = 0.$$

Ce sont les équations d'une transformation infinitésimale. Exprimons en premier lieu que le groupe correspondant laisse invariant le point A origine du repère (l'absence de la torsion ponctuelle) on doit avoir alors :

$$\Delta y^i = 0 \qquad \text{avec} \qquad y^i = 0$$

ce qui donne :

$$\Omega^1 = 0 \qquad \Omega^2 = 0 \qquad \Omega^3 = 0$$

Exprimons maintenant que l'élément plan u_i reste fixe, alors supposons que le point M appartient à cet élément plan on a :

$$u_i y^i = 0$$

et comme on doit avoir aussi :

$$u_i(y^i + \Delta y^i) = 0$$

on trouve

$$u_i \Delta y^i = 0$$

alors les équations (11) donnent :

$$u_i \Omega^i_k y^k = 0$$

et en tenant compte de (7) on trouve :

$$(12) \begin{cases} u_1(\Omega^1_1 - \Omega^0_0) + u_2\Omega^2_1 + u_3\Omega^3_1 - \dfrac{u_1}{u_3}\left[u_1\Omega^1_3 + u_2\Omega^2_3 + u_3(\Omega^3_3 - \Omega^0_0)\right] = 0 \\ u_1\Omega^1_2 + u_2(\Omega^2_2 - \Omega^0_0) + u_3\Omega^3_2 - \dfrac{u_2}{u_3}\left[u_1\Omega^1_3 + u_2\Omega^2_3 + u_3(\Omega^3_3 - \Omega^0_0)\right] = 0 \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_1(\Omega^1_1 - \Omega^0_0) + u_2\Omega^2_1 + u_3\Omega^3_1 &= u_1\Omega \\ u_1\Omega^1_2 + u_2(\Omega^2_2 - \Omega^0_0) + u_3\Omega^3_2 &= u_2\Omega \\ u_1\Omega^1_3 + u_2\Omega^2_3 + u_3(\Omega^3_3 - \Omega^0_0) &= u_3\Omega. \end{aligned}$$

Exprimons maintenant que $u_i\Delta y^i$ est un infiniment petit du second ordre, on a :

$$u_i\Delta y^i + u_h y^h(\Omega - \Omega^0_k y^k) = 0$$

on doit avoir :

$$\Omega = 0$$

ce qui donne :

$$(13) \qquad u_k \Omega^k_i = 0.$$

(La condition $\Omega = 0$ exprime que les directives issues du point fixe A se transforment par équipollence par rapport à l'élément plan u_i (voir chapitre 1.8).

Alors la transformation dualistique de (11) s'écrit :

$$(14) \qquad \Delta\xi_i + \Omega^0_i + \Omega^k_i \xi_k = 0$$

$\big($on a remplacé dans (14) $\Omega^i_i - \Omega^0_0$ par $\Omega^i_i\big)$ c'est une tranformation infinitésimal engendrant un groupe affine. Exprimons que ce groupe affine est un groupe de Mobius, ceci donne la condition :

$$\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \Omega_3^3 - 3\Omega_0^0 = 0.$$

15. — Le groupe fini correspondant à la tranformation (11) est

$$(y^1)' = \frac{ay^2 + by^2 + cy^3}{1 + fy^1 + gy^2 + hy^3}$$
$$(y^2)' = \frac{a'y^1 + b'y^2 + c'y^3}{1 + fy^1 + gy^2 + hy^3}$$
$$(y^3)' = \frac{a''y^1 + b''y^2 + c''y^3}{1 + fy^1 + gy^2 + hy^3}$$

où l'on a

$$(a - 1)u_1 + a'u_2 + a''u_3 = 0$$
$$bu_1 + (b' - 1)u_2 + b''u_3 = 0$$
$$cu_1 + c'u_2 + (c'' - 1)u_3 = 0$$
$$\begin{vmatrix} a\,b\,c \\ a'b'c' \\ a''b''c'' \end{vmatrix} = 1$$

on peut vérifier facilement les propriétés énoncées sur les équations finies de ce groupe.

On voit donc que pour normer la connexion on a sept conditions invariantes suivantes :

$$\Omega^i = 0 \qquad (i = 1,2,3)$$
$$u_k\Omega_i^k = 0 \qquad (i, k = 1,2,3)$$
$$\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \Omega_3^3 - 3\Omega_0^0 = 0.$$

Comme nous verrons plus loin ces conditions, ne déterminent pas complètement la connexion projective et, il reste encore un paramètre arbitraire dans la détermination des formes ω_i^j. La condition supplémentaire pour déterminer cet arbitraire sera formée plus loin.

16. — Annulons maintenant les composantes Ω^i de la courbure on trouve :

$$\Omega_i = (\omega^i)' - \left[\omega^k\omega_k^i\right] = 0$$

ce qui donne :

$$\omega_k^i = \Gamma_{kh}^i dx^h$$

avec :

$$\Gamma_{kh}^i = \Gamma_{hk}^i$$

On voit alors que les C_i^{jk} sont nuls. Donc si le repère est naturel on doit avoir :

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 3\omega_0^0 = 0$$

ce qui donne le système

$$\Gamma_{ik}^{k} = 0.$$

En tenant compte de :

$$\mathcal{C}_i^{jk} = 0 \qquad\qquad (j \neq 0)$$

le système (10) donne alors :

$$m = n' = 1$$
$$m' = n = 0$$

et si l'on pose :

$$(15)\qquad \begin{cases} u_1(\omega_1^1 - \omega_0^0) + u_2\omega_1^2 + u_3\omega_1^3 = u_k\Gamma_{1h}^k dx^h = \Gamma_{1h}dx^h \\ u_1\omega_2^1 + u_2(\omega_2^2 - \omega_0^0) + u_3\omega_2^3 = u_k\Gamma_{2h}^k dx^h = \Gamma_{2h}dx^h \\ u_1\omega_3^1 + u_2\omega_3^2 + u_3(\omega_3^3 - \omega_0^0) = u_k\Gamma_{3h}^k dx^h = \Gamma_{3h}dx^h \end{cases}$$

le même système donne les relations de conditions

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$$

$$(16)\qquad \begin{cases} \Gamma_{11} - \dfrac{u_1}{u_3}\Gamma_{13} = \mathrm{L} + gu_1 \\ \Gamma_{12} - \dfrac{u_1}{3}\Gamma_{23} = \mathrm{M} + gu_2 \\ \Gamma_{13} - \dfrac{u_1}{u_3}\Gamma_{33} = gu_3 \\ \Gamma_{21} - \dfrac{u_2}{u_3}\Gamma_{13} = \mathrm{M} + hu_1 \\ \Gamma_{22} - \dfrac{u_2}{u_3}\Gamma_{23} = \mathrm{M} + hu_2 \\ \Gamma_{23} - \dfrac{u_2}{u_3}\Gamma_{33} = hu_3 \end{cases}$$

Les Γ_{ij} étant homogènes et de degré un par rapport aux u_k.

Annulons maintenant la composante $\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \Omega_3^3 - 3\Omega_0^0$ ceci donne :

$$[\omega_1^0 dx^1] + [\omega_2^0 dx^2] + [\omega_3^0 dx^3] = 0$$

d'où :

$$\omega_i^0 = \Gamma_{ik}^0 dx^k$$

avec :

$$\Gamma_{ik}^0 = \Gamma_{ki}^0$$

Donc toutes les formes ω_i^j sont indépendantes des différentielles du_i et on a :

$$C_i^{jk} = 0 \qquad (j = 0,1,2,3)$$

Formons maintenant les conditions :

$$u_k \Omega_i^k = 0$$

on a :

$$\Omega_i^k = (\omega_i^k)' - [\omega_j^0 \omega^k] - [\omega_i^h \omega_h^k] = 0$$

d'où :

$$u_k(\omega_i^k)' - [\omega_i^0 \cdot u_k \omega^k] - [\omega_i^h \cdot u_k \omega_h^k] = 0$$

Posons :

$$\omega = u_k \omega^k = u_k dx^k$$

et le système (15) s'écrit symboliquement :

$$u_k \omega_i^k = \omega_i = \Gamma_{ih} dx^h$$

donc la condition précédente s'écrit :

$$(17) \qquad (\omega_i)' - [\omega_i^0 \omega] - [\omega_i^k \omega_k] + [\omega_i^k du_k] = 0$$

mais :

$$(\omega_i)' = [d\Gamma_{ih} dx^h] = \frac{\partial \Gamma_{ih}}{\partial u_k}[du_k dx^h] + \frac{\partial \Gamma_{ih}}{\partial x_k}[dx^k dx^h]$$

en tenant compte de ce que les ω_i, ω_i^0, ω sont indépendants des du_k les relations (17) donnent en premier lieu :

$$\omega_i^k = \frac{\partial \Gamma_{ih}}{\partial u_k} dx^k$$

d'où :

$$\Gamma_{ih}^k = \frac{\partial \Gamma_{ih}}{\partial u_k}$$

(ce qui légitime notre convention $\dfrac{\partial F}{\partial u_i} = F^i$).

Et comme on doit avoir :

$$\Gamma_{ik}^k = 0$$

on a :

$$(18) \qquad \sum_k \frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial u_k} = 0$$

alors le système (16) avec le système (18) donnent les valeurs Γ_{ij} en remarquant que l'on doit avoir :

$$u_k\Gamma^k_{ij} = \Gamma_{ij}$$

et on a ainsi :

$$\Gamma_{11} = L - \frac{u_1}{2}(L^1 + M^2) + \frac{(u_1)^2}{12}(L^{11} + 2M^{12} + N^{22})$$

$$\Gamma_{21} = \Gamma_{12} = M - \frac{u_1}{4}(M^1 + N^2) - \frac{u_2}{4}(L^1 + M^2) + \frac{u_1 u_2}{12}(L^{11} + 2M^{12} + N^{22})$$

$$\Gamma_{22} = N - \frac{u^2}{2}(M^1 + N^2) + \frac{(u_2)^2}{12}(L^{11} + 2M^{12} + N^{22})$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = -\frac{u_3}{4}(L^1 + M^2) + \frac{u_1 u_3}{12}(L^{11} + 2M^{12} + N^{22})$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = -\frac{u_3}{4}(M^1 + N^2) + \frac{u_2 u_3}{12}(L^{11} + 2M^{12} + N^{22})$$

$$\Gamma_{33} = \frac{(u_3)^2}{12}(L^{11} + 2M^{12} + N^{22}).$$

On voit ainsi que les composantes affines ω^j_i $(j \pm o)$ du déplacement infinitésimal du repère naturel sont complètement déterminées, et en posant :

$$u_i dx^i = \omega$$
$$\Gamma_{ik} dx^k = \omega_i$$

on a :

$$\omega^k = \frac{\partial \omega}{\partial u_k} = dx^k \qquad \omega^j_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial u_j} = \Gamma^j_{ik} dx^k.$$

Nous appellerons les formes ω, ω_i ; les formes génératrices des composantes affines du déplacement infinitésimal.

17. — Avant d'aller plus loin cherchons les composantes tangentielles de la courbure de l'espace. Les composantes ω^j_i $(j = 0, 1, 2, 3)$ du déplacement infinitésimal du repère naturel étant de la forme :

$$\omega^j_i = \Gamma^j_{ik} dx^k$$

il est évident qu'on aura :

$$\Omega^j_i = R^j_{ikh}[dx^k dx^h] + R^{jh}_{ik}[du_h dx^k]$$

nous appellerons les R^{jh}_{jk} les composantes tangentielles de la courbure de l'espace et on a :

$$R^{jh}_{ik} = R^{hj}_{ik} = R^{jh}_{ki} = R^{hj}_{ki} \; (h, j \neq 0)$$

et ainsi on a :

$$R_{ik}^{jh} = \Gamma_{ik}^{jh} = \frac{\partial^2 \Gamma_{ik}}{\partial u_j \partial u_h}$$

de même :

$$u_h R_{ij}^{hk} = u_k R_{ij}^{hk} = 0$$

on a aussi un tenseur contracté :

$$R_i^j = R_{ik}^{jk} = R_{ik}^{kj} = R_{ki}^{jk} = R_{ki}^{kj} = \Gamma_{ki}^{kj} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{k}}{\partial u_j}$$

et comme :

$$\Gamma_{ik}^{k} = 0$$

donc :

$$R_i^j = 0 \qquad (j \neq 0)$$

18. — Posons maintenant :

$$\omega_i^0 = \Gamma_{ik}^0 dx^k$$

et formons les conditions (17) on trouve :

$$\frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial x^h}\left[dx^h dx^k\right] = u_k \Gamma_{ih}^0 \left[dx^h dx^k\right] + \Gamma_{ih}^j \Gamma_{jk}\left[dx^h dx^k\right]$$

de là on trouve :

$$u_k \Gamma_{ih}^0 - u_h \Gamma_{ik}^0 = \Gamma_{ik/h} - \Gamma_{ih/k} + \Gamma_{ik}^j \Gamma_{jh} - \Gamma_{ih}^j \Gamma_{jk}$$

Ce système au nombre de neuf équations est surabondant et il n'y a que cinq équations indépendantes parmi les équations de ce système. En réalité écrivons le système développé, on trouve :

$$(19)\quad \begin{cases} u_1 \Gamma_{i2}^0 - u_2 \Gamma_{i1}^0 = \Gamma_{i1/2} - \Gamma_{i2/1} + \Gamma_{i1}^k \Gamma_{k2} - \Gamma_{i2}^k \Gamma_{k1} \\ u_2 \Gamma_{i3}^0 - u_3 \Gamma_{i2}^0 = \Gamma_{i2/3} - \Gamma_{i3/2} + \Gamma_{i2}^k \Gamma_{k3} - \Gamma_{i3}^k \Gamma_{k2} \\ u_3 \Gamma_{i1}^0 - u_1 \Gamma_{i3}^0 = \Gamma_{i3/1} - \Gamma_{i1/3} + \Gamma_{i}^k \Gamma_{k} - \Gamma_{i1}^k \Gamma_{k3} \end{cases}$$

En premier lieu on voit que si on fait $i = 3$ dans la première équation et $i = 1$ dans la seconde en les ajoutant on trouve la troisième équation pour $i = 2$ ce qui diminue le nombre des équations indépendantes d'une unité. En second lieu (pour i quelconque) si on multiplie la première équation par u_3 la seconde par u_1 et la troisième par u_2 en les ajoutant on trouve une condition de comptabilité :

$$(20)\quad \begin{cases} u_1(\Gamma_{i2/3} - \Gamma_{i3/2}) + u_2(\Gamma_{i3/1} - \Gamma_{i1/3}) + u_3(\Gamma_{i1/2} - \Gamma_{i2/1}) + (u_2 \Gamma_{i3}^k - u_3 \Gamma_{i2}^k)\Gamma_{k1} \\ \qquad + (u_3 \Gamma_{i1}^k - u_1 \Gamma_{i3}^k)\Gamma_{k2} + (u_1 \Gamma_{i2}^k - u_2 \Gamma_{i1}^k)\Gamma_{k3} = 0 \end{cases}$$

on peut voir facilement que ces trois conditions sont satisfaites identiquement en tenant compte des conditions d'intégrabilité et de leurs premières dérivées par rapport aux u_k. Ces trois conditions diminuent le nombre d'équations indépendantes du système (19) de trois unités et on voit qu'il n'y a que cinq équations indépendantes parmi les neuf équations du système et la connexion dépend encore d'un seul arbitraire.

19. — Posons :

$$\Omega_i^0 = R_{ikh}^0[dx^k dx^h] + R_{ik}^{0h}[du_h dx^k]$$

on a ainsi :

$$R_{ih}^{0h} = R_{ki}^{0h} = \Gamma_{ik}^{0h}$$

d'où :

$$u_h \Gamma_{ik}^{0h} = u_h \Gamma_{ki}^{0h} = 0. \tag{21}$$

Posons aussi :

(22) $R_i^0 = R_{ik}^{0k} = \Gamma_{ik}^{0k}$ (tenseur contracté projectif de la courbure)

Dérivons maintenant la première équation du système (19) par rapport à u_1 et la seconde par rapport à u_3 et diminuons les résultats, en tenant compte de (21) et (22) on trouve :

$$\begin{aligned}2\Gamma_{i2}^0 - u_2 R_i^0 = &- \left(\Gamma_{i2/1}^1 + \Gamma_{i2/2}^2 + \Gamma_{i2/3}^3\right) - \left(\Gamma_{i2}^{k1}\Gamma_{k1} + \Gamma_{i2}^{k2}\Gamma_{k2} + \Gamma_{i2}^{k3}\Gamma_{h3}\right)\\ &+ \Gamma_{i1}^k\Gamma_{k2}^1 + \Gamma_{i2}^k\Gamma_{k2}^2 + \Gamma_{i3}^k\Gamma_{k2}^3\end{aligned}$$

et d'une manière générale on a :

$$2\Gamma_{ij}^0 - u_j R_i^0 = - \Gamma_{ij/k}^k - \Gamma_{ij}^{kh}\Gamma_{kh} + \Gamma_{ih}^k\Gamma_{kj}^h. \tag{23}$$

L'hypothèse supplémentaire que nous admettrons pour normer la connexion de l'espace est l'annulation du tenseur contracté projectif R_i^0 de la courbure. Nous allons voir que cette condition est une condition unique,en réalité faisons la permutation $i \leftrightarrows j$ dans la formule (23) on trouve :

$$u_j R_i^0 = u_i R_j^0$$

d'où :

$$\frac{R_1^0}{u_1} = \frac{R_2^0}{u_2} = \frac{R_3^0}{u_3} \tag{24}$$

donc la condition supplémentaire $R_i^0 = 0$ est une condition unique, on trouve alors :

$$2\Gamma_{ij}^0 = - \Gamma_{ij/k}^k - \Gamma_{ij}^{kh}\,\Gamma_{kh} + \Gamma_{ih}^k\Gamma_{kj}^h. \tag{25}$$

(On peut voir facilement que :

$$\Gamma_{ij}^{0j} = \Gamma_i^0 = R_i^0$$

est nul. En réalité on a :

$$2\Gamma_{ij}^{0j} = -\Gamma_{ij/k}^{kj} - \Gamma_{ij}^{khj}\Gamma_{kh} - \Gamma_{ij}^{kh}\Gamma_{kh}^{\ j} + \Gamma_{ih}^{kj}\Gamma_{kj} + \Gamma_{ih}^{\ k}\Gamma_{kj}^{\ j}$$

mais en tenant compte de :

$$\Gamma_{ik}^{\ k} = 0$$

on a :

$$\Gamma_{ij}^{khj} = \Gamma_{ij/k}^{kj} = \Gamma_{kj}^{hj} = 0$$

d'où :

$$R_i^0 = -\Gamma_{ij}^{kh}\Gamma_{kh}^{\ j} + \Gamma_{ih}^{kj}\Gamma_{kj}^{\ h} = 0$$

car le second membre est identiquement nul.)

Ainsi la connexion ne dépend plus d'aucun arbitraire et si on désigne par R_i^j ($j = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$) le tenseur contracté de la courbure on voit que la connexion normale est déterminée par les conditions invariantes :

$$\Omega^i = 0 \qquad u_k\Omega_i^k = 0 \qquad \sum_i\left(\Omega_i^i - \Omega_0^0\right) = 0 \qquad R_i^j = 0$$

20. — On peut facilement prouver l'équivalence des deux repères fondamental et naturel par rapport aux variables :

$$x^1 = x \qquad x^2 = y \qquad x^3 = z.$$

En réalité si dans un repère fondamental de la première partie de ce chapitre on fait le changement de repère :

$$\left\{\begin{aligned} B &= A \\ B_1 &= A_1 - pA_3 \\ B_2 &= A_2 - qA_3 \\ B_3 &= A_3 \end{aligned}\right. \tag{26}$$

on voit que les nouvelles composantes ω_i^i du déplacement infinitésimal sont indépendantes des différentielles dp et dq. Il suffit alors de poser :

$$p = -\frac{u_1}{u_3} \qquad q = -\frac{u_2}{u_3} \qquad L = -u_3\varphi \qquad M = -u_3 f \qquad F = -u_3\psi$$

pour trouver le repère naturel par rapport aux variables :

$$x^1 = x \qquad x^2 = y \qquad x^3 = z$$

De même on peut voir que les conditions :

$$\Omega^1 = 0 \quad \Omega^2 = 0 \quad \Omega^3 = 0 \quad \Omega_1^3 = 0 \quad \Omega_2^3 = 0 \quad \Omega_3^3 - \Omega_0^0 = 0$$
$$\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \Omega_3^3 - 3\Omega_0^0 = 0 \qquad R_{ij} = 0$$

se transforment en :

$$\underset{(n)}{\Omega^i} = 0 \qquad \underset{(n)}{u_k\Omega^k_{\;i}} = 0 \qquad \sum_i \underset{(n)}{(\Omega_i^i - \Omega_0^0)} = 0 \qquad \underset{(n)}{R_i^j} = 0$$

l'indice (n) indiquant l'opération relative au repère naturel.

On voit alors que la connexion normale rattachée à l'espace montre l'existence d'un repère naturel tel que les composantes du déplacement infinitésimal du repère rattaché à un point de l'espace ne dépendent pas des différentielles des paramètres de l'élément plan rattaché à ce point. On peut prendre cette propriété comme la définition de la connexion normale.

21. — En résumé on voit que cette connexion normale est déterminée par la connaissance des quatre formes de Pfaff :

$$\begin{aligned} \omega &= u_i dx^i \\ \omega_i &= \Gamma_{ik} dx^k \qquad\qquad (i, k = 1,2,3) \\ \Gamma_{ik} &= \Gamma_{ki} \end{aligned}$$

les Γ_{ij} étant homogènes et de degré un par rapport aux u_k et on a les formules symboliques :

$$\omega^i = \frac{\partial \omega}{\partial u_i} \qquad \omega_i^j = \frac{\partial \omega_i}{\partial u_j} \tag{27}$$

pour la détermination des composantes affines du déplacement infinitésimal du repère naturel. Les trois composantes :

$$\omega_i^0 = \Gamma_{ik}^0 dx^k$$

d'origine purement projectif étant données par

$$2\Gamma_{ik}^0 = -\Gamma_{ik/h}^{\;h} - \Gamma_{ik}^{hl}\Gamma_{hl} + \Gamma_{il}^h\,\Gamma_{hk}^l \tag{28}$$

on voit alors que l'on a aussi :

$$\Gamma_{ik}^0 = \Gamma_{ki}^0.$$

CHAPITRE II

LE CAS DE L'ESPACE PONCTUEL

22. — Un cas particulièrement remarquable est le cas où les composantes R_{ik}^{jh} de la courbure tangentielle sont identiquement nulles. Dans ce cas en remarquant que :

$$R_{ik}^{jh} = \Gamma_{ik}^{jh}$$

on voit que les L_{ij} sont homogènes et linéaires en u_k de là les formules symboliques (27) et (28) du chapitre premier montrent que les ω^i, ω_i^j, ω_i^0 du repère naturel sont indépendantes des variables u_k, donc l'espace est ponctuel.

Il est intéressant de trouver la forme générale du système différentiel des complexes qui donnent naissance à des espaces ponctuels. Posons :

$$\Gamma_{ij} = \gamma_{ij}^k u_k$$

les γ_{ij}^k étant fonctions seulement des arguments x^1, x^2, x^2. En se servant des valeurs trouvées pour Γ_{ij}^k on voit que les γ_{ij}^k satisfont aux conditions :

$$(1) \qquad \begin{cases} \gamma_{ik}^k = 0 \\ \gamma_{ij}^k = \gamma_{ji}^k \end{cases}$$

alors en posant :

$$(2) \qquad \begin{cases} \Gamma_{11} = \dfrac{E - H'}{2} u_1 + F u_2 - G u_3 \\ \Gamma_{12} = \dfrac{3H - E'}{4} u_1 + \dfrac{3H' - E}{4} u_2 - K u_3 \\ \Gamma_{22} = F' u_1 + \dfrac{E' - H}{2} u_2 - G' u^3 \\ \Gamma_{13} = \dfrac{3D - D'}{4} u_1 + C u_2 - \dfrac{E + H'}{4} u_3 \\ \Gamma_{23} = C' u_1 + \dfrac{3D' - D}{4} u_2 - \dfrac{H + E'}{4} u_3 \\ \Gamma_{33} = A u_1 + B u_2 - \dfrac{D + D'}{2} u_3 \end{cases}$$

on trouve pour les fonctions, L, M, N les valeurs suivantes :

$$
(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{L} &= \mathrm{A}\frac{(u_1)^3}{(u_3)^2}+\mathrm{B}\frac{(u_1)^2u_2}{(u_3)^2}-2\mathrm{C}\frac{u_1u_2}{u_3}-2\mathrm{D}\frac{(u_1)^2}{u_3}+\mathrm{E}u_1+\mathrm{F}u_2-\mathrm{G}u_3\\
\mathrm{M} &= \mathrm{A}\frac{(u_1)^2u_2}{(u_3)^2}+\mathrm{B}\frac{u_1(u_2)^2}{(u_3)^2}-\mathrm{C}\frac{(u_2)^2}{u_3}-\mathrm{C}'\frac{(u_1)^2}{u_3}-(\mathrm{D}+\mathrm{D}'\frac{u_1u_2}{u_3}\\
&\qquad +\mathrm{H}u_1+\mathrm{H}'u_2-\mathrm{K}u_3\\
\mathrm{N} &= \mathrm{A}\frac{u_1(u_2)^2}{(u_3)^2}+\mathrm{B}\frac{(u_2)^3}{(n_3)^2}-2\mathrm{C}'\frac{u_1u_2}{u_3}-2\mathrm{D}'\frac{(u_2)^3}{u_3}+\mathrm{E}'u_1+\mathrm{F}'u_2-\mathrm{G}'u_3
\end{aligned}\right.
$$

En posant :

$$u_1 = p \qquad u_2 = q \qquad u_3 = -1$$

on a :

$$\mathrm{L} = \varphi \qquad \mathrm{M} = f \qquad \mathrm{N} = \psi$$

d'où on trouve :

$$
(4)\quad \left\{\begin{aligned}
r &= \mathrm{A}p^3+\mathrm{B}p^2q+2\mathrm{C}pq+2\mathrm{D}p^2+\mathrm{E}p+\mathrm{F}q+\mathrm{G}\\
s &= \mathrm{A}p^2q+\mathrm{B}pq^2+\mathrm{C}q^2+\mathrm{C}'p^2+(\mathrm{D}+\mathrm{D}')pq+\mathrm{H}p+\mathrm{H}'q+\mathrm{K}\\
t &= \mathrm{A}pq^2+\mathrm{B}q^3+2\mathrm{C}'pq+2\mathrm{D}'q^2+\mathrm{E}'q+\mathrm{F}'p+\mathrm{G}'
\end{aligned}\right.
$$

Telles sont les équations aux équations aux dérivées partielles ~~qui constituent le~~ système différentiel des complexes :

$$\mathrm{F}(x,y,z,a,b,c) = 0$$

tels que l'espace à connexion projective normale rattaché à ces complexes considérés comme des plans soit un espace ponctuel.

23. — On peut former ces conditions en partant d'un repère fondamental dans ce cas elles s'écrivent :

$$
(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varphi}{\partial q2}=0 \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial p2}=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial p2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial q2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}\\
&\qquad 4\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial q2} \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial p^2\partial q^2}=0
\end{aligned}\right.
$$

et un simple calcul montre que l'intégrale générale de ce système différentiel est précisément le système (4) où A, B, C,C',D,D',É,E', F, F', G, G', H, H', K sont 15 fonctions des variables x,y, z satisfaisant à certaines conditions dites celles de l'intégralilité du système (4). Ces conditions au nombre de 15 sont :

$$
(6)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial C'}{\partial z}+AH-BF'-C'(D+D')=0\\
&\frac{\partial B}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial(D-D')}{\partial z}+D^2-D'^2+AH'-BH+BE'-AE=0\\
&\frac{\partial C}{\partial z}-\frac{\partial B}{\partial x}-AF-BH'-C(D+D')=0\\
&2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial E}{\partial z}-\frac{\partial(D+D')}{\partial x}-\frac{\partial H'}{\partial z}+2H'(D-D')+2CE'-2CH-2AG=0\\
&2\frac{\partial C'}{\partial x}+\frac{\partial E'}{\partial z}-\frac{\partial(D+D')}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial z}+2H(D'-D)+2C'E-2C'H'-2BG'=0\\
&2\frac{\partial D}{\partial y}-\frac{\partial C'}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial z}+2AK+H(D-D')+2CF'-EC'+BC'-C'H'=0\\
&2\frac{\partial D'}{\partial x}-\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial H'}{\partial z}+2BK+H'(D'-D)+2FC'-CE'+AC-CH=0\\
&\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}+C(E-H')-F(D-D')-BG=0\\
&\frac{\partial F'}{\partial z}-\frac{\partial C'}{\partial y}+C'(E'-H)-F'(D'-D)-AG'=0\\
&\frac{\partial E}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial K}{\partial z}+2CG'-2C'G+FF'-HH'+K(3D-D')=0\\
&\frac{\partial E'}{\partial x}-\frac{\partial H'}{\partial y}-\frac{\partial K}{\partial z}-2CG'+2C'G+FF'-HH'+K(3D'-D)=0\\
&\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial H'}{\partial x}+EH'-H'^2+F(E'-H)-G(D+D')=0\\
&\frac{\partial F'}{\partial x}+\frac{\partial G'}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial y}+HE'-H^2+F'(E-H')-G(D+D')=0\\
&\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial K}{\partial x}+FG'-HG+K(E-H')=0\\
&\frac{\partial G'}{\partial x}-\frac{\partial K}{\partial y}+F'G-H'G'+K(E'-H)=0.
\end{aligned}
\right.
$$

24. — Les composantes du déplacement infinitésimal dans le cas d'un espace ponctuel sont :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\omega_1^1 - \omega_0^0 &= \gamma_{1k}^1 dx^k = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{H}'}{2} dx + \frac{3\mathrm{H} - \mathrm{E}'}{4} dy + \frac{3\mathrm{D} - \mathrm{D}'}{4} dz \\
\omega_1^2 &= \gamma_{1k}^2 dx^k = \mathrm{F} dx + \frac{3\mathrm{H}' - \mathrm{E}}{4} dy + \mathrm{C} dz \\
\omega_1^3 &= \gamma_{1k}^3 dx^k = -\mathrm{G} dx - \mathrm{K} dy - \frac{\mathrm{E} + \mathrm{H}'}{4} dz \\
\omega_2^1 &= \gamma_{2k}^1 dx^k = \frac{3\mathrm{H} - \mathrm{E}'}{4} dx + \mathrm{F}' dy + \mathrm{C}' dz \\
\omega_2^2 - \omega_0^0 &= \gamma_{2k}^2 dx^k = \frac{3\mathrm{H}' - \mathrm{E}}{4} dx + \frac{\mathrm{E}' - \mathrm{H}}{2} dy + \frac{3\mathrm{D}' - \mathrm{D}}{4} dz \\
\omega_2^3 &= \gamma_{2k}^3 dx^k = -\mathrm{K} dx - \mathrm{G}' dy - \frac{\mathrm{H} + \mathrm{E}'}{4} dz \\
\omega_2^1 &= \gamma_{3k}^1 dx^k = \frac{3\mathrm{D} - \mathrm{D}'}{4} dx + \mathrm{C}' dy + \mathrm{A} dz \\
\omega_3^2 &= \gamma_{3k}^2 dx^k = \mathrm{C} dx + \frac{3\mathrm{D}' - \mathrm{D}}{4} dy + \mathrm{B} dz \\
\omega_3^3 - \omega_0^0 &= \gamma_{3k}^3 dx^k = -\frac{\mathrm{E} + \mathrm{H}'}{4} dx - \frac{\mathrm{H} + \mathrm{E}'}{4} dy - \frac{\mathrm{D} + \mathrm{D}'}{2} dz.
\end{aligned}
\right.
$$

En posant :

$$
(8) \qquad \omega_i^0 = \gamma_{ik}^0 dx^k
$$

où γ_{ik}^0 sont donnés par :

$$
(9) \qquad 2\gamma_{ik}^0 = -\frac{\partial \gamma_{ik}^h}{\partial x^h} + \gamma_{il}^h \gamma_{hk}^l
$$

on aura toutes les composantes du déplacement infinitésimal du repère naturel. Dans les formules précédentes on a supposé :

$$
x = x^1 \qquad y = x^2 \qquad z = x^3
$$

avec :

$$
\omega^1 = dx^1 = dx \qquad \omega^2 = dx^2 = dy \qquad \omega^3 = dx^3 = dz.
$$

25. — L'espace étant ponctuel, il est aussi géodésique, c'est-à-dire qu'il existe des droites (géodésiques) dans l'espace. Les droites étant les lignes telles que A, dA, d^2A (d, d^2 représentent des différentielles covariantes) soient alignés. Il est évident que ces lignes et leurs propriétés générales sont indépendantes du choix du repère dans l'espace.

Nous allons montrer que les plans de l'espace sont aussi les surfaces totalement géodésiques, c'est-à-dire que les géodésiques de l'espace passant par un point A et tangentes à un même élément-plan constituent une surface totalement géodésique qui est le plan passant par le point A et tangent à l'élément donné.

Prenons un repère fondamental :

$$\omega^1 = dx \qquad \omega^2 = dy \qquad \omega^3 = dz - p dx - q dy$$

on sait que dans le cas d'un espace ponctuel le repère fondamental dépend de p et q mais les propriétés locales de l'espace sont indépendantes de ces paramètres et cette dépendance du repère n'est qu'apparente) les équations des géodésiques de l'espace sont :

$$(10)\left\{\begin{aligned} \frac{d\omega^1 + \omega_0^0\omega^1 + \omega^1\omega_1^1 + \omega^2\omega_2^1 + \omega^3\omega_3^1}{\omega^1} &= \frac{d\omega^2 + \omega_0^0\omega^2 + \omega^1\omega_1^2 + \omega^2\omega_2^2 + \omega^3\omega_3^2}{\omega^2} \\ &= \frac{d\omega^3 + \omega_0^0\omega^3 + \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 + \omega^3\omega_3^3}{\omega^3} \end{aligned}\right.$$

Prenons le plan :

$$\omega^3 = 0 \qquad \omega_1^3 = 0 \qquad \omega_2^3 = 0$$

les géodésiques tangentes à l'élément plan :

$$\omega^3 = 0$$

seront données par les équations :

$$(11)\left\{\begin{aligned} &\frac{d\omega^1 + \omega_0^0\omega^1 + \omega^1\omega_1^1 + \omega^2\omega_2^1}{\omega^1} = \frac{d\omega^2 + \omega_0^0\omega^2 + \omega^1\omega_1^2 + \omega^2\omega_2^2}{\omega^2} \\ &\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = 0 \end{aligned}\right.$$

et sont donc contenues dans le plan :

$$\omega^3 = 0 \qquad \omega_1^3 = 0 \qquad \omega_2^3 = 0.$$

26. — Prenons un repère naturel dans l'espace ponctuel, les équations (10) des géodésiques s'écrivent, en prenant z comme la variable indépendante :

$$(12)\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dz^2} + G\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + 2K\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\frac{dy}{dz} + G'\left(\frac{dx}{dz}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + E\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \\ &\qquad + 2H\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz} + F'\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 2D\left(\frac{dx}{dz}\right) + 2C'\frac{dy}{dz} + A = 0 \\ &\frac{d^2y}{dz^2} + G\left(\frac{dx}{dz}\right)^3 + 2K\left(\frac{dx}{dz}\right)^2\frac{dy}{dz} + G'\frac{dx}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + E'\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 \\ &\qquad + 2H'\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz} + F\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 2D'\frac{dy}{dz} + 2C\frac{dx}{dz} + B = 0 \end{aligned}\right.$$

on peut montrer alors que la connexion normale projective rattachée au système (12) pour que l'intégrale générale de ce système soit considérée comme géodésique pour l'espace se confond avec la connexion normale projective rattachée au système (4) considéré comme le système différentiel des plans de l'espace.

En réalité la connexion normale rattachée au système (12) considéré comme les équations différentielles des géodésiques de l'espace est définie par :

$$\Omega^1 = 0 \qquad \Omega^2 = 0 \qquad \Omega^3 = 0 \qquad \sum_i (\Omega_i^i - \Omega_0^0) = 0 \qquad R_{ij} = 0$$

R_{ij} étant le tenseur contracté de la courbure (voir E. Cartan, sur les variétés à connexion projective).

En annulant la torsion de l'espace dans un repère naturel par rapport aux variables x, y, z, on trouve :

$$\omega_i^j = \gamma_{ik}^j dx^k$$

avec :

$$\gamma_{ik}^j = \gamma_{ki}^i$$

alors en identifiant le système (12) avec les équations (10) des géodésiques on trouve précisément le système (7) pour les composantes $\omega_i^j (j \neq 0)$ du déplacement infinitésimal du repère.

Annulons maintenant la composante $\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \Omega_3^3 - 3\Omega_0^0$ en tenant compte de :

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - 3\omega_3^0 = 0$$

on trouve :

$$\omega_i^0 = \gamma_{ik}^0 dx^k$$

avec :

$$\gamma_{jk}^0 = \gamma_{ki}^0$$

En annulant alors le tenseur contracté de la courbure on trouve :

$$\gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial \gamma_{ij}^k}{\partial x^k} + \gamma_{ih}^k \gamma_{ki}^h\right)$$

qui est précisément le système (9) on voit alors que le repère naturel rattaché aux géodésiques se confond avec le repère naturel rattaché aux plans ; donc la connexion normale projective est la même pour les deux systèmes.

27. — Il résulte de là que la recherche des invariants différentiels du système (4) et du système (12) sont deux problèmes équivalents. Analytiquement ceci exprime que les complexes $F = 0$ intégrales générale du système (4) passant par deux points fixes A et B ont en commun une même courbe qui est l'intégrale générale passant par A et B du système (12).

28. — Supposons la connexion normale comme étant rattachée au plan de l'espace, alors en remarquant que les composantes Ω_i^j de la courbure sont indépendantes des u_k (dans le cas de l'espace ponctuel) pour un repère naturel ; on déduit des relations :

$$u_k \Omega_i^k = 0$$

que toutes les composantes Ω_i^k ($k \pm 0$) de la courbure sont nulles (on peut facilement vérifier cette propriété en tenant compte des conditions d'intégrabilité (6)) de sorte que, si on tient compte des relations de Bianchi on voit que les Ω_i^0 aussi sont identiquement nulles et l'espace est applicable sur l'espace projectif ordinaire (l'espace localement ordinaire) et cette application se fait par une correspondance ponctuelle qui se traduit analytiquement par la transformation ponctuelle qui ramène le système (4) à la forme :

$$r = 0 \qquad s = 0 \qquad t = 0,$$

on sait alors que la même transformation amène le système (12) aussi à la forme :

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = 0,$$

on voit donc, que contrairement à ce qui se passe pour le cas de l'espace à deux dimensions, les conditions différentielles pour que le système (12) soit réductible à la forme :

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = 0,$$

sont de premier ordre. Ce système des conditions est précisément le système (6) qui exprime l'intégrabilité du système (4).

29. — Le complexe intégral général du système

$$\begin{aligned} r &= Ap^3 + Bp^2q + 2Cpq + 2Dp^2 + Ep + F'q + G \\ s &= Ap^2q + Bpq^2 + Cq^2 + C'p^2 + (D + D')pq + Hp + H'q + K \\ t &= Apq^2 + Bq^3 + 2C'pq + 2D'q^2 + E'q + F'p + G' \end{aligned}$$

est la transformée du plan :

$$ax + by + cz + 1 = 0$$

par une transformation ponctuelle convenable, et alors le système conjugué joue le même rôle par rapport à l'équation tangentielle du plan (a, b, c, variables ; x, y, z constantes).

30. — En résumé on voit que si les composantes tangentielles R_{ih}^{jk} de la courbure de l'espace sont identiquement nulles les autres composantes du tenseur de la courbure sont aussi nulles et l'espace est localement ordinaire. De là on déduit que la condition nécessaire et suffisante pour que le système d'équations différentielles (12) soit réductible à la forme :

$$\frac{d^2x}{dz^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = 0,$$

est que le système associé (4) soit complètement intégrable.

31. — On sait que si un espace de Rieman est à courbure constante il jouit de la propriété de libre mobilité et est soumis à l'axiome du plan (voir E. Cartan. Leçons sur la géométrie des espaces de Rieman) alors comme on sait l'espace admet une représentation géodésique sur l'espace projectif ordinaire. Ce résultat exprime en quelque sorte la relation qui existe entre les systèmes (4) et (12). En réalité si le système (12) est considéré comme la géodésique d'un espace de Riemann cet espace est soumis à l'axiome du plan et est donc à courbure riemannienne constante. Dès lors on sait que l'espace à connexion projective normale rattaché aux géodésiques de l'espace de Rieman sera à courbure projective nulle. (Voir E. Cartan sur les variétés à connexion projective).

CHAPITRE III

I. — LES ESPACES D'ÉLÉMENTS-PLANS A n DIMENSIONS LES ESPACES NON-HOLONOMES

32. — Soit un système de n équations de Pfaff à $2n - 1$ variables que nous supposerons être mis sous la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} u_h dx^h = 0 \\ du_i - \dfrac{u_i}{u_n} du_n - \mathrm{L}_{ik} dx^k = 0 \end{cases} \left(\begin{array}{l} h = 1,2,3 \cdots n \\ i,k = 1,2,3, \cdots n - 1 \end{array} \right)$$

les L_{ij} étant des fonctions homogènes et de premier degré par rapport aux u_k et que nous supposerons analytiques par rapport à tous les arguments qui y figurent.

Si le système (1) est complètement intégrable, l'intégrale générale sera une hypersurface dépendant de n constantes arbitraires et s'il n'est pas complètement intégrale on peut dire qu'il représente une variété non-holonome à $n - 1$ dimensions. Dans ce qui suit nous supposerons que le système (1) n'est pas complètement intégrable.

33. — Nous allons montrer d'abord que l'on peut mettre le système (1) sous la forme canonique surbondante suivante :

$$(2) \qquad \begin{cases} u_i dx^i = 0 \\ du_i - \Gamma_{ik} dx^k = 0 \qquad (i,k = 1,2,3 \cdots n) \end{cases}$$

les Γ_{ij} étant homogènes et du premier degré par rapport aux u_k satisfaisant aux conditions :

$$(3) \qquad \begin{cases} \Gamma_{ik}^{k} = 0 \\ \Gamma_{ki}^{k} = 0 \end{cases}$$

à l'indice supérieur définit l'opération :

$$\mathrm{F}^k = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_k}.$$

En réalité on peut mettre le système (1) sous la forme :

$$(4)\quad \begin{cases} u_h dx^h = 0 \\ du_i - \dfrac{u_i}{u_n}\, du_n + g_i u_h dx^h - \mathrm{L}_{ik} dx^k = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h = 1,2,3 \cdots n \\ i,k = 1,2,3 \cdots n-1 \end{pmatrix}$$

d'où l'identification des systèmes (2) et (4) donne :

$$(5)\qquad \Gamma_{ih} - \frac{u_i}{u_n}\Gamma_{nh} = \mathrm{L}_{ih} + u_h g_i$$

avec :

$$g_n = 0 \qquad \mathrm{L}_{ih} = 0 \text{ (si } i \text{ ou } h = n).$$

Le système (5) et les conditions (3) déterminent les Γ_{ij} d'une seule manière. L'équation (5) pour $h = n$ s'écrit :

$$(6)\qquad \Gamma_{in} - \frac{u_i}{u_n}\Gamma_{nn} = u_n g_i$$

en dérivant (6) par rapport à u_k et en ajoutant les résultats en faisant successivement $i = 1, 2, 3... n - 1$ on trouve en tenant compte de la deuxième condition (3) :

$$(7)\qquad \Gamma_{nn} = -\frac{(u_n)^2}{n}\sum_i \frac{\partial g_i}{\partial u_i}.$$

Dérivons maintenant (5) par rapport à u_i et faisons successivement $i = 1, 2, 3... n - 1$ en ajoutant les résultats on trouve :

$$(8)\qquad \Gamma_{nh} = -\frac{u_n}{n}\mathrm{L}^i_{ih} - \frac{u_n u_h}{n}\sum_i \frac{\partial g_i}{\partial u_i} - \frac{u_n}{n} g_h.$$

En dérivant l'équation (5) par rapport à u_k et en faisant $h = 1, 2, 3\ n - 1$ l'addition des résultats donne en tenant compte de la première condition (3) :

$$(9)\qquad \frac{u_i}{u_n}\Gamma^n_{nn} - \Gamma^n_{in} - \frac{1}{u_n}\Gamma_{ni} = \mathrm{L}^k_{ik} + (n-1)g_i - u_n \frac{\partial g_i}{\partial u_n}$$

d'autre part la dérivation de (6) par rapport à u_u donne :

$$(10)\qquad \Gamma^n_{in} - \frac{u_i}{u_n}\Gamma^n_{nn} + \frac{u_i}{(u_n)^2}\Gamma_{nn} = g_i + u_n \frac{\partial g_i}{\partial u_n}$$

la comparaison entre (1) et (9) donne :

$$(11)\qquad \frac{u_i}{(u_n)^2}\Gamma_{nn} - \frac{1}{u_n}\Gamma_{ni} = \mathrm{L}^k_{ik} + n g_i$$

alors en tenant compte de (7) et (8) la relation (11) donne :

$$(12)\qquad g_i = \frac{\mathrm{L}^k_{ki} - n\mathrm{L}^k_{ik}}{n^2 - 1}$$

alors des relations (5), (6), (7), (8) on trouve les valeurs des Γ_{ij} qui sont données par la formule générale :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \Gamma_{ij} &= L_{ij} + \frac{u_i}{n^2-1}\left(L^k_{jk} - nL^k_{kj}\right) + \frac{u_j}{n^2-1}\left(L^k_{ki} - nL^k_{ik}\right) \\ &- \frac{u_i u_j}{n(n^2-1)}\left(L^{kh}_{kh} - nL^{hk}_{hk}\right) \end{aligned}\right.$$

avec $\Gamma_{ij} = 0$ si l'un des indices au moins est n.

Il est intéressant de remarquer que si :

$$L_{ij} = L_{ji}$$

on a aussi :

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}.$$

34. — Soit le système de Pfaff :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} u_i dx^i &= 0 \\ du_i - \Gamma_{ik} dx^k &= 0 \end{aligned}\right.$$

nous allons déterminer une connexion projective telle que l'espace étant doué de cette connexion le système (14) soit le système différentiel des hyperplans de l'espace. Nous dirons que l'espace est non-holonome si le système (14) n'est pas complètement intégrable.

L'espace sera constitué par le raccord entre les petits morceaux des variétés d'éléments-plans. Une variété d'éléments étant formée par un point A appelé le centre et un hyper-plan passant par ce point.

Soit alors le repère projectif :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} dA &= \omega^i A_i \\ dA_i &= \omega_i^0 A + \omega_i^k A_k \quad (i, k = 1, 2, 3 \cdots n) \end{aligned}\right.$$

où $\omega_i^i - \omega_0^0$ est remplacé par ω_i^i pour simplifier l'écriture, Le point origine A étant le centre de l'élément-plan ayant pour coordonnées $x^1, x^2 \ldots x^n$ et les paramètres homogènes de l'élément-plan étant $u_1, u_2 \ldots u_n$. Les composantes ω_i^j du déplacement infinitésimal du repère (15) sont des formes linéaires en dx^i et du_i :

$$(16)\quad \omega_i^j = \gamma_{ik}^j dx^k + C_i^{jk} du_k$$

les γ_{ik}^j étant homogènes et de degré zéro par rapport aux u_i et les C_i^{jk} étant homogènes et de degré moins un en u_k satisfaisant aux conditions.

$$u_k C_i^{jk} = 0.$$

Nous dirons que le repère (15) est naturel par rapport aux variables x^1, x^2, x^3... x^n si l'on a :

$$\begin{aligned} &\omega^1 = dx^1 \quad \omega^2 = dx^2 \cdots \omega^n = dx^n \\ (17) \qquad &\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \cdots + \omega_n^n = \mathcal{C}_i^{ik} du_k. \end{aligned}$$

35. soit le point :

$$M = A + y^i A_i$$

exprimons qu'il reste fixe dans l'espace on trouve.

$$(18) \qquad dy^i + \omega^i + \omega_k^i y^k - \omega_k^0 y^k y^i = 0.$$

Supposons que le point M appartient à l'élément-plan u_i on doit avoir :

$$(19) \qquad u_i y^i = 0$$

d'où :

$$u_i dy^i + y^i du_i = 0$$

alors le système (18) donne en tenant compte de (19) :

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} &u_i \omega^i = 0 \\ &du_i - u_k \omega_i^k = u_i \varpi. \end{aligned} \right.$$

Telles sont la forme des équations du système différentiel des plans de l'espace relatif au repère (15). Alors pour que le système (14) fournisse les plans de l'espace il faut qu'il soit équivalent au système (20). Mais si le repère est naturel la première équation du système (20) est identique à la première équation du système (20) donc il suffit d'exprimer l'équivalence des autres équations des deux systèmes. Avant d'exprimer cette équivalence nous allons nommer d'abord la connexion de l'espace en ce qui concerne la torsion.

36. — Ecrivons les équations de la structure de l'espace :

$$\begin{aligned} \Omega^i &= (\omega^i)' - [\omega^k \omega_k^i] \\ \Omega_i^j &= (\omega_i^j)' - [\omega_i^0 \omega^j] - [\omega_i^k \omega_k^j] \\ \Omega_i^0 &= (\omega_i^0)' - [\omega_i^k \omega_k^0] \end{aligned}$$

la première est relative à la torsion de l'espace dont le second membre est de la forme :

$$\Omega^i = R_{0h}^{ik}[du_k dx^h] + Q_{0kh}^i[dx^k dx^h]$$

R_{0h}^{ik} étant le tenseur de la torsion tangentielle. Exprimons que dans le déplacement rattaché à un cycle élémentaire la variation de l'origine A du repère (15) est indépendante des états intermédiaires de l'élément-plan rattaché à A on doit avoir :

$$R_{0h}^{ik} = 0$$

ce qui donne :

$$\mathcal{C}_i^{jk} = 0$$

donc les composantes affine ω_i^j du déplacement infinitésimal du repère naturel sont indépendantes des différentielles du_k.

Identifions maintenant les systèmes (20) et (14) on trouve :

(24) $$u_k \omega_i^k = \Gamma_{ik} dx^k + u_i \varpi + g_i u_k dx^k$$

ou :

(25) $$u_k \gamma_{ih}^k = \Gamma_{ih} + u_i \gamma_h + g_i u_h$$

car ϖ doit être de la forme :

$$\varpi = \gamma_k dx^k.$$

La relation (17) donne la condition :

(26) $$\gamma_{ik}^i = 0.$$

Le tenseur de torsion de l'espace s'écrit alors :

$$Q_{0kh}^i = \gamma_{kh}^i - \gamma_{hk}^i.$$

Annulons maintenant le tenseur contracté de la torsion, on trouve :

$$\gamma_{ki}^i - \gamma_{ik}^i = 0$$

ou en tenant compte de (26) :

(27) $$\gamma_{ki}^i = 0.$$

Exprimons maintenant que dans le déplacement rattaché à un cycle élémentaire l'élément-plan u_i subit une variation indépendente des états intermédiaires du repère sur le cycle. Pour cela écrivons la variation subie par le point :

$$M = A + y^i A_i$$

dans le déplacement rattaché au cycle on a :

(28) $$\Delta y^i + \Omega^i + \Omega_k^i y^k - \Omega_k^0 y^k y^i = 0.$$

Supposons maintenant que le point M appartient à l'élément u_i on a :

$$u_i y^i = 0$$

d'où (28) donne :

$$u_i \Delta y^i + u_i \Omega^i + u_i \Omega^i_k y^k = 0$$

mais on a :

$$y^i \Delta u_i + u_i \Delta y^i = 0$$

d'où :

$$y^i (\Delta u_i - u_k \Omega^k_i) - u_i \Omega^i = 0$$

le premier membre doit être indépendant des produits extérieurs en $[du_h\, dx^k]$ donc si l'on pose :

$$\Omega^k_i = \mathrm{R}^{kh}_{il}[du_h dx^l] + \mathrm{Q}^k_{ihl}[dx^h dx^l]$$

on doit avoir :

$$u_k \mathrm{R}^{kh}_{il} = 0. \tag{29}$$

Annulons maintenant le tenseur contracté R^{kj}_{ki} de la courbure, on a :

$$\mathrm{R}^{jh}_{ik} = \gamma^{jh}_{ik} + \delta^j_k \mathcal{C}^{0h}_i \qquad \delta^j_k = \begin{cases} 1 \text{ si } k = j \\ 0 \text{ si } k \neq j \end{cases} \tag{30}$$

d'où :

$$\mathrm{R}^{kj}_{ki} = \gamma^{kj}_{ki} + \mathcal{C}^{0j}_i$$

et comme on a :

$$\gamma^k_{ki} = 0$$

on trouve :

$$\mathrm{R}^{kj}_{ki} = \mathcal{C}^{0h}_i$$

En annulant ce tenseur on voit que toutes les composantes ω^j_i, ω^0_i du déplacement infinitésimal du repère naturel sont indépendantes des différentielles du_k et la relation (30) s'écrit :

$$\mathrm{R}^{jk}_{ih} = \gamma^{jk}_{ih}$$

et les conditions (29) deviennent :

$$u_k \gamma^{kh}_{i\,l} = 0 \tag{31}$$

alors les équations (25) avec les conditions (26), (27) et (31) déterminent complètement les γ^k_{ij}. En réalité dérivons l'équation (25) par rapport à u_j on trouve :

$$u_k \gamma^{kj}_{ih} + \gamma^j_{ih} = \Gamma^j_{ih} + \frac{\partial}{\partial u_j}(u_i \gamma_h + u_h g_i)$$

d'où d'après (31) :

$$\gamma^j_{ih} = \Gamma^l_{ih} + \frac{\partial}{\partial u_j}(u_i \gamma_h + u_h g_i) \tag{32}$$

faisons $h = j$ et contractons, on trouve :

$$\sum_h \frac{\partial}{\partial u_h}(u_i \gamma_h + g_i u_h) = 0$$

ou :

$$u_i \sum_h \frac{\partial \gamma_h}{\partial u_h} + n g_i + \gamma_i = 0 \tag{33}$$

car g_i étant homogène et de degré zéro on a :

$$\sum_k u_k \frac{\partial g_i}{\partial u_k} = 0$$

contractons maintenant l'équation (32) en faisant $i = j$ on trouve :

$$u_i \sum_h \frac{\partial g_h}{\partial u_h} + n\gamma_i + g_i = 0 \tag{34}$$

en ajoutant (33) et (34) on trouve :

$$(n+1)(g_i + \gamma_i) + u_i \sum_h \frac{\partial (g_h + \gamma_h)}{\partial u_h} = 0$$

ou en posant :

$$g_k + \gamma_k = G_k$$

on a :

$$(n+1) G_i + u_i \sum_h \frac{\partial G_h}{\partial u_h} = 0 \tag{35}$$

avec :

$$\sum_k u^k \frac{\partial G_i}{\partial u_k} = 0$$

$$\sum_{k,h} u^k \frac{\partial^2 G_h}{\partial u_h \partial u_k} = -\sum_h \frac{\partial G_h}{\partial u_h}$$

alors en dérivant (35) par rapport à u_i et en contractant (faisant la somme en faisant $i = 1, 2, 3\ldots n$) on trouve :

$$G_i = 0$$

d'où :

$$\gamma_i = - g_i$$

alors l'équation (34) s'écrit :

$$(n-1)g_i = u_i \sum_h \frac{\partial g_h}{\partial u_h}$$

et en posant :

$$\sum_h \frac{\partial g_h}{\partial u_h} = (n-1)g$$

ceci donne :

$$g_i = u_i g$$

d'où :

$$u_i \gamma_h + u_h g_i = - u_i g_h + u_h g_i = 0$$

ainsi l'équation (32) donne :

$$\gamma_{ik}^j = \Gamma_{ik}^j$$

Les connexions ainsi définies dépendent encore de neuf arbitraires car les composantes :

$$\omega_i^0 = \gamma_{ik}^0 dx^k$$

ne sont pas encore déterminées.

Les composantes Ω_i^j de la courbure de l'espace sont :

$$\Omega_i^j = R_{ih}^{jk}[du_k dx^h] + Q_{ikh}^j[dx^k dx^h]$$

avec :

$$R_{ih}^{jk} = \Gamma_{ih}^{jk}$$

$$Q_{ikh}^j = \Gamma_{ih/k}^j - \Gamma_{ik/h}^j + \Gamma_{ih}^l \Gamma_{lk}^j - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lh}^j - \delta_h^j \gamma_{ik}^0 \qquad \delta_h^j = \begin{cases} 1 \text{ si } h = j \\ 0 \text{ si } h \neq j \end{cases}$$

où l'indice précédé d'une barre définit l'opération :

$$F_{/k} = \frac{\partial F}{\partial x^k}$$

Les quantités R_{ih}^{jk} sont les composantes du tenseur de courbure tangentielles mais les quantités Q_{ikh}^i ne forment pas un tenseur car du_i n'étant pas un tenseur il y a des termes complémentaires qui interviennent dans le calcul.

Posons :

$$Du_i = du_i - u_k \omega_i^k$$

les quantités ainsi définies ont un caractère semi-tensoriel et on peut écrire :

$$\Omega_i^j = R_{ih}^{jk}[Du_k dx^h] + R_{ikh}^j[dx^k dx^h]$$

avec :

$$R_{ikh}^j = Q_{ikh}^j + \Gamma_{ih}^{jl}\Gamma_{lk} - \Gamma_{ik}^{jl}\Gamma_{lh}$$

ces quantités sont les composantes du tenseur de courbure ponctuelle.

Annulons maintenant les composantes du tenseur contracté :

$$R_{ik} = R_{ikh}^h$$

on trouve :

$$(36)\qquad (n-1)\gamma_{ik}^0 = -\Gamma_{ik/h}^h - \Gamma_{ik}^{hl}\Gamma_{hl} + \Gamma_{il}^h\Gamma_{hk}^l$$

La connexion ainsi définie est bien déterminée d'une manière intrinsèque et invariante. C'est la connexion normale suivant M. Cartan.

37. — En résumé on voit qu'étant donné un système de n équations de Pfaff à $2n-1$ variables on peut toujours rattacher une connexion projective intrinsèque à l'espace telle que le système proposé soit le système différentiel des plans (variétés planes holonomes ou non-holonomes à $n-1$ dimensions) de l'espace.

Cette connexion intrinsèque jouit des propriétés suivantes :

1° le tenseur de la torsion tangentielle est nul.

2° le tenseur contracté de la torsion ponctuelle est nul.

3° le tenseur contracté de la courbure tangentielle est nul.

$$R_{ki}^{kj} = 0$$

4° le tenseur $u_k R_{ij}^{kh}$ est nul (on peut dire que le tenseur R_{ij}^{kh} est symétrique par rapport aux indices supérieurs).

5° le tenseur contracté :

$$R_{ik} = R_{ikh}^h$$

de la courbure ponctuelle est nul.

38. — *Le cas des espaces sans torsion.* — Le covariant bilinéaire de la première équation du système (14) s'écrit en tenant compte du système (14) :

$$(u_i dx^i)' = (\Gamma_{ij} - \Gamma_{ji})[dx^j dx^i][m_0 d\cdot(u_i dx_i)]$$

si le système (14) est semi-intégrable (c'est-à-dire que le covariant bilinéaire de la première équation s'annule en vertu du système lui-même, on doit avoir :

$$[(u_i dx^i)'(u_i dx^i)] = 0$$

d'où :

$$u_k(\Gamma_{ij} - \Gamma_{ji}) + u_i(\Gamma_{jk} - \Gamma_{kj}) + u_j(\Gamma_{hi} - \Gamma_{ih}) = 0 \tag{37}$$

En dérivant l'équation (37) par rapport à u_k et en ajoutant les résultats en faisant $k = 1, 2, 3, \ldots n$ on trouve en tenant compte des conditions (3) :

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$$

donc l'espace rattaché au système sera sans torsion. Un simple examen montre que ceci entraine la symétrie des indices pour les fonctions L_{ij} aussi et dans ce cas on a :

$$\Gamma_{ij} = L_{ij} - \frac{u_i}{n+1} L^k_{jk} - \frac{u_j}{n+1} L^k_{ik} + \frac{u_i u_j}{n(n+1)} L^{kh}_{kh} \tag{38}$$

on peut vérifier qu'alors le système (1) est aussi semi-intégrable.

Il est intéressant de remarquer aussi que les équations (36) montrent la symétrie des γ^0_{ij} et on a :

$$\gamma^0_{ik} = \gamma^0_{ki}$$

d'où il résulte que dans le cas d'un espace sans torsion la composante :

$$\Omega^1_1 + \Omega^2_2 + \Omega^3_3 + \cdots + \Omega^n_n$$

de la courbure de l'espace est identiquement nulle, car on a :

$$\sum \Omega^i_i = \sum_i (\omega^i_i)' - (n+1) \sum [\omega^k \omega^0_k]$$

et comme :

$$\sum \omega^i_i = 0$$

on aura :

$$\sum_i \Omega^i_i = (n+1)(\gamma^0_{kh} - \gamma^0_{hk})[dx^h dx^k]$$

alors la symétrie des indices pour γ^0_{ij} entraîne la nullité de la composante $\sum_i \Omega^i_i$ de la courbure de l'espace.

Remarquons maintenant que l'on a :

$$\Omega_i^0 = R_{ih}^{0k}[du_k dx^h] + Q_{ikh}^0[dx^k dx^h]$$

avec :

$$R_{ih}^{0k} = \Gamma_{ih}^{0k}$$

alors en tenant compte des formules (36) on trouve :

$$R_i^0 = R_{ik}^{0k} = 0$$

le tenseur contracté de la courbure tangentielle est nulle (car les composantes :

$$R_i^j = R_{ik}^{jk}$$

de la courbure tangentielle sont nulles à cause des conditions (3)).

39. — *Les espaces holonomes.* — Si le système (14) est complètement intégrable il représente une hypersurface dépendant de n paramètres dans ce cas l'espace à connexion projective normale rattaché au système (14) sera un espace holonome. Il est facile de montrer que la complète intégrabilité du système (14) entraîne celle du système (1), ce dernier système est alors équivalent à un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre.

Posons :

$$\omega = u_i dx^i = 0$$
$$\omega_i = du_i - \Gamma_{ik} dx^k = 0$$

On a vu que l'annulation du covariant bilinéaire de la forme ω en vertu du système (14) rend les fonctions Γ_{ij} symétriques par rapport aux indices. Le covariant bilinéaire de ω_i est :

$$(\omega_i)' = A_{ikh}[dx^k dx^h]$$

avec :

$$A_{ikh} = \Gamma_{ih/k} - \Gamma_{ik/h} + \Gamma_{ih}^s \Gamma_{sk} - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{sh} \tag{39}$$

Pour que le système (14) soit complètement intégrable on doit avoir :

$$[(\omega_i)'\omega] = 0$$

ce qui donne les conditions :

$$u_l A_{ihk} + u_h A_{ikl} + u_k A_{ilh} = 0$$

(Si l'on forme les conditions d'intégrabilité du système (1) on trouve :

$$u_l A_{ikh} + u_h A_{ilk} + u_k A_{ihl} = u_i C_{khl} \tag{α}$$

ce qui paraît être en désaccord avec la complète intégrabilité du système (1) mais si on dérive l'équation (α) par rapport à u_i et on contracte en faisant $i = 1, 2, 3... n$ on trouve :

$$(n+1) \qquad C_{khl} = u_l A^i_{ikh} + u_h A^i_{ilk} + u_k A^i_{ihl} + A_{lkh} + A_{hlk} + A_{khl}$$

car :

$$\sum_i u_i C^i_{khl} = C_{khl}$$

d'où en tenant compte de (39) on voit que $C_{khl} = 0$ et les systèmes (1) et (14) sont simultanément intégrables).

Rappelons maintenant que l'on a :

$$\delta^j_h \gamma^0_{ik} + R^j_{ikh} = \Gamma^j_{ih/k} - \Gamma^j_{ik/h} + \Gamma^s_{ih}\Gamma^j_{sk} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^j_{sh} + \Gamma^{js}_{ih}\Gamma_{sk} - \Gamma^{js}_{ik}\Gamma_{sh}$$

en multipliant les deux membres par u_j et en ajoutant en faisant : $j = 1, 2, 3... n$ on trouve :

$$(40) \qquad u_h \gamma^0_{ki} - u_k \gamma^0_{ih} + u_s R^s_{ikh} = A_{ikh}$$

ou en posant :

$$u_s R^s_{ikh} = B_{ikh}$$
$$u_h \gamma^0_{ik} - u_k \gamma^0_{ih} + B_{ikh} = A_{ikh}$$

Un simple calcul montre que l'on peut mettre la formule (36) sous la forme :

$$(n-1)\gamma^0_{ik} = A^h_{ikh}$$

d'où (40) s'écrit :

$$(41) \qquad (n-1)\left(u_h A^s_{iks} - u_k A^s_{ihs}\right) + B_{ikh} = A_{ikh}$$

en tenant compte de la relation qui existe entre les A_{ikh} on a :

$$(42) \qquad u_l B_{ihk} + u_h B_{ikl} + u_k B_{ilh} = 0$$

Contractons maintenant l'équation (41) par rapport à h (c'est-à-dire dérivons là par rapport à u_h en sommant par rapport à h) et remarquons que A_{ihh} est homogène et du premier degré en u_i on trouve alors :

$$(43) \qquad B^h_{ikh} = 0$$

Il est facile de montrer maintenant que les systèmes (42) et(43) donnent :

$$B_{ikh} = 0$$

En réalité dérivons l'équation (42) par rapport à u_h et contractons-la on trouve :

$$u_l B^h_{ihk} + u_k B^h_{ilh} + (n-1) B_{ikl} = 0$$

mais d'après (43) on a :

$$B^h_{ihk} = - B^h_{ikh} = 0$$

donc :

$$B_{ikh} = 0$$

Ainsi on voit que dans un espace holonome on a :

$$u_s R^s_{ikh} = 0$$

de là on déduit facilement que l'on a identiquement :

$$u_k \Omega^k_i \doteq 0$$

d'où le théorème :

La connexion normale projective rattachée à un système d'équations de Pfaff (1) complètement intégrable telle que ce système soit le système différentiel des plans de l'espace jouit de la propriété qu'elle laisse invariant l'élément-plan u_i rattaché au centre A dans tous les déplacements infinitésimaux relatifs aux cycles élémentaires.

40. — Il est évident que si les Γ_{ij} sont linéaires en u_h les Γ^k_{ij} et les $\Gamma^0_{ij} = \gamma^0_{ij}$ sont indépendants des u_k et l'espace est ponctuel. Les composantes tangentielles R^{jk}_{ih} de la courbure sont identiquement nulles. On peut voir facilement que dans ce cas les relations :

$$u_k \Omega^k_i = 0$$

montrent que l'on a identiquement :

$$\Omega^k_i = 0$$

et alors le théorème de la conservation de la courbure montre que l'on a aussi :

$$\Omega^0_i = 0$$

donc l'espace est applicable sur l'espace projectif ordinaire. Dans ce cas le système différentiel (1) est réductible à la forme :

$$u_i dx^i = 0$$

$$du_i - \frac{u_i}{u_n} du_n = 0$$

Posons :

$$\Gamma_{ik} = A^j_{ik} u_j$$

les A^j_{ik} étant seulement fonctions de x^1, x^2,... x^n satisfaisant aux conditions :

$$A^j_{ik} = A^j_{ki}$$
$$A^k_{ik} = 0$$

on a ainsi :

$$\omega^j_i = A^j_{ik} dx^k$$

et les formules (36) donnent :

$$(n - 1)\gamma^0_{ik} = - A^h_{ik/h} + A^h_{il} A^l_{hk}$$

ainsi on voit que les composantes du déplacement infinitésimal du repère naturel ne dépendent pas des u_k. Le système (38) donne alors :

$$\text{(44)} \qquad L_{ij} = \frac{u_i u_j u_k}{(u_n)^2} A^k_{nn} - \frac{u_i u_k}{u_n} A^k_{jn} - \frac{u_j u_k}{u_n} A^k_{in} + A^k_{ij} u_k$$
$$i, j = 1, 2, 3 \cdots n - 1 \qquad k = 1, 2, 3 \cdots n)$$

ainsi on trouve la forme générale des L_{ij} telle que l'espace rattaché à l'intégrale générale du système (1) soit applicable sur l'espace projectif ordinaire.

Prenons maintenant comme paramètres de l'élément-plan tangent les coordonnées non-homogènes :

$$p^n_i = - \frac{u_i}{u_n}$$

la première équation du système (1) s'écrit :

$$dx^n - p^n_1 dx^1 - p^n_2 dx^2 - \cdots - p^n_{n-1} dx^{n-1} = 0$$

alors les p^n_i sont les dérivés partielles de x^n par rapport aux autres variables :

$$p^n_i = \frac{\partial x^n}{dx^i}$$

Posons de même :

$$p^n_{ij} = \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^i \partial x^j}$$

et dans les équations (44) faisons :

$$u_n = - 1 \qquad u_i = p^n_i$$

on trouve :

$$p_{ij}^n = A_{nn}^k p_i^n p_j^n p_k^n + A_{jn}^k p_i^n p_k^n + A_{in}^k p_j^n p_k^n + A_{ij}^k p_k^n \tag{45}$$
$$(i, j = 1, 2, 3 \cdots n-1 \qquad k = 1, 2, 3 \cdots n)$$

avec :

$$p_n^n = -1$$

Telle est la forme générale du système d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui sont réductible à la forme :

$$p_{ij}^n = 0$$

Il faut se rappeler que les fonctions A_{ij}^k satisfont :

1° aux conditions de symétrie :

$$A_{ij}^k = A_{ji}^k$$

2° aux conditions :

$$A_{ik}^k = 0$$

3° aux conditions d'intégrabilité (que nous supposerons satisfaites).

Le système (45) s'écrit :

$$p_{ij}^n = A_{nn}^k p_i^n p_j^n p_k^n - A_{nn}^n p_i^n p_j^n + A_{jn}^k p_i^n p_k^n + A_{in}^k p_j^n p_k^n - A_{jn}^n p_i^n - A_{in}^n p_j^n$$
$$+ A_{ij}^k p_k^n - A_{ij}^n \qquad (i, j, k = 1, 2, 3 \cdots n-1)$$

Cherchons les équations différentielles des géodésiques de l'espace, pour cela exprimons que A, dA, d^2 A sont alignés, on a :

$$dA = \omega^i A_i$$
$$d^2A = \omega^k \omega_k^0 A + (d\omega^i + \omega^k \omega_k^i) A_i$$

d'où :

$$\frac{d\omega^i + \omega^k \omega_k^i}{\omega^i} = \frac{d\omega^n + \omega^k \omega_k^n}{\omega^n} \qquad (i = 1,2,3. \cdots n-1)$$

développées ces équations s'écrivent :

$$\frac{d^2x^i}{(dx^n)^2} - A_{kh}^n \frac{dx^k}{dx^n}\frac{dx^h}{dx^n}\frac{dx^i}{dx^n} + A_{kh}^i \frac{dx^k}{dx^n}\frac{dx^h}{dx^n} = 0 \tag{46}$$
$$(i = 1, 2, 3 \cdots n-1 \qquad k, h = 1, 2, 3 \cdots n).$$

Nous dirons que le système (45) est le premier système associé au système (46). Donc pour que le système (46) soit réductible à la forme :

$$\frac{d^2x^i}{(dx^n)^2} = 0$$

il faut et il suffit que son système associé soit complètement intégrable.

41. — L'espace étant applicable sur l'espace projectif ordinaire admet des variétés planes à $q \leqslant n$-1 dimensions. Exprimons que le point :

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + y^i \mathrm{A}_i$$

appartient à la variété plane de q dimension définie par le système :

$$y^{q+h} - p_k^{q+h} y^k = 0 \qquad (k = 1,2,3 \cdots q \qquad h = 1,2,3 \cdots n-q) \tag{47}$$

on a :

$$dy^i + \omega^i + \omega_k^i y^k - \omega_k^0 y^k y^i = 0$$

on trouve donc pour le système différentiel des variétés planes à q dimensions :

$$\left\{\begin{aligned} & dx^{q+h} - p_k^{q+h} dx^k = 0 \\ & dp_i^{q+h} + \omega_i^{q+h} - p_k^{q+h}\omega_i^k + p_i^{q+l}\omega_{q+l}^{q+h} - p_i^{q+l} p_k^{q+h} \omega_{q+l}^k = 0 \end{aligned}\right. \tag{48}$$

$$(k,i = 1,2,3 \cdots q \qquad h,l = 1,2,3 \cdots n-q)$$

alors en posant :

$$\omega_i^k = \mathrm{A}_{ij}^k dx^j$$

et remarquant que :

$$p_k^{q+h} = \frac{\partial x^{q+h}}{\partial x^k}$$

$$p_{ij}^{q+h} = \frac{\partial^2 x^{q+h}}{\partial x^i \partial x^j}$$

sont les dérivés partielles des deux premiers ordres des fonctions x^{q+h} par rapport aux variables x^k on trouve le système des équations aux dérivés partielles du second ordre de la variété cherchée :

$$\left\{\begin{aligned} p_{ij}^{q+h} = & - \mathrm{A}_{ij}^{q+h} - p_i^{q+l}\mathrm{A}_{j,q+l}^{q+h} - p_j^{q+l}\mathrm{A}_{i,q+l}^{q+h} + p_k^{q+h}\mathrm{A}_{ij}^k \\ & - p_i^{q+l} p_j^{q+s} \mathrm{A}_{q+l,q+s}^{q+h} + p_i^{q+l} p_k^{q+h} \mathrm{A}_{j,q+l}^k + p_j^{q+l} p_k^{q+h} \mathrm{A}_{i,q+l}^k \\ & + p_i^{q+l} p_j^{q+s} p_k^{q+h} \mathrm{A}_{q+l,\,q+s}^k \end{aligned}\right. \tag{49}$$

$$(i,j,k = 1,2,3 \cdots q \qquad h,l,s = 1,2,3 \cdots n-q)$$

Le système (49) que nous désignerons par le symbole S_{n-q}^q est le q^e système associé au système (46). On voit donc qu'il existe en tout $(n-2)$ systèmes associés au système (46) et la condition nécessaire et suffisante pour que ce système soit réductible à la forme :

$$\frac{d^2x^i}{(dx^n)^2} = 0$$

est que l'un des systèmes associés soit complètement intégrable, alors tous ces systèmes sont complètement intégrables et il existe une transformation ponctuelle qui les ramène tous (ainsi que le système (46) lui-même) à la forme réduite :

$$p_{ij}^{q+h} = 0$$

42. — En résumé on voit qu'il existe en tout un ensemble de $(n-1)$ systèmes associés :

$$S_{n-1}^1 \qquad S_{n-2}^2 \cdots S_1^{n-1}$$

(l'indice supérieur désignant le nombre des fonctions dépendantes et l'indice inférieur celui des variables indépendantes) le dernier étant un système d'équations différentielles ordinaires (et par suite toujours complètement intégrable) tels que si l'un des systèmes est complètement intégrable tous les autres le sont aussi et que de plus ces conditions d'intégrabilité entraînent la réductibilité de l'ensemble de ces systèmes à la forme réduite :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} = 0.$$

II. — LES ESPACES D'ÉLÉMENTS LINÉAIRES A CONNEXION PROJECTIVE NORMALE

43. — Ces espaces sont fondés sur la notion des géodésiques. Analytiquement ce sont les espaces qui admettent l'intégrale générale d'un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre comme des géodésiques. La connexion intrinsèque d'un tel espace définit les invariants différentiels ponctuels du système proposé.

Avant d'entrer dans la détermination de cette connexion nous allons normaliser d'abord le système d'équations différentielles des géodésiques :

$$\frac{d^2x^i}{(dx^n)^2} = f^i\left(x^k, \frac{dx^k}{dx^n}\right) \tag{1}$$

Posons :

$$\frac{dx^1}{u^1} = \frac{dx^2}{u^2} = \frac{dx^3}{u^3} = \cdots = \frac{dx^n}{u^n}$$

le système (1) se transforme en :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dx^h}{u^h} = \frac{dx^n}{u^n} \qquad (i,h \leqslant n-1) \\ & du^i - \frac{u^i}{u^n} du^n + \frac{1}{u^n} \mathrm{L}^i dx^n = 0 \end{aligned} \right.$$

les L^i étant des fonctions homogènes et du second degré en u^k que nous supposerons analytiques par rapport à tous les arguments qui y figurent.

Nous allons montrer que le système (2) peut se mettre d'une seule manière sous la forme :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dx^h}{u^h} = \frac{dx^n}{u^n} \qquad (h \leqslant n-1) \\ & du^i + \Gamma^i_k dx^k = 0 \end{aligned} \right.$$

où :

$$(4) \qquad \Gamma^i_k = \frac{\partial \Gamma^i}{\partial u^k}$$

les fonctions homogènes et du second degré Γ^i satisfaisant à la condition :

$$(5) \qquad \sum_i \Gamma^i_i = \sum_i \frac{\partial \Gamma^i}{\partial u^i} = 0$$

En posant :

$$dx^h = u^h dt$$

le système (3) s'écrit plus symétriquement :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & dx^k = u^k dt \\ & du^i + 2\Gamma^i dt = 0 \end{aligned} \right.$$

car on a :

$$u^k \Gamma^i_k = 2\Gamma^i$$

Le sytème (2) s'écrit alors :

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & dx^k = u^k dt \\ & du^i - \frac{u^i}{u^n} du^n + \mathrm{L}^i dt = 0 \end{aligned} \right.$$

ce que l'on peut écrire encore en identifiant avec (6) :

$$\Gamma^i - \frac{u^i}{u^n} \Gamma^n = \frac{1}{2} \mathrm{L}^i$$

d'où d'après la condition (5) on trouve :

$$\Gamma^n = -\frac{1}{2(n+1)} u^n \sum_i L_i^i$$

ce qui donne la formule générale :

$$\Gamma^i = \frac{1}{2} L^i - \frac{u^i}{2(n+1)} \sum_k L_k^k$$

Le système différentiel (7) prend ainsi la forme canonique (6) et on voit que cette forme est bien unique.

44. — Étant donné le système différentiel (2) ou (6) nous allons chercher une connexion projective telle que l'espace étant doué de cette connexion les intégrale générales du système (2) soient considérées comme géodésiques de l'espace.

Pour cela nous aurons recours à l'espace d'éléments linéaires. Un espace d'éléments linéaires étant une variété constituée par un point A appelé le centre et une direction passant par le centre. Nous désignons par x^1, x^2, x^3... x^n les coordonnées du centre A et par u^1, u^2,... u^n les paramètres homogènes de la direction passant par le centre.

45. — Soit alors le repère :

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} dA = \omega^k A_k \\ dA_i = \omega_i^0 A + \omega_i^k A_k \end{cases}$$

nous dirons qu'il est naturel par rapport aux variables x_k si on a :

$$\omega^k = dx^k \qquad \sum_i \omega_i^i = C_{ih}^i du^h$$

Les composantes ω_i^j du déplacement infinitésimal du repère (8) sont de la forme :

$$\omega_i^j = \gamma_{ik}^j dx^k + \mathcal{C}_{ik}^j du^k$$

les γ_{ik}^j étant homogènes et de degré zéro par rapport à u_k et les $\mathcal{C}_{ik}^i$ homogènes et de degré moins un en u_k satisfaisant aux conditions :

$$u^k \mathcal{C}_{ik}^j = 0$$

La transformation infinitésimale conférée par le déplacement infiniment petit du repère (8) au point :

$$M = A + y^i A_i$$

s'écrit :

$$dy^k + \omega^k + \omega_h^k y^h - \omega_h^0 y^h y^k = 0 \tag{9}$$

Exprimons que le point M appartient à l'élément linéaire u_k on aura :

$$\frac{y^1}{u^1} = \frac{y^2}{u^2} = \cdots = \frac{y^n}{u^n}$$

ceci fournit le système différentiel des géodésiques :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\omega^1}{u^1} = \frac{\omega^2}{u^2} = \cdots = \frac{\omega^n}{u^n} \\ & du^i + u^k \omega_k^i = u^i \varpi \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Donc pour que le système (2) définisse les géodésiques de l'espace il faut que le système (10) soit équivalent au système (3) ou (6).

46. — Nous allons montrer qu'il existe une seule parmi les connexions convenables pour l'équivalence des systèmes (10) et (6) qui est déterminée d'une manière intrinsèque et invariante.

Écrivons la variation subie par le point :

$$M = A + y^i A_i$$

dans un déplacement infinitésimal rattaché à un cycle élémentaire :

$$\Delta y^k + \Omega^k + \Omega_h^k y^h - \Omega_h^0 y^h y^k = 0 \tag{11}$$

Exprimons maintenant que cette transformation laisse invariante l'origine A du repère (8) on trouve :

$$\Omega^1 = 0 \qquad \Omega^2 = 0 \cdots \Omega^n = 0$$

La transformation infinitésimale dualistique de (11) s'écrit alors :

$$\Delta\xi_i + \Omega_i^0 + \Omega_i^k \xi_k = 0$$

en exprimant qu'elle engendre un groupe de Mobius on aura :

$$\sum_i \Omega_i^i = 0$$

Annulons maintenant la torsion de l'espace on a :

$$\Omega^k = (\omega^k)' - [\omega^h \omega_h^k] = 0$$

d'où :

$$\omega_i^j = \gamma_{ik}^j dx^k$$

avec :

$$\gamma^j_{ik} = \gamma^j_{ki}$$

donc :

$$\mathcal{C}^j_{ik} = 0$$

et on aura :

(12) $$\sum_i \omega^i_i = 0$$

L'identification des systèmes (6) et (10) donnera alors :

$$u^k \omega^i_k = 2\Gamma^i dt + u^i \varpi$$

avec :

$$\varpi = \gamma_k dx^k$$

de là on trouve :

$$u^k \gamma^i_{kh} dx^h = 2\Gamma^i dt + u^i \gamma_k dx^k$$

en se servant des relations :

$$dx^k = u^k dt$$

on trouve :

(13) $$u^k u^h \gamma^i_{kh} = 2\Gamma^i + u^i u^k \gamma_k$$

La relation (12) donne les conditions :

(14) $$\gamma^k_{ik} = \gamma^k_{ki} = 0$$

en posant :

$$u^k \gamma_k = \gamma$$

γ étant homogènes et du premier degré en u_k, l'équation (13) s'écrit :

(15) $$u^k u^h \gamma^i_{kh} = 2\Gamma^i + u^i \gamma.$$

Annulons maintenant la composante $\sum_i \Omega^i_i$ de la courbure on trouve :

$$\omega^0_i = \gamma^0_{ik} dx^k$$

avec :

$$\gamma^0_{ik} = \gamma^0_{ki}.$$

Les composantes ω^j_i, ω^0_i du déplacement infinitésimal du repère naturel sont indépendantes des différentielles du^k. De là il résulte que l'on a :

$$\Omega^j_i = S^j_{ikh}[du^h dx^k] + Q^j_{ikh}[dx^k dx^h]$$

où :

$$S^j_{ikh} = \gamma^j_{ikh}$$

sont les composantes réglée de la courbure.

Exprimons que dans le déplacement rattaché à un cycle élémentaire la variation subie par l'élément u^k est indépendante des positions intermédiaires du repère sur le cycle. On a :

$$y^k = u^k \cdot y$$

d'où :

$$\Delta y^k = y \Delta u^k + u^k \Delta y$$

en tenant compte de (11) on trouve :

$$\Delta u^k + u^h \Omega^k_h = u^k \Pi. \tag{16}$$

Il faut que le premier membre de (16) soit indépendant des produits extérieurs en $[du^k\, dx^h]$ ceci donne les conditions :

$$u^k S^i_{khl} = 0$$

ou :

$$u^k \gamma^j_{khl} = 0. \tag{17}$$

Alors les équations (15) avec les conditions (14) et (17) déterminent complètement les γ^k_{ij}, en réalité dérivons la relation (16) par rapport à u^l on trouve :

$$u^k u^h \gamma^i_{khl} + u^h \gamma^i_{lh} + u^k \gamma^i_{kl} = 2\Gamma^i_l + u^i \frac{\partial \gamma}{\partial u^l} + \delta^i_l \gamma$$

$$\delta^i_l = \begin{cases} 1 \text{ si } l = i \\ 0 \text{ si } l \neq i \end{cases}$$

d'où en tenant compte de (17) et de la symétrie des γ^k_{ij} on a :

$$u^k \gamma^i_{kl} = \Gamma^i_l + u^i \frac{\partial \gamma}{\partial u^l} + \delta^i_l \gamma$$

en faisant $l = i$ et en contractant on aura en tenant compte des conditions (14) :

$$\gamma = 0$$

d'où :

$$u^k \gamma^i_{kl} = \Gamma^i_l.$$

Dérivons encore une fois par rapport à u_h on a :

$$u_k \gamma^i_{klh} + \gamma^i_{hl} = \Gamma^i_{lh}$$

d'où en tenant compte de (17) :

$$\gamma^i_{hl} = \Gamma^i_{lh} = \frac{\partial^2 \Gamma^i}{\partial u^h \partial u^l}.$$

Ainsi la connaissance de Γ^i suffit pour la détermination des composantes affines ω^j_i du déplacement infinitésimal du repère naturel. Nous appellerons l'être géométrique Γ^i, le potentiel affine de l'espace.

Il est facile de voir que :

$$S^j_{ikh} = \frac{\partial^3 \Gamma^j}{\partial u^i \partial u^k \partial u^h}$$

entraîne la symétrie par rapport aux indices inférieurs et le tenseur contracté :

$$S^h_{ikh} = \Gamma^h_{ikh} = 0$$

est identiquement nul.

En posant :

$$\Omega^j_i = S^j_{ikh}[du^h dx^k] + Q^j_{ikh}[dx^k dx^h]$$

on a :

$$Q^j_{ikh} = \Gamma^j_{ih/k} - \Gamma^j_{ik/h} + \Gamma^l_{ih}\Gamma^j_{lk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^j_{lh} - \delta^j_h \gamma^0_{ik}$$

(δ^j_h indiquant toujours le nombre de Kronecker) où l'on s'est servi de la convention :

$$F_{/k} = \frac{\partial F}{\partial x^k}.$$

Les quantités Q^j_{ikh} ne forment pas un tenseur mais si l'on pose :

$$Du^i = du^i + u^k \omega^i_k$$

on trouve :

$$\Omega^j_i = S^j_{ikh}[Du^h dx^k] + R^j_{ikh}[dx^k dx^h]$$

où :

$$R^j_{ikh} = Q^j_{ikh} + \Gamma^s_k S^j_{ihs} - \Gamma^s_h S^j_{iks}$$

forment un tenseur.

Annulons maintenant le tenseur contracté :

$$R_{ik} = R^h_{ikh}$$

on trouve :

$$(18) \qquad (n-1)\gamma^0_{ik} = -\Gamma^h_{ik/h} - \Gamma^s_h \Gamma^h_{iks} + \Gamma^l_{ih}\Gamma^h_{lk}.$$

Ainsi la connexion est complètement déterminée d'une manière invariante et intrinsèque. Ce problème constitue la généralisation du problème étudié par M. Cartan en 1924.

47. — Si le potentiel affine Γ^i est une forme homogène et quadratique en u^i on voit que l'on a identiquement :

$$S^j_{ikh} = 0$$

et alors l'espace est ponctuel. Dans ce cas on doit avoir :

$$L^i = \frac{u^i}{u^n} A^n_{kh} u^k u^h + A^i_{kh} u^k u^h$$

$$(i = 1, 2, 3 \cdots n - 1 \qquad k, h = 1, 2, 3 \cdots n)$$

avec les conditions :

$$A^h_{kh} = 0$$

$$A^i_{kh} = A^i_{hk}$$

Si on fait :

$$u^n = 1$$

on voit que les équations différentielles du système engendrant un espace ponctuel sont de la forme :

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x^i}{(dx^n)^2} + A^n_{kh} \dfrac{dx^k}{dx^n} \dfrac{dx^h}{dx^n} \dfrac{dx^i}{dx^n} + 2A^n_{nh} \dfrac{dx^h}{dx^n} \dfrac{dx^i}{dx^n} + A^i_{kh} \dfrac{dx^k}{dx^n} \dfrac{dx^h}{dx^n} + A^n_{nn} \dfrac{dx^i}{dx^n} \\ \qquad + 2A^i_{nh} \dfrac{dx^h}{dx^n} + A^i_{nn} = 0 \\ \qquad (i, k, h = 1, 2, 3 \cdots n - 1). \end{cases}$$

C'est le cas étudié par M. Cartan dans ses *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective.*

On peut voir facilement que dans ce cas la connexion normale définie dans un espace d'éléments-linéaires se confond avec la connexion normale que l'on peut rattacher au système (19). En réalité les conditions :

$$\Omega^i = 0 \qquad \sum_i \Omega^i_i = 0 \qquad R_{ij} = 0 \qquad u^k S^i_{khl} = 0$$

se réduisent à :

$$\Omega^i = 0 \qquad \sum_i \Omega^i_i = 0 \qquad R_{ij} = 0$$

qui sont les conditions de formation de la connexion normale projective dans un espace ponctuel.

CHAPITRE IV

THÉORIE DIFFÉRENTIELLE DES COURBES ET DES SURFACES

48. — Nous supposerons l'espace d'éléments-plans holonome et à trois dimensions.

Une surface étant considérée comme le lieu de ses éléments-plans tangents on voit que le déplacement infinitésimal d'un repère rattaché à un point de la surface est à deux paramètres. Donc on peut appliquer la méthode du repère mobile et généraliser les résultats relatifs à une surface ordinaire pour les surfaces plongées dans un espace d'éléments à connexion projective.

49. — Une ligne sera appelée asymptotique pour une surface si elle admet en chaque point un contact du second ordre avec l'élément plan tangent à la surface en ce point. En se servant d'un repère fondamental (Chap. I, I^re^ partie) par rapport aux variables x, y, z l'équation différentielle des lignes asymptotiques d'une surface s'écrit :

$$(r - \varphi)dx^2 + 2(s - f)dxdy + (t - \psi)dy^2 = 0$$

où r, s, t désignent les dérivées secondes :

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Dans ce qui suit nous supposerons que la surface admet en chaque point deux lignes asymptotiques distinctes.

50. — *Particularisation des repères rattachés à un point de la surface.* — En un point de la surface z, p, q sont fonctions de deux variables indépendantes (par exemple x, y, ou u et v, si la surface est définie paramétriquement). Soit le repère

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} dA &= \omega_0^0 A + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 A_3 \\ dA_1 &= \omega_1^0 A + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 \\ dA_2 &= \omega_2^0 A + \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 \\ dA_3 &= \omega_3^0 A + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 \end{aligned}\right.$$

rattaché à un point A de la surface. Les composantes ω_i^j du déplacement infinitésimal dépendent de deux paramètres essentieles u et v et de dix paramètres inessentiels.

Nous désignerons par le symbole d la variation totale d'une quantité par rapport à tous les paramètres et le symbole δ désignera la variation relative aux paramètres secondaires.

Prenons l'élément-plan $AA_1 A_2$ pour l'élément-plan tangent à la surface on aura :

$$\omega^3 = 0 \tag{2}$$

et en dérivant extérieurement cela donne :

$$[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] = 0$$

d'où d'après le lemme de Cartan :

$$\begin{cases} \omega_1^3 = a_1\omega^1 + a_2\omega^2 \\ \omega_2^3 = a_2\omega^1 + a_3\omega^2 \end{cases} \tag{3}$$

on sait que les quinze formes de Pfaff ω_i^j, ω_i^0, ω^i dépendent de douze paramètres différentiels (du, dv) et les dix différentielles des paramètres secondaires) donc il existe trois relations indépendantes entre ces formes et ce sont précisément les relations (2) et (3). D'autre part ω^1 et ω^2 sont indépendantes l'une de l'autre ~~et indépendantes des différentielles des~~ paramètres secondaires car en fixant le point A on doit avoir :

$$dA = \omega_0^0 A$$

ce qui monte que l'on a :

$$\omega^1(\delta) = \omega^2(\delta) = 0$$

Nous poserons pour faciliter l'écriture :

$$\omega_i^j(\delta) = e_i^j$$

on a donc :

$$e^1 = e^2 = e^3 = e_1^3 = e_2^3 = 0 \tag{4}$$

Ce sont les cinq relations qui doivent exister entre les e_i^j car ces quinze formes dépendent linéairement de dix arbitraires (les différentielles des paramètres secondaires).

51. — *Les repères du premier ordre.* — Cherchons comment varient les coefficients a_1, a_2, a_3 des équations (3) quand on change le repère rattaché au point A (l'origine A restant fixe). Écrivons les équations de la structure de l'espace pour les composantes ω^1, ω^2, ω_1^3, ω_2^3 on a :

$$(5)\quad \begin{cases} (\omega^1)' = [\omega^1(\omega_1^1 - \omega_0^0)] + [\omega^2\omega_2^1] \\ (\omega^2)' = [\omega^1\omega_1^2] + [\omega^2(\omega_2^2 - \omega_0^0)] \\ (\omega_1^3)' = [(\omega_1^1 - \omega_3^3)\omega_1^3] + [\omega_1^2\omega_2^3] \\ (\omega_2^3)' = [\omega_2^1\omega_1^3] + [(\omega_2^2 - \omega_3^3)\omega_2^3]. \end{cases}$$

La première équation développée s'écrit :

$$de^1 - \delta\omega^1 = (\omega_0^0 - \omega_1^1)e^1 + e_2^1\omega^l - (e_0^0 - e_1^1)\omega^1 - e^2\omega_2^1$$

ou en tenant compte de (4) :

$$\delta\omega^1 = (e_0^0 - e_1^1)\omega^1 - e_2^1\omega^2$$

et de même en déceloppant les autres équations aussi on trouve le système :

$$(6)\quad \begin{cases} \delta\omega^1 = (e_0^0 - e_1^1)\omega^1 - e_2^1\omega^2 \\ \delta\omega^2 = e_1^2\omega^1 + (e_0^0 - e_2^2)\omega^2 \\ \delta\omega_1^3 = (e_1^1 - e_3^3)\omega_1^3 + e_1^2\omega_2^3 \\ \delta\omega_2^3 = e_2^1\omega_1^3 + (e_2^2 - e_3^3)\omega_2^3 \end{cases}$$

Dérivons extérieurement les relations (3) en tenant compte de (6) on a :

$$(\delta a^1 + (e_0^0 - 2e_1^1 - e_3^3)a^1 - 2e_1^2a_2)\omega^1 + (\delta a_2 - e_2^1a_1 + (e_0^0 - e_1^1 - e_2^2 + c_3^3)a_2 - e_1^2a_3)\omega^2 = 0$$

$$(\delta a_2 - e_2^1a_1 + (e_0^0 - e_1^1 - e_2^2 - e_3^3)a_2 - e_1^2a_3)\omega^1 + (\delta a_3 - 2e_2^1a_2 + (e_0^0 - 2e_2^2 + c_3^3)a_3)\omega^2 = 0$$

les coefficients de ω^1, ω^2 dans ces écquations sont indépendantes de du, dv et ω^1, ω^2 étant linéairement indépendantes on doit avoir :

$$(7)\quad \begin{cases} \delta a_1 + (e_0^0 - 2e_1^1 + e_3^3)a_1 - 2e_1^2a_2 = 0 \\ \delta a_2 - e_2^1a_1 + (e_0^0 - e_1^1 - e_2^2 + e_3^3)a_2 - e_1^2a_3 = 0 \\ \delta a_3 - 2e_2^1a_2 + (e_0^0 - 2e_2^2 + e_3^3)a_3 = 0 \end{cases}$$

Les coefficients de a_1, a_2, a_3 dans ces équations sont indépendantes et au nombre de quatre (car le coefficient de a_2 dans la seconde équation est la moitié de la somme des coefficients de a_1 et de a_3 respectivement dans la première et la dernière équations) donc on peut choisir les accroissements des paramètres inessentiels tels que trois de ces coefficients s'annulent donc on peut poser :

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 0$$

(Il est intéressant de remarquer que le système (7) engendre le groupe de transformations linéaires qui conservent $(a_2)^2 - a_1 a_3$ à un facteur près). Le cas des surfaces aux asymptotiques doubles étant exclu on a :

$$(a_2)^2 - a_1 a_3 \neq 0$$

Aux relations :

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 0$$

correspondra trois nouvelles relations entre les ω_i^j pour les avoir remarquons que les relations (3) s'écrivent :

$$\omega_1^3 = \omega^2$$
$$\omega_2^3 = \omega^1$$

alors en dérivant extérieurement ces relations on trouve :

$$(8) \qquad \begin{cases} \omega_1^2 = b_0\omega^1 + b_1\omega^2 \qquad \omega_2^1 = b_2\omega^1 + b_3\omega^2 \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_0^0 = 2(b_1\omega^1 + b_2\omega^2) \end{cases}$$

qui sont précisément les relations cherchées.

Donc pour un repère de premier ordre on a :

$$(9) \qquad e^1 = e^2 = e^3 = e_1^3 = e_2^3 = e_1^2 = e_2^1 = e_1^1 + e_2^2 - e_3^3 - e_0^0 = 0$$

ce sont les huit relations indépendantes qui existent entre les quinze formes de Pfaff.

52. — *Les repères du deuxième ordre.* — Les équations du système (6) sont au nombre de (2) maintenant à savoir

$$(10) \qquad \delta\omega^1 = (e_0^0 - e_1^1)\omega^1 \qquad \delta\omega^2 = (e_0^0 - e_2^2)\omega^2$$

Dérivons extérieurement la troisième équation du système (8) en tenant compte de (9) et de (10) on trouve :

$$(2\delta b_1 + 2(e_0^0 - e_1^1)b_1 + e_3^2 - e_1^0)\omega^1 + (2\delta b_2 + 2(e_0^0 - e_2^2)b_2 + e_3^1 - e_2^0)\omega^2 = 0$$

ce qui donne :

$$2\delta b_1 + 2(e_0^0 - e_1^1)b_1 + e_3^2 - e_1^0 = 0$$
$$2\delta b_2 + 2(e_0^0 - e_2^2)b_2 + e_3^1 - e_2^0 = 0$$

les formes $e_0^0 - e_1^1$, $e_3^2 - e_1^0$, $e_0^0 - e_2^2$, $e_3^1 - e_2^0$ sont indépendantes on voit alors qu'en faisant varier les sept paramètres inessentiels b_1 et

b_2 subissent des substitutions linéaires indépendantes on peut donc introduire les deux relations :

$$b_1 = b_2 = 0$$

on a ainsi les repères du deuxième ordre qui dépendent de cinq paramètres inessentiels seulement.

La troisième équation du système (8) s'écrit :

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_0^0 = 0 \tag{11}$$

on a aussi :

$$\begin{cases} \omega_1^3 = \omega^2 \\ \omega_2^3 = \omega^1 \end{cases} \tag{12}$$

La dérivation extérieure du (11) donne en tenant compte de (12)

$$\begin{cases} \omega_3^2 - \omega_1^0 = c_1\omega^1 + c_2\omega^2 \\ \omega_3^1 - \omega_2^0 = c_2\omega^1 + c_3\omega^2 \end{cases} \tag{13}$$

et le système (8) donne :

$$\begin{cases} \omega_1^2 = b_0\omega^1 \\ \omega_2^1 = b_3\omega^2 \end{cases} \tag{14}$$

Les équations (13) sont les deux nouvelles relations entre les ω et on a de même pour e_i^j :

$$e_3^2 = e_1^0 \qquad e_3^1 = e_2^0 \tag{15}$$

53. — *Les repères du troisième ordre.* — Décrivons extérieurement les relations (14) on trouve :

$$\delta b_0 + (e_0^0 - 2e_1^1 + e_2^2)b_0 = 0$$
$$\delta b_3 + (e_0^0 - 2e_2^2 + e_2^1)b_3 = 0$$

les deux formes de Pfaff qui figurent dans ces formules sont indépendantes donc b_0 et b_3 se multiplient par des facteurs quelconques différents du zéro (on a supposé que la surface n'admet pas de singularité au point A, les surface pour lesquelles on a $b_0b_3 = 0$ sont des surfaces R_1 ou R_2 que l'on étudiera plus loin) donc on peut introduire :

$$b_0 = b_3 = 1$$

Ceci fournit les repères du troisième ordre qui dépendent seulement de trois paramètres inessentiels. Pour ces repères les relations (14) s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega^1 \\ \omega_2^1 &= \omega^2 \end{aligned}\right. \tag{16}$$

qui donnent deux nouvelles relations entre les ω_i^j ; en les dérivant extérieurement on a :

$$\left\{\begin{aligned} \omega_0^0 + \omega_2^2 - 2\omega_1^1 &= c_0\omega^1 + (c_1 - R_{112}^2)\omega^2 = c_0\omega^1 + h_1\omega^2 \\ \omega_0^0 + \omega_1^1 - 2\omega_2^2 &= (c_3 - R_{212}^1)\omega^1 + c_4\omega^2 = h_3\omega^1 + c_4\omega^2 \end{aligned}\right. \tag{17}$$

où R_{112}^2 et R_{212}^1 sont les deux composantes Ω_1^2 et Ω_2^1 de la courbure suivant l'élément-plan tangent à la surface (cette courbure étant définie dans un repère du deuxième ordre de la surface). Pour un repère du troisième ordre on a :

$$\left\{\begin{aligned} & e^1 = e^2 = e^3 = e_1^3 = e_2^3 = e_1^1 - e_0^0 = e_2^2 - e_0^0 = e_3^3 - e_0^0 = e_1^2 = e_2^1 = 0 \\ & \qquad\qquad e_3^2 = e_1^0 \qquad e_3^1 = e_2^0 \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Les seules formes de Pfaff e_i^j non-nulles sont e_1^0, e_2^0, e_3^0 et les équations (10) s'écrivent :

$$\delta\omega^1 = 0 \qquad \delta\omega^2 = 0 \tag{19}$$

ainsi pour un repère du 3e ordre ω^1 et ω^2 sont indépendants des paramètres inessentiels.

54. — *Le repère intrinsèque du quatrième ordre.* — En tenant compte des relations (18) et en se servant des équations de la structure de l'espace on trouve :

$$\left\{\begin{aligned} \delta(\omega_1^1 - \omega_0^0) &= 2e_1^0\omega^1 \\ \delta(\omega_2^2 - \omega_0^0) &= 2e_2^0\omega^2 \\ \delta(\omega_3^2 - \omega_1^0) &= 2(e_2^0\omega^1 + e_3^0\omega^2) \\ \delta(\omega_3^1 - \omega_2^0) &= 2(e_3^0\omega^1 + e_1^0\omega^2) \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Dérivons extérieurement les relations (13) nous trouvons :

$$\delta(\omega_3^2 - \omega_1^0) = \delta c^1 \cdot \omega^1 + \delta c^2 \cdot \omega^2$$

$$\delta(\omega_3^1 - \omega_2^0) = \delta c^2 \cdot \omega^1 + \delta c^3 \cdot \omega^2$$

de là on déduit :

$$\delta c_1 = 2e_2^0 \qquad \delta c_2 = 2e_3^0 \qquad \delta c_3 = 2e_1^0$$

e_1^0, e_2^0, e_3^0 étant indépendants on voit que l'on peut introduire encore les relations :

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

et les équations (13) deviennent alors

$$\omega_3^1 = \omega_2^0 \qquad \omega_3^2 = \omega_1^0 \tag{21}$$

Ceci donne trois nouvelles relations entre les ω_i^j mais il est évident que maintenant le repère ne dépend d'aucun arbitraire et les coefficients de ω^1, ω^2 dans ces nouvelles relations sont les invariants de la surface ainsi que les coefficients c_0 et c_4 des relations (17) qui sont complètement définis maintenant.

Posons :

$$c_0 = -3A \qquad c_4 = -3B$$

A et B sont les deux premiers invariants de la surface ; On a :

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_0^0 = 0$$
$$\omega_0^0 + \omega_2^2 - 2\omega_1^1 = -3A\omega^1 - 3\alpha_1\omega^2$$
$$\omega_0^0 + \omega_1^1 - 2\omega_2^2 = -3\alpha_2\omega^1 - 3B\omega^2$$

$3\alpha_1$ et $3\alpha_2$ étant les composantes R_{112}^2 et R_{212}^1 de la courbure de l'espace suivant l'élément-plan tangent à la surface. En résolvant le système précédent on trouve :

$$\omega_1^1 - \omega_0^0 = (2A + \alpha_2)\omega^1 + (B + 2\alpha_1)\omega^2$$
$$\omega_2^2 - \omega_0^0 = (A + 2\alpha_2)\omega^1 + (2B + \alpha_1)\omega^2$$
$$\omega_3^3 - \omega_0^0 = (3A + 3\alpha_4)\omega^1 + (3B + 3\alpha^1)\omega^2$$

Différentions extérieurement les relations (21) on trouve :

$$\left\{\begin{array}{l} [\omega_3^0\omega^1] + [\omega_1^0\omega^2] + \beta\,[\omega^1\omega^2] = 0 \\ [\omega_3^0\omega^2] + [\omega_2^0\omega^1] + \gamma\,[\omega^1\omega^2] = 0 \end{array}\right. \tag{22}$$

où l'on a posé :

$$R_{312}^1 - R_{212}^0 = 2\beta$$
$$R_{312}^2 - R_{112}^0 = 2\gamma$$

les R_{i12}^j représentant les composantes de la courbure de l'espace suivant l'élément-plan tangent à la surface. Les équations (22) donnent :

$$\left\{\begin{array}{l} \omega_1^0 = (D - \beta)u^1 + E\omega^2 \\ \omega_2^0 = F\omega^1 + (\mathcal{C} + \gamma)\omega^2 \\ \omega_3^0 = \mathcal{C}\omega^1 + D\omega^2 \end{array}\right. \tag{23}$$

C, D, E, F sont les quatres autres invariants différentiels de la surface. Les équations (23) sont les trois nouvelles relations entre les ω_j^i qui pour les e_i^j donnent :

$$e_1^0 = e_2^0 = e_3^0 = 0$$

et on voit donc que le repère du quatrième ordre ne dépend d'aucun paramètre inessentiel et est complètement déterminé par la connaissance de son origine A d'une manière intrinsèque.

55. — *Elément linéaire projectif de la surface.* — Les deux formes $\omega^1\omega^2$ et $(\omega^1)^3 + (\omega^2)^3$ (définies dans le repère intrinsèque ou dans un repère du troisième ordre) sont intrinsèques. Elles sont apolaires l'une de l'autre, la première est la forme asymptotique de la surface c'est-à-dire :

$$\omega^1\omega^2 = 0$$

est l'équation différentielle des asymptotiques de la surface. L'espace étant sans torsion les tangentes conjuguées sont réciproques et l'équation :

$$(\omega^1)^3 + (\omega^2)^3 = 0$$

définit les lignes de Darboux sur la surface et ainsi on peut généraliser plusieurs notions de la géométrie projective ordinaire pour les surfaces plongées dans un espace d'éléments-plan à connexion projective normale.

Nous appellerons suivant M. Fubini l'élément linéaire projectif de la surface l'expression :

$$\frac{(\omega^1)^3 + (\omega^2)^3}{\omega^1\omega^2}$$

Pour les variables indépendantes x, y et dans un repère fondamental cet élément linéaire est de la forme :

$$ds = \frac{\mathcal{H}(\nu)(dy - \lambda dx)^3 + \mathcal{H}(\lambda)(dy - \nu dx)^3}{(\lambda - \nu)^2(dy - \lambda dx)(dy - \nu dx)} \tag{24}$$

où λ et ν désignent les racines de l'équation du second ordre :

$$(t - \psi)\rho^2 + 2(s - f)\rho + (r - \varphi) = 0$$

et $\mathcal{H}$ définit l'opération :

$$\mathcal{H}(\rho) = \frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial\rho}{\partial y} - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial q} - 2\rho^2\frac{\partial f}{\partial p} + 2\rho\frac{\partial f}{\partial q} - \rho^3\frac{\partial\psi}{\partial p} + \rho^2\frac{\partial\psi}{\partial q}$$

Pour les surfaces pseudo-développables (les surfaces aux asymptotiques doubles) cet élément linéaire n'existe pas et pour les surfaces R_1 ou R_2 (les surfaces pour lesquelles $b_0 b_3 = 0$) cet élément linéaire a pour le numérateur un cube parfait.

On peut généraliser la propriété d'égalité des éléments linéaires projectifs pour un couple des surfaces projectivement applicables dans un espace d'éléments.

56. — *Les surfaces pseudo-développables aux asymptotiques doubles.* — Ces surfaces sont définies par l'équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$(s - f)^2 - (r - \varphi)(t - \psi) = 0 \tag{25}$$

C'est une équation de Monge. — Ampère aux caractéristiques doubles et on sait que l'intégrale générale d'une telle équation est constituée par l'enveloppe du complexe :

$$F(x, y, z, a, b, c,) = 0$$

dépendant d'un seul paramètre (on pose $b = b(a) c = c(a)$) ce complexe étant l'intégrale générale du système d'équations aux dérivée partielles du second ordre :

$$\begin{aligned} r &= \varphi(x, y, z, p, q) \\ s &= f(x, y, z, p, q) \\ t &= \psi(x, y, z, p, q). \end{aligned}$$

On voit que si l'on définit le plan tangent à une surface par une surface du complexe F ayant un contact du premier ordre avec la surface, les surfaces pseudo-développables sont celles dont le plan tangent dépend d'un seul paramètre et elles ressemblent par cette propriété aux surfaces développables de l'espace ordinaire qui sont les enveloppes des plans dépendant d'un seul paramètre. En définissant de même le plan osculateur à une courbe par la surface du complexe dont le contact avec la courbe est du second ordre on voit que les surfaces pseudo-développables sont les enveloppes des plans osculateurs d'une courbe gauche (non située sur une des surfaces du complexe F = O). En réalité d'après la théorie des enveloppes on sait que l'enveloppe des caractéristiques du complexe :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z, a, b, c,) = 0 \\ b = b(a) \qquad c = c(a) \end{array} \right. \tag{26}$$

est une courbe appelée l'arête de rebroussement de l'enveloppe du complexe (26) et cette courbe a un contact de second ordre avec chacun des complexes (26) de sorte que ces complexes sont les plans osculateurs de l'arêt de rebroussement et par suite la surface pseudo-développable est l'enveloppe des plans osculateurs de cette courbe. Il est intéressant de remarquer que ces caractéristiques sont précisément les asymptotiques d'une surface pseudo-développable de telle sorte que les asymptotiques d'une surface pseudo-développable sont des courbes planes et dépendant de cinq paramètres arbitraires. La troisième définition des surfaces développables n'a pas d'équivalent dans les espaces d'éléments-plans car il n'existe pas des droites dans ces espaces.

57. — *Les surfaces pseudo-réglées R_1 et R_2.* — Supposons que dans la particularisation du repère mobile il arrive que dans la deuxième normalisation du repère on trouve :

$$b_0 b_3 = 0$$

alors la méthode appliquée pour la troisième et la quatrième particularisation n'est plus valable. On aura pour une telle surface (R_1 par exemple) :

$$\omega_1^2 = 0$$
$$\omega_2^1 = \omega^2$$

nous ne pousserons pas plus loin la particularisation du repère mobile pour ces surfaces et nous contenterons de préciser quelques propriétés géométriques de ces surfaces.

En remarquant que :

$$\omega_1^2 = 0$$

il est facile de voir que pour l'asymptotique :

$$\omega^2 = 0$$

on a :

$$dA = \omega_0^0 A + \omega^1 A_1$$
$$d^2A = \left(d\omega_0^0 + (\omega_0^0)^2 + \omega^1\omega_1^0\right)A + \left(d\omega^1 + \omega^1\omega_0^0 + \omega^1\omega_1^1\right)A_1$$

d'où :

$$[A dA d^2A] = 0$$

de telles courbes que nous appellerons les courbes C_1 seront étudiées plus loin par leurs propriétés géométriques, remarquons ici seulement que les asymptotiques $\omega^2 = 0$ des surfaces R_1 ont leurs plans osculateurs stationnaires en tous les points car elles ont un contact de troisième ordre avec le plan tangent à la surface. En réalité il est facile de déduire que l'on a aussi :

$$[AdAd^3A] = 0$$

d'où :

$$d^3A = \alpha A + \beta A_1$$

Pour les surfaces pseudo-réglées R_1 ou R_2 le numéroteur de l'élément linéaire (24) de Fubini est un cube parfait, ainsi l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre de ces surfaces s'écrit :

$$\frac{\partial H}{\partial x} + H\frac{\partial H}{\partial y} = H^3\frac{\partial \psi}{\partial p} + H^2\left(2\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) - H\left(2\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial q} \tag{27}$$

où H désigne l'une des racines de l'équation :

$$(t - \psi)H^2 + 2(s - f)H + r - \varphi = 0 \tag{28}$$

Si toutes les deux racines de (28) conviennent à (27) on trouve les surfaces qui généralisent les surfaces biréglées de l'espace ordinaire.

Les surfaces pseudo-réglées R_1 ou R_2 dépendent de trois fonctions arbitraires d'un argument. En réalité considérons le système de Pfaff :

$$\left\{\begin{aligned} \omega^3 &= 0 \\ \omega_1^3 &= \omega^2 \\ \omega_2^3 &= \omega^1 \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3 &= 0 \\ \omega_1^2 &= 0 \\ \omega_2^1 &= \omega^2 \end{aligned}\right. \tag{29}$$

en formant les covariants bilinéaires de ces formes, les trois premiers s'annulent identiquement en vertu du système (29) lui-même et les trois dernières donnent :

$$\left\{\begin{aligned} (\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3 &= 2\left[(\omega_1^0 - \omega_3^2)\omega^1\right] + 2\left[(\omega_2^0 - \omega_3^1)\omega^2\right] \\ (\omega_1^2)' &= \left[(\omega_1^0 - \omega_3^2)\omega^2\right] + R_{112}^2\left[\omega^1\omega^2\right] \\ -(\omega^2)' + (\omega_2^1)' &= \left[(\omega_2^0 - \omega_3^1)\omega^1\right] + \left[(2\omega_2^2 - \omega_1^1)\omega^2\right] + R_{212}^1\left[\omega^1\omega^2\right] \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Le système (30) montre que le système (29) est en involution par rapport à ω^1 et ω^2 et que son intégrale général (à deux dimensions) dépend de trois fonctions arbitraires d'un argument.

58. — L'espace étant un lieu d'éléments-plans les courbes sont considérées comme des multiplicité de Lie (l'ensemble d'une courbe et de ses éléments plans tangents).

Nous dirons qu'un élément plan est tangent à la courbe s'il a un contact de premier ordre avec la courbe, ainsi dans le repère .

$$(31) \qquad \begin{cases} dA = \omega_0^0 A + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 A_3 \\ dA_1 = \omega_1^0 A + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 \\ dA_2 = \omega_2^0 A + \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 \\ dA_3 = \omega_3^0 A + \omega_3^1 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 \end{cases}$$

si on prend l'élément-plan $AA_1 A_2$ pour l'élément-plan tangent à la courbe on aura :

$$\omega^3 = 0$$

Nous définirons de même un élément plan osculateur à la courbe par un élément plan ayant un contact du second ordre avec la courbe ainsi si l'élément plan $AA_1 A_2$ est osculateur à la courbe on aura pour le repère (31) :

$$\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 = 0$$

ainsi dans un repère fondamental le système :

$$(32) \qquad \begin{cases} \omega^3 = 0 \\ \omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 = 0 \end{cases}$$

définit bien l'élément plan osculateur à la courbe et ainsi les paramètres p et q sont parfaitement déterminés en fonction de t (paramètre essentiel de la courbe). Nous supposerons désormais que le repère (31) est un repère défini par l'élément plan osculateur à la courbe.

59. — *Les repères du premier ordre.* — La direction $[AdA]$ est la direction tangente à la courbe et c'est évident qu'elle est dans l'élément plan osculateur de la courbe.

Dérivons extérieurement la première équation du système (32) on trouve :

$$(33) \qquad \begin{cases} \omega_1^3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2 \\ \omega_2^3 = \beta\omega^1 + \gamma\omega^1 \end{cases}$$

ces deux relations avec la première du système (32) constituent les relations qui existent entre les ω_i^j.

Prenons le point A_1 sur la direction [A dA] on aura :

$$\omega^2 = 0$$

et on a ainsi les repères du premier ordre. En dérivant extérieurement la dernière équation on a :

$$\omega_1^2 = \gamma_1 \omega^1$$

(Si $\gamma_1 = 0$ la courbe est telle que l'on a :

$$[A dA d^2 A] = 0$$

ce sont les courbes $\mathcal{C}_1$) et les relations (33) s'écrivent :

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_1^3 &= \alpha \omega^1 \\ \omega_2^3 &= \beta \omega^1 \end{aligned} \right.$$

mais la deuxième équation du système (33) donne :

$$\alpha = 0$$

d'où pour un repère du premier ordre on a :

$$(35) \qquad \omega^2 = \omega^3 = \omega_1^3 = 0 \qquad \omega_1^2 = \gamma_1 \omega^1 \qquad \omega_2^3 = \beta \omega^1$$

avec :

$$e^1 = e^2 = e^3 = e_1^3 = e_2^3 = e_1^2 = 0$$

(comme dans la théorie des surfaces les e_i^j sont pris pour ω_i^j (δ)). Le tableau des composantes du déplacement infinitésimal relatif s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1^0 & e_1^1 - e_0^0 & 0 & 0 \\ e_2^0 & e_2^1 & e_2^2 - e_0^0 & 0 \\ e_3^0 & e_3^1 & e_3^2 & e_3^3 - e_0^0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\delta \omega^1 = -(e_1^1 - e_0^0) \omega^1.$$

60. — *Les repères du second ordre.* — Cherchons comment varient γ_1 et β dans le déplacement relatif du repère. Dérivons extérieurement les deux dernières relations du système (35) en tenant compte de (35) on trouve :

$$\gamma_1 \left[\omega^1 (\omega_2^2 - \omega_1^1) \right] = \left[d\gamma_1 \omega^1 \right] + \gamma_1 \left[\omega^1 (\omega_1^1 - \omega_0^0) \right]$$
$$\beta \left[\omega^1 (\omega_3^3 - \omega_2^2) \right] = \left[d\beta \omega^1 \right] + \beta \left[\omega^1 (\omega_1^1 - \omega_0^0) \right]$$

d'où :

$$-d\gamma_1 + (2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_0^0)\gamma_1 = \lambda\omega^1$$
$$-d\beta + (\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3)\beta = \mu\omega^1$$

ce qui donne pour le déplacement relatif :

$$\delta\gamma_1 - (2e_1^1 - e_2^2 - e_0^0)\gamma_1 = 0$$
$$\delta\beta - (e_1^1 + e_2^2 - e_0^0 - e_3^3)\beta = 0$$

on peut donc introduire les relations :

$$\beta = 1$$
$$\gamma_1 = 1$$

(si on a $\beta = 0$ les courbes sont planes c'est-à-dire sont situées sur une surface des complexes $F = O$) et on aura :

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega_1^3 = 0 \qquad \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega^1 \tag{36}$$

avec :

$$\begin{cases} 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_0^0 = \lambda\omega^1 \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3 = \mu\omega^1. \end{cases} \tag{37}$$

Le tableau des composantes du déplacement infinitésimal du repère s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1^0 & e_1^1 - e_0^0 & 0 & 0 \\ e_2^0 & e_2^1 & 2(e_1^1 - e_0^0) & 0 \\ e_3^0 & e_3^1 & e_3^2 & 3(e_1^1 - e_0^0) \end{pmatrix}$$

qui dépend de six paramètres. On a :

$$\delta\omega^1 = -(e_1^1 - e_0^0)\omega^1.$$

61. — *Les repères du troisième ordre.* — Dérivons extérieurement les relations (37) en tenant compte de (36) on trouve :

$$d\lambda - \lambda(\omega_1^1 - \omega_0^0) - (\omega_3^2 - 3\omega_2^1 + 3\omega_1^0) = -\rho\omega^1$$
$$d\mu - \mu(\omega_1^1 - \omega_0^0) + 2(\omega_3^2 - \omega_1^0) = 2\nu\omega^1$$

ce qui donne :

$$\delta\lambda - \lambda(e_1^1 - e_0^0) - (e_3^2 - 3e_2^1 + 3e_1^0) = 0$$
$$\delta\mu - \mu(e_1^1 - e_0^0) + 2(e_3^2 - e_1^0) = 0$$

donc on peut introduire les relations :

$$\lambda = \mu = 0$$

et on aura :

$$(38) \qquad \begin{cases} \omega_3^2 - 3\omega_2^1 + 3\omega_1^0 = \rho\omega^1 \\ \omega_3^2 - \omega_1^0 = \nu\omega^1 \end{cases}$$

et les repères du troisième ordre seront donnés par :

$$(39) \qquad \begin{cases} \omega^2 = \omega^3 = \omega_1^3 = 0 \qquad \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega^1 \qquad 2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_0^0 = 0 \\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_0^0 - \omega_3^3 = 0 \end{cases}$$

avec pour e_i^j :

$$e^1 = e^2 = e^3 = e_1^3 = e_2^3 = e_1^2 = 0 \qquad e_1^1 - e_0^0 = \frac{e_2^2 - e_0^0}{2} = \frac{e_3^3 - e_0^0}{3}$$

$$e_3^2 = e_1^0 \qquad e_3^1 = e_2^0$$

Le tableau des composantes du déplacement infinitésimal s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1^0 & e_1^1 - e_0^0 & 0 & 0 \\ e_2^0 & \frac{4}{3}e_1^0 & 2\left(e_1^1 - e_0^0\right) & 0 \\ e_3^0 & e_3^1 & e_1^0 & 3\left(e_1^1 - e_0^0\right) \end{pmatrix}$$

qui dépend de cinq paramètres. On a :

$$\delta\omega^1 = -\left(e_1^1 - e_0^0\right)\omega^1$$

62. — *Les repères du quatrième ordre.*—Dérivons extérieurement les relations (38) en tenant compte de (39) on trouve :

$$d\nu - 2\nu\left(\omega_1^1 - \omega_0^0\right) - \left(\omega_3^1 + \omega_2^0\right) = -2\sigma_1\omega^1$$
$$d\rho - 2\rho\left(\omega_1^1 - \omega_0^0\right) - 4\left(\omega_3^1 - \omega_2^0\right) = -8\tau_1\omega^1$$

d'où :

$$\delta\nu - 2\nu\left(e_1^1 - e_0^0\right) - \left(e_3^1 + e_2^0\right) = 0$$
$$\delta\rho - 2\rho\left(e_1^1 - e_0^0\right) - 4\left(e_3^1 - e_2^0\right) = 0$$

on peut donc introduire encore les relations :

$$\nu = \rho = 0$$

ce qui donne :

$$\omega_3^1 + \omega_2^0 = 2\sigma_1\omega^1 \qquad \omega_3^1 - \omega_2^0 = 2\tau_1\omega^1$$

supposons $\sigma_1\tau_1 \neq 0$ on trouve :

$$(40) \qquad \begin{cases} \omega_3^1 = \sigma\omega^1 \\ \omega_2^0 = \tau\omega^1 \end{cases}$$

Les repères du quatrième ordre sont définis par :

$$(41) \qquad \begin{cases} \omega^2 = \omega^3 = \omega_1^3 = 0 \quad \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega^1 \quad \omega_1^1 - \omega_0^0 = \dfrac{\omega_2^2 - \omega_0^0}{2} = \dfrac{\omega_3^3 - \omega_0^0}{3} \\ \omega_2^1 = \dfrac{4}{3}\omega_1^0 \qquad \omega_3^2 = \omega_1^0 \end{cases}$$

Le tableau des composantes du déplacement infinitésimal relatif du repère s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1^0 & e_1^1 - e_0^0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}e_1^0 & 2\left(e_1^1 - e_0^0\right) & 0 \\ e_3^0 & 0 & e_1^0 & 3\left(e_1^1 - e_0^0\right) \end{pmatrix}$$

qui dépend des trois paramètres. On a :

$$\delta\omega^1 = -\left(e_1^1 - e_0^0\right)\omega^1$$

63. *Les repères du cinquième ordre.* — Dérivons extérieurement les relations (40) en tenant compte de (41) on trouve :

$$d\sigma - 3\sigma\left(\omega_1^1 - \omega_0^0\right) - e_3^0 = -\theta_1\omega^1$$
$$d\tau - 3\tau\left(\omega_1^1 - \omega_0^0\right) + e_3^0 = \varpi_1\omega^1$$

ou pour le déplacement relatif :

$$\delta\sigma - 3\sigma\left(e_1^1 - e_0^0\right) - e_3^0 = 0$$
$$\delta\tau - 3\tau\left(e_1^1 - e_0^0\right) + e_3^0 = 0$$

on peut introduire alors les relations :

$$\sigma = \tau = 1$$

ce qui donne :

$$\omega_3^1 = \omega_2^0 = \omega^1$$

et d'où :

$$(42) \qquad \begin{cases} \omega_3^0 = \theta\omega^1 \\ \omega_1^1 - \omega_0^0 = \eta\omega^1 \end{cases}$$

en remarquant alors que l'on a :

$$e_1^1 - e_0^0 = 0$$

on voit que :

$$\delta\omega^1 = 0$$

ω^1 est parfaitement déterminé en fonction de paramètre essentiel t et il fournit l'arc projectif osculateur de la courbe (relatif à l'élément plan osculateur).

Pour les repères du cinquième ordre on a :

$$(43) \qquad \begin{cases} \omega^2 = \omega^3 = \omega_1^3 = 0 \qquad \omega_1^2 = \omega_2^3 = \omega_3^1 = \omega_2^0 = \omega^1 \\ \omega_1^1 - \omega_0^0 = \dfrac{\omega_2^2 - \omega_0^0}{2} = \dfrac{\omega_3^3 - \omega_0^0}{3} \quad \omega_3^2 = \omega_1^0 \quad \omega_2^1 = \dfrac{4}{3}\,\omega_1^0 \end{cases}$$

avec pour le tableau des composantes infinitésimal du déplacement relatif :

$$(44) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{3}\,e_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1^0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui dépend d'un seul arbitraire.

64. *Le repère intrinsèque de sixième ordre.* — Dérivons extérieurement la relation :

$$\omega_1^1 - \omega_0^0 = \eta\omega^1$$

on trouve :

$$d\eta - \frac{2}{3}\,\omega_1^0 = \zeta\omega^1$$

d'où :

$$\delta\eta = \frac{2}{3}\,e_1^0$$

on peut poser donc :

$$\eta = 0$$

ce qui donne :

$$\omega_1^1 - \omega_0^0 = \omega_2^2 - \omega_0^0 = \omega_3^3 - \omega_0^0 = 0$$

et la relation :

$$\omega_3^0 = \theta\omega^1$$

montre que :

$$\theta = a$$

est un invariant de la courbe. En dérivant la relation :

$$\omega_1^1 - \omega_0^0 = 0$$

on trouve :

$$\omega_1^0 = 3b\omega^1$$

b étant le deuxième invariant de la courbe, e_1^0 étant nul on voit que la matrice du tableau (44) est identiquement nulle et le repère du sixième ordre ne dépend d'aucun arbitraire.

On a ainsi les formules de Frenet généralisées :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dA}{d\sigma} &= A_1 \\ \frac{dA_1}{d\sigma} &= 3bA + A_2 \\ \frac{dA_2}{d\sigma} &= A + 4bA_1 + A_3 \\ \frac{dA_3}{d\sigma} &= aA + A_1 + 3bA_2 \end{aligned}\right.$$

où :

$$\omega^1 = d\sigma$$

est l'élément d'arc projectif osculateur de la courbe.

65. — Supposons que pour une courbe ont ait :

$$[AdAd^2A] = 0$$

on a vu que dans ce cas on aura :

$$\omega_1^2 = 0$$

et la particularisation du repère monile ne peut pas être suivie comme pour une courbe ordinaire. Le plan osculateur d'une courbe étant défini par le système :

$$(45) \qquad \left\{\begin{aligned} \omega^3 &= 0 \\ \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

il est facile de montrer que de telles courbes ont un contact du troisième ordre avec leur plan osculateur. En réalité on a :

$$dA = \omega_0^0 A + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 + \omega^3 A_3$$

$$d^2A = (\ )A + (\ )A_1 + (\ )A_2 + (d\omega^3 + \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 + \omega^3\omega_3^3)A_3$$

le système (45) montre bien que l'élément-plan $AA_1\,A_2$ est osculateur à la courbe et on a :

$$d^2A = (\ )A + (d\omega^1 + \omega^1\omega_1^1 + \omega^2\omega_2^1)A_1 + (d\omega^2 + \omega^1\omega_1^2 + \omega^2\omega_2^2)A_2$$

où ω_1^1, ω_2^2, ω_3^3 représentent les différences $\omega_1^1 - \omega_0^0$, $\omega_2^2 - \omega_0^0$, $\omega_3^3 - \omega_0^0$

La condition :

$$[\mathrm{A}d\mathrm{A}d^2\mathrm{A}] = 0$$

s'exprime par :

$$\omega^2(d\omega^1 + \omega^1\omega_1^1 + \omega^2\omega_2^1) - \omega^1(d\omega^2 + \omega^1\omega_1^2 + \omega^2\omega_2^2) = 0 \tag{46}$$

Cherchons l'expression $d^3\mathrm{A}$ on a :

$$d^3\mathrm{A} = (\quad)\mathrm{A} + (\quad)\mathrm{A}_1 + (\quad)\mathrm{A}_2 + \left[\omega_1^3(d\omega^1 + \omega^1\omega_1^1 + \omega^2\omega_2^1) + \omega_2^3(d\omega^2 + \omega^1\omega_1^2 + \omega^2\omega_2^2)\right]\mathrm{A}_3$$

en tenant compte de (45) et (46) on voit que le coefficient de A_3 dans $d^3\mathrm{A}$ est identiquement nul donc les courbes C^1 ont un contact de troisième ordre avec leurs plans osculateurs.

Considérons le repère dualistique du repère (31) défini par les plans :

$$\mathrm{P} = [\mathrm{A}\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2] \qquad \mathrm{P}_1 = [\mathrm{A}\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3] \qquad \mathrm{P}_2 = [\mathrm{A}\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3] \qquad \mathrm{P}_3 = [\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3]$$

les courbes C_1 sont définies par :

$$[\mathrm{P}d\mathrm{P}d^2\mathrm{P}] = 0$$

ce qui exprime que les plans osculateurs infiniment voisins :

$$\mathrm{P} + d\mathrm{P} \qquad \mathrm{P} + d\mathrm{P} + \frac{1}{2}\,d^2\mathrm{P}$$

ont une même direction commune avec le plan osculateur P ; alors en remarquant que la direction (P dP) est la direction tangente du caractéristique de plan osculateur on voit que les courbes $\mathcal{C}_1$ ont un contact du second ordre avec les caractéristiques de leurs plans osculateurs. Ceci est un résultat bien connu de la théorie des enveloppes en réalité en considérant l'enveloppe des plans osculateurs d'une courbe C^1 l'arête de rebroussement de cette enveloppe est la courbe C_1 elle-même et elle doit avoir un contact du second ordre avec la caractéristique ayant un contact du troisième ordre avec les surfaces enveloppantes.

66. — Si dans la particularisation du repère mobile il arrive que l'on trouve :

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0$$

on sait que la courbe est plane. Ainsi les courbes sont telles que leurs plans osculateurs les contiennent. Dans ce cas si l'élément plan $AA_1\,A_2$ est pris pour l'élément plan osculateur de la courbe les variations des points A, A_1, A_2 sont toujours dans l'élément plan osculateur et on a :

$$\begin{aligned} dA &= \omega_0^0 A + \omega^1 A_1 + \omega^2 A_2 \\ dA_1 &= \omega_1^0 A + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 \\ dA_2 &= \omega_2^0 A + \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2. \end{aligned}$$

Il est facile de poursuivre la particularisation du repère mobile pour ses courbes, nous nous contenterons seulement d'indiquer ici le tableau des composantes du déplacement infinitésimal du repère intrinsèque qui est du sixième ordre :

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & 0 \\ a\omega^1 & 0 & \omega^1 \\ \omega^1 & a\omega^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\omega^1 = d\sigma$ étant l'élément d'arc projectif (osculateur) de la courbe et (a) étant son seul invariant projectif.

67. — Si dans la quatrième particularisation du repère mobile il arrive qu'on trouve :

$$\omega_2^0 = \omega_3^1 = 0$$

il est facile de voir que la dérivation extérieure de ses relations donne encore :

$$\omega_3^0 = \theta\omega^1$$

si alors $0 \neq$ on peut pousser encore plus loin la particularisation du repère mobile et poser :

$$\omega_3^0 = \omega^1$$

on aura ainsi de même :

$$\omega_1^0 = 3b\omega^1$$

b étant l'invariant de la courbe, les courbes telles que :

$$\omega_3^0 = \omega^1 \qquad \omega_3^1 = \omega_2^0 = 0$$

généralisent les courbes de l'espace projectif ordinaire ayant pour tangente les droites d'un complexe linéaire.

S'il arrive que dans la quatrième particularisation du repère mobile on trouve $\omega_3^0 = \omega_3^1 = \omega_2^0 = 0$ on ne peut pousser plus loin la particularisation du repère mobile et tous les repères du quatrième ordres ont équivalents. Ces courbes admettent ∞^3 correspondances ponctuelles qui laissent invariantes les propriétés géométriques locales de la courbe et qui forment un groupe.

Les courbes telles que :

$$\omega_3^0 = \omega_3^1 = \omega_2^0 = 0$$

généralisent les cubiques gauches de l'espace projectif ordinaire.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

CARTAN (E.), Sur les variétés à connexion projective (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLII, fasc. II, 1924).

CARTAN (E.), Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective (*Cahiers scientifiques*, Gauthiers-Villars).

CARTAN (E.), Méthode du repère mobile (*Actualités scientifiques et techniques*, Hermann).

CARTAN (E.), Leçons sur les invariants intégraux (Hermann).

CARTAN (E.), Sur l'intégration des systèmes d'équation aux différentielles totales (*Ann. sci; de l'Ec. norm. sup.*, 1901).

CARTAN (E.), Sur la structure des groupes infinis (*Ann. Sci. de l'Ec. norm. sup.* 1904).

GOURSAT (E.), Leçons sur le problème de Pfaff (Gauthier-Villars).

J. M. THOMAS, Differential systems (*American Math. soc. Colloquium, Publications*, XXI, 1937).

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1
CHAP. I. — Les espaces d'éléments-plan à trois dimensions 3
CHAP. II. — Le cas de l'espace ponctuel 31
CHAP. III. — 39
CHAP. IV. — Théorie différentielle des courbes et des surfaces 63
BIBLIOGRAPHIE 85

Saint-Amand (Cher), France. — Imprimerie R. BUSSIÈRE. — 2-7-1937