A. FOUILLADE

Recherches sur l'itération des substitutions fonctionnelles linéaires

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1937
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1937__194__1_0>

Série A N° :

N° d'ordre :

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

A. FOUILLADE

1re Thèse. — **Recherches sur l'itération des substitutions fonctionnelles linéaires.**

2me Thèse. — **Sur les principes de la dynamique classique.**

Soutenues le 1937 devant la Commission d'examen :

MM. BOULIGAND, Président,
GOT } Examinateurs.
PONCIN }

Faculté des Sciences de l'Université de Poitiers

Doyen :	M. A. BILLARD, Zoologie.
Professeurs honoraires :	MM. LEBESGUE, DANGEARD, DRACH, FRÉCHET, GARNIER, MAIGE, REBOUL.
Professeurs :	MM. A. TURPAIN, Physique.
	F. BODROUX, Chimie.
	F. TABOURY, Chimie.
	G. BOULIGAND, Calcul différentiel et intégral.
	A. GRUMBACH, Physique.
	P. BECQUEREL, Botanique.
	E. PATTE, Géologie et minéralogie.
	TH. GOT, Mécanique rationnelle.
	H. PONCIN, Mécanique rationnelle.
Secrétaire :	M. S. BESSE.

RECHERCHES

SUR

L'ITÉRATION DES SUBSTITUTIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES

PAR

A. FOUILLADE

BRUXELLES

MARCEL HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

112, Rue de Louvain, 112

—

1937

Extrait des Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége,
4e série, tome II.

A MESSIEURS JACQUES HADAMARD ET HENRI LEBESGUE,

A MONSIEUR MAURICE FRÉCHET,

A MONSIEUR GEORGES BOULIGAND,

Hommage respectueux.

PREMIÈRE THÈSE

RECHERCHES

SUR

L'ITÉRATION DES SUBSTITUTIONS

FONCTIONNELLES LINÉAIRES

INTRODUCTION

I. En publiant ce travail, je tiens à exprimer d'abord à mon Maître, M. Georges Bouligand, ma profonde reconnaissance : d'une part, son enseignement suggestif donnant le goût de la recherche, ses précieux conseils prodigués au cours de fréquents entretiens m'ont été d'un secours inestimable; d'autre part, j'ai été constamment stimulé par ses encouragements et cette extrême bienveillance qui lui vaut toujours la respectueuse affection de ses élèves.

Je dois remercier aussi tout particulièrement M. de La Vallée Poussin, qui a bien voulu, soit en correspondant avec moi, soit en m'accordant plusieurs aimables et fructueux entretiens, me donner de précieuses indications et faciliter considérablement la mise au point du chapitre II. En outre, mon travail n'a été possible que grâce à ses importants travaux sur les fonctions d'ensemble.

M. Maurice Fréchet a eu l'amabilité de s'intéresser à

mes efforts et de me présenter des observations qui m'ont été très profitables. Pour hâter mes recherches, il a bien voulu me communiquer des manuscrits ou des épreuves relatifs aux problèmes auxquels je désirais apporter ma modeste contribution. Je lui en exprime ma vive gratitude.

La possibilité matérielle de ce travail m'a été fournie par une bourse de la Caisse Nationale des Sciences, et je ne saurais trop remercier le Conseil de la Section de Mathématiques, qui m'a fait l'honneur de me faire confiance pendant trois ans. En outre, c'est une subvention du Conseil de l'Université de Poitiers qui m'a permis d'aller en Belgique, profiter pendant quelque temps de la science de M. de La Vallée Poussin. Je lui en suis vivement reconnaissant.

M. Lucien Godeaux, dont j'ai déjà pu apprécier l'amabilité pendant mon séjour en Belgique, a bien voulu présenter ce mémoire à la Société Royale des Sciences de Liége, de concert avec M. Fl. Bureau. Je les prie d'agréer mes très vifs remercîments et de bien vouloir transmettre ceux-ci aux membres de la Société Royale.

II. Ce mémoire est issu des considérations suivantes, lesquelles ont leur origine dans une note de M. Bouligand aux *Comptes rendus*, note citée plus loin (cf. p. 4).

Soit un domaine Ω que nous supposons plan pour fixer les idées. Donnons-nous une fonction $F(P)$ continue dans Ω et sur la frontière Σ de Ω. Supposons qu'à chaque point P de $\Omega + \Sigma$ soit attachée une fonction positive d'ensemble $K(P, e)$. Soit la transformation (S) définie par l'intégrale de Stieltjes-Radon

$$\text{(S)} \qquad F_1(P) = \int_\Omega F(M)\, d_M K(P, e).$$

C'est une transformation fonctionnelle qui est continue avec la notion de distance correspondant à la convergence uniforme. Supposons, de plus, que cette transformation conserve l'unité, les valeurs périphériques et la continuité dans $\Omega + \Sigma$, ceci signifiant que $F_1(M)$ est continue si $F(M)$ l'est : l'opération précédente sera dite *substitution linéaire de la « classe* Γ ».

Cette opération peut être effectuée sur la fonction continue $F_1(M)$, ce qui donne $F_2(M)$, puis sur $F_2(M)$, et ainsi de suite : nous définissons ainsi les fonctions itérées de $F(M)$ au moyen de (S), fonctions qui constituent une suite indéfinie de fonctions continues. Dès lors se pose le problème de la convergence de cette suite, et éventuellement celui de la continuité de la fonction limite (en particulier sur la frontière).

Supposons que la suite $\{F_n(M)\}$ converge d'une certaine manière vers une fonction $\mathfrak{F}(M)$ et que (S) soit continue avec la notion de distance qui correspond à cette convergence : $\mathfrak{F}(M)$ est alors une fonction invariante par la transformation (S). C'est à-dire que $\mathfrak{F}(M)$ est solution de l'équation intégrale homogène

$$\mathfrak{F}(P) = \int_{\Omega} \mathfrak{F}(M)\, d_M K(P, e).$$

Un cas très important, où la convergence des itérées est réalisée, est celui où la substitution (S) est une MÉDIATION. Dans ce cas, (S) s'exprime par une intégrale de Lebesgue :

$$(\mathfrak{M}) \qquad F_1(P) = \int_{\Omega} F(M)\, k(P, M)\, dM.$$

$k(P, M)$ est une fonction égale à 0 lorsque M est hors d'un cercle c_p, défini ci-après, et égale à $\frac{1}{\pi\rho^2}$ lorsque M est intérieur à ce cercle. Ce cercle c_p a pour centre P, et son rayon ρ peut égaler la plus courte distance de P à Σ.

Les médiantes itérées de F(M) *convergent vers une limite qui est la solution du problème de Dirichlet généralisé, attachée aux valeurs périphériques de* F(M). *La fonction limite, comme toute fonction harmonique, est invariante par la médiation* ($\mathfrak{M}$) [a].

Ce nouvel aspect fécond du principe de Dirichlet a été révélé par M. Lebesgue [a].

Imaginons que la convergence des itérées de F(M) soit réalisée dans le cas d'une substitution de la classe Γ, par exemple, ainsi que M. Bouligand l'a signalé [b], quand les polynômes à coefficients positifs sont majorés dans la région des coordonnées positives où nous supposons prendre le domaine Ω. Nous obtenons des fonctions limites non harmoniques, et ceci constitue une extension fort large du principe de Dirichlet.

---

[a] HENRI LEBESGUE, *Comptes Rendus*, 154, 1912, p. 335.
F. W. PERKINS, *Comptes Rendus*, 184, 1927, p. 182.

[b] G. BOULIGAND, *Comptes Rendus*, 184, 1927, pp. 430 431. — Cette note étant à l'origine de nos recherches, nous citons tout entière la partie utilisée dans ce travail.

« Dans une note récente, M. F. W. Perkins a prouvé la convergence des médiantes itérées d'une fonction F(M) continue dans un domaine et sur sa frontière vers la solution du problème de Dirichlet attaché aux valeurs périphériques de F(P). On peut remplacer la médiation par une substitution fonctionnelle linéaire conservant la continuité dans le domaine et sur sa frontière, conservant les valeurs à la frontière, conservant l'unité, et majorant les polynômes à coefficients positifs dans la région des coordonnées positives où nous prenons notre domaine; *par exemple*, cette substitution peut consister en une médiation dans un volume associé à P, ayant les éléments de symétrie d'un ellipsoïde de centre P, d'axes parallèles à ox, oy, oz (volume astreint à être intérieur au domaine et à ne s'annuler en aucun point intérieur). Cette idée peut d'ailleurs être variée de nombreuses manières, sur lesquelles il serait superflu d'insister. On étend ainsi le principe de Dirichlet au delà du cadre des équations aux dérivées partielles. »

III. — La fonction positive d'ensemble $K(P, e)$ définit une répartition massique, de masse totale égale à 1, attachée à chaque point P de $\Omega + \Sigma$, et entièrement située sur $\Omega + \Sigma$. C'est là la condition de la conservation de l'unité. Par la suite nous aurons souvent l'occasion d'abandonner l'hypothèse de la conservation de la continuité, ainsi que celle de la conservation des valeurs périphériques, et de remplacer par un ensemble fermé borné E la réunion de Ω et de sa frontière.

Sous des conditions fort larges, on peut définir les transformations $S^2, S^3 \ldots S^n \ldots$ qui permettent le passage direct de $F(P)$ aux $F_n(P)$. Cela, en prolongeant l'idée de puissance d'une substitution finie, introduit, pour chaque point P, des fonctions d'ensemble $K_2(P, e)$, $K_3(P, e)$, ... $K_n(P, e)$ telles que l'on ait

$$(S^n) \qquad F_n(P) = \int_E F(M) d_M K_n(P, e).$$

Le problème de la convergence de la suite $\{F_n\}$ revient à celui de la limite des répartitions successives de masses attachées, d'après ce procédé, à un même point P. Le passage de $K_n(P, e)$ à $K_{n+1}(P, e)$ se fait au moyen d'une transformation fonctionnelle linéaire des fonctions positives d'ensemble, qui est dite *associée* à la transformation (S). Cette opération associée est, au point de vue intuitif, la limite de l'opération qui, après avoir divisé Ω en éléments très petits, répartit la masse $K_n(P, d\sigma_M)$ de chaque élément $d\sigma_M$ proportionnellement à $K(M, e)$ et totalise les répartitions relatives à chaque élément.

IV. Revenons aux substitutions de la classe Γ; dans des cas très étendus, étudiés au chapitre VI, on montre que *les masses de* $K_n(P, e)$ *se concentrent sur* Σ, *pour n infini,* *et que, si* $F_n(M)$ *a une limite, celle-ci dépend seulement d'un ensemble de valeurs de la fonction initiale sur* Σ, c'est-à-dire est indépendante des valeurs de $F(P)$ à l'intérieur de Ω.

C'est dans ces conditions, réalisées par les médiations, que l'on obtient une véritable généralisation du principe de Dirichlet.

Mais on peut facilement imaginer des circonstances qui empêchent les phénomènes précédents de se produire. Par exemple, soit un ensemble $E \subset \Omega$ et tel que $\overline{E}$ soit disjoint de Σ; supposons que pour tout point P de E on ait $K(P, CE) = 0$ (c). Si $K_n(P, e)$ a une limite, celle-ci est nulle sur $C\overline{E}$, et en particulier sur Σ. Un ensemble tel que E sera dit *ensemble indépendant par rapport à* (S). Si E est fermé, tout problème relatif à (S) peut et doit se traiter dans E indépendamment de ce qui se passe dans CE, puisque ceci n'est jamais influencé par ce qui se produit dans E. On pressent qu'il doit être d'une particulière importance de savoir éventuellement qu'un certain ensemble indépendant ne contient pas deux ensembles indépendants disjoints. Un tel ensemble sera dit INDÉCOMPOSABLE.

L'introduction directe de ces notions facilite l'étude de l'itération des transformations fonctionnelles linéaires, ou tout au moins fournit, ainsi que nous le verrons, *une interprétation causale de théorèmes de structure, d'existence et d'unicité*. Dans nos recherches, il nous a paru indispensable d'envisager avec soin le cas des substitutions finies, c'est-à-dire des *substitutions de l'algèbre qui portent sur un nombre fini de variables indépendantes*. On peut alors souvent obtenir, par un passage du fini à l'infini,

---

(c) Dans la suite, nous désignons toujours la fermeture d'un ensemble E par $\overline{E}$, et son complémentaire par CE.

des résultats valables dans le cas fonctionnel : la théorie de Fredholm en est la meilleure illustration; on peut aussi, nous le verrons, trouver des propriétés générales communes aux substitutions finies et à certaines transformations fonctionnelles, propriétés qui concernent la *répartition des variables en groupes autonomes ou liés de façon simple dans l'itération;* il s'ensuit alors des propriétés communes à des transformations qui, à certains égards, sont très différentes.

Mais il est bien certain que l'étude des cas finis ne peut pas toujours conduire, que ce soit par analogie ou par induction du fini à l'infini, à la solution de tous les problèmes qui se posent dans le cas des variables continues ([d]). Ainsi dans le cas des médiations effectuées dans un domaine, la possibilité de points frontières irréguliers, c'est-à-dire des points où la solution n'est pas continue, est étroitement liée à la structure de la frontière au voisinage du point considéré. On sait que cette question difficile, qui conduit à la notion récente de *capacité,* a suscité de nombreux mémoires.

Aussi, dans les cas où les répartitions massiques sont plus complexes que celles définissant les médiations, le problème des points de continuité des fonctions limites est sûrement plus difficile encore, et l'on voudra bien comprendre que nous ne l'ayons pas abordé. D'ailleurs, les problèmes auxquels nous nous sommes attaqué jouent un rôle essentiel dans des questions en apparence différentes, et nous avons dû limiter le champ de nos efforts.

V. — Ainsi parti de la théorie du potentiel, nous

([d]) A ce sujet, citons un très profond et suggestif petit mémoire de M. BOULIGAND, qui a eu beaucoup d'influence sur nous : *Sur les substitutions fonctionnelles linéaires à coefficients positifs.* (BULL. SC. MATH., 2e série, t. LI, mai 1927.)

allons arriver à des problèmes de *probabilités en chaîne :* Ayant senti la nécessité de bien connaître l'itération des substitutions finies de l'algèbre, et particulièrement des substitutions positives et unitaires, nous avons étudié cette question et publié un mémoire que M. Kolmogoroff a bien voulu remarquer ([e]).

Nous avions retrouvé, par une méthode fondée sur la notion directe d'ensemble indécomposable, des résultats de Markoff, de M. de Misès ([f]), et une partie de ceux que venait de publier M. Fréchet, quelques mois plus tôt, aux *C. R.* et, presque simultanément, à Pise ([g]).

Rappelons le problème de la probabilité des phénomènes « liés en chaîne » :

Supposons qu'une suite d'expériences détermine une suite d'événements, de telle façon que chaque expérience amène nécessairement un et un seul des N événements : E_1, $E_2 \ldots E_n$. Supposons aussi que la probabilité pour que l'événement E_j se produise au cours de la $n^{\text{ième}}$ expérience dépende du résultat de la $(n-1)^{\text{iéme}}$ expérience. Soit alors p_{ij} la probabilité pour que la $n^{\text{ième}}$ expérience amène E_j, lorsque la $(n-1)^{\text{ième}}$ a donné E_i. A chaque phénomène E_i, on fait correspondre une valeur α_i. Ces valeurs α_i $(i = 1, 2 \ldots N)$ et les probabilités p_{ij} définissent une *chaîne simple.*

([e]) A. FOUILLADE, *Sur l'itération de certaines substitutions linéaires* (ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1933, 4), analysé dans le *Zentralblatt für Mathematik*, mars 1934. — A ce moment nous ignorions l'existence de la théorie des probabilités en chaîne.

([f]) R. VON MISÈS, *Vorlesungen über angewandte Mathematik*, Band I : *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, F. Deuticke, éditeur, Leipzig, 1931.

([g]) MAURICE FRECHET, *Comptes Rendus*, t. 195, 1932, p. 590. *Compléments à la théorie des probabilités discontinues « en chaîne »*. (ANN. SCUOLA N. S. PISA, vol. II, 1933, XI, pp. 131 164.)

Soit $P_{ij}^{(n)}$ la probabilité pour que, en n expériences, on passe de E_i à E_j. On a les conditions

(P) $$P_{ij}^{(n)} \geqq 0,$$

(U) $$\sum_{j=1}^{j=N} P_{ij}^{(n)} = 1,$$

(I) $$P_{ij}^{(\lambda+\mu)} = \sum_{k=1}^{k=N} P_{ik}^{(\lambda)} \cdot P_{kj}^{(\mu)}, \quad \text{en posant} \quad p_{ij} = P_{ij}^{(1)}.$$

Les coefficients p_{ij} définissent une substitution linéaire positive conservant l'unité, et portant sur N variables indépendantes

(γ) $$x_j^1 = \sum_{i=1}^{N} p_{ji} x_i^0.$$

Les probabilités $P_{ij}^{(n)}$ peuvent être dites itérées, car, pour une valeur fixe de j, les N quantités $P_{ji}^{(n)}$ se déduisent des $P_{ji}^{(n-1)}$ par une substitution linéaire (c) qui est la substitution transposée de (γ), ayant pour coefficients $m_{ij} = p_{ji}$, puisque

$$P_{ji}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} P_{jk}^{(n-1)} \cdot p_{ki}.$$

On définit les puissances de la substitution (c) et les puissances de (γ), et l'on voit qu'en effectuant la substitution (c^n) sur le système $P_{j1}, P_{j2} \ldots P_{jN}$, on obtient

$$P_{j1}^{(n+1)}, P_{j2}^{(n+1)}, \ldots, P_{jN}^{(n+1)},$$

tandis qu'en effectuant la substitution (γ^n) sur $P_{1i}, {}_{2i} \ldots P_{Ni}$, on obtient

$$P_{1i}^{(n+1)}, P_{2i}^{(n+1)}, \ldots, P_{Ni}^{(n+1)}.$$

Soit y une variable, dite *variable aléatoire*, qui peut être égale à l'une des N valeurs $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_N$, et qui prend la valeur α_i lorsqu'une expérience provoque l'événement E_i. Supposons que la valeur initiale, c'est-à-dire la valeur avant la première épreuve, soit $y^0 = \alpha_j$, et représentons par $y_j^{(n)}$ la valeur prise par y après n expériences. L'*espérance mathématique* ou *valeur moyenne* de la quantité $y_j^{(n)}$ est

$$y_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} P_{jk}^{(n)} \cdot \alpha_k.$$

La question importante de savoir si $y_j^{(n)}$ tend vers une limite quand n augmente indéfiniment se ramène à l'étude du *comportement des probabilités itérées, et le cas le plus intéressant est celui où la limite existe et est indépendante de l'état initial* E_j.

Le problème est donc un cas particulier de celui qui est posé au paragraphe III. Ici l'ensemble E sera une image commode d'un ensemble d'indices; il sera constitué par N points, affectés des valeurs α_1, α_2 ... α_N.

VI. La notion d'*ensemble indécomposable*, c'est-à-dire de *système indécomposable d'états possibles*, était apparue à M. R. de Misès avec sa signification concrète ([h]). M. de Misès a démontré que si le système des états possibles est indécomposable, chaque probabilité itérée $P_{ik}^{(n)}$ est *asymptotiquement périodique;* puis M. Maurice Fréchet a étendu ceci au cas général par une méthode différente. Grâce à la notion d'ENSEMBLE TOTALEMENT INDÉCOMPOSABLE, c'est-à dire d'*ensemble indécomposable par rapport à toute puissance de* (γ), et grâce à un théorème de structure (que nous avons étendu, sous certaines conditions, au cas dit des « variables continues » — Théorème 4, § 30; et § 38 —), nous avons pu démontrer simplement toutes les propriétés de convergence des probabilités itérées, y compris la périodicité asymptotique dans le cas le plus

([h]) *Ouvrage cité*, note *f*. — Pour M. de Misès, il s'agissait d'une interprétation concrète de la notion de *tableau décomposable* de coefficients p_{ik}, qui est une notion usitée dans la théorie des systèmes d'équations linéaires.

général, et donner en même temps une sorte d'explication concrète de ces propriétés et des propriétés de « l'équation en λ », obtenue par annulation du déterminant de la substitution (¹).

VII. La théorie des phénomènes liés en chaîne se généralise et se définit dans le cas des « variables continues », cas où l'ensemble des états possibles — par exemple, la position d'un mobile — est représenté par un ensemble E fermé (tel le dérivé d'un domaine borné) et où une fonction positive k (P, M) représente une densité de probabilité. On a alors à résoudre le problème de l'itération d'une transformation fonctionnelle linéaire unitaire et positive qui s'exprime par une intégrale de Lebesgue, et les densités successives sont liées par

$$k_{n+p}(\mathrm{P}, \mathrm{M}) = \int_{\mathrm{E}} k_n(\mathrm{Q}, \mathrm{M})\, k_p(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\, d\mathrm{Q}.$$

Nous nous trouvons alors dans la théorie des *équations intégrales à limites fixes*, qui a été l'objet d'un si grand nombre de travaux remarquables : théorie de Fredholm, théorie de Riesz des *opérations linéaires totalement continues*, théorie des *noyaux orthogonaux* de MM. Heywood, Lalesco et Goursat; enfin les belles et récentes études de M. Hadamard et de M. Fréchet sur le *comportement des*

(¹) L'exposition de cette méthode est reprise dans un mémoire séparé, car elle ferait un peu double emploi avec le chapitre 4 (cf. *Bull. Sc. Math.*, 1937, 2, LXI). Cette méthode qui, à notre insu, était en germe dans une communication de M. J. HADAMARD (*Sur le battage des cartes et ses relations avec la Mécanique Statistique*, C. R. CONGRÈS INT DE BOLOGNE, 1928, A V, pp 133-139), permet, dans les problèmes indiqués au paragraphe suivant, de démontrer des résultats remarquables donnés par M Hadamard au même Congrès (voir chap. 4 de ce mémoire), et démontrés par M Fréchet, qui nous les a fait connaître. (M. FRECHET, *Bull. Soc. Math. France*, 62, 1934.)

noyaux itérés de Fredholm [1], noyaux dont les probabilités itérées constituent un cas particulier.

Soit l'équation homogène

$$F(P) = \lambda \int_{E} F(M)\, k(P, M)\, dM.$$

On sait que l'on définit par un *passage du fini à l'infini,* et sous certaines conditions, une fonction $D(\lambda)$, « *déterminant de Fredholm* », qui généralise le déterminant d'un système d'équations linéaires à N inconnues; et les propriétés des racines de l'équation $D(\lambda) = 0$ sont les critères qui permettent de dire que l'on a telle ou telle propriété de convergence.

Dans le même esprit qui nous animait vis-à-vis des substitutions finies, nous nous sommes systématiquement tenu à l'écart des théories que nous venons de signaler : il fallait, en retrouvant certaines propriétés connues, confirmer l'utilité que peut présenter l'analyse directe des propriétés des ensembles indécomposables. Nous avons pu constater que cette méthode réussit, au moins en partie, chaque fois que le passage du fini à l'infini est possible par les méthodes classiques. Mais dans des cas où ces méthodes ne sont pas possibles, les notions que nous avons tenu à introduire indépendamment de tout algo-

---

(1) M. FRÉCHET, *Les probabilités en chaîne* (COMMENTARII HELVETICA, vol. 5, 1933, pp. 175-245); *Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations lin. et hom. aux diff. finies du 1er ordre et à coeff. constants* (PUBL. F. S. UN. MASARYK, Brno, 178, 1933, pp. 1-24); *Allure asymptotique de la suite des noyaux itérés de Fredholm* (QUAT. JOURN. OF MATH., Oxford, 1934, pp. 106-145).

Signalons aussi les importants travaux de M. HOSTINSKY et de ses élèves, dont l'énumération se trouve dans le MÉMORIAL DES SCIENCES MATH., fasc. LII (par M. Hostinsky) (*Méthodes générales du calcul des probabilités*), et pour les plus récents, dans les travaux de M. Fréchet, auxquels nous prions de se reporter.

rithme et de toute hypothèse de commodité paraissent devoir être utiles (voir plus loin le résumé de nos résultats). C'est pourquoi nous avons le plus souvent défini nos transformations au moyen de l'intégrale de Stieltjes-Radon, la plus générale en la matière, bien que ce soit l'intégrale de Lebesgue qui ait servi dans les cas pratiques rencontrés jusqu'ici.

Voici maintenant le plan et le résumé rapide du présent mémoire :

VIII. — Le *chapitre* I est constitué par des préliminaires où sont définies les *transformations fonctionnelles linéaires dans le champ des fonctions mesurables* B *et bornées*, et certaines catégories importantes de ces transformations. Un *lemme de commutativité* (n° 5) permet d'exprimer au moyen de l'intégrale de Stieltjes-Radon les puissances de la transformation T étudiée, en adjoignant à cette transformation une transformation linéaire θ, dite *associée*, transformation qui porte sur les fonctions d'ensemble.

Les puissances θ^n et T^n sont associées et définies par des fonctions d'ensemble et de point $K_n(P, e)$ vérifiant la formule

$$K_{n+q}(P, e_0) = \int_E K_q(Q, e_0)\, d_Q K_n(P, e),$$

qui est l'expression analytique des transformations
$\theta^q[K_n(P, e)] = K_{n+q}(P, e)$, et $T^n[K_q(Q, e_0)] = K_{n+q}(P, e_0)$.

Nous indiquons que nous nous intéressons essentiellement aux transformations *positives* $[K(P, e) > 0]$ et *unitaires* $(\int_E d_M K(P, e) = 1)$.

Au *chapitre* II, nous rappelons la notion de *correspondance entre une fonction positive d'ensemble et une fonction monotone de point*, puis la notion de *convergence des* *fonctions positives d'ensemble*, due à MM. F. Riesz et de La Vallée Poussin ([k]). Nous mettons cette convergence en relation avec la *convergence en mesure* des fonctions de point, et nous établissons de deux manières *les conditions que doit remplir* K(P, e) *pour que* T *conserve la continuité*, ce qui entraîne en même temps, si T est positive, la *conservation par* θ *de la convergence des fonctions positives d'ensemble* ([l]). La première méthode, plus générale, nous montre la continuité de la distance des fonctions K(P, e) et K(P′, e). L'autre, particulière aux substitutions positives, met en jeu la *conservation de la semi-continuité*.

Enfin nous définissons les *transformations* T *qui conservent la convergence asymptotique, et auxquelles sont associées les transformations* θ *qui conservent l'absolue continuité*. Mais l'étude systématique de cette classe intéressante n'a pas de place dans la suite.

IX. — Avec le *chapitre* III nous introduisons certaines notions relatives aux fonctions d'ensemble et de point : MÉTASÉQUENT, SUPPORT, CONSÉQUENT, ENSEMBLE INDÉPENDANT, ENSEMBLE INDÉCOMPOSABLE. Ces notions d'origine concrète ([m]) prennent surtout leur importance dans le cas où K(P, e)

([k]) F. RIESZ, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel.* (ACTA MATH., 54, 1930, p. 351.)

C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet.* (ANN. INST. H. POINCARÉ, 2, 1932, note I.)

Cf. aussi J. RADON, *Theorie und Anwendungen der Absolut additiven Mengenfunktionen.* (WIENER SITZUNGSBER., 122, 1913, p. 1366.)

([l]) Pour ce qui concerne la conservation de la continuité par T : F RIESZ, *Comptes Rendus*, 29 nov. 1909, et *Ann. Éc. Norm.*, 1911.

A. FOUILLADE, *Sur les substitutions fonctionnelles linéaires.* (ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1934, 4.)

([m]) A. FOUILLADE, *Certains aspects de l'itération des transf. fonct. lin. et quelques notions qui s'en dégagent.* (R. C. ACAD. NAT. DEI LINCEI, 1934, XII, p. 82.)

est positive et définit une transformation unitaire. Nous avons besoin de les nuancer par des modalités où interviennent, soit la *mesure*, soit la *fermeture* des ensembles considérés (ensembles indécomposables de *mesure réduite*, ou de *fermeture réduite*).

Nous faisons correspondre à toute suite de fonctions positives d'ensemble itérées $\{\varphi_n(e)\}$ des suites de *supports itérés* (pour tout P_n de s_n, $K_p(P_n, e)$ a sa variation concentrée sur s_{n+p}) qui peuvent être, à volonté, de « *fermeture réduite* » ou de « *mesure réduite* ». Puis nous démontrons le théorème fondamental relatif aux transformations positives unitaires : *l'unicité, à un facteur constant près, dans un ensemble indécomposable, de la fonction d'ensemble invariante par rapport à* θ, s'il en existe une ([n]).

Dans le *chapitre* IV, nous envisageons le problème de l'*existence* d'un invariant. Nous indiquons une méthode qui, dans des cas pratiquement étendus, permet de construire cet invariant (en en démontrant donc l'existence). Dans certains cas, le procédé employé peut donner une fonction d'ensemble non bornée dans E, et qui jouit d'une propriété élargie d'invariance.

Puis nous nous plaçons dans le cas important où $K(P, e) = \int_E k(P, M)\, dM$, *la densité* $k(P, M)$ *étant bornée indépendamment de* P *et de* M : nous démontrons l'*existence de l'invariant, le nombre fini des ensembles indécomposables, l'impossibilité de trouver dans un ensemble totalement indécomposable deux fonctions d'ensemble ayant leurs itérées de mêmes rangs disjointes* (c'est-à-dire concentrées sur des ensembles disjoints). Et de ceci découle *la convergence forte de* $K_n(P, e)$ *dans un ensemble totalement indécomposable*. Puis le *théo-*

([n]) A. FOUILLADE, *Comptes Rendus*, 1935, p. 252.

rème 4 — théorème de structure — énonçant qu'*un ensemble indécomposable de mesure réduite est formé par un cycle de* N *ensembles, supports itérés les uns des autres, et totalement indécomposables par rapport à* T^N, permet de démontrer simplement et sans calcul l'existence de N *invariants de module* 1 (°), *la convergence des moyennes arithmétiques de* $K_n(P, e)$ dans le cas général (ou convergence au sens de Cesàro), et enfin la propriété de $K_n(P, e)$ d'être *asymptotiquement périodique*.

X. — Avec le *chapitre* V s'introduit définitivement, *sauf pour le paragraphe* 37, l'hypothèse de la *conservation de la continuité*. Il en résulte que si un ensemble est indépendant, sa fermeture l'est aussi, et sous certaines conditions il existe un ensemble indécomposable, et même un *ensemble indécomposable fermé*.

Nous considérons les *moyennes arithmétiques*

$$S^n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} K_p(P, e).$$

Toute suite partielle convergente donne un invariant, et au moins *dans le cas de l'ensemble indécomposable fermé les moyennes arithmétiques sont convergentes*. Au paragraphe 36, pour empêcher que $K(P, e)$ tende, au voisinage de certains points, à se concentrer sur un ensemble de mesure nulle, ce qui peut provoquer des complications, *nous supposons que* $K(P, e)$ *est supérieure à une fonction* $H(P, e)$ *représentée, pour chaque* P, *par une densité constante* δ *dans un ensemble* ε_p *de mesure* μ *également constante*.

Mais alors, indépendamment de l'hypothèse de la conservation de la continuité, en supposant toutefois l'exis-

(°) Le théorème d'unicité est relatif aux fonctions réelles.

tence d'un invariant non nul, toutes les démonstrations du chapitre IV relatives aux transformations à densités bornées sont applicables, et *les théorèmes de convergence des nos 28, 29 et 30 sont valables pour des noyaux non bornés, et même pour des fonctions d'ensemble et de point qui ne peuvent pas être représentées par des intégrales de Lebesgue.*

A la fin du chapitre, nous indiquons des cas où *un théorème de structure analogue au théorème* 4 s'applique, puis quelques propriétés générales : convergence, lorsque toutes les fonctions $K_n(P, e)$ convergent, de toute suite $\{\varphi_n(e) = \theta_n[\varphi(e)]\}$ et de toute suite $\{F_n(M)\}$; réciproques; puis nous rappelons quelles sortes de convergences peuvent présenter les *suites de substitutions.*

Enfin, au chapitre VI, sont étudiées certaines substitutions de la classe Γ. Nous faisons certaines remarques sur les médiations, sur les substitutions (de M. Bouligand) qui majorent les polynômes à coefficients positifs, en insistant sur les *phénomènes de convergence des masses vers la frontière du domaine*, et sur les circonstances qui les peuvent empêcher. Les notions d'ensembles indécomposables, si elles ne paraissent plus suffire pour vaincre toutes les difficultés, permettent de classer les problèmes, et engagent à considérer d'abord le cas où l'intérieur Ω est indécomposable totalement. Nous donnons un exemple où il existe un invariant dans Ω (n° 53).

Dans la recherche des critères de convergence un principe doit guider : c'est d'imposer des *conditions invariantes par transformation ponctuelle continue biunivoque.*

Nous indiquons pourquoi les médiations itérées convergent vers une transformation qui conserve la continuité dans Ω.

Puis, à la faveur d'un lemme qui énonce la *possibilité* *de décomposer tout polynôme en différence de deux polynômes convexes,* nous démontrons *la convergence des itérées de toute fonction continue lorsque chaque fonction* $K(P, e)$ *a son centre de gravité au point* P [p]. *La fonction limite, invariante, ne dépend que d'un ensemble de valeurs de la fonction initiale sur la frontière* [q].

Ces substitutions, dont la définition ne répond pas au principe énoncé plus haut, sont cependant assez générales et intéressantes à divers titres.

Nous terminons par quelques remarques, dont l'une met en valeur l'importance primordiale des propriétés des substitutions au voisinage de la frontière.

Avant de passer au développement de ces questions, nous tenons à citer certains ouvrages généraux qui nous ont été très utiles : C. de La Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire,* 2me éd. (1934) (qui sera désigné en abrégé par : *Intégrales de Lebesgue*) ; Paul Lévy, *Leçons d'Analyse fonctionnelle ;* S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Monografje Matematyczne, Varsovie, 1932 ; et le *cours d'analyse* d'Édouard Goursat.

(p) A. FOUILLADE, *Comptes Rendus*, 192, 1931, p. 1010.

(q) En ce cas et en des cas voisins, la frontière peut n'intervenir qu'en partie : rappelons, en effet, pour des équations aux dérivées partielles du type elliptique à coefficients singuliers, l'existence, montrée par M. Bouligand, *d'ensembles impropres anormaux.* Tel est un segment s de oz pour l'équation

$$\text{(E)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Dans un demi cercle de diamètre s, du plan (z, r), une solution bornée de (E) se détermine par ses seules valeurs sur la demi circonférence (ce qu'on peut exprimer au moyen de substitutions fonctionnelles S du genre actuel). Cf. Thèse CAPOULADE, *Mathematica,* t. VIII, 1934.

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

1. Soit, dans un espace à n dimensions, un ensemble E borné et fermé. A chaque point P de E nous associons une fonction positive [1] d'ensemble représentée par le symbole $K(P; e)$ et possédant les propriétés d'être nulle sur l'ensemble complémentaire de E et d'avoir une variation totale égale à l'unité [1]. Étant donnée la première de ces propriétés, e sera toujours dans nos considérations un sous-ensemble de E.

Nous avons une famille de fonctions d'ensemble définies au moins pour tout ensemble mesurable B et qui, étant donné un ensemble e_0 mesurable B, définissent une fonction $K(M; e_0)$ du point M. Nous dirons que $K(P; e)$ est une *fonction de point et d'ensemble*. Dans la suite, nous supposons vérifiée l'hypothèse suivante :

Pour tout ensemble e_0 mesurable B, *la fonction de point* $K(M; e_0)$ *est mesurable* B.

2. Considérons l'intégrale de Stieltjes-Radon [2] :

$$I_P[F] = F_1(P) = \int_E F(M)\, d_M K(P, e), \tag{1}$$

intégrale qui est définie pour toute fonction $F(M)$ mesurable par rapport à $K(P, e)$. Cette classe de fonctions

(1) Le chapitre I peut s'appliquer en grande partie à des fonctions $K(P, e)$ non monotones, également bornées, et complètement additives.

(2) Voir, par exemple, C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, 2e édit., 1934, note II.

comprend toujours les fonctions mesurables B et bornées dans E. Plaçons-nous dans ce cas; soit $\|F(M)\|$ la borne supérieure (3) de F(M) dans E.

Le théorème de la moyenne est applicable et s'exprime par

$$(2)\qquad |F_1(P)| \leqq \|F(M)\| \cdot \int_E d_M K(P, e) - \|F(M)\|.$$

D'autre part, l'opération (1) est additive et associative; définissons la distance de deux fonctions mesurables B et bornées de E par la formule

$$(3)\qquad (F, G) - \text{Borne sup. dans E de } |F(M) - G(M)|.$$

L'opération $I_P[F]$ est *continue* relativement à cette métrique, car $\{F^{(n)}(M)\}$ étant une suite convergente de fonctions mesurables B, c'est-à-dire telle qu'il existe une fonction F vérifiant $\lim\limits_{n \to \infty}. (F^{(n)}, F) = 0$, on montre, en utilisant l'inégalité (2) et le fait que F est forcément mesurable B (4), que

$$\lim_{n \to \infty} I_P[F^{(n)}] = I_P[F].$$

L'opération I_P est une *fonctionnelle linéaire* dans le champ des fonctions mesurables B et bornées de E. Elle définit en tout point P de cet ensemble une fonction $F_1(P)$, qui est mesurable B en vertu de l'hypothèse relative à la mesurabilité de $K(M; e_0)$. La transformation qui fait passer de F(M) à $F_1(M)$ est une *transformation fonctionnelle linéaire* (5); elle est dite *unitaire* dans le cas consi-

(3) A la place de borne sup., le terme « *vrai maximum* » est employé par S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*.

(4) Comme limite de fonctions mesurables B.

(5) Pour obtenir la transformation fonctionnelle linéaire la plus générale, dans le champ des fonctions mesurables B, il faut prendre les fonctions K(P, e) indiquées dans la note (1).

déré où $K(P; E) = 1$, parce qu'elle laisse invariante la fonction $F(M) \equiv 1$, et toute constante.

3. Dans ce qui suit, nous considérerons le plus souvent des fonctions continues et la classe des transformations précédentes qui *conservent la continuité*, c'est-à-dire celles qui transforment toute fonction $F(M)$ continue dans E en une autre fonction continue $F_1(M)$.

Cette hypothèse supplémentaire impose à la fonction d'ensemble et de point $K(P; e)$ certaines propriétés qui seront précisées plus loin.

Nous examinerons tout particulièrement le cas où l'ensemble E est une *région* (6) constituée par un domaine Ω et sa frontière Σ et où, en plus, nos transformations *conservent les valeurs périphériques*. Pour cela, quand il y a conservation de la continuité, *il faut et il suffit qu'en tout point* Q *de* Σ *la fonction* $K(Q; e)$ *se réduise à la variation* 1 *concentrée en* Q (on voit ceci en considérant la fonction $F(M)$, limite de fonctions continues, qui est égale à 1 en Q, et à 0 ailleurs).

Une transformation fonctionnelle linéaire conservant la continuité sera dite *substitution fonctionnelle linéaire*. Si, de plus, E est une région, et s'il y a conservation de l'unité et des valeurs périphériques, nous dirons, pour abréger, que la transformation appartient à la *classe* Γ (7).

4. Au n° 2, nous avons envisagé l'intégration d'une fonction de point $F(M)$ relativement à $K(P, e)$ considérée comme fonction complètement additive de l'ensemble e. Nous allons maintenant intégrer la fonction de point $K(M, e_0)$ par rapport à une certaine fonction complète-

(6) G. Bouligand, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, n° 41. Une région est la fermeture d'un domaine.

(7) A. Fouillade, *Comptes Rendus*, 196, 1933, p. 1361.

ment additive $\alpha(e)$ de l'ensemble e, fonction dont la variation est concentrée sur E; nous avons

$$\alpha_1(e_0) = \int_E K(M, e_0)\, d_M\, \alpha(e), \tag{4}$$

e_0 étant un ensemble mesurable B. Comme $K(M, e_0)$ est mesurable B et bornée, l'intégrale (4) définit de façon unique sur les ensembles mesurables B (ce qui suffit) une fonction $\alpha_1(e)$ complètement additive, ceci résultant de la continuité de la fonctionnelle définie par $\alpha(e)$, et de l'addivité complète de $K(M, e)$ (8).

La formule (4) définit une *transformation fonctionnelle des fonctions additives d'ensemble*, transformation qui sera représentée par la lettre θ, tandis que la transformation (1) sera désignée par la lettre T.

La transformation θ est *additive, homogène et continue*, donc *linéaire*, car

$$\| \alpha_1(e) \| = \text{variation totale de } \alpha_1(e) \leqq \| \alpha(e) \| \text{ (9)},$$

d'après la formule de la moyenne.

Le mot *continue* correspond ici à la *convergence forte* des fonctions d'ensemble, définie par $\lim\limits_{n \to \infty} \{ \varphi_n(e) \} = \varphi(e)$ lorsque $\| \varphi_n(e) - \varphi(e) \|$ tend vers 0.

Nous allons montrer que la formule (4) est l'expression analytique de la *transformation associée* à la transformation T. L'opération associée d'une opération donnée T est celle qui doit antecéder une opération linéaire L avec laquelle on la compose, pour obtenir même résultat de composition qu'en faisant L antecéder T.

---

(8) Si e_0 est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints : $e_1 + e_2 + \ldots + e_n + \ldots$, on a : borne sup. $| K(M, e_n + e_{n+1} + \ldots) | \leq$ borne sup. $\| K(M, e_n + e_{n+1} + \ldots) |$, qui tend vers 0 ; et $\alpha_1(e_n + e_{n+1} + \ldots)$ tend vers 0.

(9) Ce symbole désignera aussi la variation totale d'une fonction d'ensemble.

5. *Lemme.* — $F(M)$, $K(Q; e)$, $\alpha(e)$ *étant respectivement une fonction de point, une fonction de point et d'ensemble, une fonction d'ensemble mesurables* B *et bornées définies dans un ensemble* E *fermé et borné, on a*

(5) $$\int_E \left[\int_E F(M)\, d_M K(Q, e)\right] d_Q\, \alpha(e) = \int_E F(M)\, d_M \alpha_1(e),$$

où $\alpha_1(e)$ *est la fonction définie par*

$$\alpha_1(e_0) = \int_E K(Q, e_0)\, d_Q\, \alpha(e),$$

pour tout e_0 *mesurable* B.

Désignons par $F_1(Q; n)$ la somme $\Sigma l_i K(Q, e_i)$ relative à une échelle de n nombres l_i servant à définir l'intégrale située entre crochets [10]. Soit une échelle de p nombres l'_i servant à définir l'intégrale

$$\int_E F_1(Q)\, d_Q\, \alpha(e) = \lim_{p \to \infty} \sum_1^p l'_i \alpha(e'_i).$$

Représentons par $e'_i(n; p)$ l'ensemble où

$$l'_i \leqq F_1(Q; n) < l'_{i+1};$$

cet ensemble est mesurable B. La somme

$$\Sigma\, l'_i\, \alpha[e'_i(n; p)],$$

n étant fixe et p augmentant indéfiniment, tend par définition vers

(6) $$\int_E F_1(Q; n) d_Q\, \alpha(e).$$

Mais en tout point Q on a : $\lim\limits_{n \to \infty} F_1(Q; n) = F_1(Q)$ et si $l_{i+1} - l_i > \varepsilon$; on peut écrire

$$| F_1(Q; n) - F_1(Q) | \leqq \varepsilon \cdot \int_E d_M K(Q, e) = \varepsilon;$$

---

(10) Voir *Intégrales de Lebesgue*, note II, pour la définition de l'intégrale employée.

donc, en vertu de la continuité de la fonctionnelle définie par $\alpha(e)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\bar{E}} F_1(Q; n)\, d_Q\, \alpha(e) = \int_{\bar{E}} F_1(Q)\, d_Q\, \alpha(e).$$

Mais on peut calculer autrement l'intégrale (6); elle se décompose, pour une échelle de n nombres l_i, en n termes de la forme

$$l_i \int_{\bar{E}} K(Q, e_i)\, d_Q \alpha(e) = l_i \alpha_1(e_i);$$

or,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n l_i \alpha_1(e_i) = \int_{\bar{E}} F(M)\, d_M \alpha_1(e),$$

ce qui démontre le théorème.

Reportons-nous à la relation (5); la fonction $\alpha(e)$ définit une certaine fonctionnelle Φ et le 1^er^ membre de (5) peut être représenté symboliquement par $\Phi[T[F]]$, opération qui peut être regardée comme une fonctionnelle $\Phi_1[F]$. Mais la relation entre Φ_1 et Φ constitue par définition [11] l'opération associée à T. Cette opération s'exprime bien par la formule (4), puisque le lemme montre que Φ_1 est définie par $\alpha_1(e)$.

6. Ce qui précède permet de définir par des formules analogues à (1) et (4) les *puissances* des transformations T et θ. Nous posons

$$T[T[F]] = T^2[F] = F_2, \qquad T[T^2[F]] = T^3[F] = F_3, \text{ etc.},$$
$$\theta[\theta[\alpha]] = \theta^2[\alpha] = \alpha_2, \qquad \theta[\theta^2[\alpha]] = \theta^3[\alpha] = \alpha_3, \text{ etc.}$$

Le lemme précédent permet de montrer que T^n et θ^n sont des transformations fonctionnelles linéaires associées

(11) S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, pp. 99-101.

définies analytiquement par une fonction de point et d'ensemble $K_n(P, e)$, exactement comme T et θ sont définies par $K(P, e)$. La suite $\{K_n\}$ vérifie les relations

$$K_n(P, e) = \theta^\lambda[K_{n-\lambda}(P, e)] \qquad (0 < \lambda < n)$$
$$K_n(M, e_0) = T^{n-\lambda}[K_\lambda(M, e_0)],$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad K_n(P, e_0) = \int_E K_\lambda(Q, e_0)\, d_Q K_{n-\lambda}(P, e).$$

$K_n(P, e)$ est, pour tout point P de E, une fonction complètement additive définie pour tout ensemble mesurable B et dont la variation concentrée sur E est positive et égale à l'unité ([12]).

Pour tout ensemble e_0 mesurable B, $K_m(M, e_0)$ est une fonction de point qui est bien définie dans E et mesurable B.

7. Les transformations T positives transforment toute fonction positive en une fonction positive, toute suite non-croissante de fonctions en une suite non-croissante de fonctions. Une autre propriété essentielle de ces transformations est la suivante :

Si la fonction positive d'ensemble $\varphi(e)$ est non nulle sur un ensemble e_0, et si $K_p(M, e_1)$, pour tout point M de e_0, est non nulle, on a aussi, au sens strict, $\varphi_p(e_1) > 0$.

En effet, on peut trouver un ensemble ε où $K_p(M, e_1)$ soit bornée inférieurement par un certain nombre η et où $\varphi(\varepsilon) > 0$, sans quoi, à cause de l'additivité de φ, on aurait $\varphi(e_0) = 0$. Donc $\varphi_p(e_1)$ est supérieure à $\eta\,\varphi(\varepsilon)$.

Dans le champ des fonctions positives d'ensemble, $\theta[\varphi] \equiv 0$ entraîne $\varphi \equiv 0$, ce qui est la condition pour

---

([12]) Dans le cas où $\| K(M, e) \| \leqq A$, on a $\| K_n(M, e) \| \leqq A^n$

que dans ce champ θ admette une *opération inverse* [13]. De plus, si K (P, E) $\geqq$ A pour tout P, on a $\|F_1\| \geqq A.\|F\|$ et l'opération inverse est continue [13].

Les transformations positives unitaires constituent une classe extrêmement importante de ces dernières transformations. On peut considérer chaque fonction K (P, e) comme définissant une *répartition de la masse* 1. L'intérêt de ce point de vue vient de ce que la *transformation associée* θ *conserve la masse*, c'est à dire que φ (e) étant une fonction positive d'ensemble, on a

$$\| \varphi_1(e) \| = \varphi_1(E) = \varphi(E).$$

En même temps, T *conserve les constantes, et le maximum et le minimum de* F_1 (M) *sont compris, au sens large, entre le maximum et le minimum de* F (M).

Ces transformations jouent un rôle essentiel dans la théorie des *probabilités en chaîne,* par le fait du principe des probabilités totales. Dans le cas des probabilités discontinues, l'ensemble E est un ensemble de N points, image de N états possibles; les fonctions K (P_i, e) sont constituées par N masses discrètes représentant les probabilités p_{ij}, et les transformations T et θ prennent la forme des substitutions linéaires de l'algèbre. Cette remarque a pour but de montrer, par un cas extrême, le point de vue qui consisterait à faire des hypothèses sur la nature topologique de l'ensemble E et à envisager les conséquences.

8. Les *médiations* constituent une famille importante de transformations T unitaires : *elles laissent invariantes les fonctions harmoniques.*

Par exemple, supposons que E soit une région de

---

[13] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, p. 145.

l'espace à trois dimensions. Associons à chaque point P une sphère σ_P centrée en P et ayant pour rayon la plus courte distance de P à la frontière. La *médiante spatiale* ([14]) d'une fonction F(M) sommable dans E est

$$F_1(P) = \frac{3}{4\pi\rho^3} \iiint_E F(M)\, d\tau_M.$$

On peut la mettre sous la forme

$$\text{(9)} \qquad F_1(P) = \iiint_E F(M)\, k(P, M)\, d\tau_M,$$

où k (P, M) est la *densité* d'une répartition de la masse 1 dans σ_P; on a

$$d_M K(P, e) = k(P, M)\, d\tau_M = \frac{3}{4\pi\rho^3}\, d\tau_M$$

dans σ_P et zéro à l'extérieur.

Si, au lieu de prendre la moyenne de F (M) dans le volume de σ_P, on prenait la moyenne sur la surface, on aurait la *médiante périphérique* ([15]), mais K(P, e) ne serait plus absolument continue.

Ces médiations appartiennent à la classe Γ, car elles conservent la continuité et les valeurs périphériques. *Les médiantes itérées convergent vers une fonction harmonique qui est la solution du problème de Dirichlet généralisé relatif aux valeurs de* F(M) *sur* Σ ([16]). En remplaçant la médiation par une transformation plus générale de la classe Γ, on peut se proposer de rechercher des cas ana-

---

([14]) ZAREMBA, *Bull. Acad. Sc. Cracovie*, 1908, pp. 1 29.

([15]) Ou *médiante de Gauss.*

([16]) F. W. PERKINS, *Comptes Rendus*, 184, 1927, p. 182.

La terminologie relative aux médiations est empruntée à M. BOULIGAND, qui définit les opérations les plus générales de médiation dans *Fonctions harmoniques, Principes de Picard et de Dirichlet.* (MÉMORIAL SC. MATH., fasc. 11.)

logues de convergence et d'unicité, mais où la fonction limite ne serait plus harmonique.

9. Nous venons de voir que la médiation spatiale s'exprimait par une intégrale de Lebesgue. Dans beaucoup de cas pratiques, les fonctions $K(P, e)$ sont absolument continues, et (1) prend la forme

$$F_1(P) = \int_E F(M)\, k(P, M)\, dM. \tag{10}$$

Dans ce cas, il est logique de ne considérer θ que dans le champ des fonctions d'ensemble absolument continues; $\delta(e)$ étant la presque dérivée de $\alpha(e)$, on montre, en utilisant un lemme de commutativité, que $\alpha_1(e)$ a pour presque dérivée

$$\delta_1(M) = \int_E \delta(Q)\, k(Q, M)\, dQ, \tag{11}$$

à condition que cette intégrale ait un sens et une valeur finie presque partout, ce qui a lieu, par exemple, quand $k(Q, M) . \delta(Q)$, considérée comme fonction de Q, est, pour tout M, *mesurable B et bornée inférieurement* [17].

La transformation θ se traduit alors par une *transfor-*

---

[17] Le lemme de commutativité est une propriété connue de l'intégrale de Lebesgue. — Les transformations envisagées ici sont très importantes . les équations

$$F(M) = \lambda T[F], \quad \Phi(e) = \lambda\theta[\Phi], \quad G(P) = F(P) - \lambda T[F],$$

s'exprimant au moyen d'intégrales de Lebesgue, prennent la forme des *équations de Fredholm*, par exemple :

$$G(P) = F(P) - \lambda \int_E F(M)\, k(P, M)\, dM.$$

Le noyau $k(P, M)$ donne naissance à des noyaux itérés qui définissent les transformations T^n et θ^n, et le comportement de ces noyaux est un problème qui a été particulièrement étudié par M. MAURICE FRÉCHET (cf. Introduction et § 27).

mation fonctionnelle des densités, à laquelle nous réservons le nom de TRANSPOSÉE *de* T.

Souvent, on suppose $|k(M, Q)|$ bornée quels que soient M et Q dans E; la transformation (11) est alors *linéaire*, de la même façon que T, car

$$(12) \qquad |\delta_1(M)| \leqq |\delta(Q)| \cdot \| k(Q, M) \| \cdot \text{mesure de E}.$$

CHAPITRE II

CONDITIONS DE LA CONSERVATION DE LA CONTINUITE PAR LA TRANSFORMATION T

10. Nous aurons besoin d'utiliser la notion de *correspondance entre fonctions positives d'ensemble et fonctions monotones de point* [18] :

Plaçons l'ensemble E dans la région des coordonnées positives, et, par exemple, à *l'intérieur* de l'intervalle (O, A) [19]. Soit $\alpha(e)$ une fonction positive d'ensemble définie pour tous les ensembles mesurables B de (O, A). Nous faisons correspondre à $\alpha(e)$ la fonction de point $\mathbf{a}(M)$ qui en M prend la valeur de $\alpha(e)$ sur l'intervalle *semi ouvert* (O, M) [19]. $\mathbf{a}(M)$ est fonction non décroissante de chaque coordonnée de M.

Inversement, soit $f(M)$ une fonction bornée non-décroissante par rapport à chaque coordonnée de M. Elle est fonction continue de chacune des coordonnées, sauf au plus pour une infinité dénombrable de valeurs, dites

---

(18) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Ann. de l'Inst. H. Poincaré*, note I, p. 222, et *Intégrales de Lebesgue*, p. 110, 2e édit. — Cf. Introduction, note *j*.

(19) Nous appelons *intervalle* (O, A) le domaine rectangulaire qui a un sommet en O, et le sommet opposé (coordonnées toutes non nulles) en A; l'intervalle (O, M) est *semi ouvert* si, de l'intervalle fermé, on enlève les points ayant une coordonnée nulle.

singulières. Un intervalle limité par des valeurs non-singulières est dit *régulier*. $f(\mathrm{M})$ définit une fonction positive d'intervalles réguliers $f(i)$, fonction qui suffit à déterminer de façon unique une fonction positive d'ensemble $\varphi(e)$ coïncidant avec $f(i)$ sur les intervalles réguliers.

Soit alors la fonction $g(\mathrm{M})$ correspondant à $\varphi(e)$; elle ne peut différer de $f(\mathrm{M})$ que pour les valeurs singulières, et

$$(13) \qquad \sum_{\mathrm{E}} | f(\mathrm{M}) - g(\mathrm{M}) | \leqq \varphi(\mathrm{E}).$$

Deux fonctions de point qui conduisent à la même fonction d'ensemble sont dites *équivalentes*.

Nous convenons d'attribuer à l'intégrale

$$\int_{\mathrm{E}} \mathrm{F}(\mathrm{M})\, d_{\mathrm{M}} f(\mathrm{M}),$$

où $f(\mathrm{M})$ est une fonction monotone bornée, la même valeur qu'à l'intégrale où $f(\mathrm{M})$ est remplacée par la fonction correspondante $\varphi(e)$. Avec cette définition, deux fonctions équivalentes définissent la même intégrale.

11. Soit $\{\varphi_n(e)\}$ une suite de fonctions positives d'ensemble s'annulant toutes sur la frontière de (O, A); soit $\{f_n(\mathrm{M})\}$ la suite des fonctions de point correspondantes. M. de La Vallée Poussin a donné ([18]) l'importante notion de convergence suivante :

S'il existe une fonction de point $\mathrm{F}(\mathrm{M})$ *s'annulant sur les frontières de* (O, A) *qui engendre une fonction positive d'intervalle définissant une fonction* $\Phi(e)$, *et qui en tous ses points de continuité est limite de* $\{f_n(\mathrm{M})\}$, *la suite* $\{\varphi_n\}$ *est dite convergente et sa limite est par définition* $\Phi(e)$.

On démontre que cette convergence entraîne $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(e_0)$

$=\Phi(e_0)$, ***sous la condition que*** $\Phi(e)$ ***s'annule sur la frontière de*** e_0.

On démontre aussi que *toute suite illimitée de fonctions positives d'ensemble admettant une borne commune est une suite* NORMALE, *c'est-à-dire que de toute infinité de fonctions appartenant à la famille on peut extraire une suite convergente.*

12. Soient $f(P)$ et $g(P)$ deux fonctions mesurables et bornées nulles sur CE; au lieu de définir leur distance par la formule (3) nous pouvons adopter la métrique de la *convergence en mesure* (ou *asymptotique*) et convenir que

$$(14) \qquad (f, g) = \int_E |f(P) - g(P)|\, dP.$$

Supposons que f et g soient monotones et que $(f, g) = 0$. Comme la différence f-g est à variation bornée et qu'elle prend presque partout une valeur nulle, elle ne peut être non nulle que pour un ensemble dénombrable de points P, et *f et g sont équivalentes.*

Revenons à la suite $\{\varphi_n\}$ qui converge vers Φ; $\{f_n(M)\}$ converge presque partout vers $F(M)$, donc converge asymptotiquement. *Réciproquement*, si une suite $\{f_n(M)\}$ de fonctions positives d'intervalle est telle que

$$(15) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_E |f_n(M) - F(M)|\, dM = 0,$$

la suite correspondante $\{\varphi_n(e)\}$ est convergente. En effet, $F(M)$ en chacun de ses points de continuité est limite de $\{f_n(M)\}$, car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver dans le voisinage du point de continuité considéré, à cause de la non-décroissance de chaque $f_n(M)$, un intervalle mettant en défaut la relation (15).

D'autre part, sur l'ensemble dense de ses points de continuité, $F(M)$ est non-décroissante; il existe donc une fonction $F(M)$ non-décroissante, vérifiant la relation (15) et définissant une fonction $\Phi(e)$, limite de $\{\varphi_n(e)\}$ au sens de M. de La Vallée Poussin.

Ainsi la distance de deux fonctions positives d'ensemble étant définie par la formule (14) relative aux fonctions de point correspondantes, l'espace des fonctions positives d'ensemble est *compact*. Mais les transformations θ envisagées jusqu'ici peuvent ne plus être continues dans cette nouvelle métrique. C'est pourquoi *il est essentiel de caractériser les transformations* θ *qui conservent la convergence qui vient d'être définie* [20].

13. Soient un point P_0 de E et une suite $\{P_n\}$ de points de E ayant pour limite unique P_0. Les fonctions d'ensemble définies par les masses unité placées en P_n, P_{n+1}, etc., convergent vers la masse unité située en P_0. Les transformées de ces fonctions constituent la suite $\{K(P_n, e)\}$ et la fonction $K(P_0, e)$:

Une condition nécessaire à la continuité de θ est donc que pour tout point P_0 de E et toute suite telle que $\{P_n\}$ on ait

$$(16) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_E |K(P_n, M) - K(P_0, M)|\, dM = 0.$$

Cette condition est aussi nécessaire pour la conservation de la continuité par la transformation T.

Soit, en effet, une suite convergente $\{K(P_{n_q}, e)\}$ extraite

---

(20) Les définitions et démonstrations des paragraphes 12, 13, 14, 15, 16 peuvent, moyennant certaines précautions, être étendues aux fonctions non monotones. *On fait correspondre une nouvelle notion de convergence des fonctions d'ensemble à la convergence en mesure des fonctions de point à variation bornée.*

de la suite normale $\{K(P_n, e)\}$. D'après un théorème de M. de La Vallée Poussin ([21]), si $F(M)$ est une fonction continue et $\mathcal{K}(e)$ la limite de $K(P_{n_q}, e)$, on a

$$\lim_{q \to \infty} T_{n_q}[F] = \int_E F(M)\, d_M \mathcal{K}(e).$$

Donc $\mathcal{K}(e)$ doit être identique à $K(P, e)$, et l'on doit avoir la relation (16), sans quoi on pourrait trouver une suite ayant une limite non équivalente à $K(P_0, M)$.

Nous montrerons que *la condition* (16) *est suffisante* dans les deux problèmes envisagés, mais il faut auparavant la mettre sous une autre forme.

14. Faisons d'abord une remarque : *Pour que deux fonctions monotones $f(M)$ et $g(M)$ soient équivalentes, il est nécessaire et suffisant que la relation* (13) *soit vérifiée sur un ensemble dénombrable E_1 dense dans E, c'est-à-dire que*

$$\sum_{E_1} |f(M) - g(M)| < \mu, \tag{13'}$$

où μ a une valeur finie supérieure à la variation totale de $f(M)$.

Donnons-nous un ensemble E_2 de points P, cet E_2 étant dense sur E et dénombrable; ce sont, par exemple, les points rationnels.

Lemme. — Soit P_0 un point de E_2 ou de CE_2; la condition nécessaire et suffisante pour que $F_1(P) = T[F(M)]$ tende vers $F_1(P_0)$ quand P tend vers P_0 sur E_2 est qu'à tout système donné de p points différents $M_1, M_2, \ldots M_p$

([21]) Se reporter encore au mémoire précité des *Ann. de l'Inst. H. Poincaré.*

corresponde un nombre δ *tel que l'inégalité* $PP_0 < \delta$ *entraîne*

$$(17) \qquad \sum_1^p | K(P, M_k) - K(P_0, M_k) | < 2\mu,$$

où μ *est un nombre donné supérieur à* 1 [22].

En effet, la condition est suffisante : toute suite convergente $\{K(P_n, e)\}$ telle que les P_n convergent vers P_0 sur E_2 conduit à une fonction de point équivalente à $K(P_0, M)$, car la limite de $\{K(P_n, M)\}$ et $K(P_0, M)$ vérifient alors une condition du type (13′). D'autre part, l'hypothèse est nécessaire, car si elle n'est pas vérifiée pour un système de p points donnés M_k, on peut assigner une suite de points P_n de E_2 telle que la condition (13′) ne soit pas vérifiée par $K(P_0, M)$ et la limite de $\{K(P_n, M)\}$.

Mais δ *peut être choisi indépendant de* P_0 dans le cas où P_0 varie seulement sur l'ensemble dénombrable E_2. Donc $PP' < \delta$ entraîne $|F_1(P) - F_1(P')| < \varepsilon$. Comme $F_1(P)$ tend vers $F_1(\pi)$, que π appartienne à E, ou à CE_2, on voit que, π et π' étant quelconques dans E, si $\pi\pi' < \delta$, on a aussi $|F_1(\pi) - F_1(\pi')| > 2\varepsilon$, *ce qui exprime la continuité de* F (M) *dans* E.

15. Divisons l'intervalle (O, A), qui contient E, en p intervalles égaux, de mesure $\frac{a}{p}$, et prenons leurs milieux pour points M_k. Soit l'intégrale

$$\Delta(P, P_0) = \int_E | K(P, M) - K(P_0, M) | \, dM;$$

Sa valeur est inférieure à $\frac{a}{p} \Sigma \mu_k$, μ_k étant le maximum

(22) Si l'on avait $\| K(P, e) \| \leqq A$, on devrait prendre $\mu > A$.

de $|K(P, M) - K(P_0, M)|$ dans l'intervalle de rang k. Mais comme

$$\begin{aligned}|K(P, M) - K(P_0, M)| &\leqq |K(P, M) - K(P, M_k)| \\ + |K(P_0, M) - K(P_0, M_k)| &+ |K(P, M_k) - K(P_0, M_k)|,\end{aligned}$$

on a, d'après le théorème précédent, et sous la condition $PP_0 < \delta$:

$$\sum_1^p \mu_k \leqq 2 + 2\mu \leqq 4.$$

Faisons tendre δ vers 0 et p vers l'infini, l'intégrale $\Delta(P, P_0)$ tend vers 0, P variant sur E_2. En raisonnant comme pour $F_1(M)$ au paragraphe précédent, et en tenant compte de ce que $\Delta(P, P') \leqq \Delta(P'', P')$, on montre qu'à tout ε correspond un δ tel que, P et P′ étant deux points quelconques de E, la condition $PP' < \delta$ entraîne $\Delta(P, P') < \varepsilon$:

Pour que T *conserve la continuité, il est nécessaire et suffisant que la distance des fonctions* $K(P, e)$ *et* $K(P', e)$ *(dans la métrique de convergence en mesure) soit fonction continue de* P *et de* P′.

Par une méthode analogue, on montre aussi que les intégrales $\int_0^{M_0} K(P, M)\, dM$ [23] et plus généralement $\int_{\mathcal{E}} K(P, M)\, dM$ sont fonctions continues du point P. Elles sont même *également continues* (pour M_0 ou $\mathcal{E}$ variables).

---

[23] M. F. Riesz a donné le premier la condition cherchée (*C. R.*, 29 nov. 1909, et *Ann. Ec. Norm.*) dans le cas des fonctions d'une variable, sous la forme

$$\int_0^\varepsilon K(s, t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^\varepsilon K(s_n, t)\, dt \qquad (0 < \varepsilon \leqq 1),$$

pour tout s et toute suite $\{s_n\}$ tendant vers s, et $K(S, 1) = \lim_{n\to\infty} K(s_n, 1)$.

Nous avons voulu éviter, dans les applications, le recours à l'*axiome de Zermelo*.

16. Soit une fonction *positive* d'ensemble $\varphi^n(e)$ et $f^n(M)$ la fonction de point correspondante. On a

$$f_1^n(M) = \varphi_1^n([O, \overline{M}]) = \int_E K(Q, M)\, d_Q \varphi^n(e),$$

$$\int_{\mathcal{E}} f_1^n(M)\, dM = \int_{\mathcal{E}} \left[\int_E K(Q, M)\, d_Q \varphi^n(e) \right] dM,$$

et en vertu d'un théorème de commutativité ([24]) :

$$\int_{\mathcal{E}} f_1^n(M)\, dM = \int_E \left[\int_{\mathcal{E}} K(Q, M)\, dM \right] d_Q \varphi^n(e). \tag{19}$$

Si $f^n(M)$ converge vers $F(M)$ et $\varphi^n(e)$ vers $\Phi(e)$,. la fonction entre crochets du deuxième membre de (19) étant continue, l'intégrale a pour limite

$$\int_E \left[\int_{\mathcal{E}} K(Q, M)\, dM \right] d_Q \Phi(e) = \int_{\mathcal{E}} F_1(M)\, dM.$$

En considérant les deux ensembles où $f_1^n(M) - f_1(M)$ a un même signe, et en tenant compte de l'*égale continuité* de toutes les intégrales $\int_{\mathcal{E}} K(P, M)\, dM$, on montre aisément que /F

$$\lim_{n \to \infty} \int_E | f_1^n(M) - f_1(M) |\, dM = 0,$$ /F

ce qui prouve la *continuité de* θ dans la métrique adoptée.

17. Cette méthode, qui avec peu de modifications s'applique aux transformations T et θ non positives et non unitaires ne nous a pas donné certaines propriétés importantes particulières aux transformations positives.

([24]) R. CACCIOPPOLI, *Rendiconti di Palermo*, t. 52, 1928, p. 19.

Nous remarquerons d'abord que *les substitutions linéaires positives transforment une fonction semi-continue supérieurement en une fonction ayant la même semi-continuité.*

En effet, la première fonction supposée bornée sur E est la limite d'une suite non-croissante de fonctions continues et uniformément bornées sur E; les transformées étant par hypothèse continues, et formant une suite non-croissante, ont une limite semi-continue supérieurement.

En particulier, les fonctions K(P, intervalle fermé M_1, M_2) et K(P, intervalle ouvert M_1, M_2) du point P sont respectivement semi-continue supérieurement et semi continue inférieurement, car elles sont les transformées des *fonctions caractéristiques* de l'intervalle fermé (M_1, M_2) et du même intervalle ouvert.

Si l'intervalle fermé (M_1, M_2) se réduit au point M_1, la première fonction, qui est positive, doit donc être continue en tout point P où elle est nulle :

Si M_0 *est un point de continuité de la fonction* $K(P_0, M)$ *du point* M, *alors* P_0 *est un point de continuité de la fonction* $K(P, M_0)$ *du point* P.

On montre que cette condition nécessaire est aussi suffisante : on décompose l'intervalle (O, A) en intervalles où l'oscillation de F (M) est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. L'ensemble des points de continuité de $K(P_0, M)$ étant partout dense, on peut se servir uniquement d'intervalles I_k limités par de tels points. Alors les fonctions $K(P, I_k)$ admettent P_0 comme point de continuité, et l'on peut trouver δ tel que $P_0P < \delta$ entraîne

$$\left| \sum_k F(M_k) \cdot K(P_0, I_k) - \sum_k F(M_k) \cdot K(P, I_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais ces deux sommes sont, à $\frac{\varepsilon}{2}$ près, respectivement égales à $F_1(P_0)$ et $F_1(P)$: le point quelconque P_0 est point de continuité de $F_1(P)$, qui est par suite continue [25].

Des propriétés précédentes on peut déduire très simplement la continuité de θ : revenons à la suite $\{\varphi^n(e)\}$ qui converge vers $\Phi(e)$; soit $\mathcal{O}$ un ensemble ouvert, la fonction $K(M, \mathcal{O})$ est semi-continue inférieurement et par suite peut être approchée par des fonctions continues non-décroissantes. Compte tenu de la convergence de $\{\varphi_n(e)\}$, il en résulte

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_1^n(\mathcal{O}) \geqq \Phi_1(\mathcal{O}).$$

Désignons par $\bar{\mathcal{O}}$ la fermeture de $\mathcal{O}$; on a, de façon analogue,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_1^n(\bar{\mathcal{O}}) \leqq \Phi_1(\bar{\mathcal{O}}).$$

Comme $\varphi_1^n(\bar{\mathcal{O}}) \geqq \varphi_1^n(\mathcal{O})$, on a, lorsque $\varphi_1(\bar{\mathcal{O}}) = \Phi_1(\mathcal{O})$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_1^n(\mathcal{O}) = \Phi_1(\mathcal{O}) = \lim_{n\to\infty} \varphi_1^n(\bar{\mathcal{O}}),$$

C'est-à-dire que $\Phi_1(e_0)$ est la limite de $\{\varphi_1^n(e_0)\}$ pour tout ensemble e_0 tel que Φ_1 soit nulle sur la frontière de e_0. D'après M. de La Vallée Poussin, cette propriété caractérise la convergence de $\{\varphi_1^n(e)\}$ vers $\Phi_1(e)$ [26].

18. Nous venons de voir que les transformations T qui conservent la continuité avaient des transformations associées constituant la classe de celles qui conservent la convergence asymptotique des fonctions d'ensemble.

On peut aussi chercher la classe des transformations T qui conservent cette convergence en ce qui concerne les

---

(25) Tout ceci a été développé dans le BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE. (A. FOUILLADE, *Sur les substitutions fonctionnelles linéaires*, 1934, 4, pp. 282 290.)

(26) Mémoire cité, note 18.

fonctions de point, et nous trouverons que leurs transformations associées conservent l'absolue continuité des fonctions d'ensemble absolument continues. De plus, cette analogie se poursuit dans la forme de la condition que doit vérifier $K(P, e)$:

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* T *soit continue, par rapport à la convergence en mesure, est que* $\mathfrak{G}$ *conserve l'absolue continuité des fonctions d'ensemble absolument continues, et cette condition se traduit par l'absolue continuité de la fonction d'ensemble* $\int_E K(M, e)\, dM$.

Soit e_0 un ensemble de mesure nulle et $\alpha(e)$ une fonction positive d'ensemble absolument continue

$$\alpha_1(e_0) = \int_E K(M, e_0)\, d_M \alpha(e) = 0,$$

car l'ensemble des points où $K(M, e) > 0$ est de mesure nulle si la condition de l'énoncé est vérifiée. Et si cette condition n'était pas vérifiée, la transformée de $\alpha(e) =$ mesure de e.' E ne serait pas absolument continue.

Soit une suite $\{F^n(M)\}$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \int_E |\, F^n(M) - F(M)\,|\, dM = 0. \tag{21}$$

Considérons un ensemble $\mathcal{E}$ mesurable B et l'intégrale

$$\int_{\mathcal{E}} (F_1^n - F_1)\, dM.$$

Le théorème de commutativité du paragraphe 5 s'étend à cette intégrale, et l'on peut écrire

$$\int_{\mathcal{E}} (F_1^n - F_1)\, dM = \int_E \big(F^n(Q) - F(Q)\big)\, d_Q H_{\mathcal{E}}(e), \tag{22}$$

$H_{\mathcal{E}}(e)$ étant la fonction d'ensemble $\int_{\mathcal{E}} K(M, e)\, dM$.

D'après l'hypothèse cette fonction est absolument continue et sa variation est bornée indépendamment de $\mathcal{E}$. En tenant compte de (21), on voit que le deuxième membre de (22) a une limite nulle et que l'on peut trouver ε et N indépendants de $\mathcal{E}$ et tels que $n > N$ entraîne

$$\left| \int_{\mathcal{E}} (F_1^n - F)\, dM \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et de là il résulte aisément que

$$\int_E | F_1^n - F \mid dM < \varepsilon.$$

La condition de l'énoncé est donc suffisante; elle est aussi nécessaire, car si elle n'était pas vérifiée pour un ensemble de mesure nulle e_0, la fonction caractéristique de cet ensemble, fonction nulle presque partout, qui a pour transformée $f_1(P) = K(P, e)$, serait telle que $\int_E |f_1(P)| \, dP > 0$.

CHAPITRE III

ENSEMBLES INDÉPENDANTS ET ENSEMBLES INDÉCOMPOSABLES — THÉORÈME D'UNICITÉ

19. Nous allons maintenant donner quelques définitions relatives aux fonctions de point et d'ensemble et à leurs itérées déterminées par une transformation (T) au moyen de la formule (7).

Considérons une *dérivée sur un réseau* [27] de la fonction d'ensemble $K(P, e)$, et plus particulièrement la dérivée inférieure $k_i(P, M)$. Soient $E_1(P)$ l'ensemble des points où la dérivée est unique, infinie et positive, et

[27] C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue*, pp. 61 et suivantes.

$E_2(P)$ l'ensemble des points où la dérivée est unique, infinie et négative; $k_i(P, M)$ est sommable, et l'on a

$$(23) \qquad K(P, e) = K(P, E_1) + K(P, E_2) + \int_e k_i(P, M)\, dM \text{ (}^{27}\text{)}.$$

Soit $\mathfrak{M}_P$ l'ensemble des points où $k_i(P, M)$ est non nulle. Cet ensemble contient E_1 et E_2 et toute la variation de $K(P, e)$, c'est-à dire que $K(P, e)$ est nulle sur le complémentaire de $\mathfrak{M}_P$; de plus, ε étant un ensemble mesurable B, de mesure non nulle, inclus dans $\mathfrak{M}_P$, la variation de $K(P, e)$ sur ε n'est pas nulle.

L'ensemble $\mathfrak{M}_P$ sera nommé *ensemble* MÉTASÉQUENT *du point* P. *Cet ensemble est mesurable* B.

20. Soit un ensemble ε; la réunion $\mathfrak{M}_\varepsilon$ des métaséquents des différents points de ε peut ne pas être mesurable et peut contenir un ensemble m_ε de mesure plus petite qui ait aussi la propriété de contenir la variation de toute fonction attachée à un point de ε. Par suite il peut être utile d'introduire les notions suivantes :

Un *ensemble support* relatif à un ensemble ε est un ensemble mesurable B, soit S_ε, inclus dans $\overline{\mathfrak{M}_\varepsilon}$ et tel que pour tout point P de ε, on ait $K(P, e.CS_\varepsilon) \equiv 0$ ([28]).

Un ensemble support S_ε sera dit de *mesure réduite* s'il est de mesure nulle, ou bien si tout sous-ensemble η (de S_ε) mesurable B et de mesure positive est tel qu'il existe au moins un point P de ε pour lequel $K(P, e.\eta) \neq 0$.

Un ensemble support S_ε sera dit de *fermeture réduite* s'il n'existe aucun support relatif à ε qui ait une fermeture contenue dans $\overline{S_\varepsilon}$.

([28]) CS_ε désigne le complémentaire de S_ε; $e.CS_\varepsilon$ désigne le *produit* des ensembles e et CS_ε, c'est à dire l'ensemble des points communs à e et à CS_ε. Ces deux notions seront souvent employées dans la suite.

21. Nous appellerons *ensemble* CONSÉQUENT *d'un ensemble* A, et nous désignerons par $\mathcal{C}_A$, *l'ensemble des points* M_0 *tels que les fonctions d'ensemble* $K(M_0, c.A)$ *ne soient pas nulles.*

Lorsque les fonctions $K(M, e)$ sont toutes positives, le conséquent de A est l'ensemble des points M tels que $K(M, A) > 0$. Il est mesurable B, d'après les hypothèses initiales.

Remarquons que la *condition de la conservation de l'absolue continuité par* (\mathfrak{h}) *se traduit par ceci :*

Le conséquent de tout ensemble de mesure nulle doit être de mesure nulle.

22. ENSEMBLES INDÉPENDANTS ET ENSEMBLES INDÉCOMPOSABLES [29]. — *Un ensemble* c_0 [30] *est dit* INDÉPENDANT *lorsqu'il contient l'un de ses supports;* c'est-à-dire que P étant un quelconque de ses points, on a $K(P, e . Ce_0) \equiv 0$.

Par définition, *un ensemble* INDÉCOMPOSABLE *est un ensemble indépendant qui ne contient pas deux ensembles indépendants disjoints* [30].

La confrontation de ces dernières définitions et des notions de supports réduits permet de définir des ensembles indépendants et indécomposables de caractères particuliers, que nous mettrons en jeu dans la suite :

Un ensemble indépendant de mesure réduite est un ensemble E_0 qui ne contient aucun sous-ensemble indépendant E_1 tel que $E_2 = E_0 - E_1$ puisse à la fois être de mesure positive, non indépendant, et ne contenir aucun ensemble indépendant.

---

(29) Nous avons donné ces définitions, et la plupart des notions introduites dans ce chapitre dans *Certains aspects de l'itération des transf. fonct lin. et quelques notions qui s'en dégagent.* (R. C. AC. NAT. DEI LINCEI, 1934, XII, p. 82.)

(30) Nous ne considérons que les ensembles mesurables B, dans tout le mémoire.

Un ensemble indépendant de fermeture réduite est un ensemble E_0 qui ne contient aucun sous-ensemble indépendant E_1 tel que $E_2 = E_0 - E_1$ puisse à la fois ne pas être inclus dans $\overline{E_1}$, être non indépendant et ne contenir aucun ensemble indépendant.

Un ensemble *indécomposable de mesure réduite* ne contient aucun ensemble indécomposable de mesure plus petite.

Un ensemble *indécomposable de fermeture réduite* ne contient aucun ensemble indécomposable de fermeture plus petite.

Par exemple, dans le cas (très particulier) où le métaséquent de tout point d'un ensemble e_0 est l'ensemble e_0 lui-même, e_0 est indécomposable de mesure réduite.

23. Toutes les notions précédentes peuvent évidemment être utilisées vis-à-vis des fonctions itérées $K_n(P, e)$. Les métaséquents, supports, conséquents, ensembles indépendants, etc., seront dits *d'ordre n*.

Soient un ensemble e et des supports de fermeture réduite $\sigma_{n-1}(e)$ et $\sigma_n(e)$; soit aussi $\sigma[\sigma_{n-1}(e)]$ un support de fermeture réduite relatif à σ_{n-1}, et d'ordre 1. On a l'inclusion $\overline{\sigma_n} \subset \overline{\sigma[\sigma_{n-1}]}$ [31], car le produit $\sigma_1[\sigma_{n-1}] . \sigma_n$ est un support d'ordre n relatif à σ; mais on n'a pas, en général, identité des deux fermetures précédentes.

Les conséquents donnent lieu à une remarque analogue, mais dans le cas des transformations positives, $\varphi[\varphi_{n-1}(e)]$ et $\varphi_n(e)$ sont identiques. Dans ce cas, on démontre, pour les supports, le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *La transformation* T *étant positive, à toute suite de fonctions positives d'ensemble itérées :* $\varphi_0(e)$,

(31) Soit un ensemble e, la notation $\bar{e}$ représente la *fermeture* de e.

$\varphi_1(e), \dots \varphi_n(e), \dots,$ *on peut faire correspondre une suite de* SUPPORTS ITÉRÉS *de fermeture réduite :* $s_0, s_1, \dots s_n, \dots$ *tels que* s_{p+q} *soit un support d'ordre* q *et de fermeture réduite relatif à* s_p, *et tels que* $\varphi_n(Cs_n) = 0$.

A $\varphi_n(e)$ faisons correspondre l'ensemble fermé e_n qui est le complémentaire de l'ensemble des points M tels qu'il existe un cercle de centre M ne contenant aucune variation de $\varphi_n(e)$; e_n peut ne pas être un support de fermeture réduite, d'ordre n, relatif à e_0, mais il suffit d'enlever à e_0 l'ensemble ε_0 des points M de e_0 tels que $K_n(M, Ce) > 0$, ensemble qui est forcément tel que $\varphi_0(\varepsilon_0) = 0$, pour obtenir un ensemble $e'_0 = e_0 - \varepsilon_0$ admettant e_n comme support de fermeture réduite d'ordre n. En répétant cette opération une infinité dénombrable de fois, au plus, on obtiendra un ensemble s_0 tel que $\overline{s_0} = e_0$ et $\varphi_0(Cs_0) = 0$, admettant, quel que soit n, e_n comme support de fermeture réduite d'ordre n. Ensuite, on modifiera e_1 de façon à obtenir un ensemble s_1 tel que $s_1 = e_1$ et $\varphi_1(Cs_1) = 0$, admettant, quel que soit $n > 1$, e_n comme support de fermeture réduite d'ordre $n - 1$; et s_1 sera support de fermeture réduite d'ordre 1 relativement à s_0. De proche en proche, on peut donc définir une suite d'ensembles répondant aux conditions de l'énoncé.

Par une démonstration analogue, on montre qu'*à la suite* $\{ \varphi_n(e) \}$ *on peut aussi faire correspondre une suite de supports itérés de mesure réduite*, et en combinant les deux procédés de réduction, on obtient *une suite de supports itérés réduits en mesure et en fermeture.*

24. Supposons que l'on ait la relation

$$\varphi_1(e) = \lambda \varphi_0(e);$$

toutes les fonctions itérées sont proportionnelles à $\varphi_0(e)$

et l'application du théorème précédent permet de faire correspondre à $\varphi_0(e)$ un ensemble indépendant E_0 tel que $\varphi_0(e.CE_0) = 0$, et cet ensemble peut être choisi de façon qu'il soit son propre support de mesure réduite et de fermeture réduite.

Supposons en plus *l'unicité, à un facteur constant près, de l'invariant relatif* $\varphi_0(e)$, *dans un ensemble* E' *contenant toute la variation de cette fonction. Ce dernier ensemble contient un ensemble indécomposable,* car on peut supposer $E_0 \subset E'$, et si E_0 contenait deux ensembles indépendants e_1 et e_2, les fonctions non proportionnelles $\varphi_0(e.e_1)$ et $\varphi_0(e.e_2)$ seraient séparément invariantes.

25. *Dans le cas des transformations unitaires*, une fonction positive d'ensemble ne peut ni être majorée, ni être minorée. Supposons donné un ensemble indécomposable E_0, et supposons qu'il existe une fonction $\varphi(e)$ à variation bornée, *non monotone dans* E_0, qui soit invariante ($\lambda = 1$). Soit $\varphi^1(e)$ la variation positive de $\varphi(e)$; sa transformée est positive et non inférieure à $\varphi(e)$; donc, à cause de la conservation de l'unité, $\varphi^1(e)$ est invariante. De même la variation négative est invariante et l'ensemble E_0 contient deux invariants *dissociables* en qualifiant ainsi deux fonctions dont les variations respectives sont concentrées sur des ensembles disjoints ([32]). Or E_0 contiendrait dans ce cas deux ensembles indépendants disjoints, ce qui est impossible.

Supposons qu'il existe dans E_0 deux fonctions positives d'ensemble non proportionnelles qui soient invariantes : $\varphi(e)$ et $\psi(e)$; en prenant la fonction $\varphi(e) - \lambda\psi(e)$ où le coefficient λ est égal à $\varphi(E_0) : \psi(E_0)$, on obtiendrait un

([32]) Nous rappelons que nous considérons exclusivement les ensembles mesurables B.

invariant non nul et non monotone, ce qui est impossible; d'où le théorème d'unicité ([33]) suivant :

Théorème 2, — *Si dans un ensemble indécomposable il existe une fonction additive d'ensemble, à variation bornée, non nulle et invariante par la transformation* θ : *1° cet invariant est monotone; 2° il est unique, à un facteur constant près.*

On conçoit que certains problèmes puissent être abordés par la recherche des ensembles indécomposables, puis dans chacun de ces ensembles par la recherche de l'invariant unique, non nul, s'il existe. Nous verrons des cas où il n'existe pas d'invariant non nul à variation bornée.

En ce qui concerne la transformation T, *on ne peut affirmer l'unicité d'une fonction de point invariante que lorsque celle-ci atteint son maximum ou son minimum dans l'ensemble indécomposable, auquel cas elle y est constante.*

CHAPITRE IV

APPLICATIONS A LA RECHERCHE DES INVARIANTS ET AU PROBLÈME DE LA CONVERGENCE DES FONCTIONS ITÉRÉES

26. Dans certains cas, on peut construire une fonction d'ensemble invariante par la méthode suivante ([34]) :

Soient une fonction positive bornée $\varphi(e)$ et sa transformée $\varphi_1(e)$; représentons par $\varphi_{1,1}(e)$ *la plus petite fonction supérieure à la fois à* $\varphi(e)$ *et à* $\varphi_1(e)$ ([35]). Nous

([33]) A. Fouillade, *Comptes Rendus*, 1935, p. 252.

([34]) Cette méthode réussit toujours dans le cas des substitutions de l'algèbre (A Fouillade, *Sur l'itération de certaines substitutions linéaires*, Ac Roy de Belgique, 1933, 4, p. 424.)

([35]) Soit $\psi(e)$ la variation positive de $\alpha(e) - \beta(e)$; la fonction $s[\alpha(e); \beta(e)]$ est égale a $\beta(e) + \psi(e)$. Cette borne supérieure était appelée *supremum* par Weierstrass (d'où le recours à l'initiale *s*; cf. p. ~~207~~ 51).

la représenterons aussi par le symbole $s[\varphi_1, \varphi]$, et nous écrirons

$$\varphi_{1,1} = s[\varphi_1, \varphi].$$

Posons

$$\varphi_{2,1} = \theta[\varphi_{1,1}], \qquad \varphi_{2,2} = s[\varphi_{2,1}, \varphi_{1,1}], \text{ etc. :}$$
$$\varphi_{n,n} = s[\varphi_{n,n-1}, \varphi_{n-1,n-1}].$$

La suite $\{\varphi_{n,n}\}$ est non-décroissante, mais elle peut ne pas être bornée dans E. *Quand elle est bornée, la suite $\{\varphi_{n,n}\}$ converge fortement vers une limite qui est invariante par rapport à la transformation* θ.

Plaçons-nous dans le cas où E est indécomposable de mesure réduite ([36]). L'invariant cherché, s'il existe, possède les deux propriétés suivantes :

a) *Si un ensemble indécomposable* E′ *contient un ensemble indécomposable* E, *l'invariant est nul sur* E′ — E.

b) *Si l'ensemble indécomposable* E *est de mesure réduite, l'invariant est non nul sur tout ensemble de mesure positive inclus dans* E.

Un cas intéressant est celui où $\varphi_{n,n}(E)$ augmente indéfiniment, tandis qu'il existe un certain ensemble E_0 de mesure positive et tel que $\varphi_{n,n}(E_0)$ soit bornée.

Soit A un nombre positif; $\varphi_{n,n}$ doit être bornée sur l'ensemble E_1 des points M tels que $K(M, E_0) \geqq A$.

Posons $\Sigma_1 = E_0 + E_1$; la fonction $\varphi_{n,n}$ étant bornée sur Σ_1 doit l'être sur l'ensemble E_2 des points M tels que $K(M, \Sigma_1) \geqq \frac{A}{2}$ et ainsi de suite. Mais l'ensemble $\Sigma_n = E_n + \Sigma_{n-1}$ tend vers une limite Σ qui doit être identique à E, sans quoi E — Σ serait indépendant et Σ ne serait pas indécomposable de mesure réduite. Posons

$$\Phi(e\,.\,\Sigma_p) = \lim_{n \to \infty} \varphi_{n,n}(e\,.\,\Sigma_p);$$

([36]) Mais on peut montrer qu'*un ensemble indécomposable étant donné, il ne lui correspond pas toujours un ensemble indécomposable de mesure réduite.*

la fonction Φ, bien qu'elle ne soit pas définie pour tout sous-ensemble de E, peut être considérée, par extension, comme un invariant, car on voit aisément que l'intégrale

$$\int_E K(M, e_0 . \Sigma_l)\, d_M \Phi(e . \Sigma_n)$$

tend vers $\Phi(e_0 . \Sigma_l)$ pour n infini.

De plus, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 25, on montre que le théorème d'unicité s'applique, c'est-à-dire que *dans le cas envisagé, il n'existe pas dans* E *d'invariant à variation bornée.*

Mais un troisième cas reste possible, à priori : c'est celui où $\varphi_{n,n}$ ne serait bornée sur aucun ensemble de mesure positive. Nous ne savons pas, en général, choisir la fonction $\varphi(e)$ pour que cette éventualité soit écartée.

Cependant, envisageons le cas où l'on peut démontrer que s'il existe un invariant, il en est un qui est supérieur à une fonction connue $\Psi(e)$; en prenant $\varphi(e) = \Psi(e)$, la méthode précédente conduit à un invariant, s'il en existe un. Par exemple, *supposons que tous les points* P *d'un certain ensemble* V *de mesure non nulle soient tels que* $K(P, e) \geqq \Psi(e)$: E *étant réduit, s'il existe un invariant, celui-ci est strictement positif sur tout ensemble de mesure positive, en particulier sur* V; *il est donc supérieur à une fonction de la forme* $\lambda \Psi(e)$; et le troisième cas est facilement écarté.

27. Au lieu de considérer la fonction $s[\varphi, \varphi_1]$ on peut prendre *la plus grande fonction à la fois inférieure à* φ *et à* φ_1. Désignons-la par le symbole [37] $i[\varphi, \varphi_1]$; posons $\Psi_{11} = i[\varphi, \varphi_1]$, puis considérons $\Psi_{2,2} = i[\Psi_{1,1}, \theta[\Psi_{1,1}]]$, et ainsi de suite : on définit ainsi une suite décroissante

---

(37) Soit $\psi(e)$ la variation positive de $\alpha(e) - \beta(e)$; la fonction $i[\alpha(e), \beta(e)]$ est égale à $\alpha(e) - \psi(e)$; c'est l'*infimum* de Weierstrass; d'où l'emploi de l'initiale i.

$\{ \Psi_{n,n} \}$ dont la limite, qu'elle soit nulle ou non, est un invariant.

Ce procédé, dans un cas pratiquement très important, va nous permettre de *démontrer l'existence d'un invariant non nul :*

Supposons que les fonctions $K(P, e)$ *soient absolument continues et que les densités* $k(P, M)$ *soient bornées supérieurement par* δ, *nombre indépendant de* M *et de* P (38). Le métaséquent de tout point P a une mesure supérieure ou égale à $\frac{1}{\delta}$; tout ensemble indépendant a une mesure supérieure ou égale à $\frac{1}{\delta}$; d'où l'*existence d'un nombre fini d'ensembles indépendants disjoints* et par suite l'*existence d'un ensemble indécomposable (au moins) dans tout ensemble indépendant.* De plus, *tout ensemble indécomposable contient un ensemble indécomposable de mesure réduite.* Soit E un tel ensemble; considérons la fonction

$$\varphi(e) = \text{mesure de } e.\mathrm{E};$$

la fonction $i[\varphi(e), \varphi_1(e)]$ ne peut être nulle, parce que E est réduit, et la suite $\{ \Psi_{n,n} \}$ ne peut pas être nulle à partir d'un certain rang. Supposons que la limite soit nulle. La

---

(38) Ce cas très important et des cas voisins ont été l'objet d'un grand nombre de travaux. Nous n'insistons pas sur la Théorie de Fredholm elle même. Nous citons dans l'Introduction les très importants travaux de M. Fréchet sur le comportement des noyaux itérés, travaux qui utilisent la théorie des noyaux orthogonaux et qui s'appliquent à des transformations qui n'ont besoin d'être ni positives ni unitaires. Les résultats obtenus aux paragraphes 27, 28, 29, 30 sont en partie connus, mais nous pensons que la méthode employée ici peut donner des resultats dans des cas où il n'est pas possible de définir une « équation en λ ». A certains égards, elle généralise la méthode de Markhoff, mais, d'autre part, il est évidemment utile de connaître le nombre et la nature des ensembles indécomposables, même dans le cas où la transformation n'est ni positive ni unitaire. Signalons aussi qu'il a suffi à M. Fréchet de supposer les noyaux bornés individuellement, à partir d'un certain rang.

densité de $\Psi_{n+1,n}$ en un point M est donnée par l'intégrale

$$\int_E h(Q, M)\, d_Q \Psi_{n,n}(e) \leqq \delta \,.\, \Psi_{n,n}(E);$$

donc, en tout point de E, cette densité tend vers zéro et la convergence est uniforme, ce qui est impossible si $\Psi_{n,n}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang : ceci prouve que lim. $\Psi_{n,n}$ *est non nulle, et c'est un invariant.*

28. Soit donc, dans le cas précédent, l'invariant $\Phi(e)$ tel que $\Phi(E) = 1$. Considérons les itérées $\alpha_n(e)$ d'une fonction $\alpha(e)$ telle que $\alpha(E) = 1$ et admettant une densité bornée par δ.

On peut extraire de la suite $\{\alpha_n\}$ une suite $\{\alpha_{n_p}\}$ convergente. Comme la limite $A(e)$ a une densité bornée la convergence est la convergence forte. Soit $\pi^{(n_p)}$ la fonction

$$i[\alpha_{n_p}(e), \Phi(e)];$$

les fonctions

$$\pi^{(n_p)}, \quad \alpha_{n_p} - \pi^{(n_p)} \quad \text{et} \quad \Phi(e) - \pi^{(n_p)}$$

convergent fortement vers

$$\Pi(e) = i[A(e), \Phi(e)], \quad A(e) - \Pi(e) \quad \text{et} \quad \Phi(e) - \Pi(e),$$

respectivement.

Remarquons que si une fonction absolument continue

$$\beta_p(e) = \int_e b_p(M)\, dM$$

converge fortement vers une fonction absolument continue

$$\beta(e) = \int_e b(M)\, dM,$$

la suite $\{b_p(M)\}$ contient une suite $\{b_{p_q}\}$ qui converge *presque* *partout* vers $b(\mathrm{M})$. Appliquons ce *théorème* (Egoroff) : *on peut trouver, pour chaque* $\varepsilon > 0$, *un ensemble fermé* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ *tel que mes.* $(\mathrm{E}-\mathrm{F}) < \varepsilon$, *la convergence des* b_{p_q} *vers* $b(\mathrm{M})$ *étant uniforme sur* F [39]. A un nombre positif η on peut faire correspondre $q(\eta)$ tel que pour $q \geqq q(\eta)$ on ait

$$|b_{p_q}(\mathrm{M}) - b(\mathrm{M})| < \eta \quad \text{sur} \quad \mathrm{F},$$

c'est-à-dire

$$\beta_{p_q}(e) \geqq \int_{\mathrm{F}.e} (b(\mathrm{M}) - \eta)\, d\mathrm{M};$$

et comme mes. $(\mathrm{E}-\mathrm{F}) < \varepsilon$, l'intégrale précédente étendue à F est arbitrairement voisine de $\beta(\mathrm{E})$. Donc la fonction

$$i[\beta_{p_q}(e), \quad \beta_{p_{q+1}}(e), \ldots] \text{ [40]}$$

n'est pas nulle à partir d'un certain rang et a même limite que $\beta_{p_q}(e)$: la fonction $\beta(e)$.

Posons

$$\mathrm{D}^{(n_p)}(e) = \alpha_{n_p} - \pi^{(n_p)} \qquad \text{et} \qquad \Delta^{(n_p)}(e) = \Phi - \pi^{(n_p)}$$

et supposons que les fonctions limites $\mathrm{A} - \Pi$ et $\Phi - \pi$ ne soient pas nulles; à partir d'un certain rang p_0, il existe deux fonctions positives non nulles $\mathrm{D}_0(e)$ et $\Delta_0(e)$ qui sont respectivement inférieures à toutes fonctions $\mathrm{D}^{(n'_p)}$ et $\Delta^{(n'_p)}$ dont le rang p est supérieur à p_0. Π

Or, la variation totale de π^n est non-décroissante quand n croît. On a la relation $\pi^{n+q}(\mathrm{E}) =$ variation totale de $\theta^q[\pi^n]$ + variation totale de la fonction $i[\theta^q[\mathrm{D}^n], \theta^q[\Delta^n]]$.

Par suite, il existe un nombre q_0 tel que $i[\theta^{q_0}[\mathrm{D}_0], \theta^{q_0}[\Delta_0]]$ ne soit pas nulle; il n'est pas possible que $\Delta^{(n'_p)}$ et $\mathrm{D}^{(n'_p)}$ soient respectivement supérieures à Δ_0 et D_0, à partir d'un certain rang. *Donc, ou bien la fonction*

---

[39] SAKS, *Théorie de l'intégrale*, p. 43.

[40] La notion d'*infimum* s'étend évidemment à un ensemble infini d'éléments.

$i[\theta^q[\Delta_0], \theta^q[D_0]]$ *est nulle quel que soit* q, *ou bien* $\pi^{(n'_p)}$ *converge fortement vers* Φ. Dans ce dernier cas, $\alpha_{n'_p}$ a la même limite Φ, et il en est ainsi de toute suite convergente extraite de la suite $\{\alpha_n\}$; donc cette dernière suite tend fortement vers l'invariant $\Phi(e)$. En particulier *les fonctions itérées* $K_n(P,e)$ *convergent vers* $\Phi(e)$, *et les densités itérées* $k_n(P, M)$ *convergent en mesure.*

29. Nous allons montrer que *si l'ensemble* E *est indécomposable par rapport à toute puissance de* θ *la convergence précédente est la règle générale dans le cas étudié.* Pour cela, il suffit de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Dans le cas où l'ensemble* E *est indécomposable par rapport à toute puissance de* θ *et où les fonctions* $K(P, e)$ *admettent une densité* $k(P, M)$ *bornée, il n'existe pas deux fonctions d'ensemble disjointes* [41] *qui aient toutes leurs itérées de même rang disjointes* [42].

Soit une fonction $\varphi(e)$; sa transformée $\varphi_1(e)$ a une densité positive sur un ensemble de mesure supérieure à $\frac{1}{\delta}$. Donc le nombre de fonctions disjointes ayant leurs itérées de même rang toutes disjointes les unes des autres est borné par δ . mes. E.

Supposons que l'énoncé soit mis en défaut par deux fonctions $\varphi(e)$ et $\psi(e)$. La suite $\{\varphi_n(e)\}$ détermine une suite de supports itérés de mesure réduite dont la réunion a une mesure qui tend vers mes. E, car elle contient un ensemble indépendant, et l'ensemble indécomposable E est supposé de mesure réduite. Par suite il existe un rang n_0 tel que $i[\varphi_{n_0}, \varphi]$ soit non nulle. Si φ_{n_0} n'est pas

---

(41) Deux fonctions d'ensemble sont *disjointes* lorsque leur infimum s'annule identiquement.

(42) Il serait intéressant de se libérer de l'hypothèse relative à la densité, et de voir si le théorème ne subsiste pas pour un ensemble E indécomposable *de mesure réduite*, sans plus.

disjointe de ψ, les trois fonctions ψ_{n_0}, $i[\psi, \varphi_{n_0}]$, $i[\varphi_{n_0}, \cancel{\psi}]$ /φ
ont leurs itérées de même rang disjointes. Si $i[\varphi_{n_0}, \psi] = 0$, il peut se faire que $i[\psi_{n_1}, \varphi_{n_1+n_0}]$ ne soit pas nulle. Alors on a encore trois fonctions aux itérées disjointes :

$$\psi_{n_1+n_0}, \quad i[\varphi_{n_1+n_0}, \varphi_{n_1}], \quad i[\varphi_{n_1+n_0}, \psi_{n_1}].$$

Ayant trois fonctions aux itérées disjointes, on peut faire un raisonnement analogue au précédent, mais comme on ne peut pas augmenter indéfiniment le nombre de fonctions aux itérées disjointes, on arrivera à obtenir deux fonctions $\alpha(e)$ et $\beta(e)$ telles que les deux cas précédents ne se présentent pas ; pour cela il faut que $\beta(e)$ ait ses itérées disjointes des itérées de même rang d'une fonction de la forme

$$\alpha + \alpha_{n'_0} + \alpha_{2n'_0} + \cdots + \alpha_{kn'_0}$$

quel que soit k. Mais la suite $\{\alpha_{kn'_0}\}$, détermine un ensemble indépendant d'ordre n'_0, et cet ensemble, sur lequel $\beta(e)$ est nulle, serait de mesure inférieure à mes. E. Désignons-le par e_0 ; on a pu le choisir ([13]) de façon qu'il existe un cycle de supports itérés $e_1, e_2, \ldots, e_{n'_0} \equiv e_0$ Tout produit $e_0 . e_1 \ldots e_{p-1}$, où $p < n'_0$, n'est pas disjoint du produit $e_1 . e_2 \ldots e_{p+1}$; sans quoi E contiendrait deux ensembles indépendants disjoints d'ordre n'_0 ; par suite $e_0 . e_1 \ldots e_{n_0-1}$ n'est pas vide; mais c'est un ensemble indépendant d'ordre 1 qui doit avoir une mesure égale à celle de E. Donc mes $e_0 =$ mes. E; il y a contradiction.

Ceci démontre le théorème. Mais en outre, *si l'on ne suppose plus que* E *est indécomposable par rapport à toute puissance de* θ (sauf $\theta = \theta^1$) *et si l'on sait que* E *contient un ensemble* e_0 *indépendant d'ordre* n_0 *et de mesure inférieure à celle de* E, la fin de la démonstration précédente

---

([43]) D'après le théorème 1.

montre que E *est décomposable par rapport à* θ^{n_0}, puisque, pour qu'il n'en soit pas ainsi il faudrait que $e_0 . e_1 \ldots e_{n_0-1}$ soit non vide, ce qui est impossible.

30. *Supposons que* n_0 *soit un nombre premier* et soit e_i le premier ensemble du cycle de supports itérés qui ne soit pas disjoint de e_0. Si i est inférieur à n_0, on peut trouver des solutions entières de l'équation

$$xi = yn_0 + 1.$$

Le support d'ordre xi est e_i, et le support d'ordre yn_0 est e_0; donc e_i est identique à e_1, et $i = 1$. De même, on montre que $e_0 . e_1 . e_2$ n'est pas vide et ainsi de suite, et comme E est indécomposable de mesure réduite par rapport à θ, on arrive à une contradiction, ce qui prouve que les n_0 ensembles e_i sont disjoints les uns des autres; d'autre part, leur réunion a même mesure que E.

Considérons l'ensemble e_0 et cherchons s'il est décomposable par rapport à $(\theta^{n_0})^{p_0} = \theta^{n_0 p_0}$, p_0 étant un nombre premier. Dans l'affirmative, E contient $n_0 p_0$ ensembles indépendants par rapport à $\theta^{p_0 n_0}$. Ces ensembles forment un cycle de $p_0 n_0$ supports itérés tous disjoints, et leur réunion a même mesure que E. Il résulte de nos hypothèses que l'on ne peut pas trouver de cycle dont le nombre d'ensembles soit supérieur à δ. mes. E.

Nous dirons qu'un ensemble est *totalement indécomposable* par rapport à une transformation quand il est indécomposable par rapport à toute puissance de la transformation. On peut donc énoncer le théorème :

Théorème IV. — *L'ensemble* E *indécomposable et de mesure réduite par rapport à* θ *se décompose, à un ensemble de mesure nulle près, en un cycle de* N *ensembles, supports itérés les uns des autres, ces ensembles étant totale-*

ment indécomposables par rapport à θ^N. Le nombre N *est par définition le* DEGRÉ *de l'ensemble* E [44].

La transformation θ^N ayant les mêmes propriétés utiles que θ, toute suite $\{K_{n.N}(P, e)\}$, relative à un point P du cycle défini par le théorème, converge fortement vers une fonction invariante par rapport à θ^N. Soit e_k l'ensemble auquel appartient P; $\Phi(e)$ étant l'invariant relatif à E et à θ, l'invariant relatif à e_k (donc aussi la limite de $K_{n.N}(P,e)$) est proportionnel à $\Phi(e.e_k)$. Il en résulte aisément que la suite $\{K_n(P, e)\}$ *converge au sens de Cesàro*, c'est-à-dire que $\frac{1}{n}\sum_1^n K_p$ converge fortement vers Φ Si l'on considère *un point* Q *qui n'appartient pas au cycle,* $K_{n.N}(Q, e)$ *converge vers une combinaison linéaire des fonctions* $\Phi(e.e_k)$ *dans le cas où l'ensemble* $\mathcal{E}$ *dans lequel est définie la transformation* T *ne contient qu'un seul ensemble indécomposable d'ordre* 1.

Si l'on s'intéresse aux fonctions invariantes non réelles, on aura N invariants de module 1 qui sont $\sum i^{k-h}\Phi(e.e_k)$, pour $h = 1, 2, \ldots N$, i étant une racine N^ième^ imaginaire de l'unité.

Dans le cas où l'ensemble $\mathcal{E}$ *contient plusieurs cycles distincts de degrés* N_1, N_2, ... N_q, *si* P *n'appartient à aucun cycle*, $K_{N.n}(P, e)$ *converge encore si* N *est multiple commun de* N_1, N_2, ... N_q *: on a toujours la convergence au sens de Cesàro*. Remarquons enfin que toutes les limites et tous les invariants sont *nuls sur l'ensemble des points* P *qui n'appartiennent à aucun cycle* [45].

---

[44] Ce théoreme et sa démonstration s'appliquent (en changeant quelques termes) aux substitutions de l'algebre (voir le mémoire précité : AC. ROY. DE BELGIQUE, 1933, 4, pp. 415-436). Il montre que la transformation étudiée a même *structure*, au point de vue de la dépendance des variables entre elles, qu'une substitution *finie*. Nous avons pu l'étendre au cas où l'on suppose seulement que E est indécomposable de mesure réduite. (Cf. *Bull. Sc. Math*, 1937, 2, LXI.)

[45] Car cet ensemble ne contient aucun ensemble indépendant.

Ces résultats permettent de résoudre la question de la convergence des fonctions de point itérées ([46]).

31. Nous allons donner deux *exemples* où l'ensemble sur lequel la transformation T est donnée contient un ensemble indécomposable qui est dénombrable, et où sur cet ensemble *on obtient un invariant par le procédé du paragraphe* 26.

1° En chaque point P_n d'un ensemble dénombrable la fonction $K(P_n, e)$ est définie par des masses $\frac{1}{3}$ situées en P_{n-1}, P_n, P_{n+1}, à l'exception de P_1, pour lequel on a des masses $\frac{1}{2}$ en P_1 et P_2.

Cet ensemble est indécomposable; la méthode indiquée, en prenant comme fonction $\varphi(e)$ la masse placée en P_1, donnera un *invariant de masse totale infinie, mais borné sur tout ensemble* $\sum_1^n P_p$, invariant constitué par la masse 1 placée en P_1 et les masses $\frac{3}{2}$ placées en P_n, quel que soit n plus grand que 1;

2° Supposons que $K(P_n, e)$ soit définie par la masse $\frac{2}{3}$ en P_{n-1} et des masses $\frac{1}{6}$ en P_n et P_{n+1}, à l'exception de P_1, pour lequel on a $\frac{1}{2}$ en P_1 et $\frac{1}{2}$ en P_2. Le même procédé, avec la même fonction initiale, conduit à l'invariant défini par la masse 1 en P_1 et les masses $\frac{3}{4n}$ placées en P_n. *Cet invariant a une masse totale finie*

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \cdots + \frac{3}{4^n} + \cdots = 2.$$

([46]) Nous n'insistons pas, car pour les résultats il suffit de se reporter aux mémoires cités de M. Fréchet, particulièrement *Quat. J. of Math.*, 1934, 5, p. 106; *C. R.*, t. 159, 1932, p. 590; *Ann. Sc. N. Sup. di Pisa*, 1933, XI; ce dernier pour les subst. finies. — Remarquons aussi que la méthode employée ici permet de savoir ce qui se passe dans le *cas singulier* de M. Fréchet, cas qui est le plus général : celui où l'on a plusieurs cycles distincts de degrés différents ou non.

CHAPITRE V

CAS DES SUBSTITUTIONS FONCTIONNELLES

32. Nous nous placerons désormais dans le cas des *substitutions*, qui, dans la terminologie adoptée, est celui des *transformations* T *conservant la continuité, ce qui entraîne la conservation par* θ *de la convergence des fonctions positives d'ensemble* (et réciproquement).

THÉORÈME 5. — T *étant une substitution, et* E_0 *un ensemble indépendant, l'ensemble fermeture* $\overline{E_0}$ *est aussi indépendant.*

En effet, soit P un point de $\overline{E_0}$; on peut trouver une suite $\{P_n\}$ de points de E_0 ayant P comme ensemble d'accumulation : la suite $\{K(P_n, e)\}$ doit être convergente vers $K(P, e)$; donc, puisque $K(P_n, CE_0) = 0$, $K(P, e)$ est nulle sur $C\overline{E_0}$, ce qui démontre le théorème.

Cette propriété facilite la recherche des cas où l'on peut affirmer l'existence d'un ensemble indécomposable : soit un ensemble indépendant fermé ou non; s'il contient au moins deux ensembles indépendants de fermetures distinctes, nous considérerons l'un d'eux, que nous chercherons à décomposer comme le premier, etc. Nous constituons une suite d'ensembles indépendants fermés et emboîtés. Si nous n'obtenons jamais d'ensemble indécomposable, il nous suffira d'une suite dénombrable pour aboutir à *un ensemble indépendant* E_0 *qui ne contienne aucun ensemble indépendant de fermeture plus petite que* $\overline{E_0}$.

A priori, cet ensemble peut ne pas être indécomposable et, même dans le cas de la conservation de la continuité, on peut imaginer *deux ensembles indépendants disjoints* *ayant même fermeture* ([47]). Mais, si cette possibilité est écartée par une hypothèse convenable, nous pourrons dire que tout ensemble indépendant contient au moins un ensemble indécomposable.

Supposons que l'ensemble E_0 précédent contienne deux ensembles indépendants disjoints e_1 et e_2 ayant $\overline{E_0}$ comme fermeture; e_1 et e_2 sont denses sur $\overline{E_0}$. Soient P_1 un point de e_1, et P_2 un point de e_2. Si rapprochés que soient ces deux points, la fonction $i[K(P, e), K(P_2, e)]$ est non nulle; *il suffit donc de faire en sorte qu'à distance nulle de tout point P existe un ensemble ouvert ω_P tel que pour tout point P′ de $\omega_P . E_0$, on ait $i[K(P', e), K(P, e)] \neq 0$.* Par exemple, ceci est réalisé si $K(P, e)$ admet une densité strictement positive en tout point de ω_P. Il suffit même que cette hypothèse soit vérifiée par les points P de E_0 qui sont inclus dans un ensemble ouvert quelconque.

Mais si l'hypothèse précédente est vérifiée en tout point de $\overline{E_0}$, l'ensemble $\overline{E_0} - E_0$ ne peut pas contenir d'ensemble indépendant, et l'ensemble $\overline{E_0}$ est un ensemble fermé indécomposable.

33. Considérons un ensemble indécomposable E, et soit P un point quelconque de cet ensemble. Posons

$$S^{(n)}(P, e) = \frac{1}{n}[K(P, e) + K_2(P, e) + \cdots + K_n(P, e)].$$

Nous avons la relation

$$S^{(n)} - S^{(n+1)} = \frac{S^{(n)}}{n+1} - \frac{K_{n+1}}{n+1}. \tag{25}$$

([47]) *De tels ensembles existent:* par exemple supposons que E soit un cercle et que pour tout point P la fonction K(P, e) soit représentée par la masse 1 située en un point P_1 à distance (curviligne) constante de P et rationnelle. Soit P′ à distance irrationnelle de P; P et P′ appartiennent à deux ensembles indépendants disjoints et chacun de ceux-ci a le cercle pour fermeture.

Le second membre a une variation qui tend vers zéro, puisqu'elle est bornée par

$$\frac{1}{n+1}[S^{(n)}(E)+K_{n+1}(E)]=\frac{2}{n+1}.$$

On peut extraire de la suite $\{S^{(n)}\}$ une suite convergente $\{S^{(n_p)}\}$. Désignons par $\Sigma(P, e)$ la limite. D'après la relation (25) la suite $\{S^{(n_p+1)}\}$ converge aussi vers $\Sigma(P, e)$.

Considérons la transformée de $S^{(n)}$ au moyen de θ. On a

$$\theta[S^{(n)}]=\frac{n+1}{n}S^{(n+1)}-\frac{K(P,e)}{n}. \tag{26}$$

On voit que la suite $\{\theta[S^{(n_p)}]\}$ est convergente et a même limite que $S^{(n_p+1)}$; comme $S^{(n_p+1)}$ et $S^{(n_p)}$ ont $\Sigma(P, e)$ pour limite, on a, puisque la convergence est conservée, la relation d'invariance

$$\theta[\Sigma]=\Sigma.$$

On a donc le théorème d'existence : *à tout ensemble indécomposable on sait faire correspondre au moins un invariant.*

Mais nous n'avons pas supposé E fermé : *il peut donc se faire que la variation de Σ, qui est nulle sur* $C\overline{E}$, *ne soit pas nulle sur* $\overline{E}-E$. *On peut même avoir* $\Sigma(E)=0$. Quand $\Sigma(e\,.\,E)$ n'est pas nulle, cette fonction est invariante, et nous pouvons remarquer, à cause du théorème d'unicité, que toute suite convergente extraite d'une suite $\{S^{(n)}(Q, e)\}$ a une limite qui, sur E, est connue à un coefficient près.

34. *Réciproquement*, si nous savons qu'il existe un invariant $\sigma(e)$ non nul concentré sur E, toute suite convergente $\{S^{(n_p)}\}$ a une limite qui est non nulle sur E.

En effet, la fonction $i[K_n(P,e), \sigma]$ ne saurait être nulle quel que soit n, car $\sigma(e)$ et la suite $\{K_n(P,e)\}$ permettraient de définir, par application du théorème 1, deux ensembles indépendants disjoints inclus dans E.

Considérons donc une fonction $i\,[K_{n_0}(P, e), \sigma] = i_0(e)$ non nulle; sa transformée au moyen d'une transformation θ^q quelconque est inférieure à $\sigma(e)$; par conséquent, toute suite convergente extraite de la suite $\left\{\frac{1}{n}\sum_1^n \theta^q\,[i_0]\right\}$ a une limite inférieure à $\sigma(e)$, donc une limite nulle sur CE, donc, à cause de l'invariance et de l'unicité, une limite proportionnelle à $\sigma(e)$. Cette limite $\lambda_0\,\sigma(e)$ a une variation totale égale à celle de $i\,[K_{n_0}(P), \sigma]$, et l'on voit que la suite $\left\{\frac{1}{n}\sum_1^n \theta^q\,[i_0]\right\}$ tout entière converge vers $\lambda_0\sigma(e)$.

Un cas particulièrement simple est celui où la fonction Σ (du n° précédent) est nulle sur $\overline{E} - E$ quel que soit P, car au moins *dans ce cas toute suite convergente* $S_{(n_p)}$ *converge vers la même limite* $\Sigma(e)$, et nous avons la *convergence au sens de* Cesàro *de* $\{K_n(P, e)\}$, *la limite étant la même en tout point* P *de* E. Ceci est évidemment réalisé quand $\overline{E} - E$ est vide, c'est-à-dire quand l'ensemble fermé $\overline{E}$ est indécomposable. Nous avons déjà envisagé cette hypothèse; nous y reviendrons plus loin.

35. Revenons au cas où l'on sait seulement que l'invariant $\sigma(e)$ est non nul dans E, et considérons la fonction $i[K(P, e), \lambda\,\sigma(e)]$; si sa variation totale tend vers 1 quand λ croît au delà de toute limite, on peut affirmer que $K_n(P, e)$ converge au sens de Cesàro, puisqu'à une variation arbitrairement petite près, $K(P, e)$ est inférieure à un invariant qui est nul sur $\overline{E} - E$.

Dans le cas contraire, $K(P, e)$ *se divise en deux fonctions, l'une qui converge au sens de Cesàro, l'autre,* $D^1(P, e)$, *dont la variation est répartie sur un ensemble de variation nulle par rapport à* $\sigma(e)$.

Soit $D_1^1(P, e) = \theta[D^1(P, e)]$, et soit la fonction $D^2(P, e)$ définie à partir de D_1^1 comme D^1 l'a été à partir de $K(P, e)$, et ainsi de suite. On voit aisément que $K_{n_0}(P, e) - D^{n_0}$ est une fonction dont les itérées convergent au sens de Cesàro. *Si* $\|D^n\|$ *tend vers* 0, soit $N(\varepsilon)$ tel que pour $n \leq N(\varepsilon)$ on ait $\|D^n\| < \varepsilon$, et supposons que $\sigma(e)$ soit l'invariant dont la variation totale est 1. Toute suite convergente extraite de $\{\theta^{N(\varepsilon)}[S^{(n)}(P, e)]\}$ a une limite qui est $\sigma(e)$, à la variation ε près. Comme un nombre fini de termes est négligeable dans $\{S^{(N+n)}\}$, cette suite, si elle a une limite, a même limite que $\theta^N[S^{(n)}]$. Par suite $S^{(n)}$ *converge vers* $\sigma(e)$.

Mais supposons que $\| D^n \|$, qui est non-croissante, ait pour limite $V > 0$. A chaque fonction D^n on peut associer un ensemble e_n où D^n a une densité non nulle en tout point, et tel que l'on ait $D^n(Ce_n) = 0$ et $\sigma(e_n) = 0$. Par suite D^{n+p} est identique, sur e_{n+p}, à la fonction $\theta^p[D^n]$, et l'on a

$$\| D^{n+p}(P) \| = D^{n+p}(P, e_{n+p}) = \int_E K_p(M, e_{n+p})\, d_M D^n(P, e).$$

Donc, dans tout e_n, on trouve des points $M_{n,p}$ tels que

$$K(M_{n,p}, e_{n+p}) \geqq \frac{\| D^{n+p} \|}{\| D^n \|} - \frac{\varepsilon}{n} \geqq \frac{V}{\| D^n \|} - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Supposons que E soit indécomposable *de mesure réduite* ([48]), tous les e_n sont de mesure nulle et nous avons, pour tout p, au moins *un point* $M_{n,p}$ *dans chaque* e_n *tel que la fonction* $K_p(M_{n,p}, e)$ *tende, pour* n *infini, à se concentrer sur l'ensemble de mesure nulle* e_{n+p}, puisque $\| D^n \|$ tend vers V.

([48]) Cette hypothèse est peut être superflue, car il nous semble que si $\lim_{n \to \infty} (e_n + e_{n+1} + \ldots)$ n'est pas vide, cet ensemble limite doit contenir un ensemble indépendant, ce qui est impossible; alors mes. e_n doit tendre vers 0.

Or cette possibilité est écartée dans maints cas pratiques : noyaux bornés, noyaux bornés à partir d'un certain rang $p(P)$, etc. [49].

36. Pour atteindre un plus grand degré de généralité, *nous ne supposerons pas que chaque fonction* K(P, e) *admette une densité bornée supérieurement*, mais nous admettrons que *la densité inférieure* $k_i(P, M)$ *est bornée inférieurement par un nombre* $\delta > 0$, *indépendant de* P, *dans un ensemble* ε_P *dont la mesure est supérieure ou égale à un nombre* $\mu > 0$, *indépendant de* P.

Le métaséquent de chaque point P ayant une mesure au moins égale à μ, nous pouvons supposer que l'ensemble E est indécomposable de mesure réduite [50].

Désignons par H (P, e) la fonction qui pour chaque P est définie par la densité δ dans ε_P, et la densité 0 dans $E - \varepsilon_P$. On a

$$(27) \qquad K_n(P, e_0) \geqq \int_E H(M, e_0)\, d_M K_{n-1}(P, e);$$

or, cette dernière intégrale représente la valeur sur e_0 d'une fonction $H^{(n)}(P, e)$ *à densité bornée supérieurement par* δ [51], *et de variation totale au moins égale à* $\delta\mu$, *ceci quel que soit* n.

Cela permet de démontrer l'*impossibilité de l'existence d'un invariant à variation non bornée*, que nous avons défini au paragraphe 26, car il est facile de voir que sa densité devrait être infinie dans un ensemble de mesure positive, et par suite dans tout E.

---

(49) Par exemple, *s'il existe un invariant* $F(M) \equiv T[F(M)]$ *dont le module approche de sa borne supérieure dans* E *sans jamais l'atteindre, il est facile de montrer l'existence d'une suite* $\{K(M_i, e)\}$ *qui tend à se concentrer sur un ensemble de mesure nulle.*

(50) Voir paragraphe 27.

(51) On le voit en remplaçant $H(M, e_0)$ par l'intégrale de la densité, et en intervertissant ensuite l'ordre des intégrations.

Alors, envisageons le cas où *toutes les fonctions* K (M, e) *relatives aux points* M *d'un ensemble* E_0 *de mesure positive sont supérieures à une fonction* $\psi_0(e)$. La méthode de recherche d'un invariant exposée au paragraphe **26** nous donne obligatoirement une suite bornée, car si elle n'était pas bornée dans E_0, une fonction $\psi_{n,n}(e)$ serait supérieure à $\psi_0(e)$, et à partir de ce rang la suite serait invariante.

Donc, avec la dernière hypothèse faite, *il existe un invariant dans* E. Nous n'avons pas encore envisagé le cas de la conservation de la continuité. Cette propriété aussi permet de démontrer l'existence d'un invariant dans E :

Soit une fonction K (P, e) — on pourrait partir d'une fonction $\varphi(e)$ quelconque — et considérons la suite $\{H^{(n)}(P, e)\}$, puis définie par la relation (27) et la suite

$$S^{(n)}(P, e) = \frac{1}{n} \sum_1^n [H^{(p)}(P, e)],$$

dont la densité est bornée par δ. Toute suite $\{S^{(n_p)}\}$ convergente est fortement convergente et par conséquent a une limite nulle sur $\overline{E} - E$, et positive sur E. Donc une suite convergente

$$S^{(n_p)} = \frac{1}{n_p} \sum_1^{n_p} [K_i(P, e)]$$

a une limite non nulle sur E, limite qui est un invariant, et comme $\| D^n \|$ tend vers 0, $\{S^{(n_p)}\}$ a une limite nulle sur $\overline{E} - E$, et $\{S^{(n)}\}$ *converge vers l'invariant de masse unité.*

37. *Conservons seulement l'hypothèse initiale du* n° 36 *et l'hypothèse de l'existence d'un invariant non nul dans* E (51bis).

(51bis) Ce paragraphe ne fait pas intervenir la conservation de la continuité.

D'après ce qu'on a vu, toute suite convergente $\{\alpha_{n_p}(e)\}$ de fonctions d'ensemble itérées majore une suite fortement convergente vers une fonction dont la variation totale est supérieure à $\delta\mu\alpha(E)$.

Considérons, comme au n° 28, l'invariant $\Phi(e)$ dont la masse totale est 1, une fonction $\alpha(e)$ dont la masse totale est 1, les itérées $\alpha_n(e)$, puis les fonctions

$$\pi^n = i[\Phi(e), \alpha_n(e)], \quad D^n = \alpha_n - \pi^n, \quad \Delta^n = \Phi - \pi^n.$$

Soit une suite $\{n_p\}$ telle que les suites $\{\alpha_{n_p}\}$, $\{\pi^{n_p}\}$, $\{D^{n_p}\}$ et $\{\Delta^{n_p}\}$ soient convergentes. On a

$$\theta^q[D^{n_p}] - D^{n_p+q} = i\left[\theta^q[D^{n_p}], \theta^q[\Delta^{n_p}]\right]. \tag{28}$$

La variation totale du 2e membre tend vers 0, car c'est aussi la différence $\|\pi^{n_p+q}\| - \|\pi^{n_p}\|$, et $\|\pi^n\|$ est non-décroissante et bornée. Donc, pour $n_p \geqq N$, on a, quel que soit q,

$$\|\theta^q[D^{n_p}] - D^{n_p+q}\| < \varepsilon',$$

nombre positif arbitraire.

Soit $n_h > N$, h étant fixe, et soit la suite

$$\theta^{n_{h+1}-n_h}[D^{n_h}], \qquad \theta^{n_{h+2}-n_h}[D^{n_h}], \ldots$$

sur laquelle on peut prélever une suite convergente, suite qui majore une suite fortement convergente à densité bornée. Appliquons à nouveau le *théorème* d'Egoroff; on a une suite $\{\theta^{n_k-n_h}[D^{n_h}]\}$, telle que pour $k \geqq k_0$ on ait

$$\theta^{n_k-n_h}[D^{n_h}] > \mathfrak{D}(e),$$

avec

$$\|\mathfrak{D}(e)\| > \delta\mu \lim \|D^n\| - \varepsilon''.$$

Mais alors

$$D^{n_k} > \mathfrak{D} - \varepsilon(e) = \mathfrak{D}^1(e),$$

avec

$$\| \varepsilon(e) \| < \varepsilon'.$$

Or les fonctions Δ^n donnent lieu à une relation analogue à la relation (28), et l'on peut, sur la suite $\{n_k\}$, prélever une suite $\{n'_k\}$ telle que pour $k \geqq k_1$ on ait

$$\mathrm{D}^{n'_k} > \mathfrak{D}^1(e), \qquad \Delta^{n'_k} > \mathfrak{D}^2(e)$$
$$\| \mathfrak{D}^1(e) \| > \delta \mu \lim \| \mathrm{D}^n \| - \varepsilon$$
$$\| \mathfrak{D}^2(e) \| > \delta \mu \lim \| \mathrm{D}^n \| - \varepsilon,$$

$\mathfrak{D}^1(e)$ et $\mathfrak{D}^2(e)$ étant évidemment disjointes.

Mais alors

$$\| i \left[\theta^q[\mathfrak{D}^1], \theta^q[\mathfrak{D}^2]\right] \|$$

doit être nulle. Or *le théorème* 3 *s'applique*, car pour limiter le nombre de fonctions aux itérées de même rang disjointes, il suffit de supposer que le métaséquent de chaque point a une mesure bornée inférieurement par un nombre positif. Donc, si E est totalement indécomposable, $\|\mathrm{D}^n\|$ et $\|\Delta^n\|$ tendent vers 0, $\|\pi^n\|$ tend vers 1, $\|\alpha^n - \Phi\| = \|\mathrm{D}^n\| + \|\Delta^n\|$ tend vers 0, ce qui exprime la convergence forte de $\{\alpha_n\}$ vers $\Phi(e)$.

Dans ces conditions *toutes les propriétés démontrées aux paragraphes* 28, 29, 30 *s'appliquent aux transformations plus générales considérées ici*, sauf, bien entendu, en ce qui concerne la propriété qu'avaient les densités d'être bornées ([52]).

Remarquons que lorsqu'on suppose seulement l'existense de l'invariant $\Phi(e)$, il est équivalent de rechercher

---

([52]) Par exemple, supposons que pour tout P la fonction K(P, e) soit constituée par $\frac{1}{2} \dfrac{\text{mes } e.\,\mathrm{E}}{\text{mes } \mathrm{E}}$ et la masse $\frac{1}{2}$ en un certain point A. L'invariant n'a pas une densité bornée, puisque c'est évidemment la fonction K(P, e) elle même.

les conditions de convergence forte de $\{\alpha_n(e)\}$, ou les conditions pour que $\|i[\alpha_n(e), \Phi]\|$ tende vers 1.

38. *Revenons aux substitutions et aux hypothèses qui font que tout ensemble indécomposable a une fermeture qui est indécomposable. Supposons de plus que cette propriété soit vérifiée par* θ^n ([53]), c'est-à dire qu'un ensemble indécomposable par rapport à θ^n ait une fermeture indécomposable d'ordre n.

Tout ensemble indécomposable par rapport à θ^p peut être remplacé par sa fermeture. Si p est un nombre premier, et si $\overline{E}$ n'est pas indécomposable par rapport à θ^p, on voit aisément ([54]) que $\overline{E}$ *est exactement décomposable en* p *ensembles fermés indécomposables de fermeture réduite par rapport à* θ^p. Ces p ensembles sont à distance non nulle l'un de l'autre et ils constituent un cycle de supports itérés. En poursuivant le raisonnement du n° 30, peut-on trouver des cycles constitués par un nombre de plus en plus grand d'ensembles? La réponse est négative.

En effet, dans le cas contraire, $\overline{E}$ se réduirait à une suite dénombrable d'ensembles fermés tous disjoints les uns des autres, suite dont l'ensemble d'accumulation donnerait un ensemble indécomposable fermé différent de $\overline{E}$.

Nous retrouvons donc la *structure finie* rencontrée au n° 30 : *un cycle de* N *ensembles totalement indécomposables par rapport à* θ^N; *ici ces ensembles sont fermés*. Le problème de l'itération est donc ramené au cas d'une substitution définie dans un ensemble fermé totalement indécomposable par rapport à elle.

([53]) On montre que si l'hypothèse faite à la fin du n° 32 est vérifiée par θ, elle l'est aussi par θ^n.

([54]) Démonstration analogue a celle du n° 30.

39. Avant d'aborder les problèmes qui font l'objet du dernier chapitre, nous allons rappeler certaines propriétés générales qui nous seront utiles :

Supposons qu'en tout point P *d'un ensemble indépendant* E *on ait la convergence de* $\{K_n(P, e)\}$ *vers une certaine fonction* $\sigma(P, e)$. Cette fonction est invariante.

Cherchons le comportement des itérées d'une fonction d'ensemble $\varphi(e)$

$$\varphi_n(e_0) = \int_E K(M, e_0)\, d_M \varphi_{n-1}(e) = \int_E K_{n-1}(M, e_0)\, d_M \varphi(e),$$

Étudions les intégrales de la forme

$$\int_{E_0} \varphi_n(P)\, dP = \int_E \left[\int_{E_0} K(M, P)\, dP\right] d_M \varphi_{n-1}(e)$$
$$= \int_E \left[\int_{E_0} K_{M-1}(M, P)\, dP\right] d_M \varphi(e) \text{ (55)},$$

où $\varphi_n(P)$ et $K_{n-1}(M, P)$ sont les fonctions de point correspondant respectivement à $\varphi_n(e)$ et à $K_{n-1}(M, e)$.

En vertu de la convergence de $K_{n-1}(M, e)$ vers $\sigma(M, e)$, $\int_{E_0} K_{n-1}(M, P)\, dP$ tend vers $\int_{E_0} \sigma(M, P)\, dP$, pour tout M, et cette *convergence partout* entraîne la convergence

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_0} \varphi_n(P)\, dP - \int_E \left[\int_{E_0} \sigma(M, P)\, dP\right] d_M \varphi(e)$$
$$= \int_{E_0} \left[\int_E \sigma(M, P)\, d_M \varphi(e)\right] dP.$$

Ceci étant vrai pour tout E_0, il s'ensuit que $\varphi_n(e)$ *converge* (56) vers la fonction $\Phi(e)$ définie par

$$\Phi(e_0) = \int_E \sigma(M, e_0)\, d_M \varphi(e).$$

(55) Nous rappelons qu'on a le droit d'intervertir l'ordre des intégrations; voir note 24.

(56) Et la limite Φ est invariante.

Considérons maintenant une fonction continue de point, F (M); d'après ce qu'on a vu au n° 13, $F_n(M)$ *converge partout vers* $\mathcal{F}(M) = \int_E F(Q)\, d_Q\sigma(M, e)$, mais $F_n(M)$ s'écrit $\int_E F_{n-1}(Q)\, d_Q K(P, e)$ et cette intégrale a une limite qui est $\int_E \mathcal{F}(Q)\, d_Q K(P, e)$; donc $\mathcal{F}(M)$ est invariante par rapport à T.

40. *Supposons que toute fonction continue donne des itérées convergentes.*

La fonction continue

$$\int_{E_0} K_n(Q, M)\, dM = \int_{E_0} \left[\int_E K(P, M)\, d_P K_{n-1}(Q, e) \right] dM$$
$$= \int_E \left[\int_{E_0} K(P, M)\, dM \right] d_P K_{n-1}(Q, e)$$

est la transformée par T^{n-1} de la fonction continue $\int_{E_0} K(P, M)\, dM$; donc elle converge pour tout Q. Soit $H(Q, E_0)$ la limite; cette fonction de E_0 admet une densité $\Sigma(Q, M)$ qui est non-décroissante par rapport à M. Cette fonction du point M définit une fonction d'ensemble $\sigma(Q, e)$ qui est la limite de $K_n(Q, e)$, car s'il n'en était pas ainsi on trouverait un ensemble E_0 qui mettrait en défaut la convergence de $\int_{E_0} K_n(Q, M)\, dM$ vers $\int_{E_0} \sigma(Q, M)\, dM$.

Donc toute suite $\{K_n(P, e)\}$ *est convergente.*

41. Les fonctions d'ensemble $\sigma(P, e)$ définissent deux transformations associées qui peuvent être dites les limites de T^n et de θ^n. Désignons-les par $\mathcal{E}$ et τ.

En général, τ *n'est pas une substitution,* c'est-à-dire que la fonction $\mathcal{F}(M)$, limite des fonctions continues $F_n(M)$, peut ne pas être continue; parallèlement, τ peut ne pas conserver la convergence des fonctions positives d'ensemble.

Dans la métrique de la *convergence en mesure*, on peut dire que la *distance des transformations* θ^n *et* τ est définie par la double intégrale

$$\Delta(\theta^n, \tau) = \int_E \int_E | K_n(P, M) - \sigma(P, M) | \, dM \,.\, dP.$$

Si cette distance tend vers zéro, la fonction de P

$$\Delta\big(K_n(P, e), \sigma(P, e)\big) = \int_E | K_n(P, M) - \sigma(P, M) | \, dM$$

converge en mesure vers 0, mais il n'y a pas en général « convergence partout » de $K_n(P, e)$ vers $\sigma(P, e)$, si la seule hypothèse faite est qu'une certaine transformation τ vérifie la relation $\lim_{n \to \infty} \Delta(\theta^n, \tau) = 0$. D'ailleurs, la distance adoptée pour les fonctions de point $\int_E K_n(P, M) \, dM$ et $\int_E \sigma(P, M) \, dM$ fait qu'il vaut mieux alors se limiter à l'étude des transformations T qui conservent à la fois la continuité et la convergence en mesure des fonctions de point.

On peut aussi considérer la quantité

$$D(\theta^n, \tau) = \textit{Borne sup. de} \int_E | K_n(P, M) - \sigma(P, M) | \, dM;$$

si elle tend vers zéro, ceci entraîne la convergence pour tout P de $K_n(P, e)$ vers $\sigma(P, e)$, convergence dont les conséquences générales ont été étudiées au paragraphe précédent.

Mais $\sigma(P, e)$ ne définit pas en général une substitution. On a vu que la continuité de θ^n s'exprimait par la continuité de la fonction

$$\Delta_n(P, P') = \int_E | K_n(P, M) - K_n(P', M) | \, dM.$$

τ *sera une substitution si les fonctions de la suite* $\{\Delta_n(P, P')\}$ *sont également continues;* la limite est alors atteinte par convergence uniforme, et sa continuité exprime celle de τ [57]. Enfin, on peut définir la distance de θ^n et de τ par la *borne supérieure de la variation totale de la fonction d'ensemble* $K_n(M, e) - \sigma(M, e)$.

$$\lim_{n \to \infty} \| \theta^n - \tau \| = 0$$

exprime que pour $n \leqq n(\varepsilon)$ on a

$$| K_n(M, e) - \sigma(M, e) | < \varepsilon,$$

quels que soient M et e. C'est la *convergence forte.*

Considérons une suite $\{\theta_p\}$ de substitutions qui ne sont pas des substitutions itérées, et supposons que chaque θ_p admette un invariant $\Phi^p(e)$ unique dans E. Supposons aussi qu'il existe une substitution τ telle que

$$\lim_{p \to \infty} \| \theta_p - \tau \| = 0.$$

Soit la relation d'invariance

$$\Phi^p(e_0) = \int_E K^p(M, e_0)\, d_M \Phi^p(e).$$

De la suite $\{\Phi^p\}$ extrayons une suite convergente $\{\Phi^{p_n}\}$. En vertu de la convergence de $\{\theta^{p_n}\}$ vers τ, l'intégrale précédente est arbitrairement voisine de

$$\int_E \sigma(M, e_0)\, d_M \Phi^{p_n}(e).$$

Or, si $\Phi(e)$ est la limite de $\{\Phi^{p_n}\}$, cette dernière intégrale, par suite de la continuité de τ, définit une fonction qui converge vers $\tau[\Phi]$. On voit donc que $\Phi(e)$ est invariante par rapport à τ.

Si $\{\Phi^p(e)\}$ *converge fortement vers* $\Phi(e)$, *ou si l'on sait seulement que* $i[\Phi^{p_n}, \Phi^{p_{n+1}}, \ldots]$ *a une limite non nulle*

---

(57) *Dans le cas où il y unicité de l'invariant,* τ *est évidemment continue,* puisque $\sigma(P, e) \equiv \sigma(P', e)$. La continuité de τ est aussi réalisée dans le cas de la convergence forte, définie ci-après.

par n infini, cela prouve que τ admet un invariant non nul dans E [58].

CHAPITRE VI

SUBSTITUTIONS DE LA CLASSE Γ

42. Nous rappelons ce que nous entendons par *substitution de la classe* Γ :

La transformation T est une substitution positive et unitaire définie dans une région R — constituée par la réunion du domaine Ω et de la frontière Σ de Ω. — Nous supposons qu'il y a conservation des valeurs périphériques de toute fonction F (M); les fonctions de point qui seront itérées seront toujours des fonctions continues; enfin, nous supposons, sauf indication contraire, que tout point intérieur n'est pas un point de conservation.

C'est M. Henri Lebesgue qui, le premier, a rattaché la solution du problème de Dirichlet à l'itération d'une substitution de la classe précédente [59]. Cette substitution classique est la *médiation* dont nous avons défini deux variétés. Dans la *médiation générale, la fonction d'ensemble* K (P, *e*) *est seulement assujettie à être invariante par toute rotation autour de* P *et à être de la classe* Γ.

D'après M. Lebesgue, si la frontière Σ a des propriétés topologiques telles que pour toute répartition continue de valeurs sur Σ le problème de Dirichlet soit résoluble au sens classique en prenant une *extension continue* [60]

---

[58] On conçoit que dans certains cas où τ n'est pas bornée — par exemple dans le cas de la conservation des valeurs F(M) sur $\overline{\text{E}}\,\text{E}$ — on puisse approcher τ par des θ_i plus faciles à étudier, et fortement convergentes vers τ, et que cela permette d'obtenir des résultats quant aux invariants de τ

[59] H. Lebesgue, *Comptes Rendus*, 184, 1927, p. 430.

[60] La possibilité de l'extension continue, dans tout l'espace, d'une fonction continue sur un ensemble fermé a été démontrée par M. Lebesgue, *R. C. di Palermo*, t. 24, 2e sem., 1907, pp. 371-402.

F (M) de la fonction f (Q) donnée sur Σ, puis les *médiantes* F_n (M), celles-ci *convergent vers la solution du problème de Dirichlet relatif à* f (Q), *c'est-à-dire vers une fonction harmonique continue dans* R *et prenant les valeurs périphériques* f (Q).

Plus récemment, M. F.-W. Perkins a donné une démonstration simple et générale (61) qui prouve, quelle que soit la frontière Σ, la convergence des médiantes vers une limite qui est la solution du problème de Dirichlet généralisé attaché aux valeurs périphériques données. Son principe est celui dont H. Poincaré s'était servi pour prouver la convergence de ses opérations, dans *la méthode du balayage* (62); il utilise la *majoration des polynômes sous-harmoniques* (polynômes à Laplaciens positifs), la possibilité de représenter dans E tout polynôme comme la différence de deux polynômes sous-harmoniques, et enfin le *théorème de* Weierstrass *qui permet de représenter une fonction continue dans un domaine borné par une série de polynômes uniformément convergente.*

43. Jusqu'ici nous n'avons pas quitté le problème de Dirichlet. Mais M. Bouligand, par sa note entièrement citée dans l'introduction, attire l'attention sur une catégorie de problèmes qui constituent une large généralisation du problème de Dirichlet : les substitutions qu'il utilise donnent, pour toute F (M) continue, des itérées convergentes; la fonction limite est invariante (voir n^{os} 40 et 41), mais elle n'est évidemment pas harmonique, en général. De plus, il y a *unicité* de la solution du pro-

---

(61) F. W. Perkins, *Comptes Rendus*, 184, 1927, p. 182.

(62) Méthode utilisée antérieurement par M. Bouligand pour démontrer simplement le *théorème d'existence* de M. Norbert Wiener. Voir G. Bouligand, *Sur le problème de Dirichlet.* (Ann. Soc. Pol. de Math., Cracovie, 1925.)

blème qui consiste à rechercher une fonction invariante par rapport à la substitution considérée, prenant sur Σ les valeurs d'une fonction continue donnée, *et obtenue par itération d'une fonction continue :*

En effet, M. Bouligand se sert de ce que certaines fonctions continues sont strictement majorées dans Ω. Soit $f(M)$ telle que $f_1(M) > f(M)$. La fonction $G(M) = f_1(M) - f(M)$ est continue, strictement positive dans Ω et nulle sur Σ; ses itérées sont de la forme $f_{n+1}(M) - f_n(M)$, et par suite tendent partout vers zéro. Mais on a

$$G_n(M) = \int_R G(Q)\, d_Q K_n(M, e) \rightarrow \int_R G(Q)\, d_Q\, \sigma(M, e),$$

$\sigma(M, e)$ étant la fonction vers laquelle converge $K_n(M, e)$ pour tout M, puisque toute suite $\{F_n\}$ converge (§ 40). Par conséquent $\sigma(M, e)$ *est nulle sur tout ensemble intérieur à* Ω; *à chaque point* M *correspond une répartition massique limite entièrement concentrée sur* Σ.

Soit $\mathcal{F}(M)$ *la limite de* $F_n(M)$, $\mathcal{F}$ *étant la transformée de* F (M) *par la transformation que définit* $\sigma(M, e)$; *cette limite* $\mathcal{F}$ *ne dépend que des valeurs périphériques* (63).

Si nous n'étions pas parti d'une fonction continue, nous n'aurions pas eu, en général, de conclusion analogue; par exemple, si H (M) est une fonction constante dans Ω et quelconque sur Σ, elle est invariante.

Si $\sigma(M, e)$ définit une substitution, la fonction $\mathcal{F}(M)$ précédente est continue, et l'on peut dire qu'il existe une fonction continue unique qui prend sur Σ les valeurs d'une fonction continue donnée et qui est invariante par rapport à T. Dans ce cas la convergence de $\{F_n(M)\}$ est

(63) Si nous savons seulement qu'une fonction est *strictement majorée*, le raisonnement précédent, légèrement modifié, montre que $K_n(P, e)$ *tend vers* 0 *dans toute région intérieure à* Ω, mais cela ne suffit pas pour que $K_n(P, e)$ converge.

uniforme. Par exemple, lorsque le problème de Dirichlet est résoluble au sens classique, comme $\{F_n(M)\}$ a une limite $\mathfrak{F}(M)$ qui est continue, cette limite est égale à $\int_R F(Q)\, d_Q\, \sigma(M, e)$; donc la transformation $\sigma(M, e)$ transforme toute fonction continue en fonction continue; c'est une substitution, et l'on se trouve dans le cas indiqué.

44. Mais les problèmes qui viennent d'être considérés présentent une importante différence avec le problème de Dirichlet. Dans celui-ci, nous avons une *classe de fonctions, les fonctions harmoniques, qui sont invariantes par n'importe quelle médiation*, dans n'importe quel domaine, pourvu que l'harmonicité y soit satisfaite : on a

$$\mathfrak{F}(P) = \int_R \mathfrak{F}(M)\, d_M\, K(P, e),$$

quelle que soit la fonction $K(P, e)$, pourvu que $\mathfrak{F}(M)$ soit harmonique et que $K(P, e)$ soit positive, de masse totale 1 et invariante par une rotation quelconque autour de P. Dans les problèmes qui nous occupent, il n'y a aucune raison pour que, par exemple, la fonction limite $\mathfrak{F}(M)$ reste invariante si l'on remplace [64] chaque fonction $K(P, e)$ par une fonction $K(P', e)$ relative à un autre point P′ quelconque.

Cependant, il est facile d'imaginer des exemples où l'analogie avec le problème de Dirichlet persiste dans une certaine mesure, au point de vue actuel :

Supposons que R soit une région du plan située dans le quadrant où les coordonnées sont positives, et *que la substitution* Γ *soit une médiation dans une ellipse de centre* P, *d'axes parallèles à* ox *et* oy, *et d'excentricité*

---

[64] Par un *déplacement* amenant P′ en P.

constante [64bis]. C'est un cas particulier des substitutions envisagées par M. Bouligand.

Effectuons sur le domaine Ω, sur les fonctions $F(M)$ et sur les fonctions $K(P, e)$ une transformation $y = kY$; k étant convenablement choisi, nous sommes ramené aux vraies médiations et au problème de Dirichlet. On voit donc que la fonction limite $\mathfrak{F}(M)$ donnée par Γ est invariante par rapport à la classe des transformations fonctionnelles qui se déduisent des médiations par la transformation ponctuelle $Y = \frac{1}{k} y$, tandis que $\mathfrak{F}(M)$ appartient à une famille qui provient de celle des fonctions harmoniques par la même transformation.

45. Cette remarque élémentaire nous amène à un *principe de généralisation* fort important, que M. Bouligand a bien voulu nous signaler :

Transformons le domaine Ω en un domaine Ω' par une *transformation ponctuelle continue et biunivoque;* à la fonction continue $F(M)$ définie dans Ω correspond dans Ω la fonction continue $G(M') = F(M)$, M' étant homologue de M; à la fonction d'ensemble $K(P, e)$ correspond la fonction $H(P', e') = K(P, e)$, P' étant homologue de P, et e' homologue de e. $K(P', e')$ définit dans Ω' une substitution Γ' que l'on peut dire homologue de la substitution Γ définie par $K(P, e)$, et les transformées $F_1(P) = \Gamma[F]$ et $G_1(P') = \Gamma'[G]$ sont homologues. Il en résulte que toute propriété de Γ, relativement à l'itération, par exemple, correspond à une propriété identique de Γ' : Si Γ donne naissance à des itérées convergentes, il en est de même de Γ'.

[64bis] Nous employons le mot médiation parce qu'il s'agit d'une moyenne, mais il ne s'agit évidemment pas là d'une médiation, même générale, qui est définie au n° 42.

Supposons que nous cherchions à caractériser les substitutions Γ telles que les itérées de toute fonction continue convergent; *nous devrons imposer à* $K(P, e)$ *des conditions invariantes par transformation ponctuelle continue biunivoque*, sans quoi nous n'aurions pas atteint la généralité désirée, et nous ne connaitrions sans doute pas la véritable cause des phénomènes de convergence constatés.

46. Nous voulons donc que $\{K_n(P, e)\}$ converge pour tout P, mais à priori trois cas bien différents peuvent alors se produire :

1° *La limite* $\sigma(P, e)$ *est entièrement concentrée sur* Σ;
2° *La limite* $\sigma(P, e)$ *est entièrement concentrée sur* Ω;
3° *Il y a partage de la variation de* $\sigma(P, e)$ *entre* Ω *et* Σ.

Nous nous intéressons surtout au premier cas, puisque dans ce cas les fonctions de point invariantes, limites de fonctions continues itérées, sont déterminées par les valeurs périphériques imposées, d'une façon analogue à la solution du problème de Dirichlet.

Pour que le premier cas soit réalisé, il est évidemment nécessaire que Ω *ne contienne pas d'ensemble indépendant intérieur* (à distance non nulle de Σ). Mais ce n'est pas suffisant. Soit un ensemble indépendant E_0 tel que $\overline{E}_0 . \Sigma \neq 0$; dans l'ensemble $\overline{E}_0$ se posent d'une façon autonome les problèmes qui se posaient déjà dans R, avec la différence que les points frontières de $\overline{E}_0$ ne sont pas points de conservation, sauf ceux qui appartiennent à Σ. *Nous supposerons, en général, que l'ensemble* Ω *est indécomposable.*

Dans ces conditions, s'il existe un invariant non nul dans Ω, celui ci est unique à un coefficient près, et d'après ce que nous avons vu au n° 39, l'invariant $\Phi(e) \equiv \theta^n[\Phi]$

est aussi invariant par rapport à la transformation définie par $\sigma(P, e)$:

$$\Phi(e_0) = \int_R \sigma(M, e_0)\, d_M \Phi(e).$$

Comme on suppose $\Phi(\Sigma) = 0$, l'ensemble des points M tels que $\sigma(M, \Sigma) > 0$ est de variation nulle par rapport à $\Phi(e)$. *Si* Ω *est indécomposable de mesure réduite, les points* P *tels qu'il y ait partage de* $\sigma(P, e)$ *entre* Ω *et* Σ *constituent au plus un ensemble de mesure nulle;* et il apparaît que, même si le partage est encore possible, il ne semble pas réalisé dans les cas pratiques.

47. Quoi qu'il en soit, cette question est liée à celle de la convergence de la suite $\{\theta^n\}$: *Supposons que la transformation limite* τ *soit une substitution,* Ω *étant indécomposable de mesure réduite.* Soit un point P tel que $\sigma(P, \Sigma) > 0$; on voit aisément que la continuité de τ (66), jointe à l'unicité de l'invariant relatif à Ω, implique que $\sigma(M, \Sigma)$ ne soit pas nulle pour tous les points M d'un domaine entourant P (67). Donc, puisqu'il existe des points P tels que $\sigma(P, \Sigma) > 0$ (tous les points de Σ), et qu'il ne peut en exister qu'un ensemble de mesure nulle dans Ω si $\Phi(e)$ diffère de zéro, c'est que $\Phi(e) \equiv 0$, et que *toute fonction* $\sigma(M, e)$ *est nulle sur* Ω.

On peut raisonner autrement, considérer une fonction continue invariante $\mathcal{F}(M)$, limite de $\{F_n(M)\}$. $\mathcal{F}(M)$ atteint son maximum dans $\Omega + \Sigma$. Si c'est en un point intérieur P_0, on voit que ce maximum doit être atteint dans tout un ensemble support relatif à P_0, et de proche en proche,

---

(66) Il s'agit de la continuité par rapport à la convergence des fonctions positives d'ensemble.

(67) On peut prendre la portion de R comprise dans une sphère de centre P et de rayon convenable.

dans tout un ensemble indépendant déterminé par les itérées de K (P_0, e). Supposons que Ω ne contienne pas d'ensemble indépendant intérieur : $\mathcal{F}$(M) atteint de toute façon son maximum sur Σ.

Donc, toute fonction continue, positive dans Ω, nulle sur Σ, a une limite nulle dans $\Omega + \Sigma$, ce qui démontre la convergence des masses vers la frontière.

Mais *si l'on veut seulement écarter la possibilité du partage des masses entre* Σ *et* Ω, *il n'est pas indispensable de supposer la continuité de* τ *dans* R. *Il suffit qu'il y ait continuité dans* Ω (68), d'après le raisonnement initial. Mais alors, on peut avoir $\sigma(M, \Sigma) = 1$ pour tout point M de Ω, ou bien le contraire, $\sigma(M, \Sigma) = 0$, dans tout Ω.

48. Un cas typique, où τ n'est pas continue et où $\sigma(M, \Omega) = 0$, est fourni par la médiation (69). Supposons que ce soit la *médiation spatiale*. Comme le rayon ρ_P de la sphère associée au point P est fonction continue de P, il est facile de montrer que la fonction $i[K(P, e), K(P', e)]$ a une variation totale qui est fonction continue de P et de P' et que l'on peut trouver une sphère de centre P telle que pour tout point M intérieur à cette sphère, K (M, e) soit supérieure à une fonction $H_\varepsilon(P, e)$ dont la variation totale est supérieure à $1 - \varepsilon$.

Il en résulte que les fonctions $\sigma(M, e)$ correspondantes sont supérieures à la limite des itérées de $H_\varepsilon(P, e)$. Ceci entraîne la continuité de τ en tout point intérieur à Ω,

(68) En donnant au mot continuité un sens *local*, lié à la distance

$$\Delta(P_0, P) = \int_E | K(P_0, M) - K(P, M) | \, dM.$$

(69) τ est continue si le problème de Dirichlet est résoluble au sens classique, et ne l'est pas dans le cas contraire.

et par suite la *continuité de la limite* $\mathcal{F}(M)$ *dans* Ω, *et la convergence uniforme dans tout domaine intérieur à* Ω. La remarque précédente nous explique certaines propriétés des médiations et permet d'étendre les mêmes propriétés à des substitutions très différentes; mais il faut remarquer que la condition alors imposée à la fonction $K(M, e)$ est beaucoup plus restrictive que celle que nécessite la conservation de la continuité, et qu'elle n'est certainement pas nécessaire [70].

49. Plaçons-nous dans le cas d'un *domaine plan*, et prenons un axe auxiliaire OZ, de façon à considérer la surface $Z = F(M)$, surface limitée au cylindre parallèle à OZ que définit Σ. *A toute répartition massique* $K(P, e)$, *on peut faire correspondre une répartition sur la surface* $Z = F(M)$, la répartition qui, par projection parallèle à OZ, donne $K(P, e)$. Avec ces conventions, $F_1(P)$ *est la cote du centre de gravité de la répartition massique considérée sur la surface* $Z = F(M)$. Ce point de vue peut évidemment être étendu au cas d'un plus grand nombre de dimensions.

Revenons aux substitutions qui majorent les polynômes à coefficients positifs. Si Ω est un domaine plan, on voit aisément que la classe des substitutions envisagées par M. Bouligand peut se définir de la façon suivante : elles sont de la classe Γ et *pour tout point* P *intérieur à* Ω, *le centre de gravité de la fonction* $K(P, e)$ *a des coordonnées strictement supérieures à celles de* P.

Si nous passons au cas de trois dimensions, la définition précédente ne convient plus, à cause de l'existence

(70) Il suffit qu'elle soit réalisée par une puissance de θ; et même ainsi élargie, la condition n'est vraisemblablement pas nécessaire.

de polynômes positifs représentés par une surface à courbures opposées pour lesquels il peut y avoir minoration, même si les coordonnées du centre de gravité de K (P, e) sont supérieures à celles de P. Cependant, les propriétés de convergence s'étendent à ce cas, mais, au lieu d'utiliser les polynômes à coefficients positifs seulement, on décomposera ceux qui, bien que positifs, ne sont pas convexes vers les t négatifs, en différence de deux polynômes positifs convexes. On peut d'ailleurs démontrer directement la convergence des K_n (P, e), sans passer par les fonctions de point.

Nous n'insisterons pas au sujet de ces substitutions, parce que les axes de coordonnées interviennent dans leur définition et que le choix des axes est évidemment sans rapport avec les propriétés de convergence. Cependant, *dans le cas du plan*, on peut noter, par application du paragraphe 45, que si l'on connaît *deux fonctions* f (M) *et* g(M) *strictement majorées dans* Ω *par une substitution* Γ, et *si les formules* $X = f(M)$ $Y = g(M)$ *définissent dans* Ω *une transformation continue biunivoque, la substitution* Γ *donne des itérées convergentes*, car la transformation définie par g (M) et f (M) nous ramène au cas où les polynômes X et Y sont majorés, ce qui revient à dire que le centre de gravité de H(P$'$, e') a des coordonnées supérieures à celles de P$'$. En outre, cette remarque se généralise pour les espaces à plus de deux dimensions.

50. Nous avons eu recours plus haut aux polynômes représentés par une surface convexe. C'est qu'une telle surface a la propriété particulière que toute fonction positive d'ensemble qu'elle porte ne peut pas avoir son centre de gravité au-dessous d'elle dans le cas où la concavité est tournée vers les Z positifs.

Supposons alors que le point P ait même projection que le centre de gravité, c'est-à-dire que le centre de gravité de la répartition K(P, e) du plan soit en P : *toute fonction représentée par une surface concave vers les Z positifs sera non minorée.* Il ne peut y avoir conservation en un point pour toute fonction concave que si K (P, e) se réduit à la masse 1 située en P; nous avons écarté cette possibilité dans Ω par les hypothèses initiales.

Désignons par Γ_g *toute substitution* Γ *telle que pour tout point* P *de* Ω *le centre de gravité de la fonction* K (P, e) *soit en* P. Nous allons montrer, grâce à un lemme préliminaire, que *les itérées, obtenues au moyen de* Γ_g, *de toute fonction continue sont convergentes* ([71]).

Lemme. — *Tout polynôme* $Z = P(x, y)$ *peut dans un domaine borné quelconque* Ω *être considéré comme la différence de deux polynômes* $P_1(x, y)$ *et* $P_2(x, y)$ *tels que les surfaces* $Z = P_1(x, y)$ *et* $Z = P_2(x, y)$ *soient convexes vers les Z négatifs.*

Posons

$$r = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}.$$

En général, nous n'aurons pas dans tout Ω

$$rt - s^2 > 0.$$

Mais considérons le polynôme

$$P_1(x, y) = P(x, y) + \frac{1}{2} A x^2 + B x y + \frac{1}{2} C y^2.$$

Nous avons

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = r + A, \quad \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} = s + B, \quad \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = t + C.$$

([71]) A. Fouillade, *Comptes Rendus*, 192, 1931, p. 1010.

On peut disposer des constantes A, B, C de façon à avoir à la fois, dans tout le domaine Ω,

$$\text{(I)} \qquad AC - B^2 > 0$$

$$\text{(II)} \qquad (r + A)(t + C) - (s + B)^2 > 0.$$

En effet, r, s et t étant finies dans Ω, on peut évidemment trouver des nombres positifs B, puis A et C assez grands pour que l'on ait partout dans Ω

$$A > B, \qquad r + A > s + B > 0$$
$$C > B, \qquad t + C > s + B > 0.$$

Posons

$$P_2(x, y) = \frac{1}{2} Ax^2 + Bxy + \frac{1}{2} Cy^2;$$

le polynôme P (x, y) est mis sous la forme indiquée par l'énoncé.

51. La démonstration qui s'ensuit est analogue à celle de H. Poincaré et de M. H. W. Perkins :

Si F (M) est un polynôme, $F_n(M) = \Gamma_g^n [F]$ converge. En effet, F (M) est la différence de deux polynômes f et g majorés dans Ω. On a, par exemple, $f_1(P) \leqq f(P)$ pour tout P de R, et par suite $f_2(P) \leqq f_1(P)$, etc. La suite non-décroissante $\{f_n(P)\}$ a une limite; de même la suite $\{g_n(P)\}$, et, *à cause de la linéarité* des substitutions fonctionnelles, $F_n(P)$ a pour limite la différence des limites de $f_n(P)$ et de $g_n(P)$. Enfin cette démonstration s'étend à toute fonction continue, grâce au *théorème de* Weierstrass.

Donc toute suite $\{K_n(P, e)\}$ *est convergente, et les fonctions limites* $\sigma(P, e)$ *sont concentrées sur* Σ. Les substitutions Γ_g comprennent, comme cas très particulier, les médiations. Comme pour les substitutions signalées au n° 49, la condition imposée à K (P, e) laisse le choix d'une infinie variété de répartitions massiques, donnant lieu, moyennant les conditions initiales (classe Γ), à la convergence des fonctions continues itérées et à la convergence des répartitions itérées $K_n(P, e)$. Cependant, s'il est vrai que les substitutions Γ_g sont définies par une condition présentant un caractère intrinsèque que n'avaient pas les conditions mettant en jeu des directions privilégiées, la condition que le centre de gravité de $K(P, e)$ soit en P n'est pas invariante par rapport aux transformations continues biunivoques. La condition est identique à celle-ci : tout polynôme du premier degré est invariant, ou encore $Z = x$ et $Z = y$ sont invariants. La généralisation est alors la suivante : *Si $f(M)$ et $g(M)$ sont invariantes, et si $X = f(M)$ et $Y = g(M)$ définissent une transformation ponctuelle continue biunivoque du domaine plan Ω, la substitution considérée donne des itérées convergentes.*

52. Mais il faut reconnaître que la condition généralisée n'est pas pratique; elle fait ressortir que la convergence des itérées des substitutions Γ_g a été obtenue grâce à des circonstances heureuses. Nous pensons que pour comprendre vraiment pourquoi les $F_n(M)$ convergent sous de larges conditions, il faut surtout étudier directement les itérations des fonctions d'ensemble $K_n(P, e)$, sans passer par l'intermédiaire de fonctions de point privilégiées. C'est le point de vue qui nous a guidé dans les chapitres III, IV et V. Les notions qui y sont étudiées nous ont permis de démontrer par une méthode directe des propriétés déjà connues et des propriétés nouvelles qui concernent surtout ce qu'on pourrait appeler les *cas finis,* puisqu'en quelque sorte, le succès des notions et des méthodes introduites est proportionnel à la parenté des transformations étudiées et des substitutions de l'algèbre. Il doit du moins en être ainsi.

En ce qui concerne les problèmes relatifs aux substitutions de la classe Γ, qui sont beaucoup plus compliqués, puisque chaque point de Σ constitue un ensemble indécomposable, on voit que les notions des chapitres III et IV permettent au moins de classer les problèmes suivant certaines propriétés essentielles de l'intérieur de R. Il convient sans doute de commencer par le cas où Ω est totalement indécomposable, et de distinguer par un critère les cas où il existe un invariant borné non nul dans Ω, de ceux où il n'en existe pas ([72]), ces derniers étant les plus éloignés des substitutions finies.

53. Voici quelques remarques complémentaires inspirées par les substitutions Γ_0 :

Leurs propriétés ont été trouvées tout à fait indépendamment de la notion d'ensemble indécomposable, mais on peut voir que l'hypothèse du centre de gravité de K (P, *e*) en P élimine les ensembles indépendants strictement intérieurs à Ω, car un point au moins d'un tel ensemble Ω_1 devrait être point de conservation (il suffit de prendre, par exemple, un point de $\overline{\Omega}_1$ d'abscisse maximum). Mais peut-il exister deux ensembles indépen-

---

([72]) Rappelons à cet égard que si pour tout point M d'un ensemble de mesure non nulle on a $K(M, e) \geqq h(e)$, on sait construire un invariant (ce mot ayant un sens généralisé), qui peut ne pas être borné, auquel cas il n'existe pas d'invariant borné (voir n° 26).

Pour montrer qu'il existe bien des cas où Ω admet un invariant non nul borné, on peut s'inspirer de l'exemple dénombrable analogue du n° 31 : remplacer la suite des points P_n par une suite de domaines disjoints Ω_n intérieurs à Ω et ayant comme ensemble d'accumulation un point de Σ, et remplacer les masses ponctuelles du n° 31 (ex. 2) par des répartitions de mêmes masses totales et de densités constantes. Les Ω_n étant à distances non nulles les uns des autres, les hypothèses faites ne sont pas incompatibles avec la conservation de la continuité dans la totalité de Ω.

dants disjoints ayant même fermeture? Il serait intéressant de le savoir.

Considérons maintenant une substitution Γ telle que *le centre de gravité de* K (P, *e*) *soit en* P, *sauf pour tous les points d'une région r intérieure à* Ω, et supposons que Ω soit convexe et ne contienne pas d'ensemble indépendant strictement intérieur. On peut trouver une fonction de point non majorée : on prendra une fonction continue constante dans une région convexe intérieure à Ω et englobant un support relatif à r, cette fonction étant représentée par une surface à concavité tournée vers les Z négatifs. En tenant compte de ce que Ω ne contient pas d'ensemble indépendant intérieur, on montre que K_n (P, e) tend à se concentrer sur Σ ; à partir d'un certain rang, on a K_n (P, r) $< \varepsilon$, et cette circonstance fait que *la substitution considérée se comporte comme une substitution* Γ_0.

Par transformation continue biunivoque, ceci s'étend à des cas où Ω n'est pas convexe. Cette remarque confirme une idée qui s'impose à priori : *la structure de la fonction* K (M, *e*) *importe beaucoup plus au voisinage de* Σ *qu'à l'intérieur de* Ω, à partir du moment où l'on élimine les ensembles indépendants fermés intérieurs.