PIERRE BERGEOT

Sur l'intégration approchée de quelques équations simples de la physique mathématique. Méthode des moindres carrés et des moments. Emploi de développements polynomaux

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1937

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1937__192__1_0>

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG — FACULTÉ DES SCIENCES

N° D'ORDRE : 59
SÉRIE E

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

POUR OBTENIR LE

GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE BERGEOT
Licencié ès Sciences
Ingénieur des Arts et Manufactures

1re THÈSE. — SUR L'INTÉGRATION APPROCHÉE DE QUELQUES ÉQUATIONS SIMPLES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS ET DES MOMENTS. EMPLOI DE DÉVELOPPEMENTS POLYNOMAUX.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 16 Juin *1937 devant la Commission d'Examen*

MM. R. THIRY .... *Président*
G. CERF .... } *Examinateurs*
P. FLAMANT .... }

SAINT-AMAND (CHER)
IMPRIMERIE R. BUSSIÈRE
26, RUE DE JURANVILLE, 26

1937

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Doyen	M. A. DANJON, Professeur d'Astronomie.	
Doyen honoraire	M. E. BATAILLON.	
Professeurs honoraires	MM. E. CHATTON, E. ESCLANGON, M. FRÉCHET, H. GAULT, M. GIGNOUX, L. HACKSPILL, E. DE MARGERIE, G. RIBAUD, E. TOPSENT, G. VALIRON, H. VILLAT.	
Professeurs	MM. P. WEISS	Physique générale
	E. ROTHÉ	Physique du Globe.
	H. OLLIVIER	Physique générale.
	C. HOUARD	Botanique.
	E. TERROINE	Physiologie générale.
	J. de LAPPARENT	Minéralogie et Pétrographie.
	R. THIRY	Mécanique rationnelle.
	G. CERF	Analyse supérieure.
	G. DUBOIS	Géologie et Paléontologie.
	P. FLAMANT	Calcul différentiel et intégral.
	E. CORNEC	Chimie générale.
	P. de BEAUCHAMP	Zoologie et anatomie comparée.
	L. BOUNOURE	Biologie générale.
	R. ROMANN	Chimie minérale et Chimie physique.
	G. FOËX	Physique expérimentale
	A. KIRRMANN	Chimie organique.
	H. CARTAN	Mathématiques générales.
	H. WEISS	Physico-chimie des hydrocarbures.
	H. CHERMEZON	Botanique.
	G. REMPP	Physique du Globe.
	J. LACOSTE	Physique du Globe.
	G. HUGEL	Chimie du Pétrole.
	P. A. RÉMY	Zoologie.
	R. HOVASSE	Biologie générale.
	R. BONNET	Physique et Chimie biologiques.
Maîtres de Conférences	MM. Ch. STAEHLING	Chimie appliquée.
	J. MARESQUELLE	Botanique.
	P. SOLEILLET	Physique mathématique.
	A. CHRÉTIEN	Chimie minérale.
	A. ROUSSEL	Mathématiques générales.
	R. HOCART	Minéralogie.
	H. FORESTIER	Chimie.
	L. NÉEL	Physique générale.
	A. WEILL	Mathématiques.
Secrétaire	M. G. CUVIER.	

EN HOMMAGE TRÈS RESPECTUEUX

A

MONSIEUR N. KRYLOFF

Professeur à l'Université de Kieff,
Membre des Académies des Sciences d'Ukraine et d'U. R. S. S.

ET A

MONSIEUR M. FRÉCHET

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

EN TRÈS RESPECTUEUX HOMMAGE

A

MONSIEUR BERTRAND DE FONTVIOLANT

Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures

INTRODUCTION

§ 1. — La présente étude concerne la résolution approchée de certains types d'équations différentielles ou intégrales rencontrés couramment en physique mathématique, et dont les solutions satisfont à des conditions déterminées aux bords du domaine d'intégration. En l'espèce nous nous limitons au cas simple du domaine linéaire et nous considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre dont la solution prend des valeurs déterminées aux extrémités du segment d'intégration. C'est donc le cas du problème de Dirichlet considéré dans le domaine à une dimension. Dans le même ordre d'idées nous traitons le cas de l'équation de Fredholm.

Ce mémoire trouve son origine dans la méthode d'intégration approchée de Walther Ritz (1), méthode rendue rigoureuse et étendue en particulier par les remarquables travaux de M. Kryloff (2). Notons également à ce sujet le mémoire fondamental de M. Plancherel (3).

A côté de la méthode de Ritz vient se placer d'une part celle « *des moindres carrés* » (employée par Boussinesq), d'autre part celle dite « *des réduites* » ou encore « *des coefficients généralisés de Fourier* » mais qu'il convient mieux d'appeler « *Méthode des Moments* ».

Les méthodes de Ritz et des moindres carrés font intervenir essentiellement des conditions d'extrémum d'une intégrale définie. La méthode des moments se libère de cette condition. Elle généralise les deux premières.

Notre mémoire a pour objet d'apporter une contribution à l'étude de l'intégration approchée effectuée par les méthodes « *des moindres carrés* » et « *des moments* ».

Nous exposons succinctement ci-après les mécanismes des trois algorithmes et donnons des indications sur les principaux travaux qu'ils ont motivés.

(1) Walther Ritz. — *Œuvres* (Gauthier-Villars, édit.).

(2) N. Kryloff. — *Mémorial des sc. math.*, fascicule XLIX, 1931.

(3) Plancherel. — *Sur la méthode d'intégration de Ritz.* Bull. sc. math., tomes 47, 48 (1923-1924).

§ **2. Méthode de Ritz.** — W. Ritz suppose que l'équation différentielle à intégrer est l'équation d'Euler résultant d'un problème d'extrémum traité par le calcul des variations.

Soit par exemple l'équation du second ordre :

$$\text{(1)} \qquad L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

dont la solution $y(x)$ est par hypothèse définie sur le segment (a, b) et nulle pour $x = a$, $x = b$. On peut écrire (1) sous la forme

$$\text{(2)} \qquad \Lambda(y) \equiv \frac{d}{dx}[I(x)y'] + Q(x)y = F(x)$$

où l'on a :

$$I(x) = e^{\int_{x_0}^{x} pdx}, \quad Q(x) = q(x)I(x), \quad F(x) = f(x)I(x);$$

on a essentiellement $I(x) \geqslant I_0 > 0$.

L'équation (2) est l'équation d'Euler annulant la première variation de

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{I}(y) = \int_a^b [I(x)y'^2 - Q(x)y^2 + 2F(x)y]dx.$$

Soit sur (a, b) un système orthonormé complet de fonctions $\varphi_k(x)$, répondant aux conditions aux limites, $\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0$, la solution approchée $y_n = \sum_0^n a_k^{(n)}\varphi_k(x)$ d'ordre n, est déterminée d'après Ritz en écrivant que les coefficients $a_k^{(n)}$ rendent *minima* l'intégrale $\mathfrak{I}(y_n)$.

On est conduit à résoudre le système algébrique linéaire en $a_k^{(n)}$ suivant :

$$\text{(4)} \qquad \int_a^b [\Lambda(y_n) - F(x)]\varphi_i(x)dx = 0, \quad (i = 0, 1, \cdots n).$$

Le calcul de Ritz, imposant la *condition de minimum*, implique que la variation seconde soit nécessairement non négative, d'où la condition : $Q(x) \leqslant 0$, $(a \leqslant x \leqslant b)$; Ritz démontre sous la réserve que les coefficients de l'élément différentiel de (3) sont continus, que y_n tend uniformément vers $y(x)$.

Par ailleurs M. N. Kryloff (*loc. cit.*) étend la méthode au cas où $Q(x)$ n'est pas nécessairement non positive, ce qui libère de la condition de minimum pour (3) et impose seulement à cette intégrale d'être « stationnaire ». En outre par diverses méthodes il donne des majorations numériquement calculables de l'écart $|y(x) - y_n(x)|$. En particulier il compare $y_n(x)$ au développement direct $Y_n(x)$ de $y(x)$ en série de Fourier de fonctions $\varphi_k(x)$.

§ 3. **Méthode des moindres carrés.** — *a*) Reprenons l'équation (1) :

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\,;$$

les coefficients $a_k^{(n)}$ du développement y_n sont ici obtenus en écrivant que l'écart quadratique moyen

$$\int_a^b [L(y_n) - f(x)]^2 dx$$

est minimum.

On est alors conduit à résoudre le système algébrique suivant en $a_k^{(n)}$:

$$\int_a^b [L(y_n) - f(x)]L[\varphi_i(x)]dx = 0, \qquad (i = 0, 1, \cdots n). \tag{5}$$

Dans une note (1) M. N. Kryloff conclut à la convergence des approximations dans le cas de l'équation $y'' + q(x)y = f(x)$ lorsqu'on a $q(x) \leqslant 0$ pour $a \leqslant x \leqslant b$.

Dans un autre mémoire (2) M. N. Kryloff considère l'équation :

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda K(x)]y = f(x), \qquad (y(a) = y(b) = 0),$$

et sous les conditions $p(x) \geqslant p_1 > 0$, $q(x) + \lambda K(x) \leqslant 0$, $(a \leqslant x \leqslant b)$, il majore $| y - y_n |$ par l'expression $k_0 \sqrt{\varepsilon_n}$ où k_o est un nombre fixe et où $\varepsilon_n \to 0$ quand $n = \infty$. C'est une condition de convergence uniforme.

Par ailleurs dans le même ordre d'idées M. Picone (3) utilise la méthode des moindres degrés avec intégrale « chargée » (dont celle des moindres carrés n'est qu'un cas particulier) pour la résolution approchée de l'équation :

$$[\theta(x)y']' + A(x)y = f(x), \qquad (y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta)$$

où θ, A, f, sont des fonctions continues, ainsi que leurs dérivées ; M. Picone forme des majorations des écarts $| y_n - y |$ et $| y_n' - y' |$.

(1) Kryloff. — *C.-R. Acad. sc. Paris*, t. 181, p. 87.

(2) Kryloff. — *Sur différents procédés d'intégration approchée.* Ann. Fac. Sc., Toulouse, t. XVII (1925), p. 181.

(3) Picone. — *Rendiconti Circ. Math. Palerme*, t. 52 (1928), p. 225-253.

b) La méthode des moindres carrés s'applique aussi à l'équation de Fredholm :

$$\text{(6)} \qquad L(y) = y(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x)$$

lorsque cette équation possède une solution unique.

Dans le cas d'un noyau *symétrique défini*, M. Kryloff (¹) démontre que y_n tend vers y en moyenne quadratique quand $n \to \infty$ et qu'en imposant à $K(x, s)$ et à $f(x)$, certaines restrictions (par exemple celles de Lipschitz), on a $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$ et de plus l'ordre de petitesse de $| y_n - y |$ peut être évalué.

Sous certaines restrictions complémentaires, le calcul s'applique aux noyaux symétrisables.

D'autre part, M. Picone (*loc. cit.*), employant la méthode des moindres carrés avec intégrale « chargée » démontre sans supposer que le noyau est symétrique défini, que y_n tend vers y en moyenne quadratique.

§ **4. Méthode des moments.** — *a*) Soit l'équation différentielle (1), à savoir :

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

telle que la solution $y(x)$ cherchée est unique et définie sur le segment (a,b) avec les conditions aux limites : $y(a)=y(b)=0$. La méthode des moments consiste à déterminer les coefficients $a_k^{(n)}$ de la solution approchée $y_n = \sum\limits_0^n a_k^{(n)} \varphi_k(x)$ en écrivant que les $n + 1$ moments

$$\text{(7)} \qquad \int_a^b [L(y_n) - f(x)] \varphi_i(x) dx, \qquad (i = 0, 1, \cdots n)$$

sont nuls.

M. N. Kryloff (²) étudie un cas plus général où les multiplicateurs des moments sont, non pas les fonctions $\varphi_i(x)$, mais un opérateur $M(\varphi_i(x))$ convenablement choisi, par exemple un opérateur différentiel et il considère l'équation

$$L(y) = y'' + q(x)y = f(x)$$

(¹) Kryloff. — *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, t. XIX (1927), p. 173.

(²) Kryloff. — *C.-R. Acad. sc. Paris.*, t. 182 (1926) p. 676 et *Annales fac. sc. Toulouse*, t. XVII.

ayant une solution $y(x)$ (nulle pour $x = a$ et $x = b$) unique et définie sur (a,b).

Dans ce cas, il prouve que sous la condition qu'on a :

$$\int_a^b \mathrm{L}(z)\mathrm{M}(z)dx > 0, \qquad \text{on peut écrire} \qquad |\, y - y_n \,| < k\varepsilon_n$$

où k est un nombre fixe et où l'ordre de petitesse de ε_n peut être évalué en correspondance avec les conditions restrictives imposées à $q(x)$ et à $f(x)$.

On voit que pour $\mathrm{M}(z) \equiv z$ on généralise la méthode de Ritz et que pour $\mathrm{M}(z) \equiv \mathrm{L}(z)$, on généralise celle des moindres carrés.

Par ailleurs, M. Krawtchouk (1) considère le cas plus général d'une équation différentielle linéaire d'ordre k

$$\mathrm{L}(y) = y^{(k)} + \mathrm{A}_1(x)y^{(k-1)} + \cdots + \mathrm{A}_{\mathrm{K}}(x)y = f(x)$$

dont l'intégrale cherchée $y(x)$ est unique et vérifie sur le segment $(0,1)$ les conditions aux limites :

$$\text{(8)} \qquad \sum_{j=0}^{k-1} [\alpha_i^{(j)} y^{(j)}(0) + \beta_i^{(j)} y^{(j)}(1)] = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots k);$$

par hypothèse les fonctions $\varphi_i(x)$ du développement approché $y_n = \sum_1^n a_k^{(n)} \varphi_k(x)$ vérifient les conditions (8) et les dérivées $\varphi_i^{(k)}(x)$, $(i = 1, 2 \ldots \infty)$ forment un système complet ; M. Krawtchouk donne alors le résultat suivant :

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n, \qquad y' = \lim_{n \to \infty} y'_n, \cdots, y^{(k-1)} = \lim_{n \to \infty} y_n^{(k-1)},$$

sans qu'il soit besoin de faire intervenir pour les coefficients de l'équation $\mathrm{L}(y) = f(x)$ des conditions restrictives de continuité.

M. N. Kryloff (2) traite aussi les cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre $2n$ dont la solution cherchée répond à des conditions aux limites du type (8) ; l'équation de Fredholm donnant la solution cherchée possède un noyau de Schmidt et si $\mathrm{G}(x,s)$ est la fonction de Green du problème, il utilise pour former le développement approché les fonctions singulières $\Phi_k(x)$ telles qu'on a :

$$\mathrm{G}(x,s) = \sum_1^{\infty} \frac{\Phi_k(x)\Phi_k(s)}{\mu_k};$$

(1) Krawtchouk. — *C.-R. Acad. sc. Paris*, t. 187, p. 411 et t. 189, p. 439.

(2) Kryloff. — *Sur la résolution approchée des équations différentielles linéaires.* Bulletin Acad. sc. U. R. S. S., 1930, p. 363 à p. 380.

il majore $| y - y_n |$ et donne la majorante sous forme explicite ; le calcul suppose toutefois que la fonction $q(x)$, (coefficient de y dans l'équation différentielle), est bornée supérieurement en valeur absolue.

b) En ce qui concerne l'intégration approchée de l'équation de Fredholm par la méthode des moments, rappelons les résultats suivants :

M. N. Kryloff (1) considère l'équation

$$L(y) = y(x) + \lambda \int_0^1 K(x,s)y(s)ds = f(x)$$

ayant une solution unique ; les coefficients $a_k^{(n)}$ du développement approchée $y_n = \sum_0^n a_k^{(n)} \varphi_k(x)$ (où les $\varphi_k(x)$ appartiennent à un système complet) sont obtenus en écrivant que les $n + 1$ moments

$$\int_0^1 [L(y_n) - f]M(\varphi_i)dx \qquad (i = 0, 1, \cdots n) \text{ sont nuls ;}$$

M désigne un opérateur convenablement choisi, par exemple :

$$M(z) = z(x) + \lambda_1 \int_0^1 K_1(x, s)z(s)ds.$$

M. N. Kryloff remarque que le système algébrique linéaire en $a_k^{(n)}$ est résoluble si on a

$$\int_0^1 L(y)M(y)dx > 0.$$

Il suppose que les noyaux K et K_1 sont symétriques, définis, et arrive aux conclusions suivantes :

$$\text{si } K, K_1 \text{ et } K_2 = \int_0^1 K(t, x)K_1(t, y)dt \text{ sont définis,}$$

si les signes de λ et λ_1 sont tels que les valeurs

$$\lambda \int_0^1 \int_0^1 K\,(x, y)\psi(x)\psi(y)dxdy$$

$$\lambda_1 \int_0^1 \int_0^1 K_1(x, y)\psi(x)\psi(y)dxdy$$

$$\lambda\lambda_1 \int_0^1 \int_0^1 K_2(x, y)\psi(x)\psi(y)dxdy$$

(1) Kryloff. — *Annales Faculté sc. Toulouse*, t. XIX (1927), p. 177.

sont positives quelles que soient les fonctions $\psi(x)$ de carré sommable, on aura :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 [y - y_n]^2 dx = 0.$$

Sous réserve d'hypothèses restrictives pour K, K_1, f, on pourra trouver l'ordre de petitesse de $| y - y_n |$.

D'autre part, M. Krawtchouk [1], sans faire intervenir des conditions de symétrie pour le noyau, et considérant le cas où on a $M(z) \equiv z$ démontre que si la dérivée $y^{(1+\delta)}$ $(\delta > 0)$ existe, on a :

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

§ 5. Questions concernant l'intégration approchée traitées dans ce mémoire. — A. Nous avons pensé qu'il était intéressant d'apporter une contribution à l'étude de l'intégration approchée par la méthode des *moindres carrés* et par celle des *moments* en traitant des cas simples, à savoir :

Méthode des moindres carrés :

Intégration de l'équation de Fredholm ;

Intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, ayant sur un segment fini une solution unique, nulle aux extrémités du segment.

Méthode des moments.

Intégration de l'équation de Fredholm.

Pour l'équation de Fredholm, nous ne faisons pas intervenir des conditions de symétrie pour le noyau.

Remarque. — Nous utilisons comme valeur approchée de la solution des *développements polynomaux*, et prenant le segment $(-1, +1)$ comme segment d'intégration, nous avons été conduits à comparer y_n au développement direct d'ordre n, Y_n de y en série de polynômes de Legendre.

Ainsi logiquement, nous avons dû faire précéder l'étude de l'intégration approchée d'une première partie (chapitres I, II, III, IV du mémoire) relative aux développements en série de polynômes de Legendre, car il nous est apparu nécessaire pour nos calculs, de *préciser* et d'*étendre* certains points de cette théorie.

Les chapitres V, VI, VII, du mémoire sont consacrés aux trois problèmes d'intégration approchés traités, au sujet desquels nous donnons ci-après quelques indications succinctes.

(1) Krawtchouk. — *C.-R. Acad. sc. Paris*, t. 188 (1929), p. 978.

B. Méthode des moindres carrés. — a) *Equation de Fredholm* (chap. v). — On considère l'équation de Fredholm

$$y(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \mathrm{K}(x, s)y(s)ds = f(x)$$

ayant par hypothèse une solution unique.

La solution approchée est de la forme polynômale $y_n = \sum_0^n a_k^{(n)} x^k$

Nous supposons $\mathrm{K}(x, s)$ borné, sommable et $f(x)$ de carré sommable. Nous démontrons que y_n converge vers y en moyenne quadratique.

Sous réserve de certaines conditions restrictives concernant le noyau $\mathrm{K}(x, s)$ nous démontrons que $| y_n - \mathrm{Y}_n |$ (où Y_n est le développement d'ordre n de y en série de Legendre) tend uniformément vers zéro pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$ et nous donnons une majoration de l'écart.

On en déduit une majoration de $|y - y_n|$ en fonction de $|y - \mathrm{Y}_n|$ où ce dernier écart peut en général être évalué directement en partant des données du problème.

b) *Equation différentielle linéaire du second ordre* (chap. vi), soit :

$$\mathrm{L}(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

où p, q, f sont de carré sommable ; la solution est par hypothèse définie et unique sur le segment $(-1, +1)$ et nulle pour $x = \pm 1$.

On veut calculer une expression approchée $y_n = \sum_0^n a_k^{(n)} (1 - x^2) x^k$ de cette solution par la méthode des moindres carrés.

Nous démontrons que y_n et $\frac{dy_n}{dx}$ convergent uniformément pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$ respectivement vers y et y', et que $\frac{d^2y_n}{dx^2}$ tend vers y'' en moyenne quadratique.

C. Méthode des moments. — *Equation de Fredholm.* — La solution approchée est de la forme $y_n = \sum_0^n a_k^{(n)} x^k$ et on suppose que $\mathrm{K}(x, s)$ est borné, sommable, et que $f(x)$ est de carré sommable.

Les multiplicateurs des moments sont : $1, x, \ldots\ldots x^n \ldots\ldots$

L'étude de la question conduit à considérer l'équation auxiliaire :

$$y_n + \lambda \int_{-1}^{+1} [\mathrm{K}(x, s)]_n^x y_n(s) ds = [f(x)]_n$$

où $[\mathrm{K}(n, s)]_n^x$ désigne le développement d'ordre n en série de Legendre par rapport à x du noyau, et où $[f(x)]_n$ est le développement d'ordre n de $f(x)$ également en série de Legendre. Il faut s'assurer que lorsque $n \to \infty$ cette équation a une solution unique, c'est-à-dire que λ n'est pas un zéro de $\mathrm{D}^{(n)}(\lambda)$ (dénominateur de la résolvante relative à $[\mathrm{K}]_n^x$ quand $n \to \infty$.

Nous avons donc été conduit à étendre un théorème de Tricomi [1] relatif à la majoration de l'écart $|\mathrm{D}(\lambda) - \mathrm{D}^{(n)}(\lambda)|$; nous avons dû alors faire quelques restrictions sur la nature du noyau entraînant quelques propriétés particulières pour $[\mathrm{K}(x, s)]_n^x$, à savoir par exemple qu'on a $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ x = s}} [\mathrm{K}(x, s)]_n^x = \mathrm{K}(s, s)$.

Sous ces réserves, nous démontrons que $y_n \to y$ en moyenne quadratique et que $|\mathrm{Y}_n - y_n|$ converge uniformément vers zéro pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$ quand $n \to \infty$; en outre nous formons une majoration de l'écart $|\mathrm{Y}_n - y_n|$.

D. Remarque. — Ainsi qu'il ressort des calculs développés au cours de cette étude, on voit que des hypothèses restrictives permettront de serrer de plus près les majorations. C'est une question de cas d'espèce.

§ **6. Questions relatives aux développements en série de polynômes de Legendre** (chap. I, II, III, IV du mémoire). — Nous donnons tout d'abord en partant de l'expression des polynômes de Legendre $\mathrm{X}_n(x)$ donnée par Stieltjès, des précisions sur les expressions approchées de ces polynômes ; nous établissons aussi des majorations de $|\mathrm{X}_n + \mathrm{X}_{n+1}|$ et de $|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}_{n+1}|$ quand $n \to \infty$, dont nous aurons besoin dans la suite.

Dans le chapitre II, nous considérons d'abord le développement en série des *fonctions de* **carré sommable** ; dans ce cas, nous attirons l'attention sur le fait que la convergence de la série de Legendre en un point *intérieur* à $(-1, +1)$ dépend seulement de l'allure de la fonction au voisinage du point, tandis que pour la série de Fourier, ce résultat subsiste si la fonction est seulement **sommable.** Nous vé-

[1] Tricomi. — *Atti Lincei.*, vol. XXXIII, 1er semestre, p. 483.

rifions alors pour les fonctions de carré sommable que si le critère de Riemann-Dini est vérifié en un point x intérieur à $(-1, +1)$, la série de Legendre converge vers $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

Pour les fonctions sommables, nous étendons le théorème de Gronwall (1) relatif à la convergence des moyennes arithmétiques S'_n du 1er ordre des développements en série de Legendre au cas où $f(x)$ est uniformément continue sur $(a, +1)$, $(-1 < a < +1)$, et nous démontrons que S'_n converge uniformément vers $f(x)$ sur $(a', +1)$ où $(a < a' < +1)$. (Même résultat sur un segment aboutissant au point $x = -1$.)

Dans le chapitre III, nous envisageons les développements des fonctions à *variation bornée* ; nous apportons un complément (2) aux principaux résultats de Burckhardt, Stone, Hobson, Dunham Jackson, en faisant intervenir en particulier, dans les conditions de convergence, le cas où $f'(x)$ est de carré sommable sur tout le segment $(-1, +1)$ ou seulement au voisinage des extrémités du segment.

D'autre part et toujours dans le cas des fonctions à variation bornée, l'étude de l'intégration approchée nous a incité à rechercher des conditions suffisantes pour que le développement d'ordre n, $S_n(x)$ de $f(x)$ en série de Legendre puisse être, en valeur absolue, borné supérieurement par un nombre fixe indépendant de n ; nous démontrons que si $f'(x)$ est de carré sommable sur les segments $(-1, -\alpha)$ et $(\alpha, +1)$ où $(0 < \alpha < 1)$, $|S_n(x)|$ *est pour* $-1 \leqslant x \leqslant +1$, *bornée par un nombre fixe indépendant de n mais dépendant de* α.

Dans le chapitre IV, nous donnons quelques théorèmes sur la corrélation existant entre la convergence en moyenne quadratique et la convergence uniforme, en fonction de la rapidité de décroissance de l'écart quadratique moyen (3).

Soit par exemple sur le segment fini (a, b) une fonction $f(x)$ de carré sommable, développable en série généralisée de Fourier de fonctions continues $\varphi_n(x)$ orthonormées sur (a, b), et telle que cette série soit uniformément convergente sur (α, β) où l'on a : $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$; soit une suite de fonctions $\Phi_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i^{(n)}\varphi_i(x)$, $(n = 0, 1, 2 \ldots \infty)$ qui converge vers $f(x)$ en moyenne quadratique. Si l'écart quadratique moyen décroît avec une rapidité que nous précisons, on est assuré que $\Phi_n(x)$ tend uniformément vers $f(x)$ sur (α, β).

(1) GRONWALL. — *Laplaschen Reihe.* Math. Ann. Bd 74, 1913.
(2) Notre note aux *C.-R. Acad. sc. Paris*, t. 199, p. 1363.
(3) Notre note aux *C.-R. Acad. sc. Paris*, t. 199, p. 1181.

Nous appliquons ce résultat à une suite de polynômes convergente en moyenne quadratique vers $f(x)$.

Dans le même ordre d'idées, nous démontrons le résultat suivant : au lieu de la suite $\Phi_n(x)$ définie comme ci-dessus, soit une suite de fonctions $F_n(x)$, de carré sommable, convergente en moyenne quadratique vers $f(x)$. Nous disons alors que la suite $[F_n(x)]_n$, (où $[F_n]_n$ désigne le développement d'ordre n de F_n en série de Fourier de fonctions $\varphi_i(x)$) converge uniformément vers $f(x)$ sur (α, β).

Nous appliquons ce résultat au cas où les fonctions $\varphi_i(x)$ sont des polynômes de Legendre *normés*.

Remarque. — Ces résultats trouvent une application immédiate dans bien des cas d'intégration approchée dès qu'on a pu établir que la solution approchée converge en moyenne quadratique vers la solution cherchée.

Nous tenons à exprimer notre respectueuse gratitude aux personnalités qui nous ont guidé et ne nous ont ménagé aucun encouragement, MM. M. Fréchet, N. Kryloff, P. Montel.

Nous adressons aussi tout spécialement à M. P. Flamant nos remerciements pour les précieux conseils qu'il nous a donnés au cours de l'élaboration de notre travail ainsi qu'à MM. R. Thiry et G. Cerf, qui également ont bien voulu examiner nos mémoires et nous faire l'honneur de constituer le Jury.

PREMIÈRE PARTIE

SÉRIES DE POLYNOMES DE LEGENDRE

CHAPITRE PREMIER

SUR LES POLYNOMES DE LEGENDRE

I. — FORMULES USUELLES. FONCTION $X_n(x)$

§ 1. Formation des Polynômes de Legendre. Relation de récurrence. Fonction de Christoffel. — Les polynômes de Legendre ou fonctions $X_n(x)$ ($n = 0, 1, 2.....$) sont les coefficients du développement de l'expression

$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances croissantes de x, à savoir :

$$(1) \qquad (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = X_0 + X_1\alpha + \cdots + X_n\alpha^n + \cdots$$

On a : $X_0 = 1$, $X_1 = x$, et X_n est un polynôme entier en x de degré n.

L'équation $X_n(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, et comprises entre $x = -1$ et $x - +1$. Ces racines sont égales et de signes contraires deux à deux.

Pour x pris sur le segment $(-1, +1)$, on a : $| X_n(x) | \leqslant 1$.

D'autre part :

$$X_n(+1) = 1, \qquad X_n(-1) = (-1)^n.$$

Nous donnons la relation de récurrence bien connue entre les fonctions $X_n(x)$, $X_{n-1}(x)$ et $X_{n+1}(x)$: On a,

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0. \tag{2}$$

On désigne souvent sous le nom de fonction de Christoffel l'expression suivante qui intervient dans la théorie des développements en série de polynômes de Legendre :

$$\Phi_n(x, s) = X_0(x)X_0(s) + \cdots + (2n+1)X_n(x)X_n(s) \tag{3}$$

et on démontre qu'on a :

$$\Phi_n(x, s) = (n+1)\frac{X_{n+1}(s)X_n(x) - X_n(s)X_{n+1}(x)}{s-x} \tag{4}$$

§ 2. Formules relatives à la dérivation des fonctions $X_n(x)$. Orthogonalité des fonctions $X_n(x)$. Valeurs de $\int_{-1}^{+1} X_n \frac{dX_p}{dx}\,dx$. Formule de Melher. — Nous mentionnons une suite de formules connues :

Si n est pair, on a :

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} = (2n+1)X_n + (2n-3)X_{n-2} + \cdots + 5X_2 + X_0; \tag{5}$$

Pour n impair, on a :

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} = (2n+1)X_n + (2n-3)X_{n-2} + \cdots + 3X_1; \tag{5'}$$

En outre pour n pair ou impair, on a :

$$\frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx} = (2n+1)X_n + (2n-1)X_{n-1} + \cdots + 3X_1 + X_0. \tag{6}$$

On connaît encore les formules suivantes :

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} + \frac{dX_n}{dx} = \frac{n+1}{1-x}(X_n - X_{n+1}) \quad \text{(Catalan)} \tag{7}$$

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_n}{dx} = \frac{n+1}{1+x}(X_n + X_{n+1}) \quad \text{(Catalan)} \tag{7'}$$

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = (2n+1)X_n \quad \text{(Christoffel)} \tag{8}$$

Entre X_n et ses dérivées premières et secondes, on a la relation bien connue :

$$(x^2-1)X_n'' + 2xX_n' - n(n+1)X_n = 0. \tag{9}$$

Les polynômes de Legendre forment un système orthogonal sur le segment $(-1, +1)$; on a en effet :

$$(10) \qquad \int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0 \qquad \text{pour} \quad m \neq n.$$

Pour $m = n$, on a :

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

On voit donc que les polynômes $\overline{P}_n(x)$ tels que

$$(11) \qquad \overline{P}_n(x) = X_n(x)\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$$

forment un système *orthogonal et normal* sur le segment $(-1, +1)$.

— Valeurs de $\displaystyle\int_{-1}^{+1} X_n \frac{dX_p}{dx}\, dx$:

$$(12) \qquad \text{Pour} \quad p < n+1, \quad \text{on a :} \int_{-1}^{+1} X_n \frac{dX_p}{dx}\, dx = 0$$

$$(13) \qquad \text{pour} \quad p = n+1, \quad \text{on a :} \int_{-1}^{+1} X_n \frac{dX_p}{dx}\, dx = 2$$

$$(14) \quad \text{pour} \quad p > n+1, \quad \text{on a :} \int_{-1}^{+1} X_n \frac{dX_p}{dx}\, dx = \begin{cases} 2 & \text{n et p de parités différentes} \\ 0 & \text{n et p de même parité} \end{cases}$$

Ces formules (12), (13), (14) ont été démontrées par Brand, (Thèse, Bruxelles, 1887). Cette thèse constitue avec démonstrations à l'appui un formulaire très documenté relatif aux polynômes de Legendre.

— Expression de X_n d'après Melher :

Posant $x = \cos\theta$, $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, Melher donne la formule suivante dont nous trouverons l'utilisation dans la suite :

$$(15) \quad X_n(x) = X_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} = \frac{2}{\pi}\int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}}$$

II. — EXPRESSION EXACTE DES POLYNOMES DE LEGENDRE DONNÉE PAR STIELTJES. FORMULE DE GRONWALL

§ 3. Exposé succinct sur le calcul de Stieltjès. — Stieltjès (1) part de la formule connue :

$$X_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^n dz}{\sqrt{z^2 - 2xz + 1}},$$

(1) STIELTJES. — *Polynômes de Legendre* ; Ann. de Toulouse (1), 4, 1890.

où c désigne un contour fermé enveloppant les points

$$\xi = x + \sqrt{x^2 - 1} \qquad \text{et} \qquad \xi^{-1} = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Tous calculs faits, il aboutit au résultat suivant valable pour $0 < \theta < \pi$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & X_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi\sqrt{2\sin\theta}} \\ & \qquad \times \text{partie réelle de} \left\{ e^{i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]} \times \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u(1-\mathrm{K}u)}}\, du \right\} \end{aligned} \right.$$

où l'on a : $\cos\theta = x$, $\mathrm{K} = \dfrac{e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}}{2\sin\theta}$, et où u est une variable auxiliaire prise sur le segment $(0, 1)$.

Stieltjes remarque qu'on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{K}u}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 - \mathrm{K}u\sin^2\varphi};$$

faisant usage de l'identité

$$\frac{1}{1 - \mathrm{K}u\sin^2\varphi} = 1 + \mathrm{K}u\sin^2\varphi + \cdots + (\mathrm{K}u\sin^2\varphi)^{p-1} + \frac{(\mathrm{K}u\sin^2\varphi)^p}{1 - \mathrm{K}u\sin^2\varphi}$$

il forme le développement de (16) limité aux p premiers termes et donne une majoration de la valeur absolue du reste R_p. Nous nous bornons au cas où l'on a $p = 1$ et nous donnons une valeur détaillée du reste. On a donc pour $p = 1$:

$$\frac{1}{1 - \mathrm{K}u\sin^2\varphi} = 1 + \frac{\mathrm{K}u\sin^2\varphi}{1 - \mathrm{K}u\sin^2\varphi},$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u(1-\mathrm{K}u)}}\, du &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 du \int_0^\pi \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}} \left(1 + \frac{\mathrm{K}u\sin^2\varphi}{1 - \mathrm{K}u\sin^2\varphi}\right) d\varphi \\ &= \int_0^1 (1-u)^n u^{-\frac{1}{2}}\, du + \frac{1}{\pi}\int_0^1 du \int_0^\pi \frac{\mathrm{K}(1-u)^n\sqrt{u}\sin^2\varphi}{1 - \mathrm{K}u\sin^2\varphi}\, d\varphi. \end{aligned}$$

On sait que d'après un résultat classique on peut écrire :

$$\int_0^1 (1-u)^n u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)}$$

où Γ est le symbole de la fonction d'Euler de seconde espèce.

Posant : $C_n = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}$, l'égalité (16) s'écrit :

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} X_n(\cos\theta) = C_n \dfrac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}} + \dfrac{2}{\pi^2}\dfrac{1}{\sqrt{2\sin\theta}} \times \text{partie réelle de} \rightarrow \\ \rightarrow \left\{ e^{i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]} \times \displaystyle\int_0^1 du \int_0^\pi \frac{K(1-u)^n\sqrt{u}\sin^2\varphi}{1-Ku\sin^2\varphi}\, d\varphi \right\}. \end{array} \right.$$

Formons la partie réelle de la quantité entre parenthèses de (17). Remarquons que l'on a :

$$K = \frac{e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\sin\theta} = \frac{\sin\theta - i\cos\theta}{2\sin\theta},$$

Par conséquent :

$$\frac{K}{1-Ku\sin^2\varphi} = \frac{2\sin^2\theta - u\sin^2\varphi - 2i\sin\theta\cos\theta}{4\sin^2\theta\cos^2\theta + (2\sin^2\theta - u\sin^2\varphi)^2}.$$

Nous posons :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\theta, u, \varphi) = \dfrac{2\sin^2\theta - u\sin^2\varphi}{4\sin^2\theta\cos^2\theta + (2\sin^2\theta - u\sin^2\varphi)^2} \\ B(\theta, u, \varphi) = \dfrac{-2\sin\theta\cos\theta}{4\sin^2\theta\cos^2\theta + (2\sin^2\theta - u\sin^2\varphi)^2} \end{array} \right. .$$

d'où

$$\frac{K}{1-Ku\sin^2\varphi} = A(\theta, u, \varphi) + iB(\theta, u, \varphi).$$

L'expression complexe du deuxième membre de (17) s'écrit :

$$\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + i\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]\right\}$$
$$\times \int_0^1 du \int_0^\pi (1-u)^n\sqrt{u}\sin^2\varphi\,[A(\theta, u, \varphi) + iB(\theta, u, \varphi)]d\varphi,$$

dont la partie réelle que nous désignons par $(P\cdot R)_n$ s'écrit :

$$(19) \quad (P\cdot R)_n = \int_0^1 du \int_0^\pi (1-u)^n\sqrt{u} \left\{ \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]A(\theta, u, \varphi) - \right.$$
$$\left. - \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]B(\theta, u, \varphi) \right\} \sin^2\varphi d\varphi,$$

d'où pour la valeur exacte de $X_n(\cos\theta)$: $(0 < \theta < \pi)$

$$(20) \qquad X_n(\cos\theta) = C_n \frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2}\sin\theta} + \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{2\sin\theta}} \times (P\cdot R)_n.$$

§ **4. Majoration de la valeur absolue de l'expression $(P\cdot R)_n$. Formule de Gronwall.** — Remarquons qu'on peut écrire :

$$(21) \quad \left|\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]A(\theta, u, v) - \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]B(\theta, u, v)\right| < \sqrt{[A(\theta, u, v)]^2 + [B(\theta, u, v)]^2}$$

soit :
$$\left|\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]A(\theta, u, v) - \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]\right| < \frac{1}{2\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta + \frac{1}{4\sin^2\theta}(2\sin^2\theta - u\sin^2 v)^2}}$$

Comme l'indique Stieltjes dans son mémoire (*loc. cit.*), le maximum de l'expression $\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta + \frac{1}{4\sin^2\theta}(2\sin^2\theta - u\sin^2 v)^2}}$
est égal à $\dfrac{1}{|\cos\theta|}$ pour $\sin^2\theta \leqslant \dfrac{1}{2}$,
et à $2\sin\theta$ pour $\sin^2\theta \geqslant \dfrac{1}{2}$;
Ce maximum est compris entre 1 et 2.

On a donc :

$$(22) \quad \left|\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]A(\theta, u, v) - \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]B(\theta, u, v)\right| < \frac{2}{2\sin\theta}.$$

Comme dans l'intégrale double de (19), la quantité $(1-u)^n\sqrt{u}\sin^2 v$ est essentiellement positive, on a, en appliquant le théorème de la moyenne

$$(23) \qquad (P\cdot R)_n = \frac{N_n(\theta, u_i, v_i)}{2\sin\theta}\int_0^1 du \int_0^\pi (1-u)^n\sqrt{u}\sin^2 v\, dv,$$

u_i étant pris sur le segment $(0, 1)$, v_i sur l'arc (o, π), ces deux valeurs u_i, v_i, dépendant de n, mais $|N_n(\theta, u_i, v_i)|$ étant quelque soit n bornée supérieurement par le nombre 2, $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$.

Par ailleurs on a :

$$\int_0^\pi \sin^2 v\, dv = \frac{\pi}{2};$$

D'autre part, on sait que l'on peut écrire :

$$\int_0^1 (1-u)^n\sqrt{u}\,du = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)} \times \frac{1}{2n+3},$$

d'où

$$\int_0^1 (1-u)^n\sqrt{u}\,du = C_n\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n+3},$$

C_n étant l'expression définie plus haut au § 3.

On a donc pour la majoration de $|(\text{P. R})_n|$:

$$|(\text{P}\cdot\text{R})_n| < \frac{2}{2\sin\theta}\frac{\pi^2}{4}\frac{C_n}{2n+3}. \tag{24}$$

Pour passer à la formule donnée par Gronwall (¹) pour l'expression de $X_n(\cos\theta)$, il suffit d'écrire (20) sous la forme suivante, où $(\text{P. R})_n$ est donné par (23) :

$$X_n(\cos\theta) = \frac{C_n}{\sqrt{2\sin\theta}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{N_n(\theta, u_i, v_i)}{4(2n+3)\sin\theta}\right\}; \tag{25}$$

formule ayant un sens pour $0 < \theta < \pi$.

III. — EXPRESSIONS APPROCHÉES DE X_n (x)

§ 5. **Expression approchée de $X_n(x)$ donnée par Darboux.** — Pour x pris à l'intérieur du segment $(-1, +1)$, et posant $x = \cos\theta$, $(0 < \theta < \pi)$, Laplace a donné pour valeur approchée de $X_n(x) = X_n(\cos\theta)$ l'expression suivante :

$$\frac{2}{\sqrt{n\pi}\sqrt{2\sin\theta}}\cdot\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right].$$

Darboux (²), dans son mémoire **sur l'approximation des fonctions de grands nombres**, donne la formule :

$$X_n(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{n\pi}\sqrt{2\sin\theta}}\cdot\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{p}{n\sqrt{n}},$$

où, dit-il, p est une fonction inconnue de θ mais qui demeure quel que soit n, inférieure à un nombre déterminé quand θ reste compris

(¹) GRONWALL. — *Laplaschen Reihen.* Math. Annalen, Bd 74, 1913.
(²) DARBOUX. — *Journal de Liouville,* 1874 et 1878.

entre ε et $\pi - \varepsilon'$, ε et ε' étant deux nombres fixes. Darboux ne précise pas la forme de la fonction p.

Dunham Jackson [1] utilise pour la valeur du terme complémentaire $\frac{p}{n\sqrt{n}}$ l'expression suivante :

$$\sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \theta}} \cdot \frac{a_n(\theta)}{n}$$

où il considère $|a_n(\theta)|$ comme bornée supérieurement pour $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$, ε étant arbitraire mais fixe.

Ogura [2] emploie le même terme complémentaire que Jackson où, dit-il, on a $|a_n(\theta)| < K$, K étant un nombre fixe indépendant de n et θ.

Ayant à utiliser l'expression approchée de $X_n(x) = X_n(\cos \theta)$ nous avons estimé nécessaire de préciser la forme du terme complémentaire

§ **6. Précisions sur la forme du terme complémentaire dans l'expression approchée de X_n donnée par Darboux.** — Reprenons la formule (25) donnée ci-dessus.

La valeur C_n qui y figure a été définie au § 3, à savoir :

$$C_n = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)},$$

qui en développant les eulériennes s'écrit :

$$C_n = \frac{4}{\pi} \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots\ldots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots (2n+1)},$$

Nous disons qu'on peut écrire :

$$C_n = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} (1 + \varepsilon_n),$$

où ε_n tend vers zéro *comme* $\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini. Dans son mémoire (*loc. cit.*), Stieltjes écrit $C_n = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}(1 + \alpha_n)$ où, dit-il, α_n tend vers zéro **avec** $\frac{1}{n}$ quand n tend vers l'infini, cette assertion est insuffisante pour ce que nous nous proposons d'obtenir.

(1) Dunham Jackson. — *Transac. Amer. math. soc.*, 1912, V, 13.
(2) Ogura. — *Tohoku Math. Journal*, V, 18, 1920.

La formule de Wallis donne :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots\ldots (2n)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots\ldots (2n-1)^2} \cdot \frac{1}{2n+\theta} \quad \text{ou l'on a} \quad 0 < \theta < +\pi,$$

d'où $$C_n = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2n+\theta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{\theta}{2n}},$$

Or : $$\left(1+\frac{\theta}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\theta}{2n} + \cdots\cdots$$

Donc : $$C_n = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}(1+\varepsilon_n),$$

ou ε_n est un *infiniment petit de l'ordre de* $\frac{1}{n}$.

Ceci établi, on voit qu'en posant $N_n(\theta, u_i, v_i) = M(n, \theta)$ on peut écrire (25) sous la forme :

$$X_n(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\sin\theta}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{2}{\sqrt{n\pi}}\frac{M(n,\theta)}{4(2n+3)\sqrt{2}\sin^{3/2}\theta}$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{n\pi}}\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{2\sin\theta}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{2}{\sqrt{n\pi}}\frac{\varepsilon_n M(n,\theta)}{4(2n+3)\sqrt{2}\sin^{3/2}\theta}$$

d'où :

$$X_n(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{M_1(n,\theta)}{\sin^{3/2}\theta}, \tag{26}$$

où $|M_1(n, \theta)|$ est bornée supérieurement par un nombre fixe quel que soit n et pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

On peut aussi écrire immédiatement l'inégalité :

$$\left| X_n(\cos\theta) - \frac{2}{\sqrt{n\pi}}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}} \right| < \frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{H}{\sin^{3/2}\theta}, \tag{27}$$

où H est une *constante absolue.*

§ 7. Autres majorations de $|X_n(x)|$

Burckhardt [1], dans son mémoire sur les séries de Legendre établit la formule suivante :

$$|X_n(x)| < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{28}$$

valable pour $-1 < x < +1$.

[1] Burckhardt. — *Sitzüngsberichte Akad. München. Math. ünd Phys.* (1909) Mém. n° 10, p. 1-13.

Gronwall (séries de Laplace, *loc. cit.*) part du calcul de Stieltjes (*loc. cit.*) et démontre la formule suivante :

$$X_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}\frac{M(0,n,\theta)}{\sqrt{2\sin\theta}},$$

où l'on a quel que soit n :

$$|M(0, n, \theta)| < 2, \qquad \text{ceci pour} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi;$$

il vérifie qu'on a :

$$\frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{n\pi}} < \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)} < \frac{2}{\sqrt{n\pi}}, \qquad (n \geqslant 1),$$

et en déduit :

$$(29) \qquad |X_n(\cos\theta)| < \frac{4}{\sqrt{2n\pi}}\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}.$$

§ **8. Expression approchée de** $\frac{dX_n(\cos\theta)}{d\theta}$. — Dans le *Journal* de Liouville (1874), Darboux donne sans démonstration la formule suivante :

$$\frac{dX_n(\cos\theta)}{d\theta} = -2\sqrt{\frac{n}{2\pi\sin\theta}}\cdot\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{p_1}{\sqrt{n}},$$

où p_1 est une quantité finie pour chaque point défini par $x = \cos\theta$, x étant intérieur à $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon')$, ε et ε' étant des nombres fixes positifs, ceci quel que soit n.

Il est intéressant de préciser la forme du terme complémentaire. Des égalités (7) et (7′) de § 2 on tire :

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{n}{1-x^2}(X_{n-1} - xX_n);$$

Posant $x = \cos\theta$, on a :

$$\frac{dX_n(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\sin\theta}[\cos\theta\cdot X_n(\cos\theta) - X_{n-1}(\cos\theta)].$$

Or, on a :

$$X_{n-1}(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{(n-1)\pi}}\frac{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1}{(n-1)\sqrt{n-1}}\frac{M_1(n-1,\theta)}{\sin^{3/2}\theta};$$

Remarquons qu'on peut écrire : $\frac{1}{\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\varphi_1(n)}$ et

$$\frac{1}{(n-1)\sqrt{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{\varphi_2(n)},$$

où $\frac{1}{\varphi_1(n)}$ et $\frac{1}{\varphi_2(n)}$ sont quand $n \to \infty$ respectivement des infiniment petits d'ordre $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$. D'où :

$$\begin{aligned} X_{n-1}(\cos\theta) &= \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \frac{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{M_1(n-1,\theta)}{\sin^{3/2}\theta} \\ &+ \frac{2}{\varphi_1(n)} \frac{\sin\theta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sin^{3/2}\theta} + \frac{1}{\varphi_2(n)} \frac{M_1(n-1,\theta)}{\sin^{3/2}\theta} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \frac{\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{M'_1(n-1,\theta)}{\sin^{3/2}\theta} \end{aligned}$$

où l'on a quel que soit n et pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$: $|M'_1(n-1, \theta)| < H'$, H' étant un nombre fixe.

Remarquons qu'on peut écrire :

$$\cos\theta\cdot\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right] = -\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\sin\theta,$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{dX_n(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\sin\theta}\Bigg[& \frac{-2\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\sin\theta}{\sqrt{n\pi}\sqrt{2\sin\theta}} \\ & + \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{M_1(n,\theta)\cos\theta - M'_1(n-1,\theta)}{\sin^{3/2}\theta}\Bigg], \end{aligned}$$

où l'expression $M_1(n, \theta)\cos\theta - M'_1, (n-1, \theta)$ est nécessairement bornée supérieurement en valeur absolue par $H + H'$.

Finalement on a :

$$\frac{dX_n(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{M_2(n,\theta)}{\sin^{3/2}\theta},$$

où l'on a $|M_2(n,\theta)| < H + H'$, ceci quel que soit n et pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; c'est bien l'expression de Darboux où la fonction p_1 est précisée.

§ 9. Majorantes des expressions

$$| X_n(x) + X_{n+1}(x) | \quad \text{et} \quad | X_n(x) - X_{n+1}(x) |.$$

— La fonction $X_n(x) + X_{n+1}(x)$ est égale à 2 pour $x = +1$ et à zéro pour $x = -1$, ceci quel que soit n ; entre -1 et $+1$ elle tend ponctuellement vers zéro pour n croissant indéfiniment. Etant donné les discontinuités présentées par $X_n(x)$ et $X_{n+1}(x)$ aux extrémités de l'intervalle $(-1, +1)$ quand $n \to \infty$, il est utile dans diverses applications dont nous aurons à nous occuper plus loin, de savoir comment, sur un segment fermé $(-1, x_0)$, $(-1 < x_0 < +1)$, la fonction $X_n(x) + X_{n+1}(x)$ tend vers zéro ; à savoir : tend-elle *uniformément* vers zéro sur ce segment $(-1, x_0)$?

Il ne nous est pas apparu que la question fût précisée par des formules classiques.

Nous avons donc été conduit à établir une majorante de l'expression $| X_n(x) + X_{n+1}(x) |$ ce qui nous a permis de conclure que *sur le segment* $(-1, x_0)$ *la convergence vers zéro est uniforme quand* n tend vers l'infini.

Le problème se pose de la même façon pour l'expression $X_n(x) - X_{n+1}(x)$ sur le segment $(x_0, +1)$.

Posons $F_n(x) = X_n(x) + X_{n+1}(x)$. Soit un point pris sur le segment $(-1, x_0)$ et défini par son abscisse x telle qu'on a : $-1 \leqslant x \leqslant x_0$.

Nous voulons démontrer qu'étant donné un nombre positif η choisi arbitrairement, on peut trouver l'entier N, tel que pour tout entier $n > N$ on ait en tout point du segment fermé $(-1, x_0)$ l'inégalité : $| F_n(x) | < \eta$, d'où résultera la convergence uniforme vers zéro de la fonction $| F_n(x) | = | X_n + X_{n+1} |$

Posons $x = \cos \theta$. Le segment $(-1, +1)$ est remplacé par le segment $(0, \pi)$ où -1 correspond à π et $+1$ à zéro.

Faisons correspondre θ_0 à x_0. Au segment $(-1, x_0)$ correspond l'arc (θ_0, π) ; soit θ pris sur (θ_0, π).

D'après la formule de Melher (15), § 2, on a :

$$F_n(x) = F_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} + \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left(n + \frac{3}{2}\right)\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}}$$

soit :

$$F_n(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos(n+1)\varphi \cdot \cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\theta)}} d\varphi ;$$

posant $p = n + 1$, on écrit :

$$F_{p-1}(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \cos p\varphi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)}{\cos\varphi - \cos\theta}}\,d\varphi$$

soit encore :

$$(31) \qquad F_{p-1}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\sqrt{(1+\cos\varphi)(\theta-\varphi)}}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}} \frac{1}{\sqrt{\theta-\varphi}} \cos p\varphi \cdot d\varphi$$

Considérons la fonction :

$$y(\varphi) = \sqrt{\frac{(1+\cos\varphi)(\theta-\varphi)}{\cos\varphi - \cos\theta}}$$

que nous écrivons

$$y(\varphi) = \sqrt{2}\,\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}}\sqrt{\frac{\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}} = \sqrt{2}y_1(\varphi) \times y_2(\varphi),$$

en posant

$$y_1(\varphi) = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}}, \qquad y_2(\varphi) = \sqrt{\frac{\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}}.$$

Nous disons que la fonction $y(\varphi)$ est *positive*, *bornée* et *décroissante*. En effet :

a) le numérateur de $y_1'(\varphi)$ se réduit à

$$-\left[2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\right] = -\left[\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right];$$

Pour $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ la quantité entre crochets est essentiellementpositive. La dérivée $y'_1(\varphi)$ est donc négative, la fonction $y_1(\varphi)$ est décroissante.

On a de plus :

$$y_1(0) = \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}}} \quad \text{et} \quad y_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}.$$

b) En ce qui concerne $y_2(\varphi)$, le numérateur de la dérivée s'écrit

$$-\frac{1}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\left[\operatorname{tg}\frac{\theta-\varphi}{2} - \frac{\theta-\varphi}{2}\right];$$

On a : $\cos\frac{\theta-\varphi}{2} > 0$ vu les limites de variation de φ et θ ; sous les mêmes conditions on a : $\operatorname{tg}\frac{\theta-\varphi}{2} > \frac{\theta-\varphi}{2}$; la dérivée est donc négative. La fonction $y_2(\varphi)$ est donc décroissante et varie de

$$y_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}} \qquad \text{à} \qquad y_2(\theta) = 1.$$

La fonction $y(\varphi) = \sqrt{2}y_1(\varphi)y_2(\varphi)$, *positive*, *bornée*, *décroissante*, atteint son maximum pour $\varphi = 0$, à savoir :

$$y(0) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

et sa valeur minima pour $\varphi = \theta$, à savoir :

$$y(\theta) = \sqrt{\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}.$$

La plus grande valeur que peut prendre $y(\varphi)$ est donnée par la valeur maxima de $y(0)$ quand θ varie sur (θ_0, π).

Posons $y(0) = z(\theta) = \dfrac{\sqrt{\theta}}{\sin\frac{\theta}{2}}$; on vérifie que pour $\theta = 0$ $z(\theta) = +\infty$. Cette fonction décroît quand θ croît, passe par un minimum positif et atteint la valeur $\sqrt{\pi}$ quand $\theta = \pi$.

Comme θ_0 est fixé *supérieur à zéro*, il existe un nombre que nous désignons par $M(\theta_0)$ qui est la borne supérieure de $z(\theta) = y(0)$ quand θ varie sur (θ_0, π).

Nous pouvons fixer cette borne supérieure :

On vérifie que pour $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ on a : $\dfrac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

d'où :

$$z(\theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sin\frac{\theta}{2}} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\theta}}, \qquad \text{ou} \qquad z(\theta) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\theta_0}}.$$

Donc, nous pouvons prendre : $M(\theta_0) = \dfrac{\pi}{\sqrt{\theta_0}}$.

Revenons maintenant à la fonction $F_{p-1}(\cos\theta)$ définie par (31). Posons $\psi = (\theta - \varphi)p$. On a : $d\varphi = -\frac{1}{p}\,d\psi$.

La fonction $y(\varphi)$ se transforme en une fonction positive de ψ que nous désignons par $Y(\psi)$, et qui est bornée supérieurement par le nombre $M(\theta_0)$ défini ci-dessus.

L'expression (31) devient donc :

$$F_{p-1}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{p\theta} Y(\psi)\frac{\cos(p\theta - \psi)}{\sqrt{\psi}}\frac{d\psi}{\sqrt{p}},$$

qui s'écrit :

$$(32)\quad F_{p-1}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi\sqrt{p}}\left\{\cos p\theta\int_0^{p\theta} Y(\psi)\frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}d\psi + \sin p\theta\int_0^{p\theta} Y(\psi)\frac{\sin\psi}{\sqrt{\psi}}d\psi\right\}.$$

Quand ψ croît de zéro à $p\theta$, φ décroît de θ à zéro, $Y(\psi)$ est donc une fonction *bornée*, *positive*, et *croissante*.

En appliquant le deuxième théorème de la moyenne aux intégrales du deuxième membre de (32), on a pour la première :

$$\left|\int_0^{p\theta} Y(\psi)\frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}d\psi\right| = \left|Y(p\theta - 0)\int_\xi^{p\theta}\frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}d\psi\right| \leqslant M(\theta_0)\left|\int_\xi^{p\theta}\frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}d\psi\right|$$

où ξ est tel que l'on a $o < \xi < p\,\theta$.

On peut écrire :

$$\left|\int_\xi^{p\theta}\frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}d\psi\right| \leqslant \left|\int_0^{p\theta}\frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}d\psi\right| + \left|\int_0^{\xi}\frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}p\psi\right|$$

où $p\theta$ et ξ ont des valeurs positives indéterminées.

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{\psi}}$ est une fonction positive et décroissante pour ψ croissant on sait d'après un raisonnement classique que $\left|\displaystyle\int_0^{h}\frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}d\psi\right|$ est bornée supérieurement par un nombre fini bien déterminé quand h varie sur l'axe $(0, \infty)$. Nous pouvons donc fixer une *constante absolue* bornant supérieurement l'expression : $\left|\displaystyle\int_\xi^{p\theta}\frac{\cos\psi}{\sqrt{\psi}}d\psi\right|$.

Un calcul identique peut être exécuté pour la deuxième intégrale du deuxième membre de (32), et l'intégrale $\displaystyle\int_{\xi'}^{p\theta}\frac{\sin\psi}{\sqrt{\psi}}d\psi$ est également bornée en valeur absolue par une constante absolue.

Compte tenu de ces résultats, et faisant $p - 1 = n$ dans (32) on a :

$$(33)\qquad |F_n(\cos\theta)| = |X_n(\cos\theta) + X_{n+1}(\cos\theta)| \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{n}\sqrt{\theta_0}}$$

où λ est une constante absolue.

Remarquons que θ_0 étant sur $(0, \pi)$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{\theta_0}} < \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sin\frac{\theta_0}{2}}},$$

d'où :

$$| X_n(\cos\theta) + X_{n+1}(\cos\theta) | \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{2}\sqrt{n}\sqrt{\sin\frac{\theta_0}{2}}};$$

or

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta_0}{2}} = \sqrt{\frac{1-x_0}{2}};$$

nous écrivons donc :

$$(34) \quad | X_n(x) + X_{n+1}(x) | \leqslant \frac{\lambda_1}{\sqrt{n}(1-x_0)^{1/4}} \qquad (\lambda_1 = c^{te} \text{ absolue});$$

Cette formule établit la convergence uniforme vers zéro, au voisinage de — 1, de l'expression considérée quand n tend vers l'infini.

Si on considère l'expression $| X_n(x) - X_{n+1}(x) |$ où l'on a :

$$x_0 \leqslant x \leqslant +1, \qquad -1 < x_0 < +1,$$

on démontre de façon identique que l'on a :

$$| X_n(x) - X_{n+1}(x) | \leqslant \frac{\lambda'_1}{\sqrt{n}(1+x_0)^{1/4}} \qquad (\lambda'_1 = c^{te} \text{ absolue});$$

l'expression considérée converge uniformément vers zéro au voisinage de + 1 quand n tend vers l'infini.

CHAPITRE II

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE LEGENDRE

I. — CONDITION DE FERMETURE

§ 10. Développement formel en série de polynômes de Legendre. Condition dite « de fermeture ». — Les polynômes de Legendre étant orthogonaux, *le développement formel* d'une fonction $f(x)$ en série de Legendre peut être obtenu par le procédé de Fourier ;
soit $S_n(x) = a_0X_0(x) + \ldots\ldots + a_nX_n(x)$ ce développement ;
les coeffficients ont pour valeur :

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{+1} X_k(x)f(x)dx, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Ce développement *formel* suppose seulement que $f(x)$ est sommable.

Si $f(x)$ est non seulement *sommable* mais encore *de carré sommable*, les coefficients a_k peuvent être obtenus en rendant minima l'intégrale

$$(1) \qquad \mathfrak{J}_n = \int_{-1}^{+1} [f(x) - \sum_0^n a_kX_k(x)]^2dx.$$

Désignons par $\mathfrak{J}_n^{(m)}$ l'intégrale $\mathfrak{J}_n$ rendue minima. On a :

$$\mathfrak{J}_n^{(m)} = \int_{-1}^{+1} [f(x)]^2dx - 2\sum_0^n \frac{a_k^2}{2k+1} \geqslant 0.$$

On peut donc écrire :

$$2\sum_0^n \frac{a_k^2}{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_0^n (2k+1)\left[\int_{-1}^{+1} f(x)X_k(x)dx\right]^2 \leqslant \int_{-1}^{+1} [f(x)]^2dx.$$

La série $\sum_0^\infty \frac{a_k^2}{2k+1}$ est donc absolument convergente.

D'autre part, nous vérifierons tout à l'heure qu'on a bien pour toute fonction $f(x)$ de carré sommable :

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}(2k+1)\left[\int_{-1}^{+1} f(x)X_k(x)dx\right]^2 = \int_{-1}^{+1}[f(x)]^2dx$$

Cette égalité définit la *condition de fermeture* du système de polynômes $X_n(x)$.

§ 11. Les polynômes de Legendre forment un système complet. — Soit un polynôme $Q_n(x) = \sum_{0}^{n} \alpha_k^{(n)} x^k$ de degré n, comportant $n+1$ coefficients $\alpha_k^{(n)}$ arbitraires. On peut déterminer ces coefficients en écrivant que l'intégrale

$$I_n = \int_{-1}^{+1}[f(x) - Q_n(x)]^2dx \qquad \text{est minima.}$$

On vérifie sans difficultés que ce polynôme ainsi déterminé est identique au développement limité d'ordre n de $f(x)$ en série de Legendre. Les deux problèmes se ramènent algébriquement l'un à l'autre.

Remarquons que pour $\mathfrak{J}_n^{(m)}$ définie au § 10, on a :

$$\mathfrak{J}_n^{(m)} \geqslant \mathfrak{J}_{n+1}^{(m)} \geqslant \cdots$$

Si $I_n^{(m)}$ désigne I_n rendue minima, on a aussi :

$$I_n^{(m)} \geqslant I_{n+1}^{(m)} \geqslant \cdots \qquad \text{car : } I_n^{(m)} = \mathfrak{J}_n^{(m)}.$$

Un système d'une infinité de fonctions orthogonales sur un segment déterminé est dit *complet* ou *fermé* s'il est impossible de trouver une autre fonction qui ajoutée à ce système forme un nouveau système orthogonal.

On sait (¹) que pour qu'un système orthogonal soit complet, il suffit que la condition de fermeture (2), ci-dessus définie, soit satisfaite pour toute fonction de carré sommable.

Les polynômes de Legendre forment un système complet ; quoique ce fait soit apparemment connu, nous n'en avons pas trouvé de démonstration ; nous en détaillons une ci-après.

Soit $f(x)$ de carré sommable, et soit $S_n(x)$ le développement de Legendre limité d'ordre n de cette fonction.

(¹) Par exemple : GOURSAT. — *Traité d'Analyse*, t. III, 3ᵉ éd., p. 445.

Posons $\mathfrak{I}_n^{(m)} = \int_{-1}^{+1} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$, on sait qu'on a : $\mathfrak{I}_n^{(m)} \geqslant \mathfrak{I}_{(m)}^{n+1} \geqslant \ldots$. La condition de fermeture est satisfaite si on a $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{I}_n^{(m)} = 0$. Ce résultat sera acquis si ε^2 étant arbitrairement choisi, on peut trouver n tel que l'on aura $\mathfrak{I}_n^{(m)} \leqslant \varepsilon^2$; on aura aussi nécessairement :

$$\mathfrak{I}_{n+p}^{(m)} \leqslant \varepsilon^2, \quad p = 0, 1, \cdots \infty.$$

Soit $f_n(x)$ le développement limité d'ordre n de $f(x)$ en série de Fourier sur le segment $(-1, +1)$. Les fonctions $f_n(x)$ sont continues et ainsi qu'il est connu, les coefficients de $f_n(x)$ rendent minima l'intégrale $H_n = \int_{-1}^{+1} [f(x) - f_n(x)]^2 dx$; On a en outre, $H_n^{(m)}$ désignant la valeur H_n minimée : $H_n^{(m)} \geqslant H_{n+1}^{(m)} \geqslant \ldots\ldots$

On sait par ailleurs que *les suites de fonctions* $\sin \mu x$, et $\cos \mu x$ *forment un système complet*, et qu'en conséquence, la condition de fermeture étant satisfaite, on a $\lim\limits_{n=\infty} H_n^{(m)} = 0$.

Choisissons arbitrairement un nombre positif ε_1. Nous pouvons trouver i tel qu'on ait :

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - f_i(x)]^2 dx \leqslant \varepsilon_1^2.$$

Par ailleurs $f_i(x)$ étant continue, on peut au moyen du théorème de Weierstrasse, trouver, étant donné un nombre positif ε_2 arbitraire, un polynôme $R_n(x)$ tel qu'on ait

$$| f_i(x) - R_n(x) | \leqslant \varepsilon_2, \quad -1 \leqslant x \leqslant +1 ;$$

soit n le degré de ce polynôme. On a ainsi :

$$\int_{-1}^{+1} [f_i(x) - R_n(x)]^2 dx \leqslant 2 \varepsilon_2^2.$$

Considérons maintenant un autre polynôme de degré n, $Q_n(x)$, dont les $n + 1$ coefficients sont tels que l'intégrale

$$L_n = \int_{-1}^{+1} [f_i(x) - Q_n(x)]^2 dx \quad \text{est minima.}$$

On a nécessairement :

$$\int_{-1}^{+1} [f_i(x) - Q_n(x)]^2 dx \leqslant \int_{-1}^{+1} [f_i(x) - R_n(x)]^2 dx \leqslant 2 \varepsilon_2^2 ;$$

tous les polynômes $Q_q(x)$ de degré q ($q \geqslant n$) qui miniment l'intégrale L_q sont tels qu'on a :

$$\int_{-1}^{+1} [f_i(x) - Q_q(x)]^2 \leqslant 2\,\varepsilon_2^2 \qquad \text{car on a : } L_n \geqslant L_{n+1} \geqslant \cdots$$

Ceci posé, on peut écrire :

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - Q_n(x)]^2 dx = \int_{-1}^{+1} [(f - f_i) + (f_i - Q_n)]^2 dx$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - Q_n(x)]^2 dx \leqslant \left[\sqrt{\int_{-1}^{+1} (f - f_i)^2 dx} + \sqrt{\int_{-1}^{+1} (f_i - Q_n)^2 dx}\right]^2$$

d'où finalement :

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - Q_n(x)]^2 dx \leqslant \left[\varepsilon_1 + \sqrt{2}\,\varepsilon_2\right]^2.$$

Comme $S_n(x)$ minime l'intégrale $\int_{-1}^{+1} [f(x) - S_n(x)]^2\, dx$, on a nécessairement :

$$\int_{1-}^{+1} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \leqslant \int_{-1}^{+1} [f(x) - Q_n(x)]^2 dx \leqslant \left[\varepsilon_1 + \sqrt{2}\varepsilon_2\right]^2,$$

et on a aussi :

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - S_{n+r}(x)]^2 dx \leqslant \left[\varepsilon_1 + \sqrt{2}\varepsilon_2\right]^2, \qquad r = 0, 1, 2 \cdots \infty.$$

La question suivante se pose alors :

Etant donné arbitrairement un nombre positif ε, trouver un entier positif n tel que l'on puisse écrire : $\varepsilon_1 + \sqrt{2}\,\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon$. Il suffit de prendre $\varepsilon_1 < \varepsilon$; on en déduit $f_i(x)$ d'ordre i. Ensuite on prendra $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\sqrt{2}}$, d'où en choisissant $R_n(x)$, on déterminera n tel qu'on aura

$$|\, f_i(x) - R_n(x) \,| < \varepsilon_2.$$

Dans ces conditions, on aura bien :

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - S_{n+r}(x)]^2 dx \leqslant \varepsilon^2, \qquad r = 0, 1, 2, \cdots \infty.$$

II. — SUR LES DÉVELOPPEMENTS DES FONCTIONS DE CARRÉ SOMMABLE

§ **12. Remarque générale.** — Haar [1] démontre le théorème suivant :

Soit une fonction $f(x)$ définie et de carré sommable sur le segment $(-1, +1)$. *En tout point intérieur à l'intervalle* $(-1, +1)$, *la différence entre le développement d'ordre n de $f(x)$ en série de Legendre et le développement d'ordre n de $f(x)$ en série de cosinus obtenu suivant le procédé de Fourier tend vers zéro quand n tend vers l'infini.*

La question de la *convergence ponctuelle* du développement de Legendre d'une fonction de carré sommable sur $(-1, +1)$ en un point intérieur à cet intervalle se trouve ramenée à celle de la convergence de la série de cosinus en ce point.

Par ailleurs, Dunham Jackson [2] cite le théorème suivant : *Si $f(x)$ de carré sommable sur* $(-1, +1)$ *est identiquement nulle sur l'intervalle* $\alpha - \eta \leqslant x \leqslant \beta + \eta$ *contenu dans* $(-1, +1)$, *le développement $S_n(x)$ de $f(x)$ en série de Legendre converge uniformément vers zéro pour* $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

En fait, pour une fonction de carré sommable, la convergence de la série de Legendre en un point intérieur à l'intervalle $(-1, +1)$ dépend seulement de l'allure de la fonction au voisinage de ce point ainsi qu'il résulte du théorème de Haar, tandis que pour la série de Fourier, le même résultat existe sans qu'il soit nécessaire que la fonction soit de carré sommable, il suffit qu'elle soit sommable [3].

§ **13. Application du critère de Riemann-Dini aux développements en série de Legendre des fonctions de carré sommable.** — Nous énonçons et démontrons le théorème suivant :

Théorème :

Si la fonction $f(x)$ définie et de carré sommable sur $(-1, +1)$, *est telle qu'au point x,* $(-1 < x < +1)$, *les conditions a) et b) suivantes dites « conditions de Riemann-Dini » sont satisfaites, à savoir :*

a) $f(x-0)$ et $f(x+0)$ *ont des valeurs bien déterminées,*

(1) Haar. — *Reihenentwicklüng nach Legendreschen Poly.* Math. Ann., Bd 78, 1917.

(2) Dunham Jackson. — *The theory of approximation.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publication 1930. Vol. XI, page 71, th. XIII.

(3) Lebesgue. — *Séries trigonométriques.*

b) *les intégrales*

$$\left.\begin{aligned}&\int_x^{x+h}\left|\frac{f(s)-f(x+0)}{s-x}\right|ds \quad (h>0)\\&\int_{x-h}^{x}\left|\frac{f(s)-f(x-0)}{s-x}\right|ds \quad (h>0)\end{aligned}\right\}\textit{existent},$$

alors la série de Legendre de $f(x)$ converge au point x vers la valeur $\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

Soit $S_n(x)$ le développement limité d'ordre n de $f(x)$ en série de Legendre ; on écrit en utilisant la formule de Christoffel (4), § 1 :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\Phi_n(x,s)f(s)ds\\&= \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{X_{n+1}(s)X_n(x)-X_n(s)X_{n+1}(x)}{s-x}f(s)ds,\end{aligned}\right.$$

d'où :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{x-h}\Phi_n(x,s)f(s)ds\\&+\frac{1}{2}\int_{x-h}^{x+h}\Phi_n(x,s)f(s)ds+\frac{1}{2}\int_{x+h}^{+1}\Phi_n(x,s)f(s)ds\ ;\end{aligned}\right.$$

Nous nous proposons de démontrer qu'on a, *x étant intérieur à* $(-1,+1)$

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

Remarquons qu'on a :

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\Phi_n(x,s)ds = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}X_n(x)X_{n+1}(x)\ ;$$

en effet

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\Phi_n(x,s)ds = \int_{-1}^{x}\left[\frac{1}{2}X_0(x)X_0(s)+\cdots+\frac{2n+1}{2}X_n(x)X_n(s)\right]ds,$$

d'où compte tenu de (8), § 2 : à savoir :

$$(2k+1)X_k(s) = X'_{k+1}(s)-X'_{k-1}(s),$$

on aboutit à la formule (5). On vérifie de même qu'on a :

$$(6)\qquad \frac{1}{2}\int_{x}^{+1}\Phi_n(x,s)ds = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}X_n(x)X_{n+1}(x),$$

et de (5) et (6) on tire :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \Phi_n(x, s)ds = +1. \tag{7}$$

Nous démontrons maintenant que si $f(x)$ est de carré sommable, on a :

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2}\int_{-1}^{a} \Phi_n(x, s)f(s)ds = 0\,; \qquad (-1 < a < x < +1), \tag{8}$$

et :

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2}\int_{b}^{+1} \Phi_n(x, s)f(s)ds = 0\,; \qquad (-1 < x < b < +1).$$

En vertu du § 7, (28), nous avons

$$| X_n(x) | < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (-1 < x < +1).$$

Posons $K(x) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $K(x)$ est finie en tout point x intérieur à $(-1, +1)$.

On peut écrire :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{a} \Phi_n(x, s)f(s)ds = \frac{n+1}{2} X_n(x) \int_{-1}^{a} \frac{X_{n+1}(s)}{s-x} f(s)ds$$
$$- \frac{n+1}{2} X_{n+1}(x) \int_{-1}^{a} \frac{X_n(s)}{s-x} f(s)ds,$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{a} \Phi_n(x, s)f(s)ds\right| \tag{9}$$
$$\leqslant K(x)\frac{n+1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\int_{-1}^{a} \frac{X_{n+1}(s)}{s-x} f(s)ds\right| + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left|\int_{-1}^{a} \frac{X_n(s)}{s-x} f(s)ds\right|\right].$$

Posons $F(s) = \dfrac{f(s)}{s-x}$ pour $-1 \leqslant s \leqslant a$, et,

$$F(s) = 0 \qquad \text{pour} \qquad a < s \leqslant +1.$$

$F(s)$ est de carré sommable sur $(-1, +1)$. On a donc :

$$\int_{-1}^{+1} [F(s)]^2 ds = \int_{-1}^{a} [F(s)]^2 ds < \frac{1}{(x-a)^2}\int_{-1}^{a} [f(s)]^2 ds\,;$$

or la série

$$\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}(2k+1)\left[\int_{-1}^{+1} F(s)X_k(s)ds\right]^2$$

converge absolument (§ 10).

Donc

$$\lim_{k=\infty} \sqrt{2k+1} \left| \int_{-1}^{+1} F(s)X_k(s)ds \right| = 0 ;$$

en conséquence :

$$\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} \left| \int_{-1}^{a} \frac{X_{n+1}(s)f(s)}{s-x} ds \right| = 0.$$

De (9), on déduit donc :

$$(10) \qquad \lim_{n=\infty} \cdot \frac{1}{2}\int_{-1}^{a} \Phi_n(x, s)f(s)ds = 0 ; \qquad (-1 < a < x < +1).$$

Un calcul analogue donne :

$$(11) \qquad \lim_{n=\infty} \cdot \frac{1}{2}\int_{b}^{+1} \Phi_n(x, s)f(s)ds = 0 ; \qquad (-1 < x < b < +1).$$

Revenons à l'égalité (4) ; Posons :

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x-h} \Phi_n(x, s)f(s)ds, \qquad I_n^{(2)} = \frac{1}{2}\int_{x-h}^{x+h} \Phi_n(x, s)f(s)ds,$$

et

$$I_n^{(3)} = \frac{1}{2}\int_{x+h}^{+1} \Phi_n(x, s)f(s)ds ;$$

on a :

$$S_n(x) = I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)}.$$

Vu les résultats (10) et (11) on conclut au fait que :

$$\lim_{n=\infty} I_n^{(1)} = 0, \qquad \lim_{n=\infty} I_n^{(3)} = 0.$$

Ecrivons :

$$I_n^{(2)} = \frac{1}{2}\int_{x-h}^{x} \Phi_n(x, s)f(s)ds + \frac{1}{2}\int_{x}^{x+h} \Phi_n(x, s)f(s)ds,$$

ou bien $I_n^{(2)} = L_n^{(1)} + L_n^{(2)}$, $L_n^{(1)}$ et $L_n^{(2)}$ désignant respectivement la première et la deuxième intégrale du deuxième membre de $I_n^{(2)}$. *Nous nous proposons de calculer* $\lim\limits_{n=\infty} I_n^{(2)} = \mathit{lim}_{n=\infty} S_n(x)$.

On peut poser :

$$L_n^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{x-h}^{x} \Phi_n(x, s)\,[f(s) - f(x-0) + f(x-0)]ds,$$

ou :

$$L_n^{(1)} = \frac{1}{2}f(x-0)\int_{x-h}^{x} \Phi_n(x, s)ds +$$

$$\frac{n+1}{2}\int_{x-h}^{x} \frac{f(s)-f(x-0)}{s-x} \times [X_{n+1}(s)X_n(x) - X_n(s)X_{n+1}(x)]ds.$$

Or

$$\frac{1}{2}\int_{x-h}^{x} \Phi_n(x, s)ds = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} \Phi_n(x, s)ds - \frac{1}{2}\int_{-1}^{x-h} \Phi_n(x, s)ds\ ;$$

en vertu de (5) et (10), il vient :

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{2}\int_{x-h}^{x} \Phi_n(x, s)ds = \frac{1}{2}.$$

Nous cherchons maintenant la limite pour $n \to \infty$ de la deuxième intégrale du deuxième membre de $L_n^{(1)}$.

Posons $x = \cos\theta$, $s = \cos\varphi$, appelons δ l'élément d'arc correspondant à h. Cette deuxième intégrale que nous désignons par J_n s'écrit alors :

$$J_n = \frac{n+1}{2}\int_{\theta}^{\theta+\delta} \frac{f(\cos\varphi) - f[\cos(\theta+0]}{\cos\varphi - \cos\theta}[X_{n+1}(\cos\varphi)X_n(\cos\theta)$$
$$- X_n(\cos\varphi)X_{n+1}(\cos\theta)] \sin\varphi d\varphi$$

Le point x est tel qu'on a $-1 < x < +1$, d'où $0 < \theta < \pi$; l'intervalle $(x - h, x)$ est intérieur à $(-1, +1)$; on a donc $0 < \theta < \theta + \delta < \pi$, et φ pris sur le segment $(\theta, \theta + \delta)$ ne peut atteindre ni la valeur zéro ni la valeur π.

D'après l'hypothèse de l'énoncé du théorème, l'intégrale

$$\int_{x-h}^{x} \left|\frac{f(s) - f(x-0)}{s - x}\right| ds$$

a une valeur finie ; la fonction $\left|\frac{f(\cos\varphi) - f[\cos(\theta+0)]}{\cos\varphi - \cos\theta}\sin\varphi\right|$ a donc une intégrale finie sur tout intervalle $(\theta, \theta + \delta)$ intérieur à $(0, \pi)$.

Il en est de même de la fonction

$$\left|\frac{f(\cos\varphi) - f[\cos(\theta+0)]}{\cos\varphi - \cos\theta}\right| = \left|\frac{f(\cos\varphi) - f[\cos(\theta+0)]}{\cos\varphi - \cos\theta}\sin\varphi\right| \times \frac{1}{\sin\varphi}$$

pour $0 < \varphi < \pi$.

Dans l'expression de J_n, écrivons le produit suivant :

$$(13) \qquad \frac{n+1}{2}[X_{n+1}(\cos\varphi)X_n(\cos\theta) - X_n(\cos\varphi)X_{n+1}(\cos\theta)]$$

en y remplaçant X_n et X_{n+1} par leurs valeurs (26), § 6, à savoir :

$$X_n(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}\frac{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{M_1(n,\theta)}{\sin^{3/2}\theta}.$$

Ce produit (13) se décompose alors ainsi :

1° un terme :

$$\frac{n+1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\times$$

$$\frac{\cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\varphi\sin\theta}}$$

2° Une somme de termes ayant en facteur quand $n\to\infty$ une quantité devenant infiniment petite *comme* $\frac{1}{n}$, et dans lesquels la variable φ apparaît au dénominateur dans les expressions $\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}}$ ou $\frac{1}{\sin^{3/2}\varphi}$, qui restent finies pour $0<\varphi<\pi$.

3° Une somme de termes, ayant en facteur quand $n\to\infty$ une quantité devenant infiniment petite *comme* $\frac{1}{n^2}$, la variable φ apparaissant au dénominateur dans l'expression $\frac{1}{\sin^{3/2}\varphi}$, qui reste finie pour $0<\varphi<\pi$.

Ajoutons qu'aux numérateurs des termes envisagés sous 2° et 3° ci-dessus, la variable φ n'apparaît que dans des cosinus ou dans la fonction M_1, expressions bornées supérieurement en valeur absolue.

Sous les conditions qui viennent d'être énoncées, on conclut que les parties composantes de J_n qui comprennent les intégrales des termes envisagés sous 2° et 3° ont pour limite zéro quand $n\to\infty$; en effet, les intégrales proprement dites sont finies puisqu'on a : $0<\rho<\varphi<\rho+\delta<\pi$; elles sont en outre affectées de *facteurs décroissants* soit *comme* $\frac{1}{n}$, soit *comme* $\frac{1}{n^2}$ quand $n\to\infty$.

Il reste maintenant à considérer le terme que nous avons mentionné sous 1° ; on peut l'écrire :

$$(14)\qquad \frac{n+1}{\pi\sqrt{n(n+1)}}\cdot\frac{\cos(n+1)(\varphi+\theta)\sin\frac{\varphi-\theta}{2}-\sin(n+1)(\varphi-\theta)\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}{\sqrt{\sin\theta\cdot\sin\varphi}};$$

Considérons par exemple au numérateur la partie en

$$\cos(n+1)(\varphi+\theta)\sin\frac{\varphi-\theta}{2}$$

qui dans l'expression de J_n fait intervenir l'intégrale :

$$(15)\qquad \frac{n+1}{\pi\sqrt{n(n+1)}}\int_{\theta}^{\theta+\delta}\frac{f(\cos\varphi)-f[\cos(\theta+0)]}{\cos\varphi-\cos\theta}\cdot\frac{\cos(n+1)(\varphi+\theta)\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sqrt{\sin\theta}}\sqrt{\sin\varphi}d\varphi.$$

On a :

$\cos(n+1)(\varphi+\theta)=\cos(n+1)\varphi\cos(n+1)\theta-\sin(n+1)\varphi\sin(n+1)\theta$ dans (15) apparaîtra donc l'intégrale

$$\frac{n+1}{\pi\sqrt{n(n+1)}}\cdot\frac{\cos(n+1)\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\int_{\theta}^{\theta+\delta}\cos(n+1)\varphi\frac{f(\cos\varphi)-f[\cos(\theta+0)]}{\cos\varphi-\cos\theta}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\sqrt{\sin\varphi}d\varphi.$$

Dans l'élément différentiel, le facteur de $\cos(n+1)\varphi$ est sommable ; l'intégrale précédente a donc zéro pour limite quand $n\to\infty$.

De même dans (15) on considérerait l'intégrale en $\sin(n+1)\varphi$ et on démontrerait qu'elle tend vers zéro.

Considérant au numérateur de (14) le terme

$$\sin(n+1)(\varphi-\theta)\sin\frac{\varphi+\theta}{2},$$

on ferait un raisonnement identique aboutissant à la même conclusion.

Finalement, on a donc :

$$\lim_{n=\infty}\cdot J_n=0.$$

Compte tenu de ce résultat, on écrit :

$$\lim_{n=\infty}L_n^{(1)}=\lim_{n=\infty}\cdot\frac{1}{2}\int_{x-h}^{x}\Phi_n(x,s)f(s)ds=\frac{1}{2}f(x-0)\ ;$$

De la même façon, on démontrerait que l'on a :

$$\lim_{n=\infty}L_n^{(2)}=\lim_{n=\infty}\cdot\frac{1}{2}\int_{x}^{x+h}\Phi_n(x,s)f(s)ds=\frac{1}{2}f(x+0)\ ;$$

D'où, en conclusion et pour $-1<x<+1$:

$$\lim_{n=\infty}S_n(x)=\lim_{n=\infty}\cdot I_n^{(2)}=\lim_{n=\infty}L_n^{(2)}+\lim_{n=\infty}L_n^{(1)}=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

III. — SUR LES MOYENNES ARITHMÉTIQUES

§ 14. Fonctions sommables ; extension du théorème de Gronwall sur les moyennes arithmétiques du 1er ordre des développements en série de Legendre. — 1° Gronwall [1] a démontré le théorème suivant :

[1] GRONWALL. — *Laplaschen Reihe.* Math. Ann., Bd. 74, 1913.

Soit $f(x)$ *absolument intégrable sur le segment* $(-1, +1)$; soit $S_n(x)$ le *développement de Legendre limité d'ordre* n *de* $f(x)$; *soit* $S'_n(x)$ *la moyenne arithmétique du* 1er *ordre des développements* $S_j(x)$ *à savoir* : $S'_n = \dfrac{1}{n+1}(S_0 + S_1 + \ldots S_n)$; *alors en chaque point* x *où les valeurs*

$$\lim_{\varepsilon=0} f(x \pm \varepsilon) = f(x \pm 0) \textit{ existent,}$$

les moyennes arithmétiques du 1er *ordre convergent vers la limite suivante* :

$$\lim_{n=\infty} \cdot S'_n(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] ;$$

Si $f(x)$ est continu pour $a \leqslant x \leqslant b$, $(-1 \leqslant a < b \leqslant +1)$, la convergence est uniforme pour

$$a' \leqslant x \leqslant b' \quad \text{où l'on a} \quad a < a' < b' < b.$$

Remarque. — Du calcul de Gronwall on déduit immédiatement que ce résultat subsiste si $f(x)$ est intégrable au sens de Lebesgue, c'est-à-dire *sommable*.

2° Gronwall ne démontre pas que si $f(x)$ *est continue sur le segment* $(a, +1)$, *la continuité étant uniforme jusqu'au point* $+1$ *inclus*, *la convergence est uniforme sur le segment* $(a', +1)$, $(a' \leqslant x \leqslant +1)$, $(a' > a)$.

Nous nous proposons de démontrer ce résultat complémentaire qui résulte d'ailleurs du calcul de Gronwall et qu'il est facile de mettre en évidence en modifiant convenablement les champs d'intégration.

Nous reprenons donc ci-après le calcul de Gronwall en y apportant les modifications de détail utiles :

Hypothèse : $f(x)$ est supposée sommable sur $(-1, +1)$ et uniformément continue sur $(a, +1)$, $(-1 < a < +1)$.

A. Soit la sphère de rayon 1 sur laquelle nous prenons deux points $M(\theta,\varphi)$ et $M'(\theta',\varphi')$, dont les coordonnées cartésiennes sont :

$$M : \begin{cases} x = \sin\theta\cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases} \qquad M' : \begin{cases} x' = \sin\theta'\cos\varphi' \\ y' = \sin\theta'\sin\varphi' \\ z' = \cos\theta' \end{cases}$$

Le point O étant le centre de la sphère, l'angle $MOM = \gamma$ est tel qu'on a :

$$\cos\gamma = \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi') + \cos\theta\cos\theta'.$$

Désignons par $F(\theta, \varphi)$ une fonction sommable définie sur la sphère Son développement d'ordre n en série de Laplace est :

$$(16) \qquad \sum_0^n \frac{2k+1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta' \cdot F(\theta', \varphi') \sin\theta' \cdot \int_0^{2\pi} X_n(\cos\gamma)d\varphi',$$

où $X_n(\cos\gamma)$ désigne le polynôme de Legendre d'ordre n relatif à la variable $\cos\gamma$.

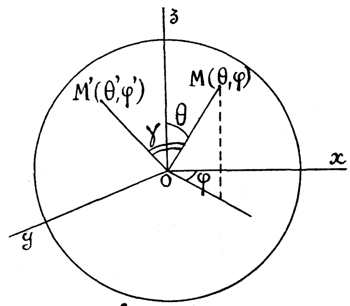

fig. 1

Supposons que la fonction $F(\theta,\varphi)$ soit constante sur chaque parallèle $\theta = \text{const.}$ Cette fonction est alors indépendante de φ. Désignons-la par $f(\cos\theta)$. Nous référant aux coordonnées cartésiennes précisées ci-dessus, on définit ainsi sur l'axe des z et pour $-1 \leqslant z \leqslant +1$ unefonction sommable $f(z) = f(\cos\theta)$.

Dans ces conditions, le développement de Laplace limité d'ordre n de cette fonction s'écrit :

$$(17) \quad S_n(\cos\theta) = S_n(z) = \sum_0^n \frac{2k+1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta' \cdot f(\cos\theta')\sin\theta' \cdot \int_0^{2\pi} X_n(\cos\gamma)d\varphi'.$$

On vérifie (voir par exemple Fejer [1]) que ce développement (17) n'est autre que le développement de Legendre, à savoir :

$$(17') \qquad S_n(z) = \sum_0^n \frac{2k+1}{2} X_k(z) \int_{-1}^{+1} f(s)X_k(s)ds.$$

C'est en partant de (17) que nous conduisons le calcul. Posons :

$$\sigma_n(\cos\gamma) = X_0(\cos\gamma) + \cdots + (2n+1)X_n(\cos\gamma),$$

et :

$$\sigma'_n(\cos\gamma) = \frac{1}{n+1}[\sigma_0(\cos\gamma) + \cdots + \sigma_n(\cos\gamma)].$$

On voit d'après (17) qu'on a :

$$(18) \quad S_n'(z) = S_n'(\cos\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta' \cdot f(\cos\theta')\sin\theta' \cdot \int_0^{2\pi} \sigma_n'(\cos\gamma)d\varphi'.$$

(1) FEJER. — *Mémoire sur les moyennes arithmétiques.* § 4. Math. Ann., t. 67 1909.

B. — Le calcul relatif à la convergence de $S_n'(z)$ repose essentiellement sur l'emploi de valeurs majorant $|\sigma_n'(\cos\gamma)|$ et

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\sigma_n'(\cos\gamma)| \sin\theta' d\varphi' \cdot d\theta'.$$

(Gronwall, *loc. cit.*, Lukacs [1]). Nous rappelons les résultats de ces auteurs.

Posant $t = \cos\gamma$ et utilisant la formule de Christoffel, (3), (4), § 1, on a :

$$(19)\quad \sigma_n'(t) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{t-1}\left[\sum_0^n X_j(t) - (n+1)X_{n+1}(t)\right] = \frac{U_n - X_{n+1}(t)}{1-t}$$

où l'on a posé :

$$U_n = \frac{1}{n+1}\sum_0^n X_j(t).$$

Gronwall démontre que pour $0 < \gamma < \pi$, on a :

$$(20)\quad |\sigma_n'(\cos\gamma)| < \frac{12}{(1-\cos\gamma)\sqrt{\sin\gamma}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}};$$

Soit maintenant :

$$\rho_n'(\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\sigma_n'(\cos\gamma)| \sin\theta' d\varphi' d\theta' = \frac{1}{4\pi}\int_K |\sigma_n'(\cos\gamma)|\, d\omega.$$

où $d\omega = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$ désigne l'élément superficiel de la sphère, et où $\int_K$ indique que l'intégrale est étendue à toute la sphère de surface K. On voit que ρ_n' ne dépend pas de la position du point $M(\theta, \varphi)$; on peut prendre $\theta = 0$, ainsi M est au pôle nord de la sphère.

On a alors $\cos\gamma = \cos\theta'$, d'où :

$$\rho_n'(\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} |\sigma_n'(\cos\theta')| \sin\theta' \cdot d\theta'$$

ou en posant $\cos\theta' = t$

$$(21)\quad \rho_n' = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |\sigma_n'(t)|\, dt;$$

Gronwall et Lukacs démontrent que ρ_n' est borné supérieurement quel que soit n ; on a donc

$$(22)\quad \rho_n' < C \qquad \text{où} \qquad C = c^{te} \text{ absolue.}$$

[2] LUKACS. — *Sur les séries de Laplace.* C. R. Acad. sc., 1913, t. 157.

C. — Comme $f(z) = f(\cos\theta)$ est indépendante de φ, considérons $f(\cos\theta)$, sur le grand cercle de plan $\varphi = 0$, (voir fig. 2).

Soit Ab' le segment sur lequel $f(z)$ est uniformément continue ; on a : $Ob' = a$, $OA = +1$, la continuité uniforme existant pour $a \leqslant x \leqslant +1$.

Soit BB' la corde passant par b' et perpendiculaire à OA. Posons $\widehat{AOB} = \alpha$. L'arc de continuité uniforme est défini par $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$.

Le point b' définit une calotte sphérique de pôle A de diamètre BB' qui constitue la zone de continuité uniforme de $F(\theta, \varphi)$, en l'occurrence $f(\cos\theta) = f(z)$.

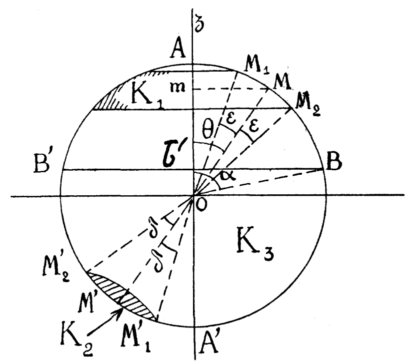

fig. 2

Soit M pris sur l'arc AB, et défini par l'angle $\theta = \widehat{AOM}$, ($om = z = \cos\theta$).

Considérons deux points M_1 et M_2, encadrant M, pris sur le cercle de plan $\varphi = 0$ et définis respectivement par les angles $\theta - \varepsilon$ et $\theta + \varepsilon$, où ε est une petite quantité positive. On suppose $\theta \leqslant \alpha - \varepsilon$.

On se propose de démontrer que $S_n'(\cos\theta)$ *converge uniformément vers* $f(x)$ *pour* $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha - \varepsilon$.

Nous formons donc une expression majorante de $|f(\cos\theta) - S_n'(\cos\theta)|$.

De (18) on déduit :

$$f(\cos\theta) - S_n'(\cos\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_K [f(\cos\theta) - f(\cos\theta')]\sigma_n'(\cos\gamma)d\omega\,; \tag{23}$$

en effet, pour écrire (23), il suffit de vérifier qu'on a

$$\frac{1}{4\pi}\int_K \sigma_n'(\cos\gamma)d\omega = 1.$$

A cet effet, posons dans (18) : $f(\cos\theta') = 1$ quel que soit θ' ; on a alors

$$S_n'(z) = \frac{1}{4\pi}\int_K \sigma_n'(\cos\gamma)d\omega.$$

Or :

$$S_n'(z) = \frac{1}{n+1}[S_0(z) + \cdots + S_n(z)]\,;$$

Si nous désignons par $\Phi_n(x, s)$ la fonction de Christoffel définie précédemment (3), § 1, on a :

$$S_k(z) = \frac{1}{2}\int_0^{+1} \Phi_k(x, s)ds = 1,$$

ceci quel que soit k,
d'où on déduit $S_n'(z) = 1$ (quel que soit n).

Désignons par K_1 la surface de la zone engendrée par l'arc M_1M_2. Autour de l'antipode M' de M considérons une calotte sphérique, de pôle M', limitée par le cercle de diamètre $M_1'\ M_2'$; soir 2δ la valeur de l'angle $M_1'OM_2'$. Désignons par K_2 la surface de cette calotte.

Désignons par K_3 la surface du reste de la sphère. On a bien $K = K_1 + K_2 + K_3$.

On peut écrire (23) sous la forme abrégée :

$$f(\cos\theta) - S_n'(\cos\theta) = \frac{1}{4\pi}\int_{K_1} + \frac{1}{4\pi}\int_{K_2} + \frac{1}{4\pi}\int_{K_3}.$$

Nous calculons maintenant des majorantes des valeurs absolues des 3 intégrales figurant au 2e membre de (24).

D. — Majoration de $\left|\frac{1}{4\pi}\int_{K_1}\right|$.

On a :

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int_{K_1}\right| \leqslant \max.\ |\ f(\cos\theta) - f(\cos\theta')\ |\ \frac{1}{4\pi}\int_{K_1} |\ \sigma_n'(\cos\gamma)\ |\ d\omega$$

d'où, en vertu de (22) :

$$(25)\qquad \left|\frac{1}{4\pi}\int_{K_1}\right| \leqslant \max.\ |\ f(\cos\theta) - f(\cos\theta')\ | \times C. \qquad (C = c^{te}\ \text{absolue}).$$

Remarquons que θ' définit un point pris sur K_1.

E. — Majoration de $\left|\frac{1}{4\pi}\int_{K_2}\right|$.

On a :

$$(26)\qquad \left|\frac{1}{4\pi}\int_{K_2}\right| \leqslant \frac{1}{4\pi}|f(\cos\theta)| \cdot \int_{K_2} |\sigma_n'(\cos\gamma)| d\omega + \frac{1}{4\pi}\int_{K_2} |f(\cos\theta')| \cdot |\sigma_n'(\cos\gamma) d\omega.$$

De (19) on déduit

$$|\ \sigma_n'(\cos\gamma)\ | < \frac{1}{1-\cos\gamma}\ \{\ |\ U_n(\cos\gamma)\ | + |\ X_{n+1}(\cos\gamma)\ |\ \} \leqslant \frac{2}{1-\cos\gamma};$$

L'angle θ' définissant un point sur K_2, on a :

$$\pi - \delta \leqslant \gamma \leqslant \pi ;$$

$\cos\gamma$ est compris entre -1 et $-\cos\delta$, et l'on a :

$$| \sigma_n'(\cos\gamma) | < 2.$$

L'inégalité (26) devient donc :

$$\left| \frac{1}{4\pi}\int_{K_2} \right| \leqslant \frac{1}{4\pi} \, | f(\cos\theta) | \cdot 2\int_{K_2} d\omega + \frac{1}{4\pi}\cdot 2\int_{K_2} | f(\cos\theta') | \, d\omega,$$

soit :

$$(27) \qquad \left| \frac{1}{4\pi}\int_{K_2} \right| \leqslant | f(\cos\theta) | \cdot | 1 - \cos\delta | + \frac{1}{2\pi}\int_{K_2} | f(\cos\theta') | \, d\omega,$$

car on a :

$$\int_{K_2} d\omega = 2\pi(1 - \cos\delta).$$

F. — Majoration de $\left| \frac{1}{4\pi}\int_{K_3} \right|$.

L'intégration ayant lieu sur K_3 l'angle γ est inférieur à π. Nous rappelons l'inégalité (14) :

$$| \sigma_n'(\cos\gamma) | < \frac{12}{(1 - \cos\gamma)\sqrt{\sin\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} ;$$

$\cos\gamma$ atteint son maximum pour $\gamma = \varepsilon$, valeur qui correspond au minimum de $(1 - \cos\gamma)\sqrt{\sin\gamma}$, on a donc :

$$| \sigma_n'(\cos\gamma) | < \frac{12}{(1 - \cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}} \, \frac{1}{\sqrt{2n+1}} .$$

Or, on peut écrire :

$$\left| \frac{1}{4\pi}\int_{K_3} \right| < |f(\cos\theta) | \times \max. | \sigma_n'(\cos\gamma) | \cdot \frac{1}{4\pi}\int_{K} d\omega$$

$$+ \max. | \sigma_n'(\cos\gamma) | \frac{1}{4\pi}\int_{K} | f(\cos\theta') | \, d\omega,$$

d'où :

$$(28) \qquad \left| \frac{1}{4\pi}\int_{K_3} \right| < \{ | f(\cos\theta) | + G \} \frac{12}{(1 - \cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon}\sqrt{2n+1}} ,$$

où nous avons posé :

$$(29) \qquad G = \frac{1}{4\pi}\int_{K} | f(\cos\theta')| \, d\omega ;$$

G a *une valeur finie bien déterminée puisque* $f(\cos\theta)$ *est sommable.*

G. — Majoration de $|f(\cos\theta) - S_n'(\cos\theta)|$.

En résumé, de (25, (27), (28), on déduit :

$$(30)\qquad |f(\cos\theta) - S_n'(\cos\theta)| < \max_{\theta' \text{ sur } K_1} |f(\cos\theta) - f(\cos\theta')| \cdot C$$
$$+ |f(\cos\theta)|(1 - \cos\delta) + \frac{1}{2\pi}\int_{K_2} |f(\cos\theta')|\, d\omega$$
$$+ \{|f(\cos\theta)| + G\} \frac{12}{(1 - \cos\varepsilon)\sqrt{\sin\varepsilon\sqrt{2n+1}}}.$$

Cette inégalité est valable pour $\theta = \varepsilon$.

Supposons maintenant $0 \leqslant \theta \leqslant \varepsilon$; la zone sphérique K_1 se réduit à une calotte sphérique, et on vérifie que l'inégalité (30) subsiste sans modification.

Il faut remarquer qu'on doit nécessairement supposer qu'on a $\theta \leqslant \alpha - \varepsilon$ car si θ tendait vers α, on ne pourrait plus utiliser l'inégalité (20) (valable seulement pour $0 < \gamma < \pi$) car on pourrait avoir $\gamma = 0$.

L'inégalité (30) donne donc une majoration de $| f(\cos\theta - S'_n(\cos\theta) |$ valable pour $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha - \varepsilon$.

H. — Convergence uniforme de S_n' vers $f(x)$.

Il suffit de démontrer qu'on peut définir ε de façon qu'une quantité positive η étant donnée arbitrairement, on puisse trouver un entier positif N tel que pour tout entier $n > N$ on ait :

$$|f(\cos\theta) - S_n'(\cos\theta)| < \eta \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha - \varepsilon.$$

1° $f(\cos\theta)$ étant uniformément continue sur l'arc AB, on peut trouver ε tel que pour tout couple de points de l'arc AB définis par θ, θ' où l'on a $|\theta - \theta'| < \varepsilon$, on puisse écrire :

$$|f(\cos\theta) - f(\cos\theta')| < \frac{\eta}{3}.$$

2° soit M la borne supérieure sur l'arc AB de la valeur absolue de la fonction continue $f(\cos\theta)$. On a :

$$|f(\cos\theta)|(1 - \cos\delta) \leqslant M(1 - \cos\delta),$$

et choisissant convenablement δ on peut avoir $1 - \cos\delta$ arbitrairement petit.

3° $f(\cos\theta)$ est sommable ; $\int_{K_2} |f(\cos\theta')|\, d\omega$ dépend de la position de M, mais pour M fixe décroît si K_2 décroît, c'est-à-dire si δ décroît ; cette intégrale a pour limite zéro quand $\delta \to 0$.

On peut donc, étant donné une quantité positive η' définir δ

tel que pour toute position de M sur AB telle que : $(0 \leqslant \theta \leqslant \alpha - \varepsilon)$, on puisse avoir :

$$\int_{K_2} |f(\cos \theta')| \, d\omega < \eta'.$$

Nous choisirons donc δ de façon à satisfaire à l'inégalité :

$$|f(\cos \theta)| (1 - \cos \delta) + \frac{1}{2\pi} \int_{K_2} |f(\cos \theta')| \, d\omega < \frac{\eta}{3},$$

Ceci posé, ε étant fixé d'après 1°) ci-dessus on pourra trouver N tel que pour tout $n > N$ on aura :

$$\{ |f(\cos \theta)| + G \} \frac{12}{(1 - \cos \varepsilon) \sqrt{\sin \varepsilon \sqrt{2n+1}}} < \frac{\eta}{3}.$$

Finalement on aura bien déterminé ε et N tels que pour tout $n > N$ on aura en application de (30) :

$$|f(\cos \theta) - S_n'(\cos \theta)| < \eta,$$

ceci valable pour $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha - \varepsilon$.

La convergence uniforme de S_n' $(\cos \theta)$ *vers* $f(\cos \theta)$ *pour* $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha'$ *avec* $\alpha' < \alpha$ *sera bien assurée.*

Remarques. — Si on a $\alpha > \frac{\pi}{2}$, M peut occuper la position correspondant à $\theta = \frac{\pi}{2}$, ou des positions voisines telles que l'antipode M′ et M soit à l'intérieur de la zone engendrée par l'arc M_1M_2. La démonstration développée ci-dessus reste valable sous la réserve que K_2 soit bien telle que définie précédemment mais que pour K_1 on considère la zone engendrée par M_1M_2 diminuée de la partie de K_2 empiétant sur elle.

Une démonstration identique à celle qui vient d'être exposée pourra être construite pour un segment de continuité aboutissant à l'extrémité (-1) de l'intervalle $(-1 + 1)$, c'est-à-dire au point A′ antipode de A.

Le théorème de Gronwall cité au début de ce paragraphe (§ 14) est donc complété comme suit :

Si $f(x)$ *sommable sur* $(-1, +1)$ *est uniformément continue sur le segment* $(a, +1)$, $(-1 < a < +1)$, *la première moyenne arithmétique des développements de* $f(x)$ *en série de Legendre converge uniformément vers* $f(x)$ *sur* $(a' + 1)$ *ou l'on* $a < a' < +1$. *On aurait un résultat identique pour un segment de continuité aboutissant au point* (-1).

En particulier si $f(x)$, *sommable sur* $(-1, +1)$, *est continue pour* $-1 \leqslant x \leqslant +1$, *la première moyenne arithmétique converge uniformément vers* $f(x)$ *sur le segment* $(-1, +1)$ *fermé.*

IV. — DÉRIVABILITÉ DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE LEGENDRE

§ 15. Sur la dérivation du développement d'une fonction continue. Extension. — Soit $f(x)$ ayant sur $(-1, +1)$ une dérivée $f'(x)$; nous ne faisons pas, *à priori*, d'hypothèses sur $f(x)$ et $f'(x)$ autres que celles concernant la sommabilité de ces fonctions sur $(-1, +1)$.

Soit $S_n(x) = \sum_0^n a_k X_k(x)$ le développement d'ordre n de $f(x)$ en série de Legendre.

Les coefficients a_k sont solutions du système linéaire

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - \sum_0^n a_k X_k] X_i dx = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots n. \tag{31}$$

On peut former le développement d'ordre $n-1$, $\sum_0^{n-1} b_k X_k$ de $f'(x)$, où les coefficients b_k sont solutions du système

$$\int_{-1}^{+1} [f'(x) - \sum_0^{n-1} b_k X_k] X_i dx = 0, \qquad i = 0, 1, \cdots n-1. \tag{32}$$

On peut ramener identiquement une forme $\sum_0^{n-1} \beta_k X_k$ donnée à une forme $\sum_1^n \delta_k X_k'$, les coefficients δ_k pouvant être déduits des β_k par résolution d'un système linéaire, ces deux formes étant de même degré. Nous remplaçons dans le système (32) par le système équivalent :

$$\int_{-1}^{+1} [f'(x) - \sum_1^n d_k X_k'] X_i dx = 0, \qquad i = 0,1 \cdots n-1. \tag{33}$$

Nous rappelons les formules (12), (13), (14) du § 2 à savoir :

Pour $p < n+1$, on a : $\int_{-1}^{+1} X_n X_p' dx = 0$

Pour $p = n+1$, on a : $\int_{-1}^{+1} X_n X_p' dx = 2$

Pour $p > n+1$, on a : $\int_{-1}^{+1} X_n X_p' dx = \begin{cases} 2 (p,n, \text{ de parités différentes}) \\ 0 (p,n, \text{ de même parité}) \end{cases}$

Le système (33) s'écrit donc :

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{l} 2d_1 + 2d_3 + 2d_5 + \cdots = \int_{-1}^{+1} X_0 f'(x)dx \\ \qquad 2d_2 + 2d_4 + \cdots = \int_{-1}^{+1} X_1 f'(x)dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

d'où :

$$2d_k = -\int_{-1}^{+1} [X_{k+1} - X_{k-1}]f'(x)dx$$

Supposons maintenant que $f(x)$ soit continue sur $(-1, +1)$; on a alors :

$$2d_k = -\Big[(X_{k+1} - X_{k-1})f(x)\Big]_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} [X'_{k+1} - X'_{k-1}]f(x)dx.$$

La première parenthèse du deuxième membre est nulle. Compte tenu de (8), § 2, on écrit :

$$X'_{k+1} - X'_{k-1} = (2k+1)X_k = \frac{2X_k}{\int_{-1}^{+1} X_k^2 dx}$$

d'où :

$$d_k = \frac{\int_{-1}^{+1} X_k f(x)dx}{\int_{-1}^{+1} X_k^2 dx} = a_k$$

La dérivée de $\sum_0^n a_k X_k$ est donc bien identique au développement direct d'ordre $n-1$ de $f'(x)$ en série de Legendre, à savoir $\sum_1^n d_k X'_k$, c'est-à-dire $\sum_0^{n-1} b_k X_k$.

En conclusion. — Si $f(x)$ est continue sur le segment $(-1, +1)$, la dérivée du développement d'ordre n de $f(x)$ au point $x = x_0$ est identique au développement direct d'ordre $n-1$ de $f'(x)$ en ce point. La convergence de ce développement dérivé est donc dépendante des conditions suivant lesquelles $f'(x)$ est développable en série convergente de polynômes de Legendre.

Par extension, et au point de vue formel, si $f(x), f'(x), \ldots f^{(p)}(x)$ sont continues sur le segment $(-1, +1)$, la dérivée $(p+1)^{ième}$ du développement de $f(x)$ au point $x = x_0$ est identique au développement direct de $f^{(p+1)}(x)$.

CHAPITRE III

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE LEGENDRE DES FONCTIONS A VARIATION BORNÉE

I. — PRINCIPAUX RÉSULTATS CLASSIQUES RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES

§ 16. Sur les théorèmes de Burckhardt, Hobson, Stone et D. Jackson. — Le résultat fondamental relatif à la convergence des développements en série de Legendre des *fonctions à variation bornée*, est donné par Burckhardt (1). L'objet de son mémoire est l'établissement du théorème suivant :

Si $f(x)$ *est à variation bornée sur le segment* $(-1, +1)$, *le développement d'ordre* n, $S_n(x)$ *de* $f(x)$ *en série de Legendre converge en tout point intérieur à* $(-1, +1)$ *vers* $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ *quand* $n \to \infty$. *En particulier sur tout intervalle de continuité intérieur à* $(-1, +1)$, *la convergence de* $S_n(x)$ *vers* $f(x)$ *est uniforme.* A la fin de ce mémoire, Burckhardt indique qu'une légère modification du calcul permettrait de conclure que $S_n(+1)$ et $S_n(-1)$ *convergent respectivement vers* $f(+1)$ *et* $f(-1)$ *quand* $n \to \infty$.

Il ne faut pas présumer que si un segment de continuité aboutit à une extrémité du segment, la convergence sera uniforme au voisinage de cette extrémité. Le calcul de Burckhardt ne permet pas de conduire à ce résultat, qui d'autre part ne peut être obtenu actuellement qu'à la condition de faire des hypothèses complémentaires sur $f(x)$, ou ses dérivées, au voisinage des points -1 ou $+1$.

En 1909, Hobson (2) donna le théorème suivant :

(1) Burckhardt. — *Sitzungsberichte Akad. München, Math. Phys. Kl.* 1909 mém. nº 10, p. 1-13.

(2) Hobson. — *Procedings London.* Math. Soc., Série 2, t. 7, 1909, p. 24-39.

a) *Si $f(x)$ est à variation bornée au voisinage des points* (-1), *ou* $(+1)$, *il n'est pas suffisant que $f(x)$ soit sommable sur le segment* $(-1, +1)$ *pour que le développement* $S_n(x)$ *de $f(x)$ en série de Legendre tende, pour $n \to \infty$, vers $f(-1+0)$ et $f(+1-0)$, lorsqu'on a respectivement $x = -1$, et $x = +1$;*

b) *il est néanmoins suffisant que $f(x)$ soit à variation bornée sur* $(-1, +1)$.

c) *Par ailleurs le résultat est encore vrai si $f(x)$ devient infinie en un nombre fini de points (situés entre -1 et $+1$) avec un ordre d'infinitude inférieur à $\frac{1}{2}$.*

A part la question concernant les infinis de $f(x)$, le résultat *b*) d'Hobson confirme ce que dit Burckhardt.

Nous citons les théorèmes suivants démontrés par Stone [1].

Théoreme A. — Soit

$$f(x) = f(-1) + xf'(-1) + \int_{-1}^{x}\int_{-1}^{x} f''(x)dxdx \quad \text{où} \quad \int_{-1}^{+1} f''^2(x)\,dx \text{ existe ;}$$

$S_n(x)$ *converge uniformément vers $f(x)$ pour* $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

$$\int_{-1}^{+1} f''^2 dx \quad \text{existe,} \qquad \text{donc} \qquad \int_{-1}^{+1} |f''(x)|\, dx \quad \text{existe ;}$$

$f'(x)$ est continue et nécessairement à variation bornée ; $f(x)$ est aussi continue et à variation bornée.

Ce théorème démontre l'uniformité de la convergence jusqu'aux points (-1) et $(+1)$. Pour tout segment de continuité intérieur à $(-1, +1)$, il n'est qu'un cas particulier du théorème de Burckhardt (*loc. cit.*), faisant état d'hypothèses plus restrictives que celles formulées par ce dernier.

Théoreme B. — Soit

$$f(x) = f(-1) + \int_{-1}^{+1} f'(x)dx \qquad \text{où} \qquad \int_{-1}^{+1} f'^2(x)dx \quad \text{existe,}$$

la série $S_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour $-1 < x < +1$; la convergence est uniforme sur tout intervalle intérieur à $(-1, +1)$.

La fonction $f(x)$ est continue et à variation bornée, vu l'hypothèse faite concernant l'intégrabilité de f'^2.

Ce théorème se trouve inclus dans celui de Burckhardt et est plus restrictif, puisque Burckhardt ne fait aucune hypothèse sur l'intégrabilité de f'^2.

[1] Stone. — *Legendre Polyn.* Annals of Math. Princeton Univ., 27, 1925-26, p. 321-329.

Nous démontrerons plus loin que l'hypothèse de l'intégrabilité de f'^2 au voisinage des extrémités du segment $(-1, +1)$ entraîne la convergence uniforme au voisinage de ces points.

Nous mentionnons ci-après deux importants théorèmes de Dunham Jackson [1] qui ont un rapport direct avec les critères relatifs à *la convergence uniforme* ; nous ne donnons pas d'autres résultats de cet auteur qui ont *pour objet principal* l'ordre de grandeur de l'approximation obtenue par les développements en série de Legendre, question qui n'est pas étudiée dans notre mémoire.

Théorème I. — *Si $f(x)$ est à variation bornée pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$, avec une variation totale V, et identiquement nulle pour $\alpha - \eta \leqslant x \leqslant \beta + \eta$ contenu dans $(-1, +1)$, si $S_n(x)$ est le développement limité d'ordre n de $f(x)$ en série de Legendre, on a pour $n \geqslant 1$* et *$\alpha \leqslant x \leqslant \beta$:*

$$| S_n(x) | \leqslant \frac{C_\eta'}{n} V, \qquad \text{où } C_\eta' \text{ dépend seulement de } \eta.$$

Nous donnerons tout à l'heure un résultat analogue dans le cas où $f(x)$ est identiquement nulle pour $a \leqslant x \leqslant +1$.

Théorème II. — *Si $f(x)$ a une dérivée $p^{\text{ième}}$ à variation bornée ; si V est la variation totale de $f(x)$ pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$, et si $S_n(x)$ est le développement limité d'ordre n de $f(x)$ en série de Legendre, on a pour $n \geqslant p$:*

1°
$$| f(x) - S_n(x) | \leqslant \frac{Q_p V}{n^{p-1/2}}$$

pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$, $Q_{p\eta}$ dépendant seulement de p ;

2°
$$| f(x) - S_n(x) | \leqslant \frac{Q_{p\eta} V}{n^p}$$

pour $-1 + \eta \leqslant x \leqslant 1 - \eta$, $Q_{p\eta}$ dépendant seulement de p et η.

Si on a $p = 1$, la convergence uniforme a lieu pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$, (la dérivée première est à variation bornée), mais l'intérêt du théorème réside aussi dans le fait qu'il met en évidence l'ordre de grandeur de l'approximation.

§ **17. Résultats complétant les précédents** [2]. — Nous avons été conduit à établir quelques propositions complémentaires où nous

[1] D. Jackson. — *The Theorie of approximation* (Amer. Math. Soc. Colloq. Public., 11, 1930, p. 71-76.)

[2] Les principaux résultats de ce paragraphe 17 ont fait l'objet de notre communication à l'Académie des sciences parue aux C. R. : tome 199, p. 1363.

faisons intervenir la condition de sommabilité du carré de la dérivée de la fonction, soit sur tout le segment $(-1, +1)$ soit seulement au voisinage des extrémités de ce segment.

THÉORÈME I. — *Soit $f(x)$ à variation bornée sur le segment* $(-1, +1)$ *continue sur* $(1-\varepsilon, +1)$ *où ε est un nombre positif fixe* $(-1 < 1-\varepsilon < +1)$, *et possédant au point $x = +1$ une dérivée à gauche.*

On suppose que sur $(1-\varepsilon, +1)$ *la dérivée $f'(x)$ est de carré sommable. Alors on a :*

$$|S_n(+1) - f(+1)| < \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \frac{\lambda[V\cdot f]_{-1}^{1-\varepsilon}}{2\varepsilon^{1/4}} + \sqrt{\int_{1-\varepsilon}^{1} [f'(x)]^2 dx} \right\}$$

où λ est une constante absolue et où $[V.f]_{-1}^{1-\varepsilon}$ *désigne la variation totale de $f(x)$ sur le segment* $(-1, 1-\varepsilon)$.

Un résultat analogue existe au point $x = -1$.

On a

$$S_n(+1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \sum_{0}^{n} (2k+1) X_k f(x)\, dx\ ;$$

Compte tenu de la formule

$$X'_n + X'_{n+1} = \sum_{0}^{n} (2k+1) X_k, \qquad (6)\ \S 2,$$

il vient :

$$S_n(+1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1-\varepsilon} f(x)[X'_n + X'_{n+1}]dx + \frac{1}{2}\int_{1-\varepsilon}^{+1} f(x)[X'_n + X'_{n+1}]dx.$$

La fonction $f(x)$ étant à variation bornée, on peut intégrer par parties, à savoir :

$$(1) \qquad S_n(+1) = \frac{1}{2}\Big\{ f(x)[X_n(x) + X_{n+1}(x)] \Big\}_{-1}^{1-\varepsilon}$$
$$- \frac{1}{2}\int_{-1}^{1-\varepsilon} [X_n(x) + X_{n+1}(x)]\, d[f(x)] + \frac{1}{2}\Big\{ f(x)[X_n(x) + X_{n+1}(x)] \Big\}_{+1-\varepsilon}^{+1}$$
$$- \frac{1}{2}\int_{1-\varepsilon}^{+1} [X_n(x) + X_{n+1}(x)] d[f(x)],$$

où les intégrales du deuxième membre sont prises *au sens de Stieltjes.*

On sait qu'on a

$$[X_n(x) + X_{n+1}(x)]_{x=-1} = 0 \quad \text{et} \quad [X_n(x) + X_{n+1}(x)]_{x=+1} = 2.$$

On déduit donc de (1) :

$$(2)\qquad |S_n(+1)-f(+1)| \leqslant \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1-\varepsilon}[X_n(x)+X_{n+1}(x)]d[f(x)]\right| + \frac{1}{2}\left|\int_{1-\varepsilon}^{+1}[X_n(x)+X_{n+1}(x)]d[f(x)]\right|;$$

Or on a :

$$\frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1-\varepsilon}[X_n(x)+X_{n+1}(x)]d[f(x)]\right| \leqslant \frac{1}{2}\max.|X_n(x)+X_{n+1}(x)|\cdot[V\cdot f]_{-1}^{1-\varepsilon},$$

et d'après l'inégalité (34), § 9, on écrit :

$$|X_n(x)+X_{n+1}(x)| \leqslant \frac{\lambda_1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{1/4}} \qquad (\lambda_1 = c^{te}\text{ absolue}).$$

Finalement on a donc :

$$(3)\qquad \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1-\varepsilon}[X_n(x)+X_{n+1}(x)]d[f(x)]\right| \leqslant \frac{1}{2}\frac{\lambda_1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{1/4}}[V\cdot f]_{-1}^{1-\varepsilon}.$$

En ce qui concerne la seconde intégrale du deuxième membre de (2), remarquons que $f(x)$ est continue sur le segment $(1-\varepsilon, +1)$ nous pouvons donc écrire $d[f(x)] = f'(x)dx$ et en utilisant l'inégalité de Schwarz former l'inégalité :

$$\frac{1}{2}\left|\int_{1-\varepsilon}^{+1}[X_n(x)+X_{n+1}(x)]f'(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^{1}[X_n+X_{n+1}]^2dx} \times\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^{1}f'^2(x)dx}$$

soit encore :

$$\frac{1}{2}\left|\int_{1-\varepsilon}^{+1}[X_n(x)+X_{n+1}(x)]f'(x)dx\right| < \frac{1}{2}\sqrt{\int_{-1}^{+1}[X_n+X_{n+1}]^2dx} \times\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^{1}f'^2(x)dx}.$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Schwarz donne :

$$\sqrt{\int_{-1}^{+1}[X_n+X_{n+1}]^2dx} \leqslant \left\{\sqrt{\int_{-1}^{+1}X_n^2dx}+\sqrt{\int_{-1}^{+1}X_{n+1}^2dx}\right\} = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\right] < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

On a donc :

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\left|\int_{1-\varepsilon}^{1}[X_n(x)+X_{n+1}(x)]f'(x)dx\right| < \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^{1}f'^2(x)dx}\,;$$

Compte tenu de (3) et (4), l'inégalité (2) s'écrit :

$$(5) \qquad |\,S_n(+1)-f(+1)\,| < \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{\lambda_1[V\cdot f]_{-1}^{+1-\varepsilon}}{2\varepsilon^{1/4}}+\sqrt{\int_{1-\varepsilon}^{+1}f'^2(x)dx}\right\}$$

où λ_1 est une constante absolue.

Théorème II. — *Soit $f(x)$ une fonction à variation bornée sur le segment $(-1, +1)$ et identiquement nulle sur le segment $(\alpha, +1)$ pris sur $(-1, +1)$. Le développement d'ordre n,* $S_n(x)$, de $f(x)$ *en série de Legendre converge uniformément vers zéro pour $\alpha' \leqslant x \leqslant +1$, où l'on a $\alpha < \alpha' < +1$. Pour préciser, on a sur le segment fermé $(\alpha', +1)$*

$$|\,S_n(x)\,| \leqslant \left\{\,|\,f(-1)\,| + [V\cdot f(x)]_{-1}^{\alpha}\right\}\frac{C}{\sqrt{n}(x-\alpha)}$$

où C est une constante absolue et où $[V\cdot f(x)]_{-1}^{\alpha}$ désigne la variation totale de $f(x)$ prise de $x=-1$ à $x=\alpha$.

Nous avons vu [(3) § 13] que l'on a :

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\Phi_n(x,s)f(s)ds$$

où $\Phi_n(x,s)$ désigne la fonction de Christoffel.

Dans le cas actuel on écrit :

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{\alpha}\Phi_n(x,s)f(s)ds.$$

$f(s)$ étant à variation bornée, posons $f(s) = f(-1) + P(s) - N(s)$ où P et N désignent deux fonctions *bornées*, *positives*, *non décroissantes*.

L'application du deuxième théorème de la moyenne donne :

$$(6) \qquad S_n(x) = \frac{1}{2}f(-1)\int_{-1}^{\alpha}\Phi_n(x,s)ds + \frac{1}{2}P(\alpha-0)\int_{\xi_n}^{\alpha}\Phi_n(x,s)ds$$
$$-\frac{1}{2}N(\alpha-0)\int_{\xi'_n}^{\alpha}\Phi_n(x,s)ds$$

où l'on a :

$$-1 < \xi_n < \alpha, \qquad -1 < \xi'_n < \alpha.$$

La fonction $\dfrac{1}{x-s}$, où on considère s sur $(-1, \alpha)$, est positive et croissante puisque x est pris sur $(\alpha, +1)$; on peut donc écrire, toujours en application du deuxième théorème de la moyenne :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{\alpha}\Phi_n(x, s)ds = \frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{x-\alpha}\int_{\zeta_n}^{\alpha}[X_{n+1}(x)X_n(s) - X_n(x)X_{n+1}(s)]ds,$$

où ζ_n est tel que l'on a : $-1 < \zeta_n < \alpha$.

Appliquant la formule (8) § 2, il vient :

$$(7)\qquad \frac{1}{2}\int_{-1}^{\alpha}\Phi_n(x, s)ds = \frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{x-\alpha}\left\{\frac{X_{n+1}(x)}{n+1}[X_{n+1} - X_{n-1}]_{\zeta_n}^{\alpha} - \frac{X_n(x)}{2n+1}[X_{n+2} - X_n]_{\zeta_n}^{\alpha}\right\}.$$

Or Burckhardt (*loc. cit*) et D. Jackson (*loc. cit*) démontrent que pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$ on a :

$$|X_{n+1}(x) - X_{n-1}(x)| \leqslant \frac{C'}{\sqrt{n}} \qquad (\text{où } C' = \text{const}^{\text{te}} \text{ absolue}).$$

De (7) on déduit donc l'inégalité :

$$(8)\quad \left|\frac{1}{2}\int_{-1}^{\alpha}\Phi_n(x,s)ds\right| \leqslant \frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{x-\alpha}\cdot 2C'\left[\frac{|X_{n+1}|}{2n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{|X_n|}{2n+3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right].$$

Comme nous considérons que la valeur x peut atteindre la valeur $(+1)$, nous majorons $|X_j(x)|_{j=0,1\ldots..}$ par le nombre $(+1)$.

On vérifie alors aisément que de (8) on déduit :

$$(9)\quad \left|\frac{1}{2}\int_{-1}^{\alpha}\Phi_n(x, s)ds\right| \leqslant \frac{C'}{x-\alpha}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad (\alpha < x \leqslant +1),\ (n \geqslant 1).$$

Considérons maintenant l'intégrale $\frac{1}{2}\int_{\xi_n}^{\alpha}\Phi_n(x, s)ds$; La fonction $\frac{1}{x-s}$ est positive et croissante ; un calcul analogue au précédent conduit à l'inégalité :

$$(10)\qquad \left|\frac{1}{2}\int_{\xi_n}^{\alpha}\Phi_n(x, s)ds\right| \leqslant \frac{C'}{x-\alpha}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

De (6) on déduit, compte tenu de (9) et (10) :

$$(11)\qquad |S_n(x)| \leqslant \{|f(-1)| + P(\alpha-0) + N(\alpha-0)\}\frac{4C'}{3\sqrt{n}(x-\alpha)},$$

soit encore :

$$(11')\qquad |S_n(x)| \leqslant \{|f(-1)| + [V\cdot f(x)]_{-1}^{\alpha}\}\frac{4C'}{3\sqrt{n}(x-\alpha)},$$

inégalité valable pour $\alpha < x \leqslant +1$. $S_n(x)$ converge donc uniformément vers zéro pour $\alpha' \leqslant x \leqslant +1$, $(\alpha < \alpha' < +1)$.

THÉORÈME III. — *Si $f(x)$ est une fonction à variation bornée, continue sur le segment $(-1, +1)$, et si d'autre part la dérivée première $f'(x)$ est de carré sommable sur ce segment, alors le développement d'ordre n, $S_n(x)$, de $f(x)$ en série de Legendre converge uniformément vers $f(x)$ pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$ quand $n \to \infty$.*

Nous écrivons :

$$\int_x^{+1} \left[f'(x) - \frac{dS_n(x)}{dx} \right] dx = f(+1) - S_n(+1) - [f(x) - S_n(x)],$$

d'où :

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant |f(+1) - S_n(+1)| + \int_{-1}^{+1} \left| f'(x) - \frac{dS_n}{dx} \right| dx,$$

d'où :

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant |f(+1) - S_n(+1)| + \sqrt{2} \sqrt{\int_{-1}^{+1} \left[f'(x) - \frac{dS_n}{dx} \right]^2 dx}.$$

Or d'après le théorème I énoncé et démontré tout à l'heure, $|f(+1) - S_n(+1)|$ tend vers zéro quand $n \to \infty$ au moins comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

D'autre part vu les résultats du § 15, $f(x)$ étant continue, on sait que $\frac{dS_n}{dx}$ est identique au développement direct d'ordre $(n-1)$ de $f'(x)$ en série de Legendre. Donc $f'(x)$ étant de carré sommable, l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \left[f' - \frac{dS_n}{dx} \right]^2 dx$ n'est jamais croissante et a zéro pour limite quand $n \to \infty$. On déduit de ces remarques que $S_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ quand $n \to \infty$ pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$,

THÉORÈME IV. — *Soit $f(x)$ une fonction à variation bornée sur le segment $(-1, +1)$, continue sur $(\alpha, +1)$ pris sur $(-1, +1)$, et telle que $f'(x)$ soit de carré sommable sur $(\alpha', +1)$, $\alpha' \geqslant \alpha$; alors $S_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ pour $\alpha + \eta \leqslant x \leqslant +1$ où l'on a : $0 < \eta < 1 - \alpha$.*

Désignons par A le point défini par $x = -1$, $y = 0$ et par B le point défini par $x = \alpha'$, $y = f(\alpha')$.

Considérons la fonction $f_1(x)$ définie sur $(-1, \alpha')$ par la droite AB et sur $(\alpha', +1)$ par la fonction $f(x)$.

La fonction $f_1(x)$ est continue et sa dérivée $f_1'(x)$ est de carré sommable sur $(-1, +1)$. Posons $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$; pour $\alpha' \leqslant x \leqslant +1$ on a $f_2(x) = 0$.

Désignons par $S_n^{(1)}(x)$ et $S_n^{(2)}(x)$ les développements respectifs d'ordre n de f_1 et f_2 en série de Legendre.

D'après le théorème III, $S_n^{(1)}(x)$ converge uniformément vers $f_1(x)$ pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

D'après le théorème de Burckhardt (*loc. cit.*), $S_n^{(2)}(x)$ converge uniformément vers $f_2(x)$ pour $\alpha < x < +1$.

D'après le théorème II, $S_n^{(2)}(x)$ converge uniformément vers $f_2(x) = 0$ pour $\alpha' < x \leqslant +1$.

On déduit donc de ces considérations que $S_n(x)$ *converge uniformément vers* $f(x)$ *pour* $\alpha + \eta \leqslant x \leqslant +1$, *où l'on a* : $0 < \eta < 1 - \alpha$.

Un raisonnement analogue qu'il est superflu de développer permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Soit* $f(x)$ *une fonction continue et à variation bornée sur le segment* $(-1, +1)$, *et telle que la dérivée* $f'(x)$ *soit de carré sommable sur les segments* $(\alpha, +1)$ *et* $(-1, -\alpha)$, *tels qu'on a* : $0 < \alpha < +1$. *Alors le développement* $S_n(x)$ *converge uniformément vers* $f(x)$ *pour* $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

II. — LIMITATION SUPÉRIEURE EN VALEUR ABSOLUE DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DE LEGENDRE DES FONCTIONS A VARIATION BORNÉE

§ **18. Position de la question.** — Pour les applications dont nous aurons à nous occuper ultérieurement, et *restant dans le domaine des fonctions à variation bornée*, nous sommes amenés à définir des conditions suffisantes telles que l'on puisse fixer un nombre indépendant de n et de x, bornant supérieurement $|S_n(x)|$, lorsque x occupe une position quelconque sur le segment $(-1, +1)$, $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

Les critères de convergence donnés précédemment ne permettent pas d'arriver à ce résultat.

Prenons, par exemple, le calcul de Burckhardt, développé dans son mémoire (*loc. cit*) ; Burckhardt écrit : ($f(x)$ étant à variation bornée, x étant pris entre -1 et $+1$) :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \Phi_n(x,s)f(s)ds = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x-\varepsilon} \Phi_n(x,s)f(s)ds + \frac{1}{2}f(x-0)\int_{x-\varepsilon}^{x} \Phi_n(x,s)ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x} [f(s) - f(x-0)]\Phi_n(x,s)ds + \frac{1}{2}\int_{x}^{x+\varepsilon} [f(s) - f(x+0)]\Phi_n(x,s)ds \\ &+ \frac{1}{2}f(x+0)\int_{x}^{x+\varepsilon} \Phi_n(x,s)ds + \frac{1}{2}\int_{x+\varepsilon}^{+1} \Phi_n(x,s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Pour prendre un cas simple, supposons $f(s)$ seulement *bornée*, *non décroissante*, telle qu'on a $f(x+0)>0$, d'où la condition $f(s)-f(x+0)\geqslant 0$ valable pour $s>x$; soit alors :

$$\frac{1}{2}\int_x^{x+\varepsilon}[f(s)-f(x+0)]\Phi_n(x,s)ds=\frac{1}{2}[f(x+\varepsilon-0)-f(x+0)]\int_{\xi_n}^{x+\varepsilon}\Phi_n(x,s)ds$$

où l'on a : $x<\xi_n<x+\varepsilon$; on peut écrire :

$$\frac{1}{2}\int_{\xi_n}^{x+\varepsilon}\Phi_n(x,s)ds=\frac{n+1}{2}\int_{\xi_n}^{x+\varepsilon}\frac{X_{n+1}(s)X_n(x)-X_n(s)X_{n+1}(x)}{s-x}ds\,;$$

pour s croissant dans l'intervalle d'intégration, la fonction $\dfrac{1}{s-x}$ est décroissante et positive, d'où :

$$\frac{1}{2}\int_{\xi_n}^{x+\varepsilon}\Phi_n(x,s)ds=\frac{n+1}{2}\,\frac{1}{\xi_n-x}\int_{\xi_n}^{\xi'_n}[X_{n+1}(s)X_n(x)-X_n(s)X_{n+1}(x)]ds$$

où l'on a : $\xi_n<\xi_n'<x+\varepsilon$.

En effectuant un calcul analogue à celui développé au § 17 (Th. II), on aboutit au résultat suivant :

$$\left|\frac{1}{2}\int_{\xi_n}^{x+\varepsilon}\Phi_n(x,s)ds\right|\leqslant\frac{3C}{(\xi_n-x)4\sqrt{n}}$$

où C est une constante absolue.

Or ξ_n dépendant de n est compris entre x et $x+\varepsilon$, mais sa valeur ne peut être précisée quand $n\to\infty$. Il est donc impossible de fixer une borne supérieure indépendante de n pour le terme

$$\left|\frac{1}{2}\int_x^{x+\varepsilon}[f(s)-f(x+0)]\Phi_n(x,s)ds\right|$$

quoiqu'il reste fini.

Cet exemple simple suffit à montrer que le calcul de Burckhardt ne permet pas de fixer une borne supérieure (indépendante de n et de x) pour $|S_n(x)|$.

Nous sommes donc conduit à poser et à résoudre les deux problèmes suivants :

Problème n° 1. — *La fonction $f(x)$ étant à variation bornée sur le segment* $(-1,+1)$, *il est possible, sans faire d'autres hypothèses sur $f(x)$ ou sur ses dérivées, de limiter supérieurement, par un nombre fixe indépendant de n, la valeur de $|S_n(x)|$, lorsqu'on a : $\gamma\leqslant x\leqslant\delta$, δ et γ étant deux nombres fixes tels que $-1<\gamma<\delta<+1$.*

Problème n° 2. — *Sous des conditions restrictives concernant l'allure de $f'(x)$ au voisinage des points $x=-1$ et $x=+1$, conditions* *que nous préciserons plus loin, il est possible d'étendre cette limitation au cas où on a* $\gamma = -1$, $\delta = +1$, *c'est-à-dire au cas où l'on a* : $-1 \leqq x \leqq +1$.

Nous nous occupons d'abord du problème n° 1.

On peut poser $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, f_1 et f_2 à variation bornée étant définies comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad \gamma - \eta + 0 \leqslant x \leqslant \delta + \eta - 0, \quad \gamma, \delta, \eta \quad \text{étant fixes} \\ \qquad\qquad \text{et tels que l'on a :} \quad -1 < \gamma - \eta < \gamma < \delta < \delta + \eta < +1. \\ f_1(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad -1 \leqslant x \leqslant \gamma - \eta - 0 \quad \text{et pour} \quad \delta + \eta + 0 \leqslant x \leqslant +1. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_2(x) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad -1 \leqslant x \leqslant \gamma - \eta - 0 \quad \text{et pour} \quad \delta + \eta + 0 \leqslant x \leqslant +1. \\ f_2(x) = f(x) \quad \text{pour} \quad \gamma - \eta + 0 \leqslant x \leqslant \delta + \eta - 0. \end{array}\right.$$

Désignant par $S_n(x)$, $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$, les développements respectifs d'ordre n des fonctions f, f_1, f_2, en série de Legendre, on a bien :

$$S_n(x) = S_n^{(1)}(x) + S_n^{(2)}(x).$$

D'après le théorème de Dunham Jackson mentionné au § 16, (Th. I), on a pour $\gamma \leqslant x \leqslant \delta$:

$$\left|S_n^{(1)}(x)\right| < \frac{C_\eta}{n} (Vf_1)_{-1}^{+1}$$

où C_η est une constante qui ne dépend que de η.

La limitation supérieure de $|S_n(x)|$ pour $\gamma \leqslant x \leqslant \delta$ existera si nous pouvons borner supérieurement $|S_n^{(2)}(x)|$ pour $\gamma \leqslant x \leqslant \delta$, résultat qui existera *à fortiori* s'il est acquis pour $\gamma - \eta \leqslant x \leqslant \delta + \eta$.

En résumé, la question sera résolue si on démontre le résultat d'ordre plus général suivant, (que nous énonçons sans nous en tenir à la lettre des notations employées ci-dessus), à savoir :

Théorème. — *Soit une fonction* $f(x)$, *à variation bornée sur le segment* $(-1, +1)$ *identiquement nulle pour* $-1 \leqslant x \leqslant -\alpha - 0$ *et pour* $\alpha + 0 \leqslant x \leqq +1$, ($\alpha$ *désignant un nombre positif inférieur à* $+1$) ; *il existe un nombre fixe indépendant de n et de x*, (x *étant tel que l'on a* $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$), *bornant supérieurement* $|S_n(x)|$, $S_n(x)$ *étant le développement d'ordre n de* $f(x)$ *en série de Legendre.*

La fonction $f(x)$ étant à variation bornée, on écrit :

$$f(x) = f(-1) + P(x) - N(x) = P(x) - N(x),$$

où P et N désignent deux fonctions bornées, positives, non décroissantes. Le deuxième théorème de la moyenne donne :

$$S_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} \Phi_n(x, s) f(s) ds = \frac{1}{2} P(\alpha - 0) \int_{\xi_n}^{\alpha} \Phi_n(x, s) ds - \frac{1}{2} N(\alpha - 0) \int_{\xi'_n}^{\alpha} \Phi_n(x, s) ds$$

où l'on a :

$$-\alpha < \xi_n < \alpha, \qquad -\alpha < \xi'_n < \alpha.$$

On voit donc qu'en définitive, la limitation supérieure de $|S_n(x)|$ sera assurée sous les conditions qui viennent d'être énoncées si on peut borner supérieurement la valeur de l'expression $\left|\int_a^b \Phi_n(x, s)ds\right|$ où a et b sont deux nombres tels qu'on a :

$$-1 < -\alpha \leqslant a < b \leqslant \alpha < +1$$

et où x définit un point *intérieur* ou *extérieur* au segment (a, b) mais tel qu'on a $-\alpha \leqslant x \leqslant +\alpha$.

Le théorème que nous allons démontrer au § 19 donne donc finalement la solution du problème n° 1.

Ensuite, nous passerons au problème n° 2.

§ 19. Théorème concernant la limitation supérieur de l'expression $\left|\int_a^b \Phi_n(x, s)\, ds\right|$.

THÉORÈME. — *Soit un segment* $(-\alpha, +\alpha)$, (*où* α *est un nombre positif inférieur à* $+1$), *et soit un segment* (a, b) *pris sur* $(-\alpha, +\alpha)$, *tels qu'on a* : $-1 < -\alpha \leqslant a < b \leqslant +\alpha < +1$; *la valeur absolue de* $\int_a^b \Phi_n(x, s)\, ds$, *où* x *occupe une position quelconque sur le segment* $(-\alpha, +\alpha)$, $(-\alpha \leqslant x \leqslant +\alpha)$ *est majorée par un nombre fini, indépendant de* n, x, a et b, *mais dépendant de* α.

Pour obtenir ce résultat qui nous appartient nous avions tout d'abord décomposé la fonction Φ_n en une succession de termes d'une telle forme que nous avions pu parvenir à majorer l'Intégrale ; cette méthode conduisait à des calculs très laborieux. M. P. Flamant, professeur à l'université de Strasbourg, a bien voulu nous indiquer une démonstration plus simple que nous substituons à la nôtre ; la différence essentielle provient de ce que M. Flamant opère directement sur la primitive tandis que nous nous intéressions tout d'abord à la fonction à intégrer.

On raisonne d'abord sur une intégrale indéfinie, obtenue par le procédé suivant :
d'après la formule de Christoffel (8), § 2 —, on a :

$$\int (2n + 1)X_n(s)ds = X_{n+1}(s) - X_{n-1}(s).$$

Or d'après la formule (3), § 1, on a :

$$\Phi_n(x, s) = X_0(x)X_0(s) + 3X_1(x)X_1(s) + \cdots + (2n+1)X_n(x)X_n(s),$$

d'où :

$$\int \Phi_n(x, s)ds = s + X_1(x)[X_2(s) - X_0(s)] + \cdots + X_n(x)[X_{n+1}(s) - X_{n-1}(s)]\,;$$

regroupant les termes et tenant compte de $X_1(x)\ X_0(s) = x$, on a :

$$\int \Phi_n(x, s)ds = s - x + [X_1(x)X_2(s) - X_2(x)X_1(s)] + \cdots$$

$$\cdots + [X_{n-1}(x)X_n(s) - X_n(x)X_{n-1}(s)] + X_n(x)X_{n+1}(s).$$

Sur l'intervalle $(-1, +1)$ et *à fortiori* sur $(-\alpha, +\alpha)$, on a

$$|\ s - x\ | \leqslant 2, \qquad |\ X_n(x)\ | \leqslant 1, \qquad |\ X_{n+1}(s)\ | \leqslant 1$$

d'où une limitation :

$$|\ s - x + X_n(x)X_{n+1}(s)\ | \leqslant 3.$$

Il reste à envisager

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} [X_k(x)X_{k+1}(s) - X_{k+1}(x)X_k(s)].$$

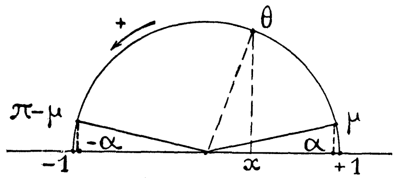

fig. 3

On pose :

$$x = \cos\theta, \qquad s = \cos\varphi,$$
$$\alpha = \cos\mu \qquad -\alpha = \cos(\pi - \mu).$$

On a bien :

$$-\alpha \leqslant x \qquad \text{et} \qquad s \leqslant +\alpha,$$

soit

$$\mu \leqslant \theta, \qquad \varphi \leqslant \pi - \mu.$$

Dans la formule (26), § 6, le dénominateur du dernier terme est supérieur à un nombre fixe $\sin^{3/2}\mu$; on peut donc écrire :

$$X_k(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}\cos\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{k\pi\sin\theta}} + \frac{p(k, \theta)}{k^{3/2}}$$

$$X_{k+1}(\cos\varphi) = \frac{\sqrt{2}\cos\left[\left(k + \frac{3}{2}\right)\varphi - \frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{(k+1)\pi\sin\varphi}} + \frac{p(k+1, \varphi)}{(k+1)^{3/2}}$$

où on a :

$$\left.\begin{matrix} |\ p(k, \theta)\ | \\ |\ p(k+1, \varphi)\ | \end{matrix}\right\} \leqslant \mathrm{P} \qquad \text{P étant un nombre fixe.}$$

Il en résulte que l'on écrit :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &X_k(\cos\theta)X_{k+1}(\cos\varphi)=\frac{2\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(k+\frac{3}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]}{\pi\sqrt{k(k+1)\sin\theta\sin\varphi}}+\\ &+\frac{\sqrt{2}\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{k\pi\sin\theta}}\cdot\frac{p(k+1,\varphi)}{(k+1)^{3/2}}+\frac{\sqrt{2}\cos\left[\left(k+\frac{3}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{(k+1)\pi\sin\varphi}}\frac{p(k,\theta)}{k^{3/2}}+\\ &+\frac{p(k,\theta)\,p(k+1,\varphi)}{k^{3/2}(k+1)^{3/2}}. \end{aligned}\right.$$

En appelant $T_{k,\,k+1}$ le groupement des trois derniers termes du membre de droite de (12), on a :

$$|T_{k,k+1}|\leqslant\frac{\sqrt{2}\,P}{\sqrt{\pi\sin\mu}\;k^{1/2}(k+1)^{3/2}}+\frac{\sqrt{2}\,P}{\sqrt{\pi\sin\mu}\;k^{3/2}(k+1)^{1/2}}+\frac{P^2}{k^{3/2}(k+1)^{3/2}};$$

Dans $X_k(\cos\theta)\,X_{k+1}(\cos\varphi)-X_{k+1}(\cos\theta)\,X_k(\cos\varphi)$, on aura $T_{1,\,k+1}-T_{k+1,\,k}$ qui admettra une limitation double. Si on fait varier k, ces termes donnent naissance à des séries convergentes ; en prenant la somme de toute la série on aura une limitation valable quelle que soit la valeur de n.

Il ne reste à envisager que le premier terme du deuxième membre de (12).

Pour son numérateur on écrit :

$$\begin{aligned} &2\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}\right]\cos\left[\left(k+\frac{3}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{4}\right]=\\ &=\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(k+\frac{3}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{2}\right]+\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta-\left(k+\frac{3}{2}\right)\varphi\right]=\\ &=\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(k+\frac{3}{2}\right)\varphi\right]+\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta-\left(k+\frac{3}{2}\right)\varphi\right]. \end{aligned}$$

Groupons avec le terme analogue provenant de

$$-X_{k+1}(\cos\theta)X_k(\cos\varphi),$$

on aura provenant de ce second terme :

$$-\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi+\left(k+\frac{3}{2}\right)\theta\right]-\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi-\left(k+\frac{3}{2}\right)\theta\right],$$

la somme s'écrit :

$$2\cos(k+1)(\varphi+\theta)\sin\frac{\varphi-\theta}{2}-2\sin(k+1)(\varphi-\theta)\sin\frac{\varphi+\theta}{2}.$$

La partie restant à considérer et provenant de

$$X_k(\cos\theta)X_{k+1}(\cos\varphi)-X_{k+1}(\cos\theta)X_k(\cos\varphi)$$

est donc :

$$\frac{2\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}{\pi\sqrt{\sin\theta\sin\varphi}}\cdot\frac{\cos(k+1)(\varphi+\theta)}{\sqrt{k(k+1)}}-\frac{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}}{\pi\sqrt{\sin\theta\sin\varphi}}.$$

On a dans chaque partie un premier facteur commun à tous les termes analogues quel que soit k ; il multipliera une somme de termes *sin* ou *cos* dont les angles croissent en progression arithmétique, et ces termes sont affectés de coefficients décroissants.

Il résulte du calcul classique que l'on a :

$$\left.\begin{array}{l}|\cos pr+\cos(p+1)r+\cdots+\cos nr|\\ |\sin pr+\sin(p+1)r+\cdots+\sin nr|\end{array}\right\}\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{r}{2}\right|};$$

si $u_1,\ldots u_n,\ldots$ est une suite de nombres positifs décroissants, le lemme d'Abel donne :

$$\left.\begin{array}{l}|u_p\cos pr+u_{p+1}\cos(p+1)r+\cdots+u_n\cos nr|\\ |u_p\sin pr+u_{p+1}\sin(p+1)r+\cdots+u_u\sin nr|\end{array}\right\}\leqslant\frac{u_p}{\left|\sin\frac{r}{2}\right|}.$$

Pour la somme de *cos* on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\cos(k+1)(\varphi+\theta)}{\sqrt{k(k+1)}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}\left|\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\right|};$$

comme on a :

$$\mu\leqslant\theta,\qquad\varphi\leqslant\pi-\mu,\qquad\text{d'où}\qquad\mu\leqslant\frac{\varphi+\theta}{2}\leqslant\pi-\mu,$$

on peut écrire :

$$\left|\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\right|=\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\geqslant\sin\mu,$$

donc :

$$\left|\frac{2\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}{\pi\sqrt{\sin\theta\sin\varphi}}\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\cos(k+1)(\varphi+\theta)}{\sqrt{k(k+1)}}\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\pi\sin^2\mu}.$$

Pour la somme de sinus, il faut éviter $\sin\frac{\varphi-\theta}{2}$ au dénominateur.

On a $|\varphi-\theta|\leqslant\pi-2\mu$.

Soit le cas où : $\varphi-\theta>0,\quad 0<\varphi-\theta\leqslant\pi-2\mu$.

Soit p la partie entière de $\frac{\pi}{\varphi-\theta}$, on écrit $p\leqslant\frac{\pi}{\varphi-\theta}<p+1$;

D'après l'inégalité $0<\varphi-\theta\leqslant\pi-2\mu$, on a : $p\geqslant 1$.

On partage la somme en 2 parties : $\sum\limits_{k=1}^{k=p-1}$ et $\sum\limits_{k=p}^{k=n-1}$.

Pour la deuxième, il vient :

$$\left|\sum_{k=p}^{k=n-1} \frac{\sin (k+1)(\varphi-\theta)}{\sqrt{k(k+1)}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{p(p+1)} \sin \frac{\varphi-\theta}{2}}$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{p}} \frac{1}{(p+1) \frac{\varphi-\theta}{2}} \cdot \frac{\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin \frac{\varphi-\theta}{2}} ;$$

on majore chaque facteur en tenant compte des résultats suivants : on a :

$1+\frac{1}{p} \leqslant 2$; $(p+1)(\varphi-\theta)>\pi$; la fonction $\frac{x}{\sin x}$ est croissante dans le premier quadrant d'où :

$$\frac{\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin \frac{\varphi-\theta}{2}} \leqslant \frac{\frac{\pi}{2}-\mu}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)}=\frac{\frac{\pi}{2}-\mu}{\cos \mu} ;$$

on peut donc écrire :

$$\left|\sum_{k=p}^{k=n-1} \frac{\sin (k+1)(\varphi-\theta)}{\sqrt{k(k+1)}}\right| \leqslant \sqrt{2} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}-\mu}{\cos \mu}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\frac{2 \mu}{\pi}\right)}{\cos \mu} .$$

Il reste à considérer le commencement de la somme (qui d'ailleurs ne contient aucun terme lorsque $p=1$).

On écrira :

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{\sin (k+1)(\varphi-\theta)}{\sqrt{k(k+1)}}=\sum_{k=1}^{k=p-1} \sqrt{1+\frac{1}{k}} \cdot \frac{\sin (k+1)(\varphi-\theta)}{k+1} .$$

Le plus grand arc est $p(\varphi-\theta) \leqslant \pi$; donc tous les sinus et par suite tous les termes sont positifs. On augmentera donc la somme en augmentant le coefficient de tête, d'où :

$$(13) \quad \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{\sin (k+1)(\varphi-\theta)}{\sqrt{k(k+1)}} \leqslant \sqrt{2}(\varphi-\theta) \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{\sin (k+1)(\varphi-\theta)}{(k+1)(\varphi-\theta)} .$$

La somme qui intervient est la somme des valeurs de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ pour des valeurs de x en progression arithmétique, $2(\varphi-\theta)$, $3(\varphi-\theta)$, etc... multipliées par la raison de cette progression. On voit donc immédiatement qu'on a :

$$(\varphi - \theta) \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{\sin (k+1)(\varphi-\theta)}{(k+1)(\varphi-\theta)} < \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx,$$

et cette dernière intégrale a une valeur bien déterminée.

La somme du premier membre de (13) est donc inférieure à

$$\sqrt{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx.$$

Dans le cas où on a $\varphi = \theta$, tous les sinus étant nuls, l'inégalité subsiste évidemment. Quant au cas où on a $\varphi - \theta < 0$, il se ramène au premier cas par changement de signe de tous les termes, ce qui n'altère pas la valeur absolue.

En résumé, lorsqu'on se donne α ou μ, la fonction primitive considérée $\int \Phi_n(x, s)\, ds$, admet en valeur absolue une borne supérieure dépendant de μ ou α seulement.

L'Intégrale $\int_a^b \Phi_n(x, s)\, ds$ qui est la différence des valeurs de cette fonction primitive pour $s = b$ et $s = a$ ne peut pas dépasser le double de la quantité précédente. Le théorème est donc démontré.

§ **20. Sur la question posée par le problème n° 2 du § 18.** — Nous venons de démontrer que si une fonction $f(x)$ est à variation bornée pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$, son développement d'ordre n, $S_n(x)$ en série de Legendre est pour $\gamma \leqslant x \leqslant \delta$, ($\gamma$ et δ étant deux nombre fixes tels que $-1 < \gamma < \delta < +1$), borné supérieurement en valeur absolue par une constante indépendante de n ; toutefois cette constante dépend des nombres γ, δ. (Cette propriété faisait l'objet du problème n° 1).

Nous supposons maintenant que, α étant un nombre positif fixe inférieur à 1, *la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ est de carré sommable sur les segments* $(-1, -\alpha)$ et $(+\alpha, +1)$.

Nous disons que, sous cette restriction, le développement d'ordre n, $S_n(x)$ en série de Legendre est borné supérieurement en valeur absolue pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$ *par une constante indépendante de n ; cette constante dépend cependant de α.*

Nous en arrivons ainsi à la question posée par le problème n° 2.

Décomposons $f(x)$ en une somme de deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ définies comme suit :

appelons A le point : $x = -\alpha$, $y = f(-\alpha - 0)$,
appelons B le point : $x = +\alpha$, $y = f(+\alpha + 0)$;

soit

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x) \text{ pour } -1 \leqslant x \leqslant -\alpha - 0 \text{ et pour } \alpha + 0 \leqslant x \leqslant +1. \\ f_1(x) \text{ défini par la droite AB pour } -\alpha + 0 \leqslant x \leqslant +\alpha - 0. \end{cases}$$

$$f_2(x) \equiv 0 \text{ pour } -1 \leqslant x \leqslant -\alpha - 0 \text{ et pour } \alpha + 0 \leqslant x \leqslant +1.$$
$$f_2(x) = f(x) - f_1(x) \text{ pour } -\alpha + 0 \leqslant x \leqslant \alpha - 0.$$

La dérivée $f'(x)$ étant par hypothèse de carré sommable sur $(-1, -\alpha)$ et $(\alpha, +1)$, $f(x)$ est continue et à variation bornée sur ces segments ; $f_1(x)$ est donc continue et à variation bornée pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$. On voit en outre que $f_1'(x)$ est de carré sommable sur le segment $(-1, +1)$.

Soient S_n, $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ les développements respectifs d'ordre n en série de Legendre des fonctions f, f_1, f_2.

On a bien :

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad \text{et :} \qquad S_n(x) = S_n^{(1)}(x) + S_n^{(2)}(x).$$

Majorons $| S_n^{(1)}(x) |$ pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

En vertu du Théorème III du § 17, on a :

$$|f_1(x) - S_n^{(1)}(x)| \leqslant |f_1(+1) - S_n^{(1)}(+1)| + \sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{+1}\left[f_1' - \frac{dS_n^{(1)}}{dx}\right]^2 dx}\,;$$

comme $\dfrac{dS_n^{(1)}}{dx}$ est identique au développement direct d'ordre $n - 1$ de $f'_1(x)$ en série de Legendre on a :

$$\int_{-1}^{+1}\left[f_1' - \frac{dS_n^{(1)}}{dx}\right]^2 dx \leqslant \int_{-1}^{+1} [f_1'(x)]^2\, dx\,;$$

on peut donc écrire :

$$| S_n^{(1)}(x) | \leqslant \max | f_1(x) | + | f_1(+1) - S_n^{(1)}(+1) | + \sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{+1} [f_1'(x)]^2 dx}.$$

La fonction $f_1(x)$ étant continue sur $(-1, +1)$, on peut facilement exprimer une limitation supérieure de $| f_1(+1) - S_n^{(1)}(+1) |$, en effet :

on a vu au début de la démonstration du théorème I du § 17 qu'on a :

$$S_n^{(1)}(+1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f_1(x)[X_n' + X_{n+1}']\, dx,$$

en intégrant par parties, il vient :

$$S_n^{(1)}(+1) = f_1(+1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(X_n + X_{n+1})f_1'(x)dx;$$

comme on sait qu'on a : $\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}$, l'application de l'inégalité de Schwarz conduit à l'inégalité :

$$| S_n^{(1)}(+1) - f_1(+1) | < \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{\int_{-1}^{+1}[f_1'(x)]^2 dx}$$

où a est une constante absolue.

Finalement on a : pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$:

$$| S_n^{(1)}(x) | \leqslant \max | f_1(x) | + a'\sqrt{\int_{-1}^{+1}[f_1'(x)]^2 dx}$$

où a' est une constante absolue ; on a ainsi la majoration cherchée pour $| S_n^{(1)}(x) |$.

Majorons maintenant $| S_n^{(2)}(x) |$ pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

Nous avons vu que $f_2(x)$ à variation bornée sur $(-1, +1)$ est nulle pour $-1 \leqslant x \leqslant -\alpha - 0$ et $\alpha + 0 \leqslant x \leqslant +1$.

Considérons les intervalles $(-1, -\alpha')$ et $(\alpha', +1)$ tels qu'on a :

$$-1 < -\alpha' < -\alpha < \alpha < \alpha' < +1.$$

D'après le théorème II du § 17, on sait que $S_n^{(2)}(x)$ converge uniformément vers zéro sur les segments $(-1, -\alpha')$ et $(\alpha', +1)$; on a pour $\alpha' \leqslant x \leqslant +1$:

$$| S_n^{(2)}(x) | \leqslant [Vf_2]_{-1}^{+1} \frac{C}{\sqrt{n}(x-\alpha)} \qquad \text{où } C = \text{const. absolue,}$$

et pour $-1 \leqslant x \leqslant -\alpha'$ on a un résultat analogue.

Quant à la limitation supérieure de $| S_n^{(2)}(x) |$ pour $-\alpha' \leqslant x \leqslant \alpha'$ nous avons vu au paragraphe (18), en examinant le problème n° 1, qu'elle est assurée par un nombre indépendant de n et de x (mais dépendant de α'). (Voir le théorème donné à la fin du § 18).

Nous avons donc ainsi défini une majoration de $S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$ comme nous nous l'étions proposé.

§ 21. Extension des résultats précédents à des familles de fonctions à variation totale également bornée. — Soit $F(x, \mu)$ une fonction de x définie pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$ et d'un paramètre μ susceptible de varier de façon continue entre $\mu = -1$ et $\mu = +1$.

Nous avons ainsi une famille de fonctions qui par hypothèses répond aux conditions suivantes :

a) Il existe :

1° Un nombre positif fixe M_1, tel qu'on a :

$$|\, F(x, \mu)\, | \leqslant M_1, \qquad (-1 \leqslant x \leqslant +1) ;$$

2° Un nombre positif fixe M_2, tel qu'on a :

$$[V \cdot F(x, \mu)]_{-1}^{+1} \leqslant M_2 ;$$

On définit ainsi une famille de fonctions à un paramètre μ qui est *également bornée*, et à *variation totale également bornée.*

b) En outre on suppose que pour toute valeur μ_0 du paramètre μ, il existe deux nombres fixes a et b, indépendants de μ, tels qu'on a $-1 < a < b < +1$, définissant deux segments $(-1, a)$ et $(b, +1)$ sur lesquels F'_x existe et est de carré sommable, et tels qu'on a :

$$\int_{-1}^{a} F'^2_x(x, \mu_0)dx \leqslant A$$

$$\int_{b}^{+1} F'^2_x(x, \mu_0)dx \leqslant B,$$

A et B étant deux nombres fixes indépendants de μ

D'après ce qui a été exposé précédemment pour démontrer l'existence d'une limitation supérieure de $|\, S_n(x)\, |$, on voit que les résultats s'étendront d'eux-mêmes à une famille de fonctions $F(x, \mu)$, lorsque cette famille répondra aux hypothèses *b*) formulées ci-dessus ; on aura alors dans ces conditions

$$|\, S_n^{(\mu)}(x)\, | = \left| \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \Phi_n(x, s) F(s, \mu) ds \right| < H$$

H étant un nombre fini, indépendant de μ, de x, de n mais dépendant de α.

Ces résultats sont naturellement valables pour une fonction de deux variables x et y, à savoir $F(x, y)$, définie sur le carré $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$, $(-1 \leqslant y \leqslant +1)$, lorsqu'on envisage le développement en série de Legendre par rapport à l'une des variables, l'autre étant considérée comme un paramètre.

CHAPITRE IV

SUR LA CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE

CORRÉLATION EXISTANT ENTRE LA CONVERGENCE EN MOYENNE QUADRATIQUE ET LA CONVERGENCE UNIFORME

§ **22. Théorèmes généraux** (¹). — Etant donné une suite de fonctions répondant à des conditions particulières qui seront précisées, et qui sur un segment fini donné, converge en moyenne quadratique vers une fonction $f(x)$ définie sur ce segment, nous exposons ci-après quelques résultats simples sur la corrélation qui existe entre la rapidité de décroissance de l'écart quadratique moyen et le fait que sous certaines conditions, cette suite converge uniformément vers $f(x)$ sur tout ou partie du segment.

Théorème I. — *Soit sur un segment* (a, b) : 1° *une fonction* $f(x)$ *de carré sommable* (L) (*c. a. d. au sens de Lebesgue*) ; 2° *un système complet de fonctions continues* $\varphi_n(x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots..)$ *orthonormées* ; 3° une *suite de fonctions* :

$$\Phi_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i^{(n)} \varphi_i(x), \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

convergente en moyenne quadratique vers la fonction $f(x)$; (*nous désignons par* η_n^2 *l'écart quadratique moyen*).

Si sur un segment (α, β) *tel que* $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, $f(x)$ *est développable en série uniformément convergente de fonctions* $\varphi_n(x)$, *série obtenue selon le procédé de Fourier, si nous désignons par* $M_{(\alpha, \beta)}^{(n)}$ *le maximum sur* (α, β) *de l'expression* $\sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} \varphi_i^2(x)}$, *et si étant donné arbitrairement un nombre positif* ε, *on peut trouver un entier positif* N *tel que pour tout entier* $n > N$ *on ait* : $\eta_n \times M_{(\alpha, \beta)}^{(n)} < \varepsilon$, *alors la suite des fonctions* $\Phi_n(x)$ *converge uniformément vers* $f(x)$ *sur* (α, β).

(¹) Notre communication à l'Académie des Sciences. *C. R.*, t. 199, p. 1181.

Désignons en général par la notation $[F(x)]_n$ le développement d'ordre n d'une fonction $F(x)$ en série de fonctions $\varphi_n(x)$ obtenue suivant le procédé de Fourier.

Posons

$$R_n(x) = f(x) - \Phi_n(x).$$

Comme on a évidemment

$$[\Phi_n(x)]_n = \Phi_n(x),$$

on écrit :

$$[R_n(x)]_n = [f(x)]_n - \Phi_n(x) ;$$

on en déduit l'inégalité suivante :

$$(1) \qquad | f(x) - \Phi_n(x) | \leqslant | [R_n(x)]_n | + | f(x) - [f(x)]_n | ;$$

Or on a :

$$(2) \qquad [R_n(x)]_n = \sum_{i=0}^{i=n} \lambda_i^{(n)} \varphi_i(x),$$

où

$$\lambda_i^{(n)} = \int_a^b [f(x) - \Phi_n(x)] \varphi_i(x) dx.$$

L'égalité (2) conduit alors à l'inégalité :

$$(3) \qquad | [R_n(x)]_n | \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} [\lambda_i^{(n)}]^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} \varphi_i^2(x)}.$$

Comme $f(x)$ est de carré sommable on a nécessairement :

$$(4) \qquad \sum_{i=0}^{i=n} [\lambda_i^{(n)}]^2 \leqslant \int_a^b [f(x) - \Phi_n(x)]^2 dx = \eta_n^2,$$

Compte tenu de (3) et (4), l'inégalité (1) s'écrit :

$$| f(x) - \Phi_n(x) | \leqslant \eta_n \sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} \varphi_i^2(x)} + | f(x) - [f(x)]_n |$$

soit :

$$(5) \qquad | f(x) - \Phi_n(x) | \leqslant \eta_n M_{(\alpha, \beta)}^{(n)} + | f(x) - [f(x)]_n | .$$

Puisque $[f(x)]_n$ converge uniformément vers $f(x)$ par hypothèse, la convergence uniforme de $\Phi_n(x)$ vers $f(x)$ sera assurée, si, étant donné un nombre positif ε arbitraire, on peut trouver un nombre N tel que pour entier $n > N$ on ait :

$$\eta_n M_{(\alpha, \beta)}^{(n)} \leqslant \varepsilon.$$

THÉORÈME II. — *Soit sur un segment* (a, b) : 1°) *un système complet de fonctions continues* $\varphi_n(x)$, $(n = 0, 1, 2.....)$ *orthonormées* ; 2° *une fonction* $f(x)$ *de carré sommable* (L), *développable sur* (α, β) *tel que* $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, *en série uniformément convergente de fonctions* $\varphi_n(x)$, *série obtenue suivant le procédé de Fourier* ; 3° *une suite de fonction* $F_n(x)$ *de carré sommable* (L), *convergente en moyenne quadratique vers* $f(x)$; *soit* η_n^2 *l'écart quadratique moyen* ; *le maximum sur* (α, β) *de l'expression* $\sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} \varphi_i^2(x)}$ *étant désigné par* $M_{(\alpha,\beta)}^{(n)}$ *nous disons que si* ε *étant un nombre positif fixé arbitrairement, on peut trouver un nombre entier positif* N *tel que pour tout entier* $n > N$ *on ait* :

$\eta_n M_{(\alpha,\beta)}^{(n)} < \varepsilon$, *alors, de la suite des fonctions* $F_n(x)$ *on peut déduire une nouvelle suite de Fonctions* $[F_n(x)]_n$, $(n = 0, 1, 2...)$, (où $[F_n(x)]_n$ *désigne le développement d'ordre* n *de* $F_n(x)$ *en série de fonctions* $\varphi_n(x)$ *obtenue suivant le procédé de Fourier*) *et qui converge uniformément vers* $f(x)$ *sur le segment* (α, β).

On a :

$$\eta_n^2 = \int_a^b [f(x) - F_n(x)]^2 dx \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n \to \infty} \eta_n = 0.$$

Posons

$$R_n(x) = f(x) - F_n(x) ;$$

Désignons encore par la notation $[\quad]_n$ le développement en série de fonctions $\varphi_n(x)$ obtenu suivant le procédé de Fourier.

On a :

$$[R_n(x)]_n = [f(x)]_n - [F_n(x)]_n$$

d'où on déduit l'inégalité :

$$| f(x) - [F_n(x)]_n | \leqslant | [R_n(x)]_n | + | f(x) - [f(x)]_n |$$

Reprenant sans modification le raisonnement de la démonstration du théorème I précédent, à partir de l'inégalité (1), on aboutit à l'inégalité :

$$| f(x) - [F_n(x)_n] | \leqslant \eta_n M_{(\alpha,\beta)}^{(n)} + | f(x) - [f(x)]_n |$$

d'où sous les conditions précisées à l'énoncé on conclut à la convergence uniforme de $[F_n(x)]_n$, $(n = 0, 1, 2.....)$ vers $f(x)$ sur le segment (α, β).

Remarque concernant les deux théorèmes précédents.

Supposons que $f(x)$ soit développable en série uniformément convergente de fonctions $\varphi_n(x)$ sur le segment $(a,\ b)$; on a alors à considérer $M^{(n)}_{(a,\ b)}$ et on remarque que l'on peut écrire :

$$1 + n = \int_a^b [\varphi_0^2(x) + \cdots + \varphi_n^2(x)]dx \leqslant (b - a)\left[M^{(n)}_{(a,b)}\right]^2$$

d'où

$$M^{(n)}_{(a,b)} \geqslant \sqrt{\frac{n+1}{b-a}}$$

Dans ce cas les conditions de convergence uniforme stipulées aux Théorèmes I et II ne peuvent être satisfaites que si η_n tend vers zéro plus vite que $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

§ **23. Application du Théorème I au cas où on considère une suite de polynômes convergente en moyenne quadratique vers la fonction** $f(x)$.

Soit une suite de polynômes $Q_n(x)$, (n indiquant le degré), ($n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$) convergente en moyenne quadratique vers la fonction $f(x)$ sur le segment $(-1,\ +1)$; on a donc :

$$\eta_n^2 = \int_{-1}^{+1} [f(x) - Q_n(x)]^2 dx \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n \to \infty} \eta_n = 0.$$

Désignons par $\overline{P_j(x)}$, $j = (0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots)$ les polynômes de Legendre normés, à savoir qu'on a :

$$\overline{P_j(x)} = X_j(x)\sqrt{\frac{2j+1}{2}}.$$

Considérons que ces polynômes tiennent lieu et place des fonctions orthonormées $\varphi_n(x)$ des théorèmes I et II.

Posant

$$R_n(x) = f(x) - Q_n(x),$$

on a bien :

$$[R_n(x)]_n = [f_n(x)]_n - Q_n(x), \qquad \text{car} \qquad [Q_n(x)]_n = Q_n(x),$$

d'où :

$$[R_n(x)]_n = \lambda_0^{(n)}\overline{P_0(x)} + \cdots + \lambda_n^{(n)}\overline{P_n(x)}$$

où

$$\lambda_k^{(n)} = \int_{-1}^{+1} [f(x) - Q_n(x)]\overline{P}_k(x)dx\,;$$

On a donc :

$$|\,[R_n(x)]_n\,| \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{i=n}\left[\lambda_i^{(n)}\right]^2}\sqrt{\sum_{i=0}^{i=n}\left[\overline{P_i(x)}\right]^2},$$

or

$$(\overline{\mathrm{P}}_0(x))^2 + \cdots + (\overline{\mathrm{P}_n(x)})^2 \leqslant \frac{1}{2} + \cdots + \frac{2n+1}{2} = \frac{(n+1)^2}{2}$$

et ceci pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

On en déduit donc :

$$|\,[\mathrm{R}_n(x)]_n\,| \leqslant \eta_n \frac{n+1}{\sqrt{2}}.$$

On peut alors écrire comme précédemment (Th. I) :

$$|\, f(x) - \mathrm{Q}_n(x)\,| \leqslant \eta_n \frac{n+1}{\sqrt{2}} + |\, f(x) - [f(x)]_n\,|$$

d'où le théorème suivant :

Théoreme III. — *Soit sur le segment* $(-1, +1)$ *la fonction* $f(x)$ *de carré sommable* (L), *développable sur ce segment en série uniformément convergente de polynômes de Legendre* ; *soit une suite de polynômes* $\mathrm{Q}_n(x)$, *n indiquant le degré, qui sur* $(-1, +1)$ *converge en moyenne quadratique vers* $f(x)$; *soit* η_n^2 *l'écart quadratique moyen* ;
nous disons que si, étant donné un nombre positif arbitraire ε, *on peut trouver l'entier positif* N *tel que pour tout entier* $n > \mathrm{N}$ *on ait* $n\eta_n < \varepsilon$, *alors la suite des polynômes* $\mathrm{Q}_n(x)$ *converge uniformément vers* $f(x)$ *sur le segment* $(-1, +1)$.

Passons maintenant au cas où $f(x)$ de carré sommable est seulement développable en série uniformément convergente de polynômes de Legendre sur le segment (α, β) tel que $-1 < \alpha < \beta < +1$.

Le calcul relatif au théorème III reste valable sauf en ce qui concerne la majoration de la somme $[\overline{\mathrm{P}_0(x)}]^2 + \cdots + [\overline{\mathrm{P}_n(x)}]^2$; nous avons en effet à considérer que x est seulement intérieur à $(-1, +1)$ puisqu'on a : $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$.

Or on a d'après une formule classique (28) § 7 : $|\,\mathrm{X}_j(x)\,| < \dfrac{h}{\sqrt{j}\sqrt{1-x^2}}$

où h est une constante absolue, et si nous désignons par $1 - \mu^2$ le plus petit des nombres fixes $1 - \alpha^2$, ou $1 - \beta^2$, on peut écrire pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$:

$$|\overline{\mathrm{P}_j(x)}| < \frac{h}{\sqrt{1-\mu^2}} \sqrt{\frac{2j+1}{2j}}.$$

On a donc :

$$[\overline{\mathrm{P}_o(x)}]^2 + \cdots + [\overline{\mathrm{P}_n(x)}]^2 < \frac{1}{2} + \frac{h^2}{1-\mu^2}\left[\frac{1+2}{2} + \cdots + \frac{1+2n}{2n}\right]$$

$$[\overline{\mathrm{P}_o(x)}]^2 + \cdots + [\overline{\mathrm{P}_n(x)}]^2 < \frac{1}{2} + \frac{h^2}{1-\mu^2}\cdot\frac{3}{2}n.$$

On a donc pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$:

$$|[R_n(x)]_n| < \eta_n \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{h^2}{1-\mu^2} \cdot \frac{3n}{2}},$$

d'où :

$$|f(x) - Q_n(x)| < \eta_n \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{h^2}{1-\mu^2} \cdot \frac{3n}{2}} + |f(x) - [f(x)]_n|.$$

De cette inégalité on déduit le théorème suivant :

Théorème IV. — *Soit sur le segment* $(-1, +1)$ *la fonction* $f(x)$ *de carré sommable* (L), *développable en série uniformément convergente de polynômes de Legendre sur le segment* (α, β) $(-1 < \alpha < \beta < +1)$; *soit une suite de polynômes* $Q_n(x)$, *n indiquant le degré, qui sur* $(-1, +1)$ *converge en moyenne quadratique vers* $f(x)$; *soit* η_n^2 *l'écart quadratique moyen.*

Nous disons que si étant donné un nombre positif arbitraire ε *on peut trouver un entier positif* N *tel que pour tout* $n > N$ *on ait* :

$$\eta_n \sqrt{1 + \frac{K}{1-\mu^2} n} < \varepsilon$$

où K *est une constante absolue et où* $1 - \mu^2$ *est le plus petit des nombres fixes* $1 - \alpha^2$, ou $1 - \beta^2$, *alors les polynômes* $Q_n(x)$ *forment une suite uniformément convergente vers* $f(x)$ *sur le segment* (α, β).

§ 24. Application du Théorème II au cas où on développe en série de Legendre d'ordre n les fonctions $F_n(x)$, ($n = 0, 1, \ldots.$) qui constituent la suite convergente en moyenne quadratique. — Au cours des démonstrations des théorèmes III et IV nous avons évalué des majorations de $M^{(n)}_{(\alpha, \beta)}$ lorsque l'on considère comme fonctions $\varphi_n(x)$, les polynômes de Legendre normés.

Nous avons obtenu :

$$M^{(n)}_{(-1,+1)} = \max_{-1 \leqslant x \leqslant +1} \text{de} : \sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} [P_i(x)]^2} = \frac{n+1}{\sqrt{2}}$$

$$M^{(n)}_{(\alpha, \beta)} = \max_{-1 < \alpha \leqslant x \leqslant \beta < +1} \text{de} \rightarrow : \sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} [P_i(x)]^2} < \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{h^2}{1-\mu^2} \frac{3}{2} n},$$

où h est une constante absolue et où $1 - \mu^2$ est le plus petit des nombres $(1 - \alpha^2)$ ou $(1 - \beta^2)$.

Nous pouvons donc déduire immédiatement du théorème II les résultats suivants :

THÉORÈME V. — *Soit sur le segment* $(-1, +1)$ *une suite de fonctions* $F_n(x)$, $(n = 0, 1, \dots)$ *de carré sommable, convergente en moyenne quadratique vers la fonction* $f(x)$ *définie sur ce segment. Désignons par* η_n^2 *l'écart quadratique moyen et par* $[F_n(x)]_n$ *le développement d'ordre* n *de* $F_n(x)$ *en série de polynômes de Legendre.*

— A : *Si* $f(x)$ *est développable en série uniformément convergente de polynômes de Legendre sur le segment* $(-1, +1)$ *et si étant donné arbitrairement un nombre positif* ε *on peut trouver l'entier positif* N *tel que pour tout entier* $n > N$ *on ait* $n\eta_n < \varepsilon$, *alors de la suite* $F_n(x)$ *on peut déduire la nouvelle suite* $[F_n(x)]_n$ *qui converge uniformément vers* $f(x)$ *sur le segment* $(-1, +1)$.

— B : *Si* $f(x)$ *est développable en série uniformément convergente de polynômes de Legendre sur le segment* (α, β) *intérieur à* $(-1, +1)$, $(-1 < \alpha < \beta < +1)$ *et si* ε *étant choisi arbitrairement on peut trouver l'entier positif* N *tel que pour tout entier* $n > N$ *on ait :*

$$\eta_n \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{h^2}{1-\mu^2} \cdot \frac{3n}{2}} < \varepsilon,$$

(*où* h *désigne une constante absolue, et où* $1 - \mu^2$ *désigne le plus petit des nombres* $1 - \alpha^2$ où $1 - \beta^2$), *alors, de la suite* $F_n(x)$ *on peut déduire la nouvelle suite* $[F_n(x)]_n$ *qui converge uniformément vers* $f(x)$ *sur le segment* (α, β).

DEUXIÈME PARTIE

INTÉGRATION APPROCHÉE

CHAPITRE V

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS
INTÉGRATION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM

I. — POSITION DE LA QUESTION. HYPOTHÈSES

§ **25. Position de la question.** — Soit l'équation de Fredholm :

$$(1) \qquad L(y) = y(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, s) y(s) ds = f(x),$$

possédant une solution unique $y(x)$ de carré sommable, condition qui sera satisfaite sous les hypothèses que nous préciserons au § 26.

Le problème est le suivant :

On détermine les $n + 1$ *coefficients* $a_k^{(n)}$, $(k = 0, 1 \ldots n)$ *d'un polynôme* $y_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)} x^k$ *en écrivant que l'intégrale*

$$(2) \qquad \mathfrak{J}_n = \int_{-1}^{+1} [L(y_n) - f(x)]^2 dx,$$

est minima.

On forme ainsi au point de vue formel une suite de polynômes que l'on considère à priori comme une suite approchant la solution $y(x)$.

On cherche à déterminer les conditions de la convergence de la suite $y_n(x)$ *vers la solution* $y(x)$; *tel est le problème.*

A cet effet, nous avons été amenés à comparer le polynôme $y_n(x)$ de degré n ainsi déterminé au développement direct d'ordre n de la solution $y(x)$ en série de polynômes constituant un système orthogonal complet. *Nous avons choisi le système des polynômes de Legendre.* C'est pourquoi nous avons pris comme segment d'intégration le segment $(-1, +1)$.

En ce qui concerne le *calcul formel* de $y_n(x)$, nous indiquons que les $n+1$ coefficients $a_k^{(n)}$ sont solution du système algébrique de $n+1$ équations linéaires à $n+1$ inconnues suivant :

$$(3) \qquad \int_{-1}^{+1}\left[\sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)}\mathrm{L}(x^k) - f(x)\right]\mathrm{L}(x^i)dx = 0, \qquad (i = 0, 1 \cdots n);$$

en effet nous avons bien :

$$\mathrm{L}(y_n) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)}x^k + \lambda\int_{-1}^{+1}\mathrm{K}(x, s)\left(\sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)}s^k\right)ds = \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)}\mathrm{L}(x^k),$$

et l'annulation des dérivées de $\mathfrak{J}_n$ prises par rapport aux coefficients $a_k^{(n)}$ conduit au système (3).

§ **26. Hypothèses.** — L'équation de Fredholm (1) répond par hypothèse aux conditions suivantes :

— 1° Elle a une solution unique, le déterminant $\mathrm{D}(\lambda)$, dénominateur de la résolvante est différent de zéro.

— 2° La fonction $f(x)$ est de carré sommable (L).

— 3° Le noyau $\mathrm{K}(x, s)$ où x et s sont les coordonnées d'un point P du domaine rectangulaire fermé $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$, $(-1 \leqslant s \leqslant +1)$, est défini en chaque point P du domaine

L'ensemble des valeurs $|\mathrm{K}(x, s)| = |\mathrm{K}(\mathrm{P})|$ est supérieurement borné par un nombre fixe.

— 4° Si E désigne l'ensemble rectangulaire ainsi défini, l'intégrale $\int_{\mathrm{E}}\mathrm{K}(\mathrm{P})d\mathrm{P}$ prise au sens de Lebesgue existe.

— 5° Désignant par $[\mathrm{K}(x, s)]_n^x$ le développement d'ordre n de $\mathrm{K}(x, s)$ en série de polynômes de Legendre par rapport à x, la variable s étant considérée comme un paramètre pouvant varier de -1 à $+1$, $(-1 \leqslant s \leqslant +1)$, on suppose que $\mathrm{K}(x, s)$ satisfait à des conditions telles que $|[\mathrm{K}(x, s)]_n^x|$ reste bornée supérieurement par un nombre fixe, indépendant de n, de $x, (-1 \leqslant x \leqslant +1)$, et de s quand s varie de -1 à $+1$, $(-1 \leqslant s \leqslant +1)$.

— 6° On admet des conditions analogues pour le développement $[\mathrm{K}(x, s)]_n^s$, x variant de -1 à $+1$.

En ce qui concerne les hypothèses formulées ci-dessus en 5° on peut préciser un cas particulier où elles sont satisfaites et qui résulte des considérations exposées au § 21 *au sujet des familles de fonctions à variation totale également bornée.*

Nous pouvons par exemple admettre les conditions suffisantes suivantes :

— A. — $K(x, s)$ étant considéré comme définissant une famille de fonctions de x, $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$, où s remplit l'office d'un paramètre s_i variant de façon continue $(-1 \leqslant s_i \leqslant +1)$, la famille de fonctions $K(x, s_i)$ est *à variation totale également bornée.*

Une hypothèse identique est faite pour la famille $K(x_i, s)$, s étant la variable, x_i le paramètre.

— B. — Il existe un nombre positif, fixe, α, $(0 < \alpha < +1)$, tel que sur les segments $(-1, -\alpha)$, $(\alpha, +1)$, les intégrales

$$\int_{-1}^{-\alpha} \left[\frac{\partial K}{\partial x}\right]^2 dx = A_s^2 \quad \text{et} \quad \int_{\alpha}^{+1} \left[\frac{\partial K}{\partial x}\right]^2 dx = B_s^2,$$

existent et que dans leurs ensembles respectifs les nombres A_s^2 et B_s^2 soient bornés supérieurement par des nombres fixes A^2 et B^2 quand s varie continue de -1 à $+1$.

On admet des conditions analogues pour les intégrales

$$\int_{-1}^{-\beta} \left[\frac{\partial K}{\partial s}\right]^2 ds = A_x'^2 \quad \text{et} \quad \int_{\beta}^{+1} \left[\frac{\partial K}{\partial s}\right]^2 ds = B_x'^2,$$

où l'on a $0 < \beta < +1$, les nombres $A_x'^2$ et $B_x'^2$ étant dans leurs ensembles respectifs bornés supérieurement par les nombres fixes A'^2 et B'^2.

§ 27. La solution $y(x)$ est de carré sommable ; majoration de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} y^2(x)\,dx$. — Le calcul que nous développons au cours de ce chapitre implique la sommabilité de $y^2(x)$ sur le segment $(-1, +1)$ les hypothèses du § 26 permettent de l'affirmer et de fixer de façon explicite un nombre majorant $\int_{-1}^{+1} y^2(x)dx$.

En effet :

Soit $\Gamma(x, s, \lambda)$ la résolvante de l'équation (1), on a :

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} \Gamma(x, s, \lambda) f(s) ds$$

Posons

$$\chi(x) = \int_{-1}^{+1} \Gamma(x, s, \lambda) f(s) ds ;$$

nous formons :

$$\int_{-1}^{+1} y^2(x)dx = \int_{-1}^{+1} [f(x) - \lambda\chi(x)]^2 dx$$

d'où en appliquant l'inégalité de Schwarz aux intégrales figurant au développement du second membre de l'égalité ci-dessus, ou bien encore (ce qui revient au même au point de vue du calcul) en majorant la *distance* (¹) des deux fonctions $f(x)$ et $\lambda\,\chi(x)$ on obtient l'inégalité :

$$(4) \qquad \int_{-1}^{+1} y^2(x)dx \leqslant \left\{ \sqrt{\int_{-1}^{+1} f^2(x)dx} + |\lambda| \sqrt{\int_{-1}^{+1} \chi^2(x)\,dx} \right\}^2 .$$

Par hypothèse $\int_{-1}^{+1} f^2(x)dx$ a une valeur finie déterminée puisque $f(x)$ est de carré sommable ; il suffit de prouver qu'il en est de même pour la fonction $\chi(x)$.

Suivant la notation classique, on a :

$$\Gamma(x, s\ \lambda) = \frac{D\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)},$$

donc :

$$(5) \qquad \int_{-1}^{+1} \chi^2(x)\,dx = \frac{1}{[D(\lambda)]^2}\int_{-1}^{+1} dx\left[\int_{-1}^{+1} D\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)f(s)ds\right]^2$$

Nous nous proposons de déterminer un nombre positif fixe H tel que pour $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$ et $(-1 \leqslant s \leqslant +1)$, on ait sous les hypothèses du § 26 :

$$\left|D\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right| \leqslant H$$

Appliquant l'inégalité de Schwarz à l'intégrale en s du second membre de (5) on aura alors

$$(6) \qquad \int_{-1}^{+1} \chi^2(x)\,dx \leqslant \frac{4H^2}{[D(\lambda)]^2}\int_{-1}^{+1} f^2(s)ds$$

La majoration de $\int_{-1}^{+1} y^2(x)dx$ sera donc ainsi donnée de façon explicite.

Nous évaluons le nombre H :

(¹) La distance (f, g) des deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de carré sommable est sur (a, b) : $(f, g) = \sqrt{\dfrac{\int_a^b (f-g)^2dx}{b-a}}$; l'inégalité triangulaire donne (4).

Ainsi qu'il est classique, on a :

$$D\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) = K(x, s) + \lambda\int_{-1}^{+1} K\begin{pmatrix}x, s_1\\ s, s_1\end{pmatrix} ds_1 + \cdots$$
$$+ \frac{\lambda^n}{n!}\int_{-1}^{+1} \cdots \int_{-1}^{+1} K\begin{pmatrix}x, s_1, \cdots s_n\\ s, s_1 \cdots s_n\end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_n + \cdots + \cdots$$

Soit M la borne supérieure de $| K(x, s) |$ sur le carré d'intégration, on a :

$$\left| D\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right| < M \left\{ 1 + \frac{|\lambda|}{1} 2\sqrt{2^2} \cdot M + \cdots + \frac{|\lambda|^n}{n!} 2^n \sqrt{(n+1)^{n+1}} \cdot M^n + \cdots \right\}$$

Posons $h = 2 | \lambda | M$; il vient :

$$\left| D\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right| < M \left(1 + \frac{h}{1}\sqrt{2^2} + \cdots + \frac{h^n}{n!}\sqrt{(n+1)^{n+1}} + \cdots \right),$$

où la série du second membre de cette inégalité est absolument convergente.

Pour $n \geqslant 1$ posons :

$$u_n = \frac{h^n}{n!}\sqrt{(n+1)^{n+1}} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{h}{n+1}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \times \sqrt{n+2}$$

on a :

$$\alpha_n < h\sqrt{e}\,\frac{\sqrt{n+2}}{n+1}, \qquad \text{ainsi que} \qquad \alpha_n > \alpha_{n+p}$$

on peut choisir l'entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$ on ait $\alpha_n < 1$; dans ces conditions la somme $S_N = 1 + u_1 + \dots + u_{N-1}$ a une valeur bien déterminée ; désignons par R_N le reste de la série et par $R_N^{(m)}$ une majorante de R_N. On aura alors :

$$\left| D\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)\right| < M\left(S_N + R_N^{(m)}\right).$$

La valeur de $H = M\,(S_N + R_N^{(m)})$ sera donc déterminée quand on aura évalué $R_N^{(m)}$.

On peut écrire

$$R_N = u_N(1 + \alpha_N + \alpha_N\,\alpha_{N+1} + \cdots) ;$$

et désignant par α' la valeur de l'expression $h\sqrt{e}\,\frac{\sqrt{N+2}}{N+1}$, il vient :

$$R_N < u_N(1 + \alpha' + \alpha'^2 + \cdots)$$

nous avons donc :

$$R_N^{(m)} = u_N\,\frac{1}{1-\alpha'} \tag{7}$$

La valeur de H sera ainsi bien précisée.

II. — INTÉGRATION APPROCHÉE AU MOYEN DE DÉVELOPPEMENTS POLYNOMAUX

§ **28. La suite des intégrales** $\int_{-1}^{+1} [L(y_n) - f(x)]^2 dx$, $(n = 0, 1, ...)$ **qui sont minimées par la solution approchée** y_n **est non croissante et a zéro pour limite quand** $n \to \infty$. — Nous avons vu au § 25 que les coefficients $a_k^{(n)}$ de la solution approchée $y_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)} x^k$ sont obtenus en rendant minima l'intégrale :

$$\mathfrak{I}_n = \int_{-1}^{+1} [L(y_n) - f(x)]^2 dx.$$

Désignons par $\mathfrak{I}_n^{(m)}$ la valeur de $\mathfrak{I}_n$ minimée.

Nous disons que la suite $\mathfrak{I}_n^{(m)}$ $(n = 0, 1......)$ est d'une part, non croissante, c'est-à-dire qu'on a :

$$\mathfrak{I}_n^{(m)} \geqslant \mathfrak{I}_{n+1}^{(m)} \geqslant \cdots$$

et que d'autre part pour n croissant indéfiniment on a : $\lim_{n=\infty} \mathfrak{I}_n^{(m)} = 0$.

En effet, on a vu au § 25 (équation (3)) que le calcul formel des coefficients $a_k^{(n)}$ conduit en posant

$$(8) \qquad R_n(x) = L(y_n) - f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)} L(x^k) - f(x)$$

au système algébrique de $n + 1$ équations linéaires à $n + 1$ inconnues suivant :

$$\int_{-1}^{+1} R_n(x) L(x^i) dx = 0, \qquad (i = 0, 1 \cdots n),$$

et l'on a :

$$\mathfrak{I}_n^{(m)} = \int_{-1}^{+1} R_n^2 dx.$$

Posons $R_{n+1} = R_n - \delta R_{n+1}$; on écrit identifiquement :

$$(9) \qquad \int_{-1}^{+1} R_{n+1}^2 dx + \int_{-1}^{+1} R_{n+1} \delta R_{n+1} dx = \int_{-1}^{+1} R_n R_{n+1} dx ;$$

l'expression $\delta R_{(n+1)}$ est nécessairement de la forme $\sum_{i=0}^{i=n+1} \beta_i L(x^i)$.

Or les coefficients $a_k^{(n+1)}$ de y_{n+1} rendant minima l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} R_{n+1}^2 dx = \mathfrak{I}_{n+1}^{(m)}$$

sont solution du système algébrique :

$$\int_{-1}^{+1} R_{n+1} L(x^i) dx = 0, \qquad (i = 0,1 \cdots, n+1);$$

On a donc nécessairement

$$\int_{-1}^{+1} R_{n+1} \delta R_{n+1} dx = 0,$$

et de (9) on déduit :

$$\int_{-1}^{+1} R_{n+1}^2 dx = \int_{-1}^{+1} R_{n+1} R_n dx;$$

or :

$$\int_{-1}^{+1} (R_{n+1} - R_n)^2 dx = \int_{-1}^{+1} R_{n+1}^2 dx + \int_{-1}^{+1} R_n^2 dx - 2\int_{-1}^{+1} R_n R_{n+1} dx \geqslant 0$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} R_n^2 dx \geqslant \int_{-1}^{+1} R_{n+1}^2 dx.$$

La suite $\mathfrak{I}_n^{(m)}$ est donc non croissante pour n croissant.

Ce résultat acquis, désignons par $Y_n(x)$ le développement d'ordre n de $y(x)$ (de carré sommable par hypothèse) en série de Legendre. Nous savons (§ 10 et § 11) que $Y_n(x)$ converge en moyenne quadratique vers $y(x)$ et minime l'écart quadratique moyen. On a en posant:

$$\int_{-1}^{+1} [Y_n(x) - y(x)]^2 dx = \varepsilon_n^2 :$$

$$\varepsilon_n^2 \geqslant \varepsilon_{n+1}^2 \geqslant \cdots \quad \text{et} \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n^2 = 0.$$

Or on a nécessairement :

$$(10) \qquad \mathfrak{I}_n^{(m)} = \int_{-1}^{+1} [L(y_n) - f(x)]^2 dx \leqslant \int_{-1}^{+1} [L(Y_n) - f(x)]^2 dx$$

et nous aurons démontré que $\mathfrak{I}_n^{(m)}$ tend vers zéro pour $n \to \infty$ quand nous aurons vérifié qu'on a :

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} [L(Y_n) - f(x)]^2 dx = 0.$$

Nous pouvons écrire :

$$\int_{-1}^{+1} [L(Y_n) - f(x)]^2 dx = \int_{-1}^{+1} \left\{ Y_n - y + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x,s) [Y_n(s) - y(s)] ds \right\}^2 dx$$

et majorant comme au § 27, on a :

$$(11) \qquad \int_{-1}^{+1} [L(Y_n) - f(x)]^2 dx \leqslant \left\{ \sqrt{\int_{-1}^{+1} (Y_n - y)^2 dx} \right.$$

$$\left. + \mid \lambda \mid \sqrt{\int_{-1}^{+1} dx \left[\int_{-1}^{+1} K(x,s)\,(Y_n - y) ds \right]^2} \right\}^2$$

Si M désigne la borne supérieure de $\mid K(x, s) \mid$ dans le domaine $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$, $(-1 \leqslant s \leqslant +1)$ où le noyau est défini, l'inégalité de Schwarz permet d'écrire :

$$\left\{ \int_{-1}^{+1} K(x,s)\,[Y_n(s) - y(s)] ds \right\}^2 \leqslant 2M^2 \varepsilon_n^2,$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} dx \left[\int_{-1}^{+1} K(x,s)\,(Y_n(s) - y(s)) ds \right]^2 \leqslant 4M^2 \varepsilon_n^2 ;$$

finalement, compte tenu de (10) et de (11) il vient :

$$(12) \qquad \mathfrak{J}_n^{(m)} = \int_{-1}^{+1} R_n^2 dx \leqslant (\varepsilon_n + 2 \mid \lambda \mid M \varepsilon_n)^2 = \varepsilon_n^2 (1 + 2 \mid \lambda \mid M)^2.$$

Comme $\varepsilon_n \to 0$ pour $n \to \infty$, on a bien $\lim\limits_{n = \infty} \mathfrak{J}_n^{(m)} = 0$ c. q. f. d.

§ **29. La solution approchée** $y_n(x)$ **converge en moyenne quadratique vers** $y(x)$. — On a :

$$L(y) = y(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x,s) y(s) ds = f(x)$$

et

$$L(y_n) = y_n(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x,s) y_n(s) ds = R_n(x) + f(x).$$

De ces deux équations on déduit :

$$(13) \qquad y_n - y + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x,s)\,[y_n(s) - y(s)] ds = R_n(x).$$

De la même façon qu'on a formé l'inégalité (4) de § 27, on écrit :

$$(14) \qquad \int_{-1}^{+1} (y_n - y)^2 dx \leqslant \left\{ \sqrt{\int_{-1}^{+1} R_n^2(x) dx} + \mid \lambda \mid \sqrt{\int_{-1}^{+1} \chi_1^2(x)\, dx} \right\}^2,$$

où

$$\chi_1(x) = \int_{-1}^{+1} \Gamma(x, s, \lambda) R_n(s) ds.$$

De (6) § 27, on déduit :

$$\int_{-1}^{+1} \chi_1^2(x)dx \leqslant \frac{4H^2}{[D(\lambda)]^2}\int_{-1}^{+1} R_n^2(s)ds,$$

où H a bien la valeur précisée au § 27. L'inégalité (14) devient alors :

$$\int_{-1}^{+1} (y_n - y)^2dx \leqslant \int_{-1}^{+1} R_n^2(x)dx\left[1 + |\lambda| \frac{2H}{|D(\lambda)|}\right]^2,$$

soit, compte tenu de (12) :

$$\int_{-1}^{+1} (y_n - y)^2dx \leqslant \varepsilon_n^2(1 + 2|\lambda| M)^2\left[1 + |\lambda| \frac{2H}{|D(\lambda)|}\right]^2. \tag{15}$$

Puisqu'on a $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, $y_n(x)$ converge bien en moyenne quadratique vers $y(x)$, et (15) donne une majoration de l'écart quadratique moyen. *Ce résultat existe simplement si les* 1°, 2°, 3° *et* 4° du § 26 *sont réalisées.*

§ **30. Application des résultats du chapitre IV.** — Posons

$$(1 + 2|\lambda| M)\left[1 + |\lambda| \frac{2H}{|D(\lambda)|}\right]^2 = H';$$

H′ est une constante absolue et nous avons :

$$\int_{-1}^{+1} (y_n - y)^2dx \leqslant \varepsilon_n^2 H'^2.$$

Le théorème III du § 23 (ch. IV) permet dans bien des cas d'espèce d'être assuré de la convergence uniforme de $y_n(x)$ vers $y(x)$ pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$; il suffit que $y(x)$ soit développable en série $Y_n(x)$ de polynômes de Legendre uniformément convergente et que ε_n décroisse vers zéro plus vite que $\frac{1}{n}$.

A titre d'exemple, supposons que $y(x)$ ait une dérivée seconde à variation bornée ; d'après le résultat de Dunham Jackson, (§ 16, Th. II), on aura pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$:

$$|y(x) - Y_n(x)| < \frac{C}{n^{3/2}},$$

où C est une constante absolue, d'où :

$$\int_{-1}^{+1} [y(x) - Y_n(x)]^2dx = \varepsilon_n^2 < \frac{2C^2}{n^3},$$

soit $\varepsilon_n < \frac{C\sqrt{2}}{n^{3/2}}$; $y_n(x)$ converge donc uniformément vers $y(x)$.

Dans les mêmes conditions, on pourra appliquer le théorème IV du § 16 concernant la convergence uniforme sur des segments intérieurs à $(-1, +1)$.

Nous n'insistons pas sur ces applications et donnons au paragraphe suivant une comparaison directe de $y_n(x)$ avec $Y_n(x)$.

§ 31. Comparaison de la solution approchée $y_n(x)$ au développement direct d'ordre n, $Y_n(x)$, de $y(x)$ en série de polynômes de Legendre. — Désignons comme précédemment par la notation $[F]_n$ le développement d'ordre n de la fonction $F(x)$ en série de polynômes de Legendre. Si F dépend de deux variables x, s, désignons en indice supérieur la variable par rapport à laquelle le développement est effectué ; par exemple $[F(x, s)]_n^x$ désigne le développement d'ordre n par rapport à x.

On a :

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} [f(x)]_n &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j=n}(2j+1)X_j(x)\int_{-1}^{+1} f(s)X_j(s)ds \\ [L(x^k)]_n &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j=n}(2j+1)X_j(x)\int_{-1}^{+1} L(s^k)X_j(s)ds \\ [R_n(x)]_n &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j=n}(2j+1)X_j(x)\int_{-1}^{+1} R_n(s)X_j(s)ds, \end{aligned} \right.$$

1° Nous disons que pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$, on a :

$$|[R_n(x)]_n| < \varepsilon_n H_1,$$

où H_1 est une constante absolue et où ε_n a la valeur précisée au § 28.

Par une combinaison linéaire des équations du système

$$\int_{-1}^{+1} R_n(x)L(x^i)dx = 0, \qquad (i = 0, 1, \cdots n) \text{ (xoir § 28)},$$

on a :

$$(17)\quad \int_{-1}^{+1} R_n(x)[X_j(x) + \lambda\int_{-1}^{+1} K(x, s)X_j(s)ds]dx = 0, \qquad (j = 0, 1, \cdots n).$$

Portant $\int_{-1}^{+1} R_nX_jdx$ tirée de (17) dans $[R_n(x)]_n$ de (16), on écrit :

$$[R_n(x)]_n = -\frac{1}{2}X_0(x)\lambda\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} R_n(t)K(t, s)X_0(s)dsdt - \cdots$$

$$\cdots - \frac{2n+1}{2}X_n(x)\lambda\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} R_n(t)K(t, s)X_n(s)dsdt,$$

soit :

$$[R_n(x)]_n = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left\{\sum_{j=0}^{j=n}(2j+1)X_j(x)R_n(t)\cdot\lambda\int_{-1}^{+1} K(t, s)X_j(s)ds\right\}dt,$$

soit encore :

$$(18) \qquad [\mathrm{R}_n(x)]_n = -\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{R}_n(t)[\mathrm{K}(t, x)]_n^x dt.$$

Etant donné les hypothèses admises pour le noyau au § 26, nous savons que $|[\mathrm{K}(t, x)]_n^x|$ est bornée supérieurement par une constante indépendante de x, n, t, donc *absolue* ; soit M' cette constante. L'égalité (18) permet d'écrire :

$$|[\mathrm{R}_n(x)]_n| \leqslant \frac{|\lambda|}{2}\sqrt{\int_{-1}^{+1} \mathrm{R}_n^2(t)dt} \times \sqrt{\int_{-1}^{+1} \{\mathrm{K}(t, x)]_n^x\}^2 dt},$$

valable pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$. On a donc :

$$(19) \qquad |[\mathrm{R}_n(x)]_n| \leqslant |\lambda| \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_n(1 + 2|\lambda|\mathrm{M})\mathrm{M}'.$$

Le développement $[\mathrm{R}_n(x)]_n$ tend donc uniformément vers zéro.

2° Du système (16) on déduit compte tenu de (8) :

$$(20) \qquad [f(x)]_n = [\mathrm{L}(y_n)]_n - [\mathrm{R}_n(x)]_n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)}[\mathrm{L}(x^k)]_n - [\mathrm{R}_n(x)]_n.$$

Or :

$$[f(x)]_n = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j=n}(2j+1)\mathrm{X}_j(x)\int_{-1}^{+1}[y(t) + \lambda\int_{-1}^{+1}\mathrm{K}(t, s)y(s)ds]\mathrm{X}_j(t)dt.$$

soit :

$$(21) \qquad [f(x)]_n = \mathrm{Y}_n(x) + \lambda\int_{-1}^{+1}[\mathrm{K}(x, s)]_n^x y(s)ds.$$

D'autre part

$$[\mathrm{L}(x^k)]_n = x^k + \lambda\int_{-1}^{+1}[\mathrm{K}(x, s)]_n^x s^k ds \;;$$

l'équation (20) peut alors s'écrire :

$$(22) \qquad [f(x)]_n = y_n(x) + \lambda\int_{-1}^{+1}[\mathrm{K}(x, s)]_n^x y_n(s)ds - [\mathrm{R}_n(x)]_n.$$

De (21) et (22) on tire :

$$(23) \qquad y_n(x) - \mathrm{Y}_n(x) + \lambda\int_{-1}^{+1}[\mathrm{K}(x, s)]_n^x[y_n(s) - y(s)] = [\mathrm{R}_n(x)]_n$$

Or on a identiquement :

$$\int_{-1}^{+1}[\mathrm{K}(x,s)]_n^x(y_n - y)ds = \int_{-1}^{+1}\mathrm{K}(x,s)(y_n - \mathrm{Y}_n)ds + \int_{-1}^{+1}\mathrm{K}(x,s)(\mathrm{Y}_n - y)ds +$$
$$+ \int_{-1}^{+1}\{[\mathrm{K}(x, s)]_n^x - \mathrm{K}(x, s)\}(y_n - y)ds \;;$$

compte tenu de cette identité, l'équation (23) devient :

$$(24) \qquad y_n(x) - Y_n(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, s)(y_n(s) - Y_n(s))ds = \varphi_n(x)$$

où l'on a :

$$\varphi_n(x) = [R_n(x)]_n - \lambda \int_{-1}^{+1} K(x,s)(Y_n - y)ds - \lambda \int_{-1}^{+1} \{[K(x,s)]_n^x - K(x,s)\}(y_n - y)ds.$$

On arrive donc à une équation de Fredholm où $(y_n(x) - Y_n(x))$ est la fonction inconnue.

Si $\Gamma(x, s, \lambda)$ est la résolvante de l'équation (24), on a :

$$y_n(x) - Y_n(x) = \varphi_n(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} \Gamma(x, s, \lambda)\varphi_n(s)ds$$

Or nous avons vu au § 27 qu'on a :

$$|\Gamma(x, s, \lambda)| \leqslant \frac{H}{|D(\lambda)|} \qquad \text{où } H = \text{const. absolue ;}$$

si nous désignons par Φ_n le maximum de $|\varphi_n(x)|$ pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$, on a :

$$(25) \qquad |y_n(x) - Y_n(x)| \leqslant \Phi_n\left[1 + \frac{2|\lambda|H}{|D(\lambda)|}\right]$$

ceci valable pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

Nous disons que Φ_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et pour calculer une valeur majorant Φ_n, nous majorons les trois termes qui composent $\varphi_n(x)$.

Pour $[R_n(x)]_n$, on a vu (19) qu'on a :

$$|[R_n(x)]_n| \leqslant |\lambda| \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_n(1 + 2|\lambda|M)M'.$$

D'autre part nous écrivons :

$$\left|\lambda \int_{-1}^{+1} K(x,s)(Y_n - y)ds\right| \leqslant |\lambda| \sqrt{\int_{-1}^{+1} K^2(x,s)ds} \sqrt{\int_{-1}^{+1} (Y_n - y)^2 ds}.$$

soit :

$$\left|\lambda \int_{-1}^{+1} K(x, s)(Y_n - y)ds\right| \leqslant |\lambda| \sqrt{2} M \varepsilon_n.$$

Désignons par M'' la borne supérieure (indépendante de x, n, s) de $|[K(x, s)]_n^x|$ et qui existe par hypothèse ;

compte tenu de la majoration de $\int_{-1}^{+1} (y_n - y)^2 dx$ donnée au paragraphe 29 nous avons :

$$\left|\lambda \int_{-1}^{+1} \{[K(x,s)]_n^x - K(x,s)\}(y_n - y)ds\right| \leqslant |\lambda|(M + M'')\sqrt{2}\varepsilon_n(1 + 2|\lambda|M)\left(1 + |\lambda|\frac{2H}{|D(\lambda)|}\right).$$

Ces trois majorations comportent ε_n en facteur, on a donc :

$$\Phi_n \leqslant \varepsilon_n H'$$

où H′ est une constante absolue dont la valeur vient d'être précisée. On déduit donc de (25) :

$$|\, y_n - Y_n \,| \leqslant \varepsilon_n H' \left(1 + \frac{2|\lambda|H}{|D(\lambda)|}\right) \tag{26}$$

inégalité valable pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

L'expression $(y_n(x) - Y_n(x))$ converge donc uniformément vers zéro pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

§ **32. Conclusion.** — En résumé, étant donné une équation de Fredholm

$$y(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, s) y(s) ds = f(x)$$

ayant une solution unique, telle que le noyau $K(x, s)$ est sommable et borné et que $f(x)$ est de carré sommable *on est assuré que la solution approchée*

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)} x^k$$

obtenue suivant la méthode des moindres carrés converge en moyenne quadratique vers la solution intégrale $y(x)$.

Par ailleurs :

Si les hypothèses complémentaires suivantes sont réalisées, à savoir :

a) le développement $[K(x, s)]_n^x$ du noyau en série de Legendre par rapport à x, reste en valeur absolue borné supérieurement par un nombre fixe, indépendant de n et de x $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$ ainsi que de s quand cette variable est considérée comme un paramètre continu qui varie de -1 à $+1$;

b) même hypothèse pour $[K(x, s)]_n^s$, x étant considéré comme un paramètre ;

alors, l'expression $(y_n(x) - Y_n(x))$, *où* $Y_n(x)$ *désigne le développement direct de* $y(x)$ *en série de Legendre converge uniformément vers zéro, pour* $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

En particulier :

Si le noyau $K(x, s)$ et $f(x)$ remplissent en outre des conditions telles que $y(x)$ soit développable en série de Legendre uniformément convergente sur le segment (α, β) tel qu'on a : $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant +1$, la solution approchée $y_n(x)$ converge uniformément vers $y(x)$ sur le segment (α, β).

CHAPITRE VI

MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS INTÉGRATION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

I. — POSITION DE LA QUESTION. HYPOTHÈSES. QUESTIONS CONNEXES

§ 33. Position de la question. Hypothèses. — Soit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{1}$$

possédant sur le segment $(-1, +1)$, une solution unique $y(x)$, nulle pour $x = \pm 1$.

On se propose de calculer une expression approchée de cette solution $y(x)$, qui soit de la forme

$$y_n = (1 - x^2)\Pi_n(x),$$

$\Pi_n(x)$ étant un polynôme de degré n ; on peut encore écrire :

$$y_n = (1 - x^2) \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)} x^k = \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)} u_k(x)$$

où l'on a : $u_k(x) = (1 - x^2)x^k$.

Les coefficients $a_k^{(n)}$ seront calculés de façon à rendre minima l'intégrale

$$\mathfrak{J}_n = \int_{-1}^{+1} \left[f(x) - (y''_n + py'_n + qy)\right]^2 dx. \tag{2}$$

Nous désignons par $\mathfrak{J}_n^{(m)}$ l'intégrale $\mathfrak{J}_n$ ainsi minimée. Nous aurons alors à examiner comment $y_n(x)$ converge vers $y(x)$; cette question dépendra évidemment des conditions auxquelles les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ devront satisfaire. *Notre hypothèse est la suivante* :

Les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ sont de carré sommable.

§ **34. Formation de l'équation de Fredholm à laquelle satisfait la solution de l'équation** (1). — Posons

$$\mathrm{I}(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p\,dx}, \qquad \mathrm{A}(x) = -\,q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p\,dx}, \qquad \mathrm{F}(x) = f(x)e^{\int_{x_0}^{x} p\,dx};$$

l'équation (1) peut être alors écrite sous la forme :

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{I}(x)y'] = \mathrm{A}(x)y + \mathrm{F}(x) \tag{3}$$

Pour former l'équation de Fredholm à laquelle satisfait la solution de (1), intégrons suivant la méthode habituelle deux fois l'équation (3) ; il vient :

$$y = \int_{-1}^{x} ds \frac{1}{\mathrm{I}(s)} \int_{-1}^{s} \mathrm{A}(t)y(t)dt + \int_{-1}^{x} ds \frac{1}{\mathrm{I}(s)} \int_{-1}^{s} \mathrm{F}(t)dt + \mathrm{C}_0 \int_{-1}^{x} \frac{ds}{\mathrm{I}(s)} + \mathrm{C}_1, \tag{4}$$

où les constantes C_0 et C_1 sont déterminées par les conditions $y(\pm 1) = 0$. Appliquant la formule de Dirichlet aux intégrales doubles de (4), posant :

$$\int_{t}^{x} \frac{ds}{\mathrm{I}(s)} = \Phi(x,t),$$

introduisant la constante λ, *sous réserve que nous avons* $\lambda = 1$, *nous formons l'équation de Fredholm cherchée* :

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^{+1} \mathrm{K}(x,t)\mathrm{A}(t)y(t)dt + \int_{-1}^{+1} \mathrm{K}(x,t)\mathrm{F}(t)dt \tag{5}$$

où nous avons :

$$\begin{cases} \text{pour } t \leqslant x : \quad \mathrm{K}(x,t) = -\dfrac{\Phi(1,x)\cdot\Phi(t,-1)}{\Phi(+1,-1)} \\ \text{pour } t \geqslant x : \quad \mathrm{K}(x,t) = -\dfrac{\Phi(x,-1)\cdot\Phi(1,t)}{\Phi(+1,-1)} \end{cases} \tag{6}$$

La fonction $p(x)$ est de carré sommable par hypothèse, $\int_{x_0}^{x} p\,dx$ est continue, à variation bornée, et $\left|\int_{x_0}^{x} p\,dx\right|$ est bornée sur $(-1, +1)$.

En conséquence la fonction $e^{\int_{x_0}^{x} p\,dx} = \mathrm{I}(x)$ est donc continue, positive, non nulle, et telle que l'on peut déterminer deux nombres fixes h et h', supérieurs à zéro, pour lesquels on a :

$$0 < h \leqslant \mathrm{I}(x) \leqslant h'$$

avec :

$$-1 \leqslant x \leqslant +1.$$

Les fonctions $\mathrm{A}(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ sont, comme $q(x)$ et $f(x)$ dont elles dépendent, respectivement de carré sommable.

Nous pouvons écrire :

$$\Phi(x,t) = \int_t^a \frac{ds}{\mathrm{I}(s)} + \int_a^x \frac{ds}{\mathrm{I}(s)}$$

où a est une constante et chacune des intégrales précédentes est dans les limites de variation de t et de x continue et à variation bornée.

Pour chacune des variables x, t, prise séparément, la fonction $\mathrm{K}(x, t)$ possède ces propriétés.

D'après ce que nous venons de voir, la fonction $\frac{1}{\mathrm{I}(s)}$ est positive, bornée supérieurement ; les fonctions

$$\Phi(1,x) = \int_x^{+1} \frac{ds}{\mathrm{I}(s)} \qquad \text{et} \qquad \Phi(x, -1) = \int_{-1}^x \frac{ds}{\mathrm{I}(s)}$$

sont donc des fonctions de x, positives, bornées et monotones. La première $\Phi(1, x)$ est décroissante, la deuxième $\Phi(x, -1)$ est croissante. Elles sont toutes deux bornées supérieurement par $\Phi(+1, -1)$

Ces considérations précisent donc l'allure de la fonction $\mathrm{K}(x, t)$ définie par les équations (6) et en particulier on remarque que cette fonction continue en x et s, symétrique, s'annule sur les bords du carré d'intégration défini par $x = \pm 1$, $t = \pm 1$.

Posons maintenant :

$$\mathrm{G}(x,t) = \mathrm{K}(x,t) e^{\int_{x_0}^x p dx} ;$$

$\mathrm{G}(x,t)$ est comme $\mathrm{K}(x,t)$ une fonction continue, et l'équation (5) s'écrit alors :

$$(7) \qquad y(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \mathrm{G}(x,t) q(t) y(t) dt = \int_{-1}^{+1} \mathrm{G}(x,t) f(t) dt ;$$

Cette équation ainsi que l'équation (5) possèdent une solution unique, puisqu'elles sont formées en partant de l'équation différentielle (1), qui par hypothèse a une solution unique. On a donc $\mathrm{D}(\lambda)_{\lambda = 1} \neq 0$.

§ **35. Propriétés de la résolvante de l'équation (7) ainsi que des fonctions $y(x)$, $y'(x)$, et $y''(x)$.** — Le noyau $\mathrm{G}(x, t) q(t)$ où $\mathrm{G}(x, t)$ est continue, est discontinu sur des segments de droite parallèles à l'axe des x et qui correspondent aux points de discontinuité de $q(t)$ qui est seulement supposée de carré sommable.

Nous voulons préciser les propriétés de la résolvante de l'équation (7).

A cet effet reprenons, en le modifiant comme il convient, le calcul développé par MM. Heywood et Fréchet [1]. On a :

$$D(\lambda) \neq 0, \qquad D\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \mid \lambda\right) = D(\lambda)G(s,t)q(t) + R(s,t,\lambda),$$

où

$$R(s,t,\lambda) = -\lambda \int_{-1}^{+1} \Delta_1 ds_1 + \cdots \cdots + \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{-1}^{+1} \cdots \int_{-1}^{+1} \Delta_n ds_1 \cdots ds_n + \cdots$$

avec :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & G(s,s_1) & \cdots & G(s,s_n) \\ G(s_1,t) & G(s_1,s_1) & \cdots & G(s_1,s_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G(s_n,t) & G(s_n,s_1) & \cdots & G(s_n,s_n) \end{vmatrix} \times q(t)q(s_1)\cdots q(s_n) \,;$$

Posant :

$$R(s,t,\lambda) = q(t)Q(s,t,\lambda),$$

on conclut suivant le calcul de MM. Heywood et Fréchet au fait que la fonction $\Gamma(s, t, \lambda)$ est continue.

La résolvante $\Gamma(s, t, \lambda)$, à savoir :

$$\Gamma(s,t,\lambda) = \frac{D\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \mid \lambda\right)}{D(\lambda)} = G(s,t)q(t) + \frac{Q(s,t,\lambda)}{D(\lambda)} q(t)$$

n'est donc discontinue que pour les valeurs de t qui correspondent aux discontinuités de $q(t)$ et toute fonction de la forme :

$$\Psi(x) = \int_{-1}^{+1} \Gamma(x, s, \lambda)\varphi(s)ds,$$

où $\varphi(s)$ est sommable, est continue.

On voit en outre que le second membre de (7), à savoir

$$\int_{-1}^{+1} G(x, t)f(t)dt,$$

est une fonction continue de x.

Des considérations qui viennent d'être exposées, il résulte que $y(x)$ solution intégrale de (7) est continue.

Quant à $y'(x)$, on a de (3) :

$$y'(x) = \frac{1}{I(x)} \int_{x_0}^{x} [A(x)y + F(x)]dx + \frac{C_0}{I(x)} \,;$$

$y'(x)$ est donc continue (et à variation bornée, ainsi que $y(x)$) ; par contre, vu les hypothèses faites sur les fonctions p, q, f de l'équation (1) on sait seulement que y'' est de carré sommable.

[1] Heywood et Fréchet. — *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique.* Hermann édit. 1912, chap. II, § 11, p. 54.

En résumé : *$y(x)$ et $y'(x)$ sont continues et à variation bornée ; $y''(x)$ est de carré sommable.*

II. — INTÉGRATION APPROCHÉE

§ 36. L'écart quadratique $\mathfrak{I}_n^{(m)}$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment. — Nous avons vu au § 33 que la solution approchée est de la forme :

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k^{(n)} u_k \qquad \text{où} \qquad u_k = (1 - x^2)x^k ;$$

Les coefficients $a_k^{(n)}$ sont obtenus en écrivant que l'intégrale

$$\mathfrak{I}_n = \int_{-1}^{+1} [f(x) - (y_n'' + py_n' + qy_n)]^2 dx,$$

est minima. Désignons par $\mathfrak{I}_n^{(m)}$ l'écart quadratique $\mathfrak{I}_n$ rendu minimum.

Comme au § 28 on démontrerait qu'on a :

$$\mathfrak{I}_n^{(m)} \geqslant \mathfrak{I}_{n+1}^{(m)} \geqslant \cdot\cdot$$

Nous disons qu'on a : $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{I}_n^{(m)} = 0.$

En effet :

Considérons une suite de polynômes $Z_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \beta_k^{(n)} u_k(x)$, où les $\beta_k^{(n)}$ sont *choisis quelconques*.

Si $y_n(x)$ désigne les polynômes définis ci-dessus et rendant minima $\mathfrak{I}_n$, on a nécessairement :

$$\mathfrak{I}_n^{(m)} = \int_{-1}^{+1} [f(x) - (y_n'' + py_n' + qy_n)]^2 dx \leqslant \int_{-1}^{+1} [f(x) - (Z_n'' + pZ_n' + qZ_n)]^2 dx$$

Pour démontrer qu'on a $\lim\limits_{n \to \infty} \mathfrak{I}_n^{(m)} = 0$, il suffit de prouver qu'on peut former une suite de polynômes $Z_{n \to \infty}(x)$ tels que :

$$(8) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [f(x) - (Z_n'' + pZ_n' + qZ_n)]^2 dx$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [(y'' - Z_n'') + p(y' - Z_n') + q(y - Z_n)]^2 dx = 0 ;$$

En développant le carré de l'élément différentiel de cette dernière intégrale, et en appliquant l'inégalité de Schwarz, on voit de suite que la condition (8) sera réalisée si on a :

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}[y''-Z''_n]^2\,dx=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}p^2(y'-Z'_n)^2\,dx=0,\\ &\qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}q^2(y-Z_n)^2\,dx=0. \end{aligned}\right.$$

Formons Y_r, développement d'ordre r de $y(x)$ en série de Legendre que nous désignons comme d'habitude par la notation $[y]_r$; on a donc $Y_r = [y]_r$. Compte tenu des résultats du § 15, on sait que y et y' étant continues sur le segment $(-1, +1)$ fermé, on a :

$$\frac{dY_r}{dx} = [y']_{r-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2Y_r}{dx^2} = [y'']_{r-2}.$$

En outre, d'après le théorème III du § 17 on sait que y et y' étant continues, à variation bornée, et y'' étant de carré sommable, les développements Y_r et Y'_r convergent uniformément pour $r \to \infty$, respectivement vers y et y' sur le segment $(-1, +1)$ fermé.

Par ailleurs, y'' étant de carré sommable l'intégrale

$$\int_{+1}^{+1}(y''-Y''_r)^2\,dx = \int_{-1}^{+1}[y''-[y'']_{r-2}]^2\,dx$$

est non croissante quand r croît, avec :

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-1}^{+1}[y''-Y''_r]^2\,dx = 0.$$

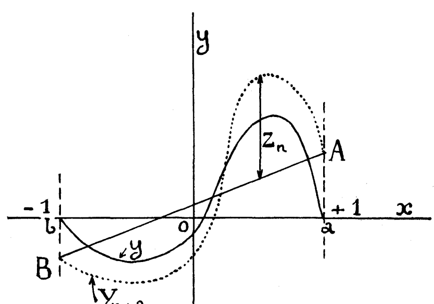

Fig. 4

Les polynômes $Z_n(x)$ ayant leurs coefficients $\beta_k^{(n)}$ indéterminés choisissons ceux-ci de façon à avoir :

$$(10)\qquad Y_{n+2} = Z_n + x\alpha_n + \gamma_n,$$

où

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_n + \gamma_n &= Y_{n+2}(+1) = Aa\\ -\alpha_n + \gamma_n &= Y_{n+2}(-1) = Bb \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{2}(\mathrm{A}a - \mathrm{B}b) \\ \gamma_n = \dfrac{1}{2}(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b) \end{cases}$$

On a $Z_n(\pm 1) = 0$; $Z_n(x)$ est donc bien de la forme $\sum_{k=0}^{k=n} \beta_k^{(n)} x^k(1-x^2)$.

Nous voulons démontrer qu'étant donné arbitrairement trois valeurs positives ε_1, ε_2, ε_3, on peut trouver trois entiers positifs, N_1, N_2, N_3, tels que :

1° *pour tout entier* $n > N_1$ *on ait* $\int_{-1}^{+1} q^2(y - Z_n)^2 dx \leqslant \max |y - Z_n|^2 \int_{-1}^{+1} q^2 dx \leqslant \varepsilon_1^2$

2° » $n > N_2$ » $\int_{-1}^{+1} p^2(y' - Z'_n)^2 dx \leqslant \max |y' - Z'_n|^2 \int_{-1}^{+1} p^2 dx \leqslant \varepsilon_2^2$

3° » $n > N_3$ » $\int_{-1}^{+1} (y'' - Z''_n)^2 dx \leqslant \varepsilon_3^2$.

Comme $\int_{-1}^{+1} p^2 dx$ et $\int_{-1}^{+1} q^2 dx$ sont finies, il suffira de prouver que pour trois nombres positifs, ε'_1, ε'_2, ε_3 choisis arbitrairement, on peut trouver trois entiers positifs N'_1, N'_2, N_3 tels que :

1′ *pour tout entier* $n > N'_1$ *on aura* $|y - Z_n| \leqslant \varepsilon'_1$, $\quad (-1 \leqslant x \leqslant +1)$,

2′ » $n > N'_2$ » $|y' - Z'_n| \leqslant \varepsilon'_2$, $\quad (-1 \leqslant x \leqslant +1)$,

3′ » $n > N_3$ » $\int_{-1}^{+1} (y'' - Z''_n)^2 dx \leqslant \varepsilon_3^2$.

Or de (10) on tire

$$|y - Z_n| \leqslant |y - Y_{n+2}| + |\alpha_n| + |\gamma_n| .$$

Comme Y_{n+2} converge uniformément vers $y(x)$ sur le segment $(-1, +1)$ fermé et qu'on a d'après (1) :

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha_n| \\ |\gamma_n| \end{array}\right\} \leqslant [\,|\mathrm{A}a| + |\mathrm{B}b|\,]\frac{1}{2},$$

il est évident que la condition 1′) est satisfaite.

Considérons maintenant :

$$y' - Z'_n = y' - Y'_{n+2} + \alpha_n = y' - [y']_{n+1} + \alpha_n \,;$$

on a :

$$|y' - Z'_n| \leqslant |y' - [y']_{n+1}| + |\alpha_n| ,$$

et $[y']_{n+1}$ converge, ainsi qu'on le sait, uniformément vers la fonction y' sur le segment $(-1, +1)$ fermé. D'autre part $\alpha_n \to 0$ quand $n \to \infty$; la condition 2') est donc satisfaite.

En ce qui concerne la condition 3), remarquant que

$$Z''_n = Y''_{n+2} = [y'']_n,$$

on voit que y'' étant de carré sommable, on a bien :

$$\int_{-1}^{+1} (y'' - Z''_n)^2 dx \geqslant \int_{-1}^{+1} (y'' - Z''_{n+1})^2 dx \geqslant \cdots$$

avec :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} (y'' - Z''_n)^2 dx = 0.$$

Ainsi nous voyons que les trois intégrales de (9) ont bien zéro pour limite quand $n \to \infty$, d'où en conséquence :

$$\lim_{n \to \infty} \mathfrak{I}_n^{(m)} = 0 \tag{12}$$

Posant

$$f(x) = y''_n + py'_n + qy_n + R_n(x),$$

on voit que $\int_{-1}^{+1} R^2_n(t)dt$ décroît avec $\frac{1}{n}$ et on a finalement

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} R^2_n(t)dt = 0. \tag{13}$$

§ **37. Conditions suivant lesquelles $y_n(x)$, $y_n'(x)$ et $y_n''(x)$ convergent respectivement vers $y(x)$, $y'(x)$ et $y''(x)$.** — 1° Considérons l'équation:

$$y''_n - y'' + p(y'_n - y') + q(y_n - y) = -R_n(x) \; ; \tag{14}$$

$y_n(x) - y(x)$ est solution de l'équation de Fredholm

$$y_n - y + \lambda \int_{-1}^{+1} G(x,t)q(t)[y_n(t) - y(t)]dt = -\int_{-1}^{+1} G(x,t)R_n(t)dt = \psi_n(x), \tag{15}$$

où l'on a $\lambda = 1$; cette équation est la réplique de l'équation (7) du § 34, dont elle a le même noyau, et l'on a bien $D(\lambda)_{\lambda=1} \neq 0$; (15) *a donc une solution unique.*

Désignons par M_1 la borne supérieure de $|G(x, t)|$ pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$, $-1 \leqslant t \leqslant +1$; combinant le 1er théorème de la moyenne avec l'inégalité de Schwarz, on écrit :

$$|\psi_n(x)| \leqslant \left| \int_{-1}^{+1} G(x, t)R_n(t)dt \right| \leqslant M_1\sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{+1} R^2_n(t)dt}, \tag{16}$$

et ceci pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$; donc compte tenu de (13), $\psi_n(x)$ *tend uniformément vers zéro avec* $\frac{1}{n}$ *sur le segment* $(-1, +1)$ *fermé.*

Nous avons vu au § 35 que la résolvante $\Gamma(x, t, \lambda)$ peut être mise sous la forme

$$\Gamma(x, t, \lambda) = G(x, t)q(t) + \frac{Q(x, t, \lambda)}{D(\lambda)} q(t),$$

où $Q(x, t, \lambda)$ est continue, donc bornée et où $q(t)$ est de carré sommable.

La solution de (15), $y_n(x) - y(x)$ est donc donnée par :

$$y_n - y = \psi_n(x) - \lambda \int_{-1}^{+1} \Gamma(x, t, \lambda)\, \psi_n(t)dt,$$

d'où pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &| y_n - y | \leqslant \max_{(-1 \leqslant x \leqslant +1)} \Bigg\{ | \psi_n(x) | \\ &\quad + | \lambda | \sqrt{\int_{-1}^{+1} [\Gamma(x, t, \lambda)]^2 dt} \sqrt{\int_{-1}^{+1} \psi^2{}_n(t)dt} \Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

On voit facilement que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \Gamma^2\, dt$ est majorée pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$ par un nombre fixe ; on en conclut donc, compte tenu de (16) que *la solution approchée* $y_n(x)$ *converge uniformément vers* $y(x)$.

Remarque. — Il est aisé de calculer une borne supérieure (pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$) de $\int_{-1}^{+1} \Gamma^2\, dt$. En effet :

d'après l'expression de $R(s, t, \lambda)$ donnée au § 35, on a pour

$$-1 \leqslant s \leqslant +1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leqslant t \leqslant +1 \,;$$

$$| Q(s, t, \lambda) | = \left| \frac{R(s,t,\lambda)}{q(t)} \right| \leqslant | \lambda | \cdot \left| \int_{-1}^{+1} \frac{\Delta_1}{q(t)} ds_1 \right| +$$

$$\cdots + \frac{| \lambda |^n}{n!} \left| \int_{-1}^{+1} \cdots \int_{-1}^{+1} \frac{\Delta_n}{q(t)} ds_1 \cdots ds_n \right| + \cdots ;$$

Posons :

$$\delta_n = \frac{\Delta_n}{q(t)q(s_1)\cdots q(s_n)} = \begin{vmatrix} 0 & G(s, s_1) & \cdots & G(s, s_n) \\ G(s, t) & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ G(s_n, t) & \cdots & \cdots & G(s_n, s_n) \end{vmatrix}$$

et désignons par $\delta_n^{(m)}$ une valeur majorant $|\delta_n|$, à savoir :

$$\delta_n^{(m)} = \sqrt{(n+1)^{(n+1)} \cdot M_1^{(n+1)}} \qquad \text{(théorème de M. Hadamard).}$$

On a alors :

$$|Q(s, t, \lambda)| \leqslant |\lambda| \cdot |\delta_1^{(m)}| \int_{-1}^{+1} |q(s_1)| \, ds_1 + \cdots$$

$$+ \frac{|\lambda|^n}{n!} |\delta_n^{(m)}| \cdot \int_{-1}^{+1} |q(s_1)| \cdots |q(s_n)| \, ds_1 \cdots ds_n + \cdots + \cdots,$$

ou bien, écrivant

$$\int_{-1}^{+1} |q(s)| \, ds \leqslant \sqrt{2} \sqrt{\int_{-1}^{+1} [q(s)]^2 ds} = \bar{q}\sqrt{2},$$

$$|Q(s,t,\lambda)| \leqslant |\lambda| M_1^2 \sqrt{2^2} \bar{q} \sqrt{2} + \cdots + \frac{|\lambda|^n}{n!} M_1^{(n+1)} \sqrt{(n+1)^{(n+1)}} (\bar{q})^n (\sqrt{2})^n + \cdots$$

où la série du second membre est absolument convergente. Pour évaluer une borne supérieure de $|Q(s, t, \lambda)|$, nous sommes ramenés au problème traité au § 27 quand nous avons majoré $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right)$. Désignons par $\overline{Q}$ la borne supérieure de $|Q(s, t, \lambda)|$ qui sera calculée comme au § 27.

Ceci posé, nous pouvons écrire :

$$\int_{-1}^{+1} \Gamma^2 \, dt = \int_{-1}^{+1} \left[G(x, t) + \frac{Q(x, t, \lambda)}{D(\lambda)} \right]^2 q^2(t) dt < \left(M_1 + \frac{\overline{Q}}{D(\lambda)} \right)^2 \int_{-1}^{+1} q^2 dt,$$

soit :

$$\int_{-1}^{+1} \Gamma^2 \, dt < \left(M_1 + \frac{\overline{Q}}{D(\lambda)} \right)^2 (\bar{q})^2,$$

inégalité valable pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$

2° Examinons maintenant comment $y'_n(x)$ converge vers $y'(x)$.

L'expression $[y_n(x) - y(x)]$ solution de (15) est une intégrale nulle pour $x = \pm 1$ de l'équation différentielle suivante :

$$\text{(18)} \qquad \frac{d}{dx}[I(x)(y'_n - y')] = -q(x)I(x)(y_n - y) - R_n(x)I(x),$$

où l'on a : $I(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p dx}$, (voir § 34).

On a déjà remarqué au paragraphe cité ci-dessus que $I(x)$ est une fonction continue *supérieure à zéro*. Intégrons (18), il vient :

$$\text{(19)} \quad y'_n - y' = -\frac{1}{I(x)} \int_{-1}^{x} q(x)I(x)(y_n - y) dx - \frac{1}{I(x)} \int_{-1}^{x} R_n(x)I(x) dx + \frac{C_n}{I(x)},$$

où la constante C_n dépend évidemment de n.

Nous disons que : $\lim\limits_{n \to \infty} C_n = 0$. En effet :

Remarquons que de (19) on déduit :

$$C_n = I(-1)[y'_n(-1) - y'(-1)].$$

Dérivons (15) par rapport à x et faisons ensuite $x = 1$; on a :

$$(20)\quad \begin{cases} y'_n(-1) - y'(-1) + \lambda \displaystyle\int_{-1}^{+1} [G'_x(x, t)]_{x=-1} \cdot q(t)[y_n(t) - y(t)]dt \\ \qquad = -\displaystyle\int_{-1}^{+1} [G'_x(x, t)]_{x=-1} \cdot R_n(t)dt; \end{cases}$$

Comme nous avons :

$$G(x, t) = K(x, t)e^{\int_{x_0}^{x} pdx} = K(x, t)I(x),$$

il vient :

$$G'_x(x, t) = K(x, t)p(x)I(x) + K'_x(x, t)I(x).$$

Le noyau $K(x, t)$ est défini au § 34 (équations (6)), et on a

$$K(x, t)_{x=-1} = 0.$$

D'autre part, on vérifie immédiatement qu'on a :

$$[K_x(x, t)]_{x=-1} = -\frac{\Phi(1, t)}{\Phi(+1, -1)} \cdot \frac{1}{I(-1)},$$

d'où finalement :

$$[G'_x(x, t)]_{x=-1} = -\frac{\Phi(1, t)}{\Phi(+1, -1)}.$$

Remarquons que la fonction $\Phi(1, t) = \displaystyle\int_t^{+1} \frac{ds}{I(s)}$, continue, bornée, décroissante (voir § 34) est supérieurement bornée pour $-1 \leqslant t \leqslant +1$ par $\Phi(+1, -1)$; on a donc :

$$|[G'_x(x, t)]_{x=-1}| \leqslant 1.$$

On déduit donc de (20) :

$$(21)\quad \begin{cases} |y'_n(-1) - y'(-1)| < |\lambda| \cdot \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant +1} |y_n - y| \sqrt{2}\sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{+1} q^2(t)dt} \\ \qquad + \sqrt{2}\sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{+1} R_n^2(t)dt}. \end{cases}$$

Comme y_n converge uniformément vers y et que $\displaystyle\int_{-1}^{+1} R_n^2 dt$ tend vers zéro, il est évident que $y'_n(-1)$ tend vers $y'(-1)$ avec $\frac{1}{n}$, donc que C_n tend vers zéro.

Revenons à l'équation (19) ; désignons respectivement par h et h' les bornes inférieures et supérieures de $I(x)$, $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$; on a :

$$(22) \quad \begin{cases} | y'_n(x) - y'(x) | < \dfrac{h'}{h} \displaystyle\int_{-1}^{+1} |q(x)| \times | y_n - y | \, dx \\ \qquad + \dfrac{h'}{h} \displaystyle\int_{-1}^{+1} | R_n | \, dx + \dfrac{| C_n |}{h} ; \end{cases}$$

d'où :

$$| y'_n(x) - y'(x) | < \max_{-1 \leqslant x \leqslant +1} | y_n - y | \cdot \frac{h'}{h} \sqrt{2} \sqrt{\int_{-1}^{+1} q^2(x) dx}$$
$$+ \frac{h'}{h} \sqrt{2} \sqrt{\int_{-1}^{+1} R_n^2 dx} + \frac{| C_n |}{h} ;$$

on voit donc ainsi que *la convergence uniforme de $y_n(x)$ vers $y(x)$ entraine celle de $y'_n(x)$ vers $y'(x)$.*

3° Nous considérons maintenant $y''_n(x)$:

On a :

$$y''_n - y'' + p(y'_n - y') + q(y_n - y) = - R_n$$

d'où :

$$y''_n - y'' | \leqslant | R_n | + | p | \times | y'_n - y' | + | q | \times | y_n - y |.$$

Elevons au carré les deux membres de l'inégalité précédente, et intégrons de -1 à $+1$; le calcul montre d'emblée que puisque y_n et y'_n convergent uniformément respectivement vers y et y' pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$, l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (y''_n - y'')^2 dx \quad \text{tend vers zéro avec} \quad \frac{1}{n}.$$

Donc $y''_n(x)$ converge en moyenne quadratique vers y'' quand $n \to \infty$.

4° Conclusion. — Soit l'équation différentielle linéaire

$$y'' + py' + qy = f$$

ayant par hypothèse une solution unique définie sur le segment $(-1, +1)$, nulle pour $x = \pm 1$, et telle que les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ soient de carré sommable sur le segment $(-1, +1)$.

La solution approchée $y_n(x) = \sum_0^n a_k^{(n)}(1 - x^2)x^k$ obtenue par la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire telle que les coefficients $a_k^{(n)}$ rendent minima l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - (y''_n + py'_n + qy_n)]^2 \, dx,$$

répond aux conditions suivantes :

a) *la fonction polynomale* $y_n(x)$ *et sa dérivée* $y'_n(x)$ *convergent sur le segment* $(-1, +1)$ *fermé uniformément, respectivement vers* $y(x)$ *et* $y'(x)$ *qui, vu les hypothèses formulées sur* p, q, f, *sont continues et à variation bornée.*

b) *la dérivée seconde* $y''_n(x)$ *de* $y_n(x)$ *converge en moyenne quadratique vers* $y''(x)$ *qui est de carré sommable.*

CHAPITRE VII

MÉTHODE DES MOMENTS.
INTÉGRATION APPROCHÉE DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM

I. — GÉNÉRALITÉS. ÉTUDE D'UN PROBLÈME PARTICULIER ET EXTENSION D'UN THÉORÈME DE TRICOMI.

§ 38. Objet de la question. Sur un problème particulier. — Dans l'introduction, nous avons exposé en quoi consiste la *méthode des moments* appliquée à l'intégration approchée, et nous avons attiré l'attention sur le fait qu'elle généralise la méthode de W. Ritz ainsi que celle des moindres carrés.

Nous avons donné des indications sur les principaux travaux qu'elle a suscités et nous avons précisé le point de vue auquel nous nous plaçons.

Nous considérons donc une équation de Fredholm :

$$(1)\qquad L(y) = y(x) + \lambda\int_{-1}^{-1} K(x,s)y(s)ds = f(x)$$

ayant sur le segment $(-1, +1)$ une solution *unique*, $D(\lambda) \neq 0$; on calcule la solution approchée d'ordre n, à savoir :

$$y_n = \sum_0^n a_k^{(n)} x^k,$$

en écrivant que les $a_k^{(n)}$ annulent les $n+1$ moments

$$(2)\qquad \int_{-1}^{+1} [L(y_n) - f(x)]x^i dx, \qquad i = 0,1, \cdots n.$$

On est ainsi conduit au système algébrique linéaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues $a_k^{(n)}$, suivant :

$$(3)\qquad \int_{-1}^{+1} L(y_n)x^i dx = \int_{-1}^{+1} f(x)x^i dx, \qquad i = 0,1, \cdots n.$$

Sous réserve de certaines hypothèses que nous ferons sur $K(x, s)$ et sur $f(x)$, nous étudierons la nature de la convergence de y_n vers y.

Nous rappelons à ce sujet le résultat de Krawtchouck (C.-R., 1929, t. 188, p. 978), à savoir :

Soit la solution approchée

$$y_m = a_0 + a_1 \cos \pi x + \cdots + a_m \cos m\pi x$$

obtenue en annulant les moments

$$\int_0^1 [L(y_m) - f(x)] \cos i\pi x \cdot dx, \qquad i = 0,1 \cdots m$$

relatifs à l'équation

$$L(y) = y(x) + \lambda \int_0^1 K(x,s)y(s)ds = f(x);$$

si $y(x)$ a une *dérivée d'ordre supérieur au premier*, alors on a :

$$\lim_{m \to \infty} y_m = y.$$

Nous donnerons un résultat beaucoup plus général, ne faisant pas intervenir l'ordre de dérivation de y et mettant en évidence la nature de la convergence de y_n vers y, ce qui résultera de la comparaison de y_n avec le développement direct d'ordre n, Y_n, de y en série de polynômes de Legendre.

Or, au cours de cette étude nous aurons à considérer le problème suivant que nous traiterons d'abord ; la question de la convergence des solutions approchées ne sera examinée qu'ensuite.

PROBLÈME.

a) Soit d'une part l'équation de Fredholm

$$(4) \qquad y(x) + \lambda_0 \int_{-1}^{+1} K(x,s)y(s)ds = f(x)$$

qui, par hypothèse, a une solution unique $(D(\lambda_0) \neq 0)$;

soit, d'autre part, une suite de noyaux $K_n(x, s)$ en nombre infini.

A chaque noyau $K_n(x, s)$, on fait correspondre l'équation

$$(5) \qquad y_n(x) + \lambda_0 \int_{-1}^{+1} K_n(x,s)y_n(s)ds = f(x).$$

b) On suppose que la suite des noyaux $K_n(x, s)$ est telle que les deux intégrales

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [K(x,s) - K_n(x,s)]^2 dxds \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{+1} [K(s,s) - K_n(s,s)]^2 ds$$

forment respectivement quand n tend vers l'infini deux suites ayant zéro pour limite.

c) *Sous les hypothèses* a *et* b, *peut-on trouver un nombre entier positif* N *tel que pour tout entier* $n \geqslant N$ *l'équation* (5) *possède une solution unique, c'est-à-dire que* λ_0 *ne soit pas un zéro du dénominateur* $D^n(\lambda)$ *de la résolvante relative au noyau* $K_n(x, s)$?

La réponse à cette question peut être déduite de la généralisation d'un théorème de Tricomi.

§ **39. Généralisation d'un théorème de Tricomi.** 1° *Résultat de Tricomi.* — Tricomi (¹) donne le résultat suivant :

Soient les deux équations de Fredholm

$$y(x) + \lambda \int_0^1 K(x,s)y(s)ds = f(x) \tag{6}$$

$$y^*(x) + \lambda \int_0^1 K^*(x,s)y^*(s)ds = f(x) \tag{7}$$

telles que par hypothèse, on a :

$$|K(x,s)| < M, \quad |K^*(x,s)| < M \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant {}^x_s \leqslant +1,$$
$$|K(x,s) - K^*(x,s)| < \varepsilon,$$

M et ε étant deux nombres positifs, fixes.

Si $D(\lambda)$ et $D^*(\lambda)$ désignent les dénominateurs respectifs des résolvantes relatives aux noyaux $K(x, s)$ et $K^*(x, s)$,

$$|D(\lambda) - D^*(\lambda)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} n^{n/2}[(M+\varepsilon)^n - M^n]. \tag{8}$$

Nous nous proposons de donner *deux nouvelles inégalités* répondant à des hypothèses plus générales que celles de Tricomi.

2° *Première extension du résultat de Tricomi.*

Soient les deux équations de Fredholm :

$$y(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x) \tag{9}$$

$$y^*(x) + \lambda \int_a^b K^*(x,s)y^*(s)ds = f(x) \tag{10}$$

dont les noyaux répondent aux conditions (²) suivantes :

$$\text{(I)} \quad \int_a^b K^2(x,s)ds < H^2, \qquad \text{(I)}' \quad \int_a^b K^{*2}(x,s)ds < H^2, \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

(¹) TRICOMI : *Atti Lincei* ; vol. XXXIII, 1er semestre, p. 483.

(²) Sur ces hypothèses : LEBESGUE. — *Bull. soc. Math. de France*, 1908, t. XXXVI, § 9.

$$\text{(II)} \int_a^b K^2(x,s)K^2(s,y)ds < H^4, \quad \text{(II)}' \int_a^b K^{*2}(x,s)K^{*2}(s,y)ds < H^4, \quad \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ a \leqslant y \leqslant b \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \int_a^b K^2(s,s)ds < H^2, \quad \text{(III)}' \int_a^b K^{*2}(s,s)ds < H^2$$

$$\text{(IV)} \begin{cases} \displaystyle\int_a^b [K(x,s) - K^*(x,s)]^2 ds < \eta^2, & (a \leqslant x \leqslant b) \\ \displaystyle\int_a^b [K(x,s) - K^*(x,s)]^2 \times [K(s,y) - K^*(s,y)]^2 ds < \eta^4, & \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ a \leqslant y \leqslant b \end{cases} \\ \displaystyle\int_a^b [K(s,s) - K^*(s,s)]^2 ds < \eta^2; \end{cases}$$

les nombres H et η sont fixes.

Les hypothèses (I), (II), (III) d'une part et (I)', (II)', (III)' d'autre part donnent un sens à $D(\lambda)$ et $D^*(\lambda)$ dont les développements convergent pour toute valeur de λ.

Les hypothèses (IV) sont suffisantes pour permettre de construire une majoration de $D(\lambda) - D^*(\lambda)$ ayant une forme analogue à celle donnée en (8) ci-dessus par Tricomi.

Nous allons démontrer qu'on a : (pour $b - a > 1$) :

$$\text{(11)} \quad | D(\lambda) - D^*(\lambda) | < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} \sqrt{n^n} \cdot (b-a)^{\frac{3n}{4}} [(H + \eta)^n - H^n];$$

(pour $b - a \leqslant 1$ l'inégalité reste valable en y faisant $(b-a)^{\frac{3n}{4}} = 1$).

En effet, on a :

$$D(\lambda) = 1 + \lambda \int_a^b K(s_1, s_1) ds_1 + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 \cdots s_n \\ s_1 \cdots s_n \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_n + \cdots$$

d'où :

$$\text{(13)} \begin{cases} | D(\lambda) - D^*(\lambda) | < | \lambda | \displaystyle\int_a^b | K(s_1, s_1) - K^*(s_1, s_1) | ds_1 + \cdots \\ \cdots + \dfrac{|\lambda|^n}{n!} \displaystyle\int_a^b \cdots \int_a^b \left| K\begin{pmatrix} s_1 \cdots s_n \\ s_1 \cdots s_n \end{pmatrix} - K^*\begin{pmatrix} s_1 \cdots s_n \\ s_1 \cdots s_n \end{pmatrix} \right| ds_1 \cdots ds_n + \cdots \end{cases}$$

Ecrivons :

$$\text{(14)} \begin{cases} \Delta_n = K\begin{pmatrix} s_1 \cdots s_n \\ s_1 \cdots s_n \end{pmatrix} - K^*\begin{pmatrix} s_1 \cdots s_n \\ s_1 \cdots s_n \end{pmatrix} \\ = \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) \cdots K(s_1, s_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ K(s_n, s_1) \cdots K(s_n, s_n) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} K^*(s_1, s_1) \cdots K^*(s_1 s_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ K^*(s_n, s_1) \cdots K^*(s_n, s_n \end{vmatrix}, \end{cases}$$

et posons $K(x, s) = K^*(x, s) + \delta(x, s)$. Portons cette expression

de $K(x, s)$ dans le premier déterminant de Δ_n ; décomposant ce déterminant en déterminants d'ordre n, on voit que Δ_n est constitué par une somme de déterminants de *types suivants* :
déterminants à $n - p$ colonnes en K^*, à p colonnes en δ, que nous notons par lesymbole Δ_{n-p}^p ;

il y aura dans la formation de Δ_n :

n déterminants de type Δ_{n-1}^1

$\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}$ déterminants de type Δ_{n-2}^2

etc...

Désignons par : $\max.\displaystyle\int_a^b \cdots \int_a^b |\Delta_{n-p}^p| \, ds_1 \ldots ds_n$, une borne supérieure de toutes les intégrales telles que $\displaystyle\int_a^b \cdots \int_a^b |\Delta_{n-p}^p| \, ds_1 \ldots ds_n$; on aura nécessairement :

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_a^b \cdots \int_a^b |\Delta_n| \, ds_1 \cdots ds_n \leqslant n \cdot \max \int_a^b \cdots \int_a^b |\Delta_{n-1}^1| \, ds_1 \cdots ds_n \\
&\qquad + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \cdot \max \int_a^b \cdots \int_a^b |\Delta_{n-2}^2| \, ds_1 \cdots ds_n + \cdots \\
&\qquad \cdots + \max \int_a^b \int_a^b |\Delta_0^n| \, ds_1 \cdots ds_n.
\end{aligned}
\right.
$$

Evaluation de : $\max \displaystyle\int_a^b \cdots \int_a^b |\Delta_{n-p}^p| \, ds_1 \ldots ds_n$.

Considérons un déterminant de type Δ_{n-p}^p, par exemple celui-ci :

$$
(\Delta_{n-p}^p)_\alpha = \begin{vmatrix} K^*(s_1, s_1) \cdots K^*(s_1, s_{n-p}) \delta(s_1, s_{n-p+1}) \cdots \delta(s_1, s_n) \\ K^*(s_n, s_1) \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad \delta(s_n, s_n) \end{vmatrix} ;
$$

le fait que nous considérons tel ou tel déterminant de type Δ_{n-d}^p n'enlève rien à la généralité du raisonnement qui va suivre.

Posons :

$$
\begin{aligned}
S_i &= K^{*2}(s_1, s_i) + \cdots + K^{*2}(s_n, s_i), \qquad & i &= 1, 2, \cdots n - p ; \\
U_l &= \delta^2(s_1, s_l) + \cdots + \delta^2(s_n, s_l), \qquad & l &= n - p + 1, \cdots n.
\end{aligned}
$$

En vertu du théorème de M. Hadamard, on a .

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \cdots \int_a^b |(\Delta_{n-p}^p)_\alpha| \, ds_1 \cdots ds_n \\
&\qquad \leqslant \int_a^b \cdots \int_a^b \sqrt{S_1 \times \cdots \times S_{n-p} \times U_{n-p+1} \times \cdots \times U_n} \, ds_1 \cdots ds_n,
\end{aligned}
$$

d'où compte tenu de l'inégalité de Schwarz :

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b \cdots \int_a^b |(\Delta_{n-p}^p)_\alpha| \, ds \cdots ds_n \\ \displaystyle\leqslant \sqrt{\int_a^b \cdots \int_a^b S_1 \times \cdots \times S_{n-p} ds_1 \cdots ds_n} \times \sqrt{\int_a^b \int_a^b U_{n-p+1} \times \cdots \times U_n ds_1 \cdots ds_n} \end{array}\right.$$

Considérons :

$$I_S = \int_a^b \cdots \int_a^b S_1 \times \cdots \times S_{n-p} ds_1 \cdots ds_n,$$

l'élément différentiel de I_S est un produit de $n - p$ facteurs dont chacun est une somme de n termes ; le développement de $S_1 \times \ldots \times S_{n-p}$ conduit donc à une somme de n^{n-p} expressions (produits de $n - p$ facteurs) de la forme :

$$P = K^{*2}(s^1, s_1) \times \cdots \times K^{*2}(s^{n-p}, s_{n-p}),$$

où $s^1, \ldots\ldots, s^{n-p}$ désignent symboliquement un groupe de $n - p$ variables prises parmi les n variables $s_1 \ldots, s_n$, et ceci avec ou sans répétition des indices ; quant aux variables de droite, $s_1, \ldots, s_{n-p}$ elles sont toutes distinctes.

Désignons par :

$$\max. \int_a^b \cdots \int_a^b P ds_1 \cdots ds_n,$$

une borne supérieure de toutes les intégrales $\int_a^b \cdots \int_a^b P ds_1 \ldots ds_n$. On aura nécessairement :

$$I_S \leqslant n^{n-p}[\max. \int_a^b \int_a^b P ds_1 \cdots ds_n].$$

Nous recherchons donc une majoration de $\int_a^b \cdots \int_a^b P ds_1 \ldots ds_n$ pour tous les produits P.

Considérons dans P, un facteur $K^{*2}(s^i, s_i)$, tel que la variable de droite s_i n'apparaisse comme variable de gauche dans aucun autre facteur.

Dans l'intégrale $\int_a^b \cdots \int_a^b P ds_1 \ldots ds_n$, effectuons l'intégration par rapport à s_i.

Ainsi on introduit une fonction $\varphi(s^i) = \int_a^b K^{*2}(s^i, s_i) \, ds_i < H^2$ (par hypothèse) et appliquant l'inégalité :

$$\left| \int_a^b \cdots \int_a^b f \cdot \varphi \cdot ds_1 \cdots ds_n \right| \leqslant H^2 \int_a^b \cdots \int_a^b |f| \, ds_1 \cdots ds_n,$$

valable pour $|\varphi| \leqslant H^2$, on a :

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n \text{ fois}} P ds_1 \cdots ds_n = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n-1 \text{ fois}} K^{*2}(s^1, s_1) \cdots \\
&\cdots K^{*2}(s^{i-1}, s_{i-1}) K^{*2}(s^{i+1}, s_{i+1}) \cdots K^{*2}(s^{n-p}, s_{n-p}) \varphi(s^i) \times ds_1 \cdots ds_{i-1} ds_{i+1} \cdots ds_n \leqslant \\
&\leqslant H^2 \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n-1 \text{ fois}} K^{*2}(s^1, s_1) \cdots K^{*2}(s^{i-1}, s_{i-1}) K^{*2}(s^{i+1}, s_{i+1}) \cdots \\
&\cdots K^{*2}(s^{n-p}, s_{n-p}) ds_1 \cdots ds_{i-1} ds_{i+1} \cdots ds_n
\end{aligned}
\right.
$$

Au cas où on aurait $s^i = s_i$, il n'y aurait rien de changé au résultat, puisque par hypothèse, on a :

$$\int_a^b K^{*2}(s, s) ds < H^2.$$

Donc toutes les fois qu'un facteur K^{*2} est tel que sa variable de droite ne figure pas comme variable de gauche dans d'autres facteurs, on peut le remplacer dans le second membre de l'inégalité ci-dessus par la constante H^2, l'ordre de l'intégrale multiple diminuant corrélativement d'une unité. Ceci reste encore vrai si $s^i \equiv s_i$ ne figure pas dans un des autres facteurs.

Pour le produit P on procèdera à l'élimination de tous les facteurs K^{*2} répondant à cette condition.

Il pourra se présenter des cas où quoique la variable de droite d'un facteur K^{*2} figurera à gauche dans d'autres facteurs, on pourra procéder à la réduction à la condition de poursuivre l'élimination dans un ordre judicieux :

Pour fixer les idées, prenons un exemple :
soit $n = 9$, $n - p = 5$, et donnons le produit suivant :

$$
\begin{array}{lccccc}
P = & K^{*2}(s_9, s_1) & K^{*2}(s_5, s_2) & K^{*2}(s_6, s_3) & K^{*2}(s_3, s_4) & K^{*2}(s_3, s_5) \\
\text{facteur n}^{\text{o}} & 1 \quad\cdots & 2 \quad\cdots & 3 \quad\cdots & 4 \quad\cdots & 5
\end{array}
$$

La variable de droite de 3 figure à gauche dans 4, celle de droite de 5 figure à gauche dans 2.

Mais en éliminant dans l'intégrale, d'abord les facteurs dans l'ordre 1, 2, 4, les facteurs 3 et 5 pourront être ensuite éliminés car leur variable de droite n'apparaîtra plus à gauche dans d'autres facteurs, ceux-ci ayant disparu.

Il apparaît donc que lorsque dans un produit P on aura procédé à l'élimination de tous les facteurs répondant à la condition ci-dessus précisée, il ne restera plus qu'un groupe de facteurs tels que chaque variable de droite apparaîtra comme variable de gauche dans un autre facteur, et ceci dans les conditions suivantes :

1° le nombre des facteurs restants est *pair* :

chaque variable de droite n'apparaîtra qu'une fois à gauche dans un autre facteur. Le produit sera donc composé de couples tels que :

$$K^{*2}(s^i, s_i)K^{*2}(s_i, s_j),$$

où s_i n'apparaîtra dans aucun autre facteur.

2° le nombre des facteurs restants est *impair* :

on pourra coupler deux à deux comme ci-dessus les facteurs sauf un ; ce dernier pourra d'ailleurs avoir ses variables identiques.

Comme par hypothèse on a :

$$\int_a^b K^{*2}(x, s)K^{*2}(s, y) < H^4 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b K^{*2}(s, s)ds < H^2,$$

on pourra intégrer séparément chaque couple de facteurs ; dans le deuxième cas, le dernier facteur restant sera intégré ensuite.

On fera donc apparaître H^2 *aux lieu et place de chaque facteur* K^{*2}.

D'une façon générale, dans le deuxième membre de l'inégalité majorant $\int_a^b \cdots \int_a^b P ds_1 ... ds_n$, H^2 apparaîtra à la puissance $n - p$.

Supposons pour l'instant $b - a > 1$. — Les intégrales

$$\int_a^b \cdots \int_a^b P ds_1 ... ds_n,$$

seront majorées par celle qui apparaîtra en facteur de $H^{2(n-p)}$, le facteur $(b - a)$ élevé à la plus grande puissance. Ceci se produira lorsqu'on aura à considérer une expression P telle qu'on pourra mettre en évidence le plus grand nombre possible de produits $K^{*2}(s^i, s_i)K^{*2}(s_i, s_j)$.

a) Si $n - p$ *est pair il y a au plus* $\frac{n-p}{2}$ *produits de cette sorte.*

b) Si $n - p$ *est impair il y a au plus* $\frac{n-p-1}{2}$ *produits de cette sorte.*

Dans le cas *a*), $b - a$ apparaîtra à la puissance

$$n - \frac{n-p}{2} = \frac{n+p}{2}.$$

Dans le cas *b*), il y aura en plus des produits de deux facteurs une fonction K^{*2}, de sorte que $b - a$ apparaîtra à la puissance

$$n - \frac{n-p-1}{2} - 1 = \frac{n+p-1}{2}.$$

En résumé, nous aurons pour la majoration de I_S :

$$(18)\quad \begin{cases} \textit{pour } n-p \textit{ pair} : I_S = \int_a^b \cdots \int_a^b S_1 \cdots S_{n-p} ds_1 \cdots ds_n \\ \qquad \leqslant n^{n-p} H^{2(n-p)} (b-a)^{\frac{n+p}{2}} \\ \textit{pour } n-p \textit{ impair} : I_S = \int_a^b \cdots \int_a^b S_1 \cdots S_{n-p} ds_1 \cdots ds_n \\ \qquad \leqslant n^{n-p} H^{2(n-p)} (b-a)^{\frac{n+p-1}{2}} \end{cases}$$

Considérons maintenant

$$J_U = \int_a^b \cdots \int_a^b U_{n-p+1} \times \cdots \times U_n ds_1 \cdots ds_n,$$

vu les hypothèses IV où $K(x, s) - K^*(x, s) = \delta(s, x)$ et compte tenu des raisonnements développés ci-dessus, on voit qu'on peut écrire :

$$(19)\quad \begin{cases} \textit{pour } p \textit{ pair} : J_U = \int_a^b \cdots \int_a^b U_{n-p+1} \times \cdots \times U_n ds_1 \cdots ds_n \\ \qquad \leqslant n^p \eta^{2p} (b-a)^{\frac{2n-p}{2}}, \\ \textit{pour } p \textit{ impair} : J_U = \int_a^b \cdots \int_a^b U_{n-p+1} \times \cdots \times U_n ds_1 \cdots ds_n \\ \qquad \leqslant n^p \eta^{2p} (b-a)^{n-\left(\frac{p+1}{2}\right)}. \end{cases}$$

Dans le produit $I_S \times J_U$, l'exposant maximum de $b - a$ sera $\frac{3n}{2}$. Nous reportant à l'inégalité (16), on aura :

$$\int_a^b \cdots \int_a^b \left| \left(\Delta_{n-p}^p\right)_\alpha \right| ds_1 \cdots ds_n \leqslant \sqrt{n^n} \cdot H^{(n-p)} \eta^p (b-a)^{\frac{3n}{4}}.$$

Le second membre de cette inégalité majore toutes les intégrales de $|\Delta_{n-p}^p|$; il en résulte que d'après (15), on a :

$$\int_a^b \cdots \int_a^b |\Delta_n| \, ds_1 \cdots ds_n \leqslant \sqrt{n^n} \cdot (b-a)^{\frac{3n}{4}} [(H+\eta)^n - H^n],$$

d'où finalement :

$$(20)\qquad |D(\lambda) - D^*(\lambda)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} \sqrt{n^n} (b-a)^{\frac{3n}{4}} [(H+\eta)^n - H^n],$$

inégalité que nous nous proposions d'établir.

On vérifie que la série du second membre converge pour toute valeur de λ.

Pour $0 < b - a \leqslant 1$, l'inégalité reste valable en y faisant $b - a = 1$.

3° *Deuxième extension du résultat de Tricomi.* — Nous considérons encore les équations de Fredholm (9) et (10) dont les noyaux $K(x, s)$ et $K^*(s, x)$ répondent respectivement aux conditions (I), (II), (III) et (I)', (II)', (III)' précisées au début de l'exposé précédent relatif à la première extension du résultat de Tricomi.

Nous ne faisons pas état des conditions (IV) *mais nous formulons les nouvelles hypothèses suivantes* :

$$\text{(V)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^b K^2(x, s)K^{*2}(s, y)ds < H^4 \\ &\int_a^b K^{*2}(x, s)K^2(s, y)ds < H^4 \end{aligned} \right\} \left(a \leqslant {}^x_y \leqslant b.\right)$$

Posant
$$K(x, s) - K^*(x, s) = \delta(x, s)$$
nous démontrons qu'on a l'inégalité suivante :

$$| D(\lambda) - D^*(\lambda) | < \Phi_1(\lambda) \sqrt{\int_a^b \int_a^b \delta^2(x, y)dx\,dy} + \Phi_2(\lambda) \sqrt{\int_a^b \delta^2(x, x)dx}$$

où Φ_1 et Φ_2 sont deux fonctions entières en λ.

En effet : reprenons l'inégalité (13) et la valeur de Δ_n donnée par (14). Nous pouvons écrire :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) \cdots K(s_1, s_{n-1})\delta(s_1, s_n) \\ \cdots\cdots \\ K(s_n, s_1) \cdots\cdots\cdots \delta(s_n, s_n) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K s_1, s_1) \cdots K(s_1, s_{n-2})\delta(s_1, s_{n-1})K^*(s_1, s_n) \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \qquad K^*(s_n, s_n) \end{vmatrix} +$$
$$+ \cdots + \begin{vmatrix} \delta(s_1, s_1)K^*(s_1, s_2) \cdots\cdots K^*(s_1, s_n) \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ \delta(s_n, s_1) \cdots\cdots\cdots K^*(s_n, s_n) \end{vmatrix},$$

où le second membre de l'égalité ci-dessus comporte n déterminants.

Considérons un quelconque de ces n déterminants, soit :

$$(\Delta_n)_k = \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) \cdots K(s_1, s_{k-1})\delta(s_1, s_k)K^*(s_1, s_{k+1}) \cdots K^*(s_1, s_n) \\ \cdots\cdots \\ K(s_n, s_1) \cdots\cdots\cdots \delta(s_n, s_k) \cdots\cdots\cdots K^*(s_n, s_n) \end{vmatrix}$$

On a bien :

$$(21) \quad \int_a^b \cdots \int_a^b |\Delta_n| ds_1 \cdots ds_n \leqslant n \times \max_{k=1,2,\cdots n} \text{ de} \int_a^b \cdots \int_a^b |(\Delta_n)_k| ds_1 \cdots ds_n.$$

Posons :

$$K^2(s_1, s_l) + \cdots + K^2(s_n, s_l) = S_l$$
$$K^{*2}(s_1, s_m) + \cdots + K^{*2}(s_n, s_m) = S^*_m$$
$$\delta^2(s_1, s_k) + \cdots + \delta^2(s_n, s_k) = d_k.$$

L'application du théorème de M. Hadamard sur le maximum d'un déterminant et de l'inégalité de Schwarz donne :

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b \cdots \int_a^b |(\Delta_n)_k| ds_1 \cdots ds_n \leqslant \sqrt{\int_a^b \cdots \int_a^b d_k ds_1 \cdots ds_n} \\ \displaystyle\qquad\qquad \times \sqrt{\int_a^b \cdots \int_a^b S_1 \cdots S_{k-1} S^*_{k+1} \cdots S^*_n ds_1 \cdots ds_n} \end{cases}$$

Pour obtenir une majoration de

$$L = \int_a^b \cdots \int_a^b S_1 \cdots S^*_n ds_1 \cdots ds_n$$

nous voyons en examinant les calculs précédents (1re extension du théorème de Tricomi), et sans qu'il soit nécessaire de les rétablir pour le cas actuel, que les conditions (I), (II), (III), (I)$'$, (II)$'$, (III)$'$, *suivies des hypothèses* (V) permettent dans la majoration de L, de faire apparaître H^2 aux lieu et place de K^2 ou K^{*2}.

On pourra donc appliquer les majorations (18) où on fera $p = 1$ et nous choisirons celle donnant le plus fort exposant de $(b - a)$; on aura donc que n soit pair ou impair et pour $b - a > 1$:

$$L \leqslant n^{n-1} H^{2(n-1)} (b-a)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\int_a^b \cdots \int_a^b d_k ds_1 \cdots ds_n$$

$$= \int_a^b \cdots \int_a^b \left\{ \delta^2(s_1,s_k) + \cdots + \delta^2(s_k,s_k) + \cdots + \delta^2(s_n,s_k) \right\} ds_1 \cdots ds_n$$

$$= (n-1) \int_a^b \int_a^b \delta^2(x,y) dx dy \cdot (b-a)^{n-2} + \int_a^b \delta^2(x,x) dx \cdot (b-a)^{n-1}.$$

D'où finalement compte tenu de (22), l'inégalité (21) devient :

$$\int_a^b \cdots \int_a^b |\Delta_n| ds_1 \cdots ds_n$$

$$\leqslant n \sqrt{(n-1)(b-a)^{n-2} \int_a^b \int_a^b \delta^2(x,y) dx dy + (b-a)^{n-1} \int_a^b \delta^2(x,x) dx}$$

$$\times\, n^{\frac{n-1}{2}} H^{n-1} (b-a)^{\frac{n+1}{4}}.$$

Remarquant que le radical du second membre est de la forme $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leqslant |\alpha| + |\beta|$, nous avons :

$$\int_a^b \cdots \int_a^b |\Delta_n| \, ds_1 \cdots ds_n$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b \delta^2(x,y)dxdy} \times \sqrt{n-1}\sqrt{n^{n+1}} \times \mathrm{H}^{n-1}(b-a)^{\frac{3}{4}(n+1)}$$

$$+\sqrt{\int_a^b \delta^2(x,x)dx} \times \sqrt{n^{n+1}}\,\mathrm{H}^{n-1}(b-a)^{\frac{3n-1}{4}},$$

inégalité encore valable, pour $0 < b - a \leqslant 1$ à condition de remplacer dans le second membre $b - a$ par 1.

Revenant à l'inégalité (13) nous avons :

$$(23) \quad |\mathrm{D}(\lambda)-\mathrm{D}^*(\lambda)| < \Phi_1(\lambda)\sqrt{\int_a^b \int_a^b \delta^2(x,y)dxdy} + \Phi_2(\lambda)\sqrt{\int_a^b \delta^2(x,x)dx}$$

où $\Phi_1(\lambda)$ et $\Phi_2(\lambda)$ sont deux fonctions entières en λ données par les séries absolument convergentes suivantes :

$$\Phi_1(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!}\sqrt{n-1}\sqrt{n^{n+1}}\,\mathrm{H}^{n-1}(b-a)^{\frac{3}{4}(n+1)}$$

$$\Phi_2(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!}\sqrt{n^{n+1}}\,\mathrm{H}^{n-1}(b-a)^{\frac{3n-1}{4}}.$$

§ **40. Solution du problème posé au** § 38. — Soient les deux noyaux $\mathrm{K}(x, s)$ et $\mathrm{K}_n(x, s)$ définis pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$ et pour $-1 \leqslant s \leqslant +1$ et répondant respectivement aux conditions (I), (II), (III) d'une part et (I)', (II)', (III)' d'autre part (cela quel que soit n), et *en outre satisfaisant ensemble à l'hypothèse V* (2°) et 3°) du § 39). On suppose que les noyaux K_n forment une suite infinie ($n = 1, 2, \ldots \infty$) telle qu'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [\mathrm{K}(x,s)-\mathrm{K}_n(x,s)]^2 dxds = \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \delta_n^2(x,s)dxds = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} [\mathrm{K}(x,x) - \mathrm{K}_n(x,x)]^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} \delta_n^2(x,x)dx = 0$$

De ces conditions, il résulte que si on se donne arbitrairement le nombre positif ε on peut trouver N_1 tel que pour tout $n > \mathrm{N}_1$ on ait :

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \delta_n^2(x,y)dxdy < \varepsilon^2,$$

et N_2 tel que pour tout $n > N_2$ on ait :

$$\int_{-1}^{+1} \delta_n^2(x,x)dx < \varepsilon^2;$$

Ces deux inégalités seront valables pour tout $n > N$, N étant le plus grand des nombres N_1 et N_2.

Considérons les $D(\lambda)$ et $D^{(n)}(\lambda)$ relatifs aux deux noyaux K et K_n ; de (23) on a pour $n > N$:

$$| D(\lambda) - D^{(n)}(\lambda) | < [\Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda)]\varepsilon.$$

soient λ_1, λ_2 deux valeurs finies définissant un segment tel qu'on a $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. La somme $\Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda)$ étant une fonction entière, on aura sur le segment (λ_1, λ_2) :

$$| \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda) | < h,$$

où h est un nombre fini positif ne dépendant que de l'intervalle (λ_1, λ_2) considéré.

On aura donc pour $n > N$ et pour $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$:

$$| D(\lambda) - D^{(n)}(\lambda) | \; h\varepsilon;$$

Nous prouvons ainsi la convergence uniforme de $D^{(n)}(\lambda)$ vers $D(\lambda)$ sur le segment (λ_1, λ_2).

Soient maintenant deux zéros consécutifs de $D(\lambda)$, à savoir λ_a, λ_b, $(\lambda_a < \lambda_b)$, tels qu'on a :

$$\lambda_a < \lambda_0 < \lambda_b,$$

λ_0 étant la valeur figurant à l'équation (4) et telle que l'on a $D(\lambda_0) \neq 0$

Sans nuire à la généralité du raisonnement nous supposons que pour λ pris sur (λ_a, λ_b) on a : $D(\lambda) > 0$. On peut donc trouver *deux nombres fixes* α et β tels qu'on a :

$$\lambda_a < \lambda_0 - \beta < \lambda_0 < \lambda_0 + \alpha < \lambda_b.$$

sur l'intervalle $(\lambda_0 - \beta, \lambda_0 + \alpha)$, il existe un nombre positif d inférieur à $D(\lambda)$; on a donc $D(\lambda) > d$ avec $d > 0$.

Comme $D^{(n)}(\lambda)$ converge uniformément vers $D(\lambda)$, on pourra trouver l'entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$ on aura :

$$| D(\lambda) - D^{(n)}(\lambda) | < d,$$

d'où

$$D^{(n)}(\lambda) > D(\lambda) - d$$

et

$$D^{(n)}(\lambda_0) > 0.$$

En résumé :

Pour toute valeur de $n \geqslant \mathrm{N}, \lambda_0$ *ne sera pas un pële de la résolvante du noyau* $\mathrm{K}_n(x, s)$ *de l'équation* (5), *ce que nous voulions prouver.*

II. — INTÉGRATION APPROCHÉE

§ **41. Hypothèses.** — On considère l'équation :

$$\mathrm{L}(y) = y(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \mathrm{K}(x,s) y(s) ds = f(x) \tag{24}$$

répondant aux conditions suivantes :

1° Elle possède une solution *unique* ; on a donc $\mathrm{D}(\lambda) \neq 0$.

2° La fonction $f(x)$ est de carré sommable.

3° Le noyau $\mathrm{K}(x, s)$ défini en chaque point P de coordonnées x, s du domaine rectangulaire fermé défini par $-1 \leqslant x \leqslant +1$ et $-1 \leqslant s \leqslant +1$ est *borné et mesurable* ; si E désigne cet ensemble, l'intégrale $\int_{\mathrm{E}} \mathrm{K}(\mathrm{P}) d\mathrm{P}$ prise au sens de Lebesgue existe.

4° Si $[\mathrm{K}(x, s)]_n^x$ désigne le développement d'ordre n de $\mathrm{K}(x\ s)$ en série de Legendre par rapport à x, on suppose que $\mathrm{K}(x, s)$ satisfait à des conditions telles que $|\,[\mathrm{K}(x, s)]_n^x\,|$ reste bornée supérieurement par un nombre fixe indépendant de n, de x, $(-1 \leqslant x \leqslant +1)$, et de s, $(-1 \leqslant s \leqslant +1)$.

Nous avons détaillé au § 26 des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Nous admettrons donc dans le cas actuel que ces conditions sont réalisées.

5° De l'hypothèse 4) ci-dessus, il résulte que l'expression $|\,[\mathrm{K}(x, s)]_n^x\,|_{x=s}$ est bornée supérieurement par un nombre fixe indépendant de n et de la position du point P quand ce dernier parcourt la diagonale $x = s$ du point $x = s = -1$ au point $x = s = +1$.

Nous supposons en outre qu'on a pour toute valeur s telle que $-1 \leqslant s \leqslant +1$:

$$\lim_{n \to \infty} \cdot [\mathrm{K}(x,s)]_n^x{}_{x=s} = \mathrm{K}(s,s).$$

Ce passage à la limite peut avoir lieu sous des hypothèses simples :

Par exemple : nous avons supposé que les conditions du § 26 sont satisfaites ; admettons en outre que le noyau K(P) est continu partout dans un domaine contenant la diagonale $x = s$ (depuis le point $x = s = -1$, jusqu'au point $x = s = +1$), ce domaine pouvant avoir la frontière suivante :

d'une part, deux parallèles à la diagonale $x = s$, situées de part et d'autre et à distance finie de celle-ci,

d'autre part, les bords du carré d'intégration partant respectivement des points $x = s = -1$ et $x = s = +1$, jusqu'à leurs rencontres avec les deux parallèles à la droite $x = s$.

Ainsi étant donné les hypothèses du § 26 et les théorèmes relatifs à la convergence des séries de Legendre des fonctions à variation bornée, nous serons assurés qu'en tout point $x = s_0$, $s = s_0$, $(-1 \leqslant s_0 \leqslant +1)$, on aura :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ x = s_0}} [K(x, s_0)]_n^x = K(s_0 s_0).$$

(Notre hypothèse entraîne d'ailleurs la convergence uniforme de $[K(x, s_0)]_n^x$ vers $K(s, s_0)$ sur un segment parallèle à l'axe des x, d'ordonnée $s = s_0$, contenant le point $x = s_0$, $s = s_0$, et intérieur au domaine défini précédemment).

§ 42. Formation d'une équation de Fredholm en $y_n - y$. — Nous avons vu au § 38 que la méthode des moments conduit à écrire que la solution approchée $y_n = \sum_0^n a_k^{(n)} x^k$ a ses coefficients $a_k^{(n)}$ déterminés par le système algébrique linéaire de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues $a_k^{(n)}$ suivant :

$$\int_{-1}^{+1} L(y_n) x^i dx = \int_{-1}^{+1} f(x) x^i dx \qquad (i = 0, 1 \cdots n). \tag{25}$$

Une combinaison linéaire remplace le système (25) par :

$$\int_{-1}^{+1} L(y_n) X_i dx = \int_{-1}^{+1} f(x) X_i dx \qquad (i = 0, 1 \cdots n), \tag{26}$$

X étant le symbole des polynômes de Legendre.

Développant en série de Legendre les deux membres de (24), on obtient :

$$Y_n(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} [K(x, s)]_n^x y(s) ds = [f(x)]_n, \tag{27}$$

Du système (26), on tire :

$$\frac{1}{2} \sum_0^n (2j + 1) X_j(x) \int_{-1}^{+1} L(y_n) X_j(t) dt = \frac{1}{2} \sum_0^n (2j + 1) X_j(x) \int_{-1}^{+1} f(t) X_j(t) dt.$$

Comme $y_n(x)$ est un polynôme de degré n et que :

$$\frac{1}{2}\sum_{0}^{n}(2j+1)X_j(x)\int_{-1}^{+1}X_j(t)[\lambda\int_{-1}^{+1}K(t,s)y_n(s)ds]dt = \int_{-1}^{+1}\lambda[K(x,s)]_n^x y_n(s)ds.$$

on a :

$$(28)\qquad y_n(x) + \lambda\int_{-1}^{+1}[K(x, s)]_n^x y_n(s)ds = [f(x)]_n;$$

de (27) et (28), on déduit :

$$(29)\qquad Y_n(x) - y_n(x) + \lambda\int_{-1}^{+1}[K(x, s)]_n^x \times \{ y(s) - y_n(s) \} ds = 0,$$

et de (24) et (28), on a :

$$(30)\quad \begin{cases} y_n - y + \lambda\displaystyle\int_{-1}^{+1}K(x, s)[y_n(s) - y(s)]ds = [f(x)]_n - f(x) + \\ \qquad + \lambda\displaystyle\int_{-1}^{+1}\{ K(x, s) - [K(x, s)]_n^x \} y_n(s)ds = A_n(x). \end{cases}$$

Ces équations (28), (29), (30), étant posées, nous passons à l'examen des conditions de convergence de $y_n(x)$ vers $y(x)$.

§ **43. La solution approchée $y_n(x)$ converge en moyenne quadratique vers $y(x)$.** — Le développement de la démonstration est le suivant : Nous démontrons d'abord que y_n étant solution de (28), l'intégrale $\int_{-1}^{+1} y_n^2 dx$ est bornée supérieurement par un nombre fixe, quel que soit n.

Il faut donc être certain en premier lieu que si $n \to \infty$ l'équation (28) a une solution unique, donc que λ n'est pas un zéro de $D^{(n)}(\lambda)$ relatif au noyau $[K(x, s)]_n^x$ quand n croît indéfiniment.

En outre, comme la résolvante de (28) est $\Gamma_n = \frac{1}{D^{(n)}(\lambda)}D^{(n)}\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ et qu'on a :

$$y_n = [f(x)]_n + \frac{\lambda}{D^{(n)}(\lambda)}\int_{-1}^{+1}D^{(n)}\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)[f(s)]_n ds,$$

on voit que puisque $f(x)$ est de carré sommable, l'intégrale $\int_{-1}^{+1} y_n^2 dx$ sera bornée supérieurement quel que soit n si l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left\{ D^{(n)}\left(\begin{smallmatrix}x\\s\end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) \right\}^2 dxds,$$

est elle-même inférieure à un nombre fixe indépendant de n.

Ainsi, nous serons assuré que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} A_n^2(x)dx$ (où $A_n(x)$ est le terme représentant le second membre de (30) tend vers zéro quand $n \to \infty$, d'où on déduira que $\int_{-1}^{+1} (y - y_n)^2 dx \to 0$ avec $\frac{1}{n}$.

Nous passons maintenant au détail du calcul.

1° *L'équation* (28) *a une solution unique quand* $n \to \infty$.

Ainsi qu'on l'a vu au § 40, il suffit pour que ce résultat existe qu'on ait :

$$(31) \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \{ K(x,s) - [K(x,s)]_n^x \}^2 dxds = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \delta_n^2(x,s)dxds = 0,$$

et

$$(32) \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} \{ K(s,s) - [K(x,s)]_{n\;x=s}^x \}^2 ds = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{+1} \delta_n^2(s,s)ds = 0.$$

Or $K(x, s) = K(P)$, borné, mesurable dans l'ensemble rectangulaire défini par $-1 \leqslant x \leqslant +1$, $-1 \leqslant s \leqslant +1$ est tel que $\int_{-1}^{+1} K^2(P)dP$ existe.

Soit M la borne supérieure de $| K(s, x) |$; si s_i désigne une valeur quelconque s telle que $-1 \leqslant s_i \leqslant +1$, on a :

$$(33) \quad \int_{-1}^{+1} K^2(x, s_i)dx \leqslant 2M^2.$$

Désignons par $\varphi_n(s)$ la *fonction positive*

$$\varphi_n(s) = \int_{-1}^{+1} \{K(x, s) - [K(x, s)]_n^x \}^2 dx;$$

Les fonctions $\varphi_n(s)$ sont bornées dans leur ensemble et compte tenu des propriétés des développements en série de Legendre des fonctions de carré sommable, on a :

$$(34) \quad \begin{cases} \varphi_n(s_i) \geqslant \varphi_{n+1}(s_i) \geqslant \cdots \\ \text{et} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(s_i) = 0; \text{(condition de fermeture)} \end{cases}$$

ceci valable pour s_i *quelconque* sur le segment $(-1, +1)$ fermé.

Par ailleurs, pour n quelconque on a compte tenu de (33) :

$$\varphi_n(s) \leqslant \underset{(-1\leqslant s\leqslant +1)}{\text{max de}:} \int_{-1}^{+1} K^2(x, s)dx = 2M^2.$$

De ce qui précède, on conclut que la suite des fonctions positives et bornées $\varphi_n(s)$, définies pour $-1 \leqslant s \leqslant +1$ *converge en tout point* $s = s_i$, appartenant à l'intervalle considéré et pour $n \to \infty$, *vers une limite unique* qui est égale à zéro.

L'application du théorème relatif au passage à la limite sous le signe $\int$ de l'intégrale de Lebesgue (1) concernant une suite de fonctions bornées permet de conclure qu'on a

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} \varphi_n(s) ds = 0$$

puisqu'en tout point $s = s_i$ on a : $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(s_i) = 0$.

La condition (31) est donc bien vérifiée.

Incidemment, remarquons qu'on a aussi :

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \delta_n^2(x, s) dxds \geqslant \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \delta_{n+1}^2(x, s) dxds \geqslant \cdots,$$

inégalités qui résultent de (34).

En ce qui concerne la condition (32), il résulte des hypothèses du § 41 :

A) que l'expression $\left| [\mathrm{K}(x, s)]_n^x{}_{x=s} \right|$ est bornée supérieurement par un nombre fixe indépendant de n quand le point P parcourt la diagonale $x = s$ depuis le point $x = s = -1$ jusqu'au point $x = s = +1$;

B) *qu'en tout point* $x = s_0$, $s = s_0$ de cette diagonale, on a :

$$\lim_{n \to \infty} [\mathrm{K}(x, s_0)]_n^x{}_{x = s_0} = \mathrm{K}(s_0, s_0).$$

Les fonctions $\delta_n(s, s)$ sont donc bornées dans leur ensemble et ont zéro pour limite quand $\to \infty$, et il en est de même des fonctions $\delta_n^2(s, s)$.

Du théorème relatif au passage à la limite sous le signe $\int$ mentionné ci-dessus, on déduit immédiatement la validité de la condition (32).

2° *L'intégrale* $\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left\{ \mathrm{D}^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right) \right\}^2 dxds$ *est quel que soit n bornée supérieurement par un nombre fixe.*

(1) Voir par exemple : Lavallée-Poussin. Intégrale de Lebesgue. Classes de Baire, etc. Gauthier-Villars, édit. 1916, page 44.

D'après un théorème de Tricomi [1] faisant suite à celui que nous avons étudié au § 39, on sait que si deux noyaux K(x, s), K*(x, s) définis pour $0 \leqslant x \leqslant +1$ et pour $0 \leqslant s \leqslant +1$ sont bornés supérieurement en valeur absolue par un nombre fixe H et tels qu'on a : $| K(x, s) - K^*(x, s) | < h$, on peut écrire :

$$| D\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right) - D^*\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right) | < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^{n-1}}{(n-1)!} n^{\frac{n}{2}} [(H+h)^n - H^n],$$

où la série entière en y converge absolument pour toute valeur de y.

Ce résultat reste encore valable si faute de pouvoir exprimer sous forme précise la valeur h on pose l'inégalité évidente $| K - K^* | < 2H$.

Tout ceci s'étend naturellement au cas où on a $-1 \leqslant x \leqslant +1$, $-1 \leqslant s \leqslant +1$, lorsque K(P) est défini dans le domaine ainsi précisé, moyennant naturellement les rectifications de calcul à effectuer pour obtenir une expression majorante convenable pour ce domaine.

Nous pouvons donc poser :

$$| D^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right) | = | D\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right) | + d(x, s, \lambda)$$

où pour la valeur de λ considérée on a :

$$| d(x, s, \lambda) | < \bar{d},$$

d étant une constante indépendante de x et de s.

On écrit ainsi :

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left\{ D^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right) \right\}^2 dxds \leqslant \left\{ \sqrt{\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left\{ D\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right) \right\}^2 dxds} + \sqrt{\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \bar{d}^2 dxds} \right\}^2$$

L'intégrale $\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left\{ D^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} x \\ s \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right) \right\}^2 dxds$ est donc bornée supérieurement quel que soit n.

D'après ce que nous avons exposé au début du § 43, il en résulte que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} y_n^2 dx$ est aussi supérieurement bornée par un nombre fixe indépendant de n.

3° *L'intégrale* $\int_{-1}^{+1} (y - y_n)^2 dx$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$.

[1] Tricomi. — *Atti Lincei*, vol. XXXIII, 1924, 2e semestre, p. 26.

L'équation (30) donne :

$$y - y_n = A_n(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \Gamma(x, s, \lambda) A_n(s) ds.$$

L'inégalité de Schwarz permet d'écrire :

$$\int_{-1}^{+1} (y - y_n)^2 dx \leqslant \left\{ \sqrt{\int_{-1}^{+1} A_n^2(x) dx} + |\lambda| \sqrt{\int_{-1}^{+1} \left[\int_{-1}^{+1} \Gamma(x, s, \lambda) \cdot A_n(s) ds \right]^2 dx} \right\}^2$$

ou bien :

$$\text{(35)} \quad \int_{-1}^{+1} (y - y_n)^2 dx \leqslant \int_{-1}^{+1} A_n^2(x) dx \times \left\{ 1 + |\lambda| \sqrt{\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Gamma^2(x, s, \lambda) dx ds} \right\}^2$$

De même pour $A_n(x)$ dont l'expression est détaillée en (30), on a :

$$\int_{-1}^{+1} A_n^2(x) dx \leqslant \left\{ \sqrt{\int_{-1}^{+1} \{ [f]_n - f \}^2 dx} + |\lambda| \sqrt{\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \{ K - [K]_n^x \}^2 dx ds} \sqrt{\int_{-1}^{+1} y_n^2 ds} \right\}^2.$$

Posons :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Gamma^2 dx ds = \gamma^2, \qquad \int_{-1}^{+1} \{ [f]_n - f \}^2 dx = \eta_n^2$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \{ K - [K]_n^x \}^2 dx ds = \delta_n^2, \qquad \int_{-1}^{+1} y_n^2 ds < M,$$

M étant un nombre fixe indépendant de n.

On a donc finalement de (35) :

$$\text{(36)} \qquad \int_{-1}^{+1} (y - y_n)^2 dx \leqslant (\eta_n + |\lambda| \delta_n M)^2 (1 + |\lambda| \gamma)^2,$$

où η_n et δ_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

La solution approchée $y_n(x)$ converge donc en moyenne quadratique vers $y(x)$.

§ 44. **Comparaison de $y_n(x)$ avec le développement direct $Y_n(x)$ de $y(x)$ en série de Legendre.** — En appliquant l'inégalité de Schwarz on déduit de l'équation (29) :

$$\text{(37)} \quad | Y_n - y_n | \leqslant |\lambda| \sqrt{\int_{-1}^{+1} \{ [K(x, s)]_n^x \}^2 ds} \sqrt{\int_{-1}^{+1} [y(s) - y_n(s)]^2 ds} ;$$

Vu les hypothèses du § 41, on sait que l'expression $| [K(x, s)]_n^x |$ est supérieurement bornée par un nombre fixe indépendant de n, de x, et de s. Soit $\overline{K}$ ce nombre.

Nous avons alors de (36) et (37) :

$$(38) \qquad | Y_n - y_n | \leqslant | \lambda | \overline{K}\sqrt{2}(\eta_n + | \lambda | \delta_n M)(1 + | \lambda | \gamma),$$

majoration valable pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

L'écart $Y_n(x) - y_n(x)$ *tend donc uniformément vers zéro pour* $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

On peut encore écrire :

$$| y - y_n | < | y - Y_n | + | Y_n - y_n |,$$

d'où de (38) :

$$(39) \quad | y - y_n | < | y - Y_n | + |\lambda | \overline{K}\sqrt{2}(\eta_n + | \lambda | \delta_n M)(1 + | \lambda | \gamma).$$

Si donc, $K(x, s)$ et $f(x)$ remplissent en particulier des conditions telles que $y(x)$ *soit développable en série de Legendre uniformément convergente sur le segment* (α, β) *tel que* $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant +1$, *la solution approchée* $y_n(x)$ *converge uniformément vers* $y(x)$ *sur le segment* (α, β).

§ 45. **Conclusion.** — En résumé :

Sous les hypothèses du § 41, on est assuré que la solution approchée

$$y_n(x) = \sum_0^n a_k^{(n)} x^k,$$

de l'équation de Fredholm

$$y + \lambda \int_{-1}^{+1} K(x, s) y(s) ds = f(x),$$

(solution approchée obtenue par la méthode des moments) converge en moyenne quadratique vers $y(x)$.

En outre, $Y_n(x)$ désignant le développement direct d'ordre n de $y(x)$ en série de Legendre, on sait que l'expression $Y_n(x) - y_n(x)$ converge uniformément vers zéro pour $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

Par ailleurs, si l'équation de Fredholm est telle que $Y_n(x)$ converge uniformément vers $y(x)$ sur le segment (α, β), $(-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant +1)$, alors $y_n(x)$ converge uniformément vers $y(x)$ sur (α, β).

En dernier lieu l'inégalité (39) donne une majoration de l'écart $| y(x) - y_n(x) |$ en fonction de l'écart $| y - Y_n |$ et d'un terme complémentaire dont les éléments sont calculables. Ainsi peut-on connaître l'approximation obtenue par une solution approchée d'ordre n.

TABLE DES MATIÈRES

DEUXIÈME PARTIE

INTÉGRATION APPROCHÉE

Chapitre V

Méthode des moindres carrés. Intégration approchée de l'équation de Fredholm

Chapitre VI

Méthode des moindres carrés. Intégration approchée de l'équation différentielle linéaire du second ordre

Chapitre VII

Méthode des Moments. Intégration approchée de l'équation de Fredholm.

Saint-Amand (Cher), France. — Imprimerie R. Bussière. — 15-5-1937